

ELEMENTI DI PROBABILITA' E STATISTICA

[Appunti di Esercizi]

A CURA DI ALESSANDRO PAGHI

PROFESSORE: Giuseppe Bevilacqua (<http://www3.diism.unisi.it/people/person.php?id=86>)

LINK AL CORSO:

<http://www3.diism.unisi.it/FAC/index.php?bodyinc=didattica/inc.insegnamento.php&id=54946&aa=2014>

FREQUENTAZIONE: Sconsigliata.

ES 1 17/09/2014

Sorgente emette 2 particelle. L'istante in cui viene emessa la prima particella e l'intervallo di tempo tra l'emissione delle due particelle sono v.a. indipendenti e distribuite in modo esponenziale di parametro 2λ .

Un detector con tempo morto R rileva le particelle, risultando acceso per un tempo τ .

1) Densità di probabilità della v.a. "istante di emissione dopo seconda particella"

T_1 : Istante emissione particella 1

T_2 : Istante emissione particella 2

$X = T_2 - T_1$: Intervallo di tempo istante emissione particella 1 e particella 2.

$X \sim \exp(2\lambda)$; $T_1 \sim \exp(2\lambda)$

$$p_{T_1}(t_1) = \begin{cases} 2\lambda e^{-2\lambda t_1} & \text{se } t_1 \geq 0 \\ 0 & \text{se } t_1 < 0 \end{cases}$$

$$p_X(x) = \begin{cases} 2\lambda e^{-2\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

T_1 e X sono v.a. indipendenti, quindi:

$$p(t_1, x) = p_{T_1}(t_1) \cdot p_X(x) = 4\lambda^2 e^{-2\lambda(t_1+x)}$$

$$T_2 = T_1 + X$$

$$\begin{aligned} p_{T_2}(t_2) &= \int_0^{t_2} p(t_1, t_2 - t_1) dt_1 = \int_0^{t_2} p(t_1) \cdot p(t_2 - t_1) dt_1 \\ &= \int_0^{t_2} 2\lambda e^{-2\lambda t_1} \cdot 2\lambda e^{-2\lambda(t_2 - t_1)} dt_1 = \int_0^{t_2} 4\lambda^2 e^{-2\lambda t_2} dt_1 \\ &= \left[t_1 4\lambda^2 e^{-2\lambda t_2} \right]_0^{t_2} = t_2 4\lambda^2 e^{-2\lambda t_2} \end{aligned}$$

2) Probabilità che le particelle vengono emesse entro τ .

$$p_{T_2}(t_2 < \tau) = F_{T_2}(t_2) = \int_0^\tau p_{T_2}(t_2) dt_2 = \int_0^\tau t_2 4\lambda^2 e^{-2\lambda t_2} dt_2$$

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx = -2\lambda \int_0^\tau -2\lambda e^{-2\lambda t_2} t_2 dt_2$$

$$f(x) = t_2, \quad f'(x) = 1, \quad g'(x) = -2\lambda e^{-2\lambda t_2}, \quad g(x) = e^{-2\lambda t_2}$$

$$\begin{aligned}
&= -2\lambda \left[t_2 e^{-2\lambda t_2} - \int_0^{t_2} e^{-2\lambda t_2} dt_2 \right]_0^{\tau} = -2\lambda \left[t_2 e^{-2\lambda t_2} - \frac{e^{-2\lambda t_2}}{-2\lambda} \right]_0^{\tau} \\
&= \left[-2\lambda e^{-2\lambda t_2} \cdot t_2 - e^{-2\lambda t_2} \right]_0^{\tau} = 2\lambda e^{-2\lambda \tau} - e^{-2\lambda \tau} + 1 \\
&= 1 - e^{-2\lambda \tau} (2\lambda \tau + 1).
\end{aligned}$$

3) Probabilità che entrambe le particelle vengano trovate dai detector.

$$T_2 < \tau, X > R$$

$$\begin{aligned}
p(t_1+x < \tau, x > R) &= \int_R dx \int_0^{\tau-x} dt_1 4\lambda^2 e^{-2\lambda(t_1+x)} \\
&= \int_R dx \left[-2\lambda e^{-2\lambda(t_1+x)} \right]_0^{\tau-x} = \int_R dx -2\lambda e^{-2\lambda \tau} + 2\lambda e^{-2\lambda x} \\
&= \left[-2\lambda x e^{-2\lambda \tau} - e^{-2\lambda x} \right]_R^{\tau} = -2\lambda \tau e^{-2\lambda \tau} - e^{-2\lambda \tau} + 2\lambda R e^{-2\lambda \tau} + e^{-2\lambda R} \\
&= e^{-2\lambda \tau} [-2\lambda \tau - 1 + 2\lambda R] + e^{-2\lambda R}
\end{aligned}$$

ES. 1 19/11/2014

All'istante $t=0$ un atomo viene eccitato.
L'intervallo di tempo in cui l'atomo resta
eccitato è una v.a. distribuita in modo esponenziale
di parametro λ . In un certo volume sono
presenti N atomi identici ed indipendenti tutti
eccitati contemporaneamente.

1) Dimostrare che la probabilità che un atomo
resti eccitato dopo un tempo pari al doppio della
media è $1/4$.

T v.a.: Intervallo di tempo in cui l'atomo resta
eccitato

$$T \sim \exp(\lambda)$$

$$p_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

$$F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

t^* : media

$$F_T(t^*) = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - e^{-\lambda t^*} = \frac{1}{2} \Rightarrow t^* = \frac{\log(2)}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} P(t > 2t^*) &= P(t > 2 \cdot \frac{\log(2)}{\lambda}) = 1 - F_T(2t^*) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 2 \cdot \frac{\log(2)}{\lambda}}) \\ &= e^{-2 \cdot \log(2)} = 1/4 \quad [] \end{aligned}$$

2) Probabilità che dopo un intervallo di tempo
pari al quadruplo della media vi sia rimasto
un solo atomo eccitato.

$$\begin{aligned} P(t > 4t^*) &= P(t > 4 \cdot \frac{\log(2)}{\lambda}) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 4 \cdot \frac{\log(2)}{\lambda}}) \\ &= e^{-4 \log(2)} = 1/16 \end{aligned}$$

Probabilità che un atomo
generico rimanga eccitato dopo $4t^*$

$$P(1 \text{ solo atomo dopo } 4t^*) = \binom{N}{1} \left(\frac{1}{16}\right)^1 \left(\frac{15}{16}\right)^{N-1}$$

3) Come cominciamo le risposte alle precedenti domande se il parametro λ è a sua volta una v.a. esponenziale di parametro $1/\lambda_0$?

$$\lambda \sim \exp(1/\lambda_0)$$

$$P_\lambda(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_0} \cdot e^{-\frac{1}{\lambda_0} \cdot \lambda} & \text{se } \lambda \geq 0 \\ 0 & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

$$P(\lambda < \lambda < \lambda + d\lambda) = \frac{1}{\lambda_0} \cdot e^{-\frac{1}{\lambda_0} \cdot \lambda} d\lambda$$

$$P(t < T < t + dt) = \lambda e^{-\lambda t} \cdot dt$$

$$P(t < T < t + dt) = \int_0^{+\infty} d\lambda P(t < T < t + dt | \lambda < \lambda < \lambda + d\lambda) \cdot P(\lambda < \lambda < \lambda + d\lambda)$$

(Dal Teorema di Bayes

$$\begin{aligned} &= \int_0^{+\infty} d\lambda \lambda e^{-\lambda t} \cdot dt \cdot \frac{1}{\lambda_0} \cdot e^{-\frac{1}{\lambda_0} \cdot \lambda} d\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{\lambda_0} \cdot e^{-\lambda t - \frac{1}{\lambda_0} \cdot \lambda} d\lambda dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{\lambda_0} e^{-\lambda(t + \frac{1}{\lambda_0})} d\lambda dt = \frac{1}{\lambda_0} dt \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda(t + \frac{1}{\lambda_0})} d\lambda \\ &= \frac{1}{\lambda_0} \cdot dt \left[\lambda \cdot \left(-\frac{1}{t + \frac{1}{\lambda_0}} \right) e^{-\lambda(t + \frac{1}{\lambda_0})} - \int -\frac{1}{t + \frac{1}{\lambda_0}} e^{-\lambda(t + \frac{1}{\lambda_0})} d\lambda \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\lambda_0} \cdot dt \left[\lambda \cdot \left(-\frac{1}{t + \frac{1}{\lambda_0}} \right) e^{-\lambda(t + \frac{1}{\lambda_0})} - \frac{1}{(t + \frac{1}{\lambda_0})^2} \left[e^{-\lambda(t + \frac{1}{\lambda_0})} \right] \right]_0^{+\infty} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\lambda_0} dt \left(\frac{1}{(t + \frac{1}{\lambda_0})^2} \right) = \frac{1}{\lambda_0} \cdot dt \cdot \frac{\lambda_0^2}{(\lambda_0 t + 1)^2} = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 t + 1)^2} dt$$

$$F_T(t) = P(T < t) = \int_0^t \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 t + 1)^2} dt = \left[-(\lambda_0 t + 1)^{-1} \right]_0^t = 1 - \frac{1}{\lambda_0 t + 1}$$

$$F(t^*) = \frac{1}{2} \Rightarrow t^* = \frac{1}{\lambda_0}$$

$$P(t > 2t^*) = 1/3$$

$$P(t > 4t^*) = 1/5$$

ES. 1 08/07/2014

Si lancia una moneta 4 volte.

X v.a.: # volte che esce testa seguita da una croce

1) Valori assunti da X con le probabilità

X : cccc $X=0$

ccct $X=0$

ccct $X=1$

ccct $X=0$

ctcc $X=1$

ctct $X=1$

cttc $X=1$

cttt $X=0$

tccc $X=1$

tccct $X=1$

tctc $X=2$

tctt $X=1$

ttcc $X=1$

ttct $X=1$

tttc $X=1$

tttt $X=0$

$$P(X=0) = q^4 + q^3p + q^2p^2 + qp^3 + p^4$$

$$P(X=1) = 3q^3p + 4q^2p^2 + 3p^3q$$

$$P(X=2) = p^2q^2$$

2) Valore atteso e varianza di X .

$$E[X] = 3p^3q + 4q^2p^2 + 3q^3p + 2p^2q^2$$

$$E[X^2] = 3p^3q + 4q^2p^2 + 3q^3p + 4p^2q^2$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

3) Valore di p che rende $E[X] = 1/2$

$$E[X] = 3p^3q + 6p^2q^2 + 3pq^3 = 1/2$$

$$3pq(p^2 + 2pq + q^2) = 1/2$$

$$3pq \underbrace{(p+q)^2}_1 = 1/2$$

$$3pq = 1/2$$

$$3p(1-p) = 1/2$$

$$3p - 3p^2 - 1/2 = 0$$

$$3p^2 - 3p + 1/2 = 0$$

$$p = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{6} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$$

ES. 2 08/07/2014

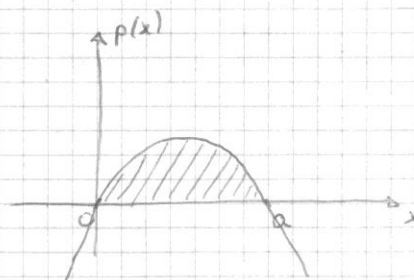
v.a. X distribuita secondo $p(x) = Ax(a-x)$

1) A in funzione di a

$$p(x) = Aax - Ax^2$$

$$\int_0^a p(x) dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^a Aax - Ax^2 dx = 1$$



$$\left[Aa \frac{x^2}{2} - A \frac{x^3}{3} \right]_0^a = 1 \Rightarrow Aa \cdot \frac{a^2}{2} - A \frac{a^3}{3} = 1$$

$$\Rightarrow Aa^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{6}{1} = \frac{6}{a^3}$$

2) $E[X]$, $\text{Var}[X]$, $M_0[X]$

$$E[X] = \int_0^a x p(x) dx = \int_0^a x (Aax - Ax^2) dx$$

$$= \int_0^a Aax^2 - Ax^3 dx = \left[Aa \frac{x^3}{3} - A \frac{x^4}{4} \right]_0^a = Aa \frac{a^3}{3} - A \frac{a^4}{4} = Aa^4 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$$

$$= Aa^4 \cdot \frac{1}{12} = \frac{6}{a^3} \cdot \frac{a^4}{12} = \frac{1}{2} a$$

$$E[X]^2 = \frac{1}{4} a^2$$

$$E[X^2] = \int_0^a x^2 p(x) dx = \int_0^a x^2 (Aax - Ax^2) dx = \left[Aa \frac{x^4}{4} - A \frac{x^5}{5} \right]_0^a$$

$$= \left[Aa \frac{a^4}{4} - A \frac{a^5}{5} \right] = A \left(\frac{a^5}{4} - \frac{a^5}{5} \right) = Aa^5 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{6}{a^3} \cdot \frac{a^5}{20} = \frac{6}{20} a^2$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{3}{10} a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{20}$$

$$p'(x) = 0 \Rightarrow X = \frac{a}{2} \text{ o MODA}$$

3) Momenti di X .

$$E[X^m] = \int_0^a x^m p(x) dx = \int_0^a x^m (Aax - Ax^2) dx = \int_0^a x^m \left(\frac{6}{a^3} x - \frac{6}{a^3} x^2 \right) dx$$

$$= \int_0^a \frac{6}{a^3} x^{m+1} - \frac{6}{a^3} x^{m+2} dx = \left[\frac{6}{a^3} \frac{x^{m+2}}{m+2} - \frac{6}{a^3} \frac{x^{m+3}}{m+3} \right]_0^a =$$

$$\frac{6}{q^2} \cdot \frac{a^{m+2}}{m+2} - \frac{6}{q^3} \cdot \frac{a^{m+3}}{m+3} = a^m \left(\frac{6}{m+2} - \frac{6}{m+3} \right)$$

ES. 1 02/03/14

- Qual'è la probabilità che la radice quadrata del numero estratto sia distante (in valore assoluto) meno di 1 da 7?

$$\begin{aligned} P(|\sqrt{X} - 7| < 1) &= P(-1 < \sqrt{X} - 7 < 1) = P(6 < \sqrt{X} < 8) = P(36 < X < 64) \\ &= \sum_{x=37}^{63} P(X=N) = \frac{27}{90} \end{aligned}$$

- Come cambia la risposta alla domanda precedente se la probabilità di estrarre un # pari è doppia di estrarre un # dispari.

$$P(\text{pari}) = 2P(\text{dispari})$$

$$\text{normalizzazione: } np + m \cdot 2p = 1$$

$$45p + 45 \cdot 2p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{135}$$

$$P(36 < X < 64) = \sum_{\substack{x=35 \\ \text{pari}}}^{63} P(X_{\text{pari}}=N) + \sum_{\substack{x=33 \\ \text{dispari}}}^{63} P(X_{\text{dispari}}=N) = \frac{2}{135} \cdot 13 + \frac{1}{135} \cdot 14 = \frac{40}{135}$$

- Con riferimento alla prima domanda, sia Y la v.a. "Parte intera della radice quadrata del # estratto". Determinare negli assunti e probabilità.

Considerando l'intervallo $36 < X < 64$ le radici quadrate di X hanno parte reale uguale a 6 o 7.

Con parte reale uguale a 6 $\Rightarrow 37 \leq X \leq 48$

Con parte reale uguale a 7 $\Rightarrow 49 \leq X \leq 63$

$$P(\# \text{ estratto } Re=6) = \frac{13}{90} \quad (\text{contando anche } 36)$$

$$P(\# \text{ estratto } Re=7) = \frac{13}{90}$$

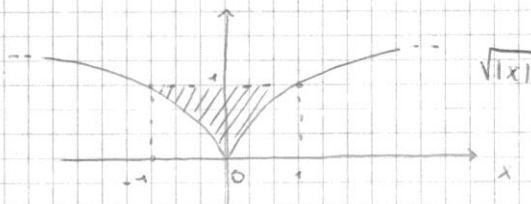
ES 2 13/11/14

X, Y v.a. distribuite congiuntamente in $\sqrt{|x|} < Y < 1$

Dominio:

$$-1 < x < 1$$

$$\sqrt{|x|} < y < 1$$



• Densità di probabilità congiunta $p(x,y)$.

$$2 \cdot \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 dx dy = 2 \cdot \int_0^1 dx \left[y \right]_{\sqrt{x}}^1 = 2 \cdot \int_0^1 (1 - \sqrt{x}) dx$$

$$= 2 \cdot \left[x - \frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = 2 \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3} \leftarrow \text{area integrale}$$

$$p(x,y) = \begin{cases} 1/\text{misura dominio} & (x,y) \in D \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$P(x,y) = \begin{cases} 3/2 & (x,y) \in D \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

• Densità marginali $p_X(x)$ e $p_Y(y)$ e le densità condizionate $p_{X|Y}(x|y)$ e $p_{Y|X}(y|x)$.

$$p_X(x) = \int dy p(x,y) = \int_{\sqrt{x}}^1 dy \frac{3}{2} = \left[\frac{3}{2} y \right]_{\sqrt{x}}^1 = \frac{3}{2} (1 - \sqrt{x}) \quad -1 < x < 1$$

$$p_Y(y) = \int dx p(x,y) = \int_{-y^2}^{y^2} dx \frac{3}{2} = \left[\frac{3}{2} x \right]_{-y^2}^{y^2} = 3y^2 \quad 0 < y < 1$$

$$\sqrt{|x|} < y \Rightarrow |x| < y^2 \Rightarrow -y^2 < x < y^2$$

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{\frac{3}{2}}{3y^2} = \frac{1}{2y^2} \quad -y^2 < x < y^2$$

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}(1-\sqrt{x})} = \frac{1}{1-\sqrt{x}} \quad \sqrt{|x|} < y < 1$$

N.B.: Per essere indipendenti: $p(x,y) = p_X(x) p_Y(y)$.

• $E[X]$, $E[Y]$, matrice delle covarianze.

$$E[X] = \int_{-1}^1 x p_X(x) dx = \int_{-1}^1 x \frac{3}{2} (1 - \sqrt{x}) dx = 0$$

$$E[Y] = \int_0^1 y p_Y(y) dy = \int_0^1 y \cdot 3y^2 dy = \frac{3}{4}$$

MAT. COVARIANZE

$$\begin{pmatrix} \text{Var}(x) & \text{Cov}(x,y) \\ \text{Cov}(y,x) & \text{Var}(y) \end{pmatrix}$$

$$E[X] = 0$$

$$E[Y] = \frac{3}{4}$$

$$E[X^2] = \int_{-1}^1 x^2 p(x) dx = \int_{-1}^1 x^2 \cdot \frac{3}{2} \sqrt{x} dx = \left[\frac{x^3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{7}$$

$$E[Y^2] = \int_0^1 y^2 p(y) dy = \int_0^1 y^2 \cdot 3y^2 dy = \left[3 \cdot \frac{y^5}{5} \right]_0^1 = \frac{3}{5}$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 1/7$$

$$\text{Var}[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = 3/80$$

$$\text{Cov}(X,Y) = \text{Cov}(Y,X) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$E[XY] = \int_{-1}^1 \int_0^1 xy p(x,y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_0^1 xy \cdot \frac{3}{2} dx dy$$

$$= \int_{-1}^1 x dx \left[\frac{y^2}{2} \cdot \frac{3}{4} \right]_0^1 = \int_{-1}^1 x \cdot \frac{3}{8} dx = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1/7 & 0 \\ 0 & 3/80 \end{pmatrix} : \text{matrice Covarianze}$$

ES. 2 02/09/14

$$P(v_x < V_x, v_x < dx, v_y < V_y, v_y < dy, v_z < V_z, v_z < dz) = p(v_x, v_y, v_z) dx dy dz$$

$$p(v_x, v_y, v_z) = A \cdot e^{-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) / (2k_B T)}$$

1) Determinare A in funzione di m, k_B, T.

$$A \cdot e^{-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) / (2k_B T)} = A \cdot e^{-m v_x^2 / 2k_B T} e^{-m v_y^2 / 2k_B T} e^{-m v_z^2 / 2k_B T}$$

assumiamo V generico:

$$A \cdot e^{-m V^2 / 2k_B T} = A \cdot e^{-V^2 / (2k_B T / m)}$$

$$\sigma^2 = \frac{k_B T}{m} \Rightarrow A \cdot e^{-V^2 / 2\sigma^2} \quad \begin{matrix} \mu = \sigma \\ \sigma^2 = \sigma^2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow p(v_x, v_y, v_z) = A \cdot e^{-v_x^2 / 2\sigma^2} e^{-v_y^2 / 2\sigma^2} e^{-v_z^2 / 2\sigma^2}$$

Normalizzare a 3 Gaussiane:

$$\Rightarrow (\underbrace{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma}_1)^3 A \cdot \underbrace{\frac{e^{-v_x^2 / 2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma}}_1 \underbrace{\frac{e^{-v_y^2 / 2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma}}_1 \underbrace{\frac{e^{-v_z^2 / 2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma}}_1$$

Per la normalizzazione è necessario che:

$$(\sqrt{2\pi} \cdot \sigma)^3 A = 1$$

$$A = \frac{1}{\left(\frac{2\pi k_B T}{m}\right)^{3/2}} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}$$

2) E[x] e Var[x] dall'energia cinetica.

$$E_c = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

$$E\left[\frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\right] = \frac{1}{2} m \{E[v_x^2] + E[v_y^2] + E[v_z^2]\}$$

$$E(x^2) = \sigma^2 + \mu^2 \Rightarrow E[\dots] = \frac{1}{2} m \cdot \left\{ \frac{3 k_B T}{m} \right\} = \frac{3}{2} k_B T$$

$$\text{Var}\left[\frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\right] = \frac{1}{2} m \{ \text{Var}[v_x^2 + v_y^2 + v_z^2] \}$$

$$3) E[V_x], E[|V_x|]$$

$$E[V_x] = \mu = 0$$

$$E[|V_x|] = \int_{-\infty}^{+\infty} |V_x| \frac{e^{-V_x^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} dV_x \Rightarrow \mu = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \int_0^{+\infty} V_x \cdot \frac{e^{-V_x^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} dV_x = -\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} -\frac{V_x}{\sigma^2} e^{-V_x^2/2\sigma^2} dV_x$$

$$= -\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-V_x^2/2\sigma^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m}}$$

ES 1 19/06/2014

Scatola contiene 3 palline numerate con 1, 2 e 4.

Si estrae una pallina e si lancia una moneta un numero di volte pari a quello riportato sulla pallina.

X v.a.: # di teste, $P(\text{testa}) = p$

1) Possibili valori assunti da X e le probabilità.

①	c : $\emptyset$	②	cc : $\emptyset$	③	cccc : $\emptyset$
	T : 1		CT : 1		CCCT : 1
			TC : 1		CCTC : 1
			TT : 2		CCTT : 2
					CTCC : 1
					CTCT : 2
					CTTC : 2
					CTTT : 3
					TCCC : 1
					T CCT : 2
					TCTC : 2
					TCTT : 3
					TTCC : 2
					TTCT : 3
					TTTC : 3
					TTTT : 4

$$P(X=\emptyset) = (q + q^2 + q^4) \cdot 1/3$$

$$P(X=1) = (p + 2pq + 4p^3) \cdot 1/3$$

$$P(X=2) = (p^2 + 6p^2q^2) \cdot 1/3$$

$$P(X=3) = 4p^3q \cdot 1/3$$

$$P(X=4) = p^4 \cdot 1/3$$

2) Valore atteso e varianza di X

$$E[X] = \sum_{x_i \neq \emptyset} x_i \cdot P(X=x_i) =$$

$$= \frac{1}{3} (p + 2pq + 4p^3 + 2p^2 + 12p^2q^2 + 12p^3q + 4p^4)$$

$$E[X^2] = \frac{1}{3} (p + 2pq + 4p^3 + 4p^2 + 24p^2q^2 + 36p^3q + 16p^4)$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

3) Probabilità di ottenere al più due teste

$$P(2T-) = P(X=\emptyset) + P(X=1) + P(X=2)$$

ES. 2 19/06/14

X : v.a. continua secondo la densità:

$$p(x) = Ax^2 e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad x > 0$$

1) A in funzione di σ

$$A \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2\sigma^2} dx = 1$$

Riconduco tale forma ad una Gaussiana $(0, \sigma^2)$

Siccome la Gaussiana è simmetrica rispetto a

$\mu=0$, considerando l'intervallo $(-\infty, +\infty)$

divido il valore ottenuto per 2.

$$\frac{\sqrt{2\pi}\sigma A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx$$

Integrale dei momenti pari che nella Gaussiana $(0, \sigma^2)$ vale $\mu_{2m} = (2m-1)!! \sigma^{2m}$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}\sigma A}{2} \cdot \sigma^2 = \frac{A}{2} \sqrt{2\pi} \sigma^3 = 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma^3}$$

2)

Per il valore medio $E[X]$ calcoliamo i momenti dispari.

$$E[X^{2m+1}] = A \int_0^{+\infty} x^{2m+1} x^2 e^{-x^2/2\sigma^2} dx = A \int_0^{+\infty} x^{2(m+1)} x e^{-x^2/2\sigma^2} dx$$

$$\text{con } y = x^2 \Rightarrow dy = 2x dx$$

$$= \frac{A}{2} \int_0^{+\infty} y^{m+1} e^{-y/2\sigma^2} dy$$

$$= \frac{A}{2} (m+1)! (2\sigma^2)^{m+2}$$

$$\text{N.B.: } \int_0^{+\infty} x^m e^{-x/\lambda} dx = m! \lambda^{m+1}$$

$$E[X] = \frac{A}{2} (2\sigma^2)^2 = \frac{A}{2} 4\sigma^4 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma^3} 2\sigma^4 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2\sigma$$

$m=0$

Per la variabile $\text{Var}[X]$ calcoliamo i momenti pari generici:

$$E[X^{2m}] = \int_0^{+\infty} X^{2m} A X^2 e^{-X^2/2\sigma^2} dx$$

Passo alla Gaussiana $(0, \sigma^2)$

$$\frac{A}{2} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} X^{2m} \cdot X^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-X^2/2\sigma^2} dx$$

$$= \frac{A}{2} \sqrt{2\pi} \cdot \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} X^{2(m+1)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-X^2/2\sigma^2} dx$$

$$= \frac{A}{2} \sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot (2(m+1)-1)!! \sigma^{2(m+1)} = \frac{A}{2} \sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot (2m+1)!! \sigma^{2(m+1)}$$

$$E[X^2] = \frac{A}{2} \sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot 3\sigma^{2(2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma^3} \sqrt{2\pi} 3\sigma^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} = 6\sigma^2 \cdot \frac{1}{2} = 3\sigma^2$$

$m=1$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 3\sigma^2 - \frac{2}{\pi} 4\sigma^2 = \sigma^2 \left(3 - \frac{8}{\pi}\right)$$

Per la moda devo imporre $p'=0$.

$$\frac{d}{dx} (A X^2 e^{-X^2/2\sigma^2}) = 0$$

$$A \left(2X e^{-X^2/2\sigma^2} + X^2 \left(-\frac{X}{\sigma^2} \right) e^{-X^2/2\sigma^2} \right) = A X e^{-X^2/2\sigma^2} \left(2 + X \left(-\frac{X}{\sigma^2} \right) \right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma^3} X \cdot e^{-X^2/2\sigma^2} \left(2 - \frac{X^2}{\sigma^2} \right) = 0$$

$$X=0 \text{ ma } X>0 \text{ No!}$$

$$2 - \frac{X^2}{\sigma^2} = 0 \Rightarrow X^2 = 2\sigma^2 \Rightarrow X = \sqrt{2} \cdot \sigma$$

MODA

3) Momenti di X

$$E[X^{2m}] = \frac{A}{2} \sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot (2m+1)!! \sigma^{2(m+1)}$$

$$E[X^{2m+2}] = \frac{A}{2} (m+1)! (2\sigma^2)^{m+2}$$

ES. 1 08/04/2014

Le visite durano:

- 4 minuti, $p(4) = 1/4$ (A)
- 6 minuti, $p(6) = 1/4$ (B)
- 10 minuti, $p(10) = 1/2$ (C)

un paziente arriva e trova 3 persone in fila, una delle quali inizia subito la visita.

1) Durata tempi di attesa e probabilità associate.

$X =$

AAA : 3A 12

BBB : 3B 18

CCC : 3C 30

AAB : 2AB

ABA : 2AB

BAA : 2AB

AAC : 2AC

ACA : 2AC

CAA : 2AC

BBA : 2BA

BAB : 2BA

ABB : 2BA

BBB : 2BC

BCB : 2BC

CBB : 2BC

CCA : 2CA

CAC : 2CA

ACC : 2CA

CCB : 2CB

CBC : 2CB

BCC : 2CB

ABC : ABC

ACB : ABC

CBA : ABC

BCA : ABC

BAC : ABC

CAB : ABC

$$P(X=12) = 1/64$$

$$P(X=14) = 3/64$$

$$P(X=16) = 3/64$$

$$P(X=18) = 3/32 + 1/64 = 7/64$$

$$P(X=20) = 6/32 = 12/64$$

$$P(X=22) = 3/32 = 6/64$$

$$P(X=24) = 3/16 = 12/64$$

$$P(X=26) = 3/16 = 12/64$$

$$P(X=30) = 1/8 = 8/64$$

2) Probabilità che il paziente attenda più di 20 minuti

$$P(X > 20) = 38/64$$

3) Durata media dell'attesa del paziente

$$E[X] = \sum_{x_i} x_i P(X=x_i) = \frac{45}{2}$$

ES. 2 8/04/14

$X \sim \text{unif} \text{ in } [0, 1]$

$$Z = X^2 - yX, \quad 0 < y < 1$$

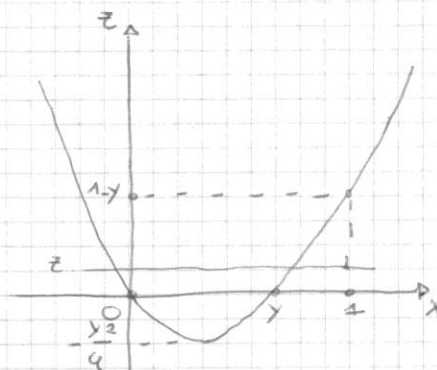
Z per quanto è compreso?

$$X=1 \Rightarrow Z=1-y$$

$$Z'=0 \Rightarrow 2X-y=0 \Rightarrow X=\frac{y}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{2} = -\frac{y^2}{4}$$

$$-\frac{y^2}{4} \leq Z \leq 1-y$$



Dammi me:

$$0 < X < 1$$

$$0 < Y < 1$$

$$-\frac{y^2}{4} \leq Z \leq 1-y$$

1) Densità di probabilità di Z $p_Z(z)$.

$$P(Z \leq z) = P(X^2 - yX \leq z)$$

$$= P(X^2 - yX \leq z) = \begin{cases} P\left(\frac{y - \sqrt{y^2 + 4z}}{2} \leq X \leq \frac{y + \sqrt{y^2 + 4z}}{2}\right) & \text{se } -\frac{y^2}{4} \leq z < 0 \\ P\left(0 \leq X \leq \frac{y + \sqrt{y^2 + 4z}}{2}\right) & \text{se } 0 \leq z \leq 1-y \end{cases}$$

Intersezioni:

$$\begin{cases} Z=z \\ Z=X^2-yX \end{cases} \Rightarrow X^2 - yX - z = 0 \quad X^{1/2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4z}}{2}$$

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = \begin{cases} \int_{\frac{y - \sqrt{y^2 + 4z}}{2}}^{\frac{y + \sqrt{y^2 + 4z}}{2}} dz = \frac{\sqrt{y^2 + 4z}}{2} & \text{se } -\frac{y^2}{4} \leq z < 0 \\ \int_0^{\frac{y + \sqrt{y^2 + 4z}}{2}} dz = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4z}}{2} & \text{se } 0 \leq z \leq 1-y \end{cases}$$

$$p_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y^2 + 4z}} & \text{se } -\frac{y^2}{4} \leq z < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{y^2 + 4z}} & \text{se } 0 \leq z \leq 1-y \end{cases}$$

$$2) E[Z] = E[X^2 - yX] = E[X^2] - yE[X] \Rightarrow$$

$$E[X] = \frac{\alpha + \beta}{2}; \quad E[X^2] = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{2}$$

$$E[Z] = \frac{1}{2} - y \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1-y)$$

ES. 1 13/02/2014

A) un giocatore ha 6 dadi e vince con almeno un sei

B) un giocatore ha 12 dadi e vince con almeno due sei.

1) Probabilità di vittoria di A e B.

$$P(A) = \sum_{k=1}^6 \binom{6}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{6-k} = 1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right)^6 = 0,66$$

$$P(B) = \sum_{k=2}^{12} \binom{12}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{12-k} = 1 - \left[\underbrace{\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{12}}_{P(\emptyset \text{ sei})} + \underbrace{\binom{12}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{11}}_{P(1 \text{ sei})} \right] = 0,64$$

2) A vince se ottiene almeno un pari.

B vince se ottiene almeno un pari e un dispari.

$$P(A) = \sum_{k=1}^6 \binom{6}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{6-k} = 1 - \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^6}_{P(\text{dispari})} = 0,98$$

$$P(B) = 1 - \left[\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{12}}_{P(\text{solo pari})} + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{12}}_{P(\text{solo dispari})} \right] = 0,99$$

3) A vince se ottiene al più un pari.

B vince se ottiene al più un pari e un dispari.

$$P(A) = \sum_{k=0}^1 \binom{6}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{6-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0,1094$$

$$P(B) = \emptyset$$

ES. 1 22/01/2016

Busta contiene semi: Bianchi 40%
Rossi 60%

Si piantano 5 semi.

1) Probabilità che si abbiano 3 piante a fiori rossi.

S: pianta a fiori rossi

$$P(3S) = \binom{5}{3} 0,6^3 0,4^2 = 0,3456$$

2) Probabilità che si abbiano 3 o più piante a fiori bianchi.

S: pianta a fiori bianchi

$$\sum_{k=3}^5 \binom{5}{k} 0,4^k 0,6^{5-k} = P(3S+) = 0,31744$$

3) Quanti semi bisogna piantare affinché la probabilità di avere 1 o + piante a fiori rossi sia maggiore del 80%.

$$P(1B+) > 0,8$$

$$P(1B+) = \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} 0,4^k 0,6^{N-k} = P(\overline{1B-}) = 1 - P_B^N > 0,8$$

$$1 - 0,4^N > 0,8$$

$$0,2 > 0,4^N$$

$$\log_{0,4} (0,2) < N$$

$$N > 1,75 \Rightarrow N = 2.$$

ES. 1 13/11/2013

p : prob. pallina nera

1 scatola

$q = 1-p$: prob. pallina bianca

$N = +\infty$

Si estraggono palline senza rimpiazzare fino a quando non si sono estratte due palline di colore diverso.

X v.a.: # palline estratte

$$\sum_{m=0}^{\infty} z^m = \frac{1}{1-z}; \quad \sum_{m=0}^{\infty} m z^m = \frac{z}{(1-z)^2}; \quad \sum_{m=0}^{\infty} m^2 z^m = z \cdot \frac{z+1}{(1-z)^3}$$

1) Valori assunti da X e $P(X=x_i)$.

$$X=2 \quad P(X=2) = pq \text{ se NB} \quad \text{e} \quad P(X=2) = qp \text{ se BN}$$

$$X=3 \quad P(X=3) = p^2q \text{ se NNB} \quad \text{o} \quad P(X=3) = q^2p \text{ se BBN}$$

$$X=4 \quad P(X=4) = p^3q \text{ se NNNB} \quad \text{o} \quad P(X=4) = q^3p \text{ se BBBN}$$

$$P(X=k+1) = p^k q + q^k p$$

2) Funzione caratteristica di X

$$\begin{aligned} G(t) &= E[e^{itX}] = \sum_{k=1}^{\infty} e^{it(k+1)} (p^k q + q^k p) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{it(k+2)} (p^{k+1} q + q^{k+1} p) \\ &= e^{2it} \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} (p^k q + q^k p) = pq e^{2it} \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} (p^k + q^k) \\ &= pq e^{2it} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{it} p)^k + (e^{it} q)^k = pq e^{2it} \left(\frac{1}{1-e^{it}p} + \frac{1}{1-e^{it}q} \right) \end{aligned}$$

3) $E[X]$, $\text{Var}[X]$ con $p=q=1/2$

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) (p^k q + q^k p) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2) (p^{k+1} q + q^{k+1} p) \\ &= pq \sum_{k=0}^{\infty} (kp^k + kq^k + 2p^k + 2q^k) = pq \left\{ \frac{p}{(1-p)^2} + \frac{q}{(1-q)^2} + 2 \cdot \frac{1}{1-p} + 2 \cdot \frac{1}{1-q} \right\} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^2 (p^k q + q^k p) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)^2 (p^{k+1} q + q^{k+1} p) \\ &= pq \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 + 4k + 4) (p^k + q^k) = pq \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 p^k + k^2 q^k + 4kp^k + 4kq^k + 4p^k + 4q^k) \\ &= pq \left(\frac{p \cdot p+1}{(1-p)^3} + \frac{q \cdot q+1}{(1-q)^3} + 4 \cdot \frac{p}{(1-p)^2} + 4 \cdot \frac{q}{(1-q)^2} + 4 \cdot \frac{1}{1-p} + 4 \cdot \frac{1}{1-q} \right) = 11 \end{aligned}$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 11 - 9 = 2$$

ES. 2 13/11/2013

Spettroscopo Serie i clienti indipendentemente in un tempo aleatorio distribuito in modo esponenziale di parametro λ .

Dato la v.a. T : "tempo necessario per servire 3 clienti".

Utile sapere: $\int_0^{+\infty} x^m e^{-zx} dx = \frac{m!}{z^{m+1}} \quad \operatorname{Re}(z) > 0$

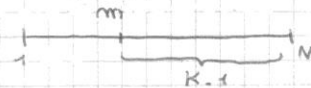
1) Densità di probabilità di T .

ES. 1 26/09/2013

Dai numeri $1, \dots, 20$ vengono estratti 5 numeri senza rimpiazzo.

1) Probabilità che il # più piccolo estratto sia 4.

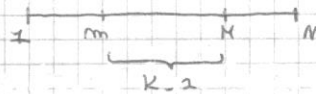
$$P(X = \text{minimo \# estratto}) = \frac{\binom{20-4}{5-2}}{\binom{20}{5}} = \frac{\binom{N-m}{K-1}}{\binom{N}{K}}$$



2) Probabilità che il più piccolo estratto sia 4 e il più grande sia 15

$(X = \text{min \# estratto } 4 \text{ e max \# estratto } 15) =$

$$= \frac{\binom{15-5}{5-2}}{\binom{20}{5}} = \frac{\binom{N-m}{K-2}}{\binom{N}{K}}$$



3) Probabilità più piccolo ≤ 4 e più grande ≥ 15

$P(X) =$

ES. 2 26/09/2013

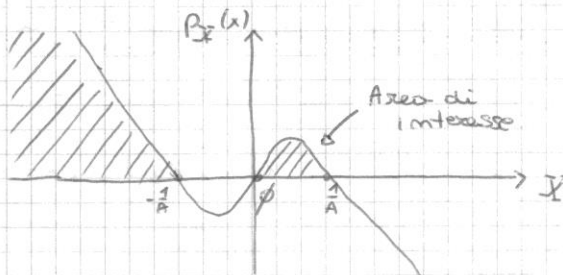
u.a. X ha densità di probabilità $p_X(x) = Nx(1 - A^2x^2)$, $x \geq 0$.

1) Determinare N e A in modo che la media sia $1/5$.

$$Nx(1 - A^2x^2) = 0$$

$$x = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{A^2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{A}$$



$$\int_0^{\frac{1}{A}} Nx(1 - A^2x^2) dx = 1$$

$$\left[\frac{Nx^2}{2} - \frac{NA^2x^4}{4} \right]_0^{\frac{1}{A}} = 1$$

$$N \cdot \frac{1}{2A^2} - N \cdot A^2 \cdot \frac{1}{4A^4} = 1 \Rightarrow \frac{N}{2A^2} - \frac{N}{4A^2} = 1 \Rightarrow \frac{N}{4A^2} = 1$$

$$E[X] = \int_0^{\frac{1}{A}} x^2 \cdot N(1 - A^2x^2) dx = \left[\frac{Nx^3}{3} - \frac{NA^2x^5}{5} \right]_0^{\frac{1}{A}} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow N \cdot \frac{1}{3A^3} - N \cdot \frac{1}{5A^3} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{5N - 3N}{15A^3} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{2N}{15A^3} = \frac{1}{5}$$

$$\begin{cases} \frac{N}{4A^2} = 1 \\ \frac{2N}{15A^3} = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow N = 4A^2 = 4 \cdot \frac{64}{9} = \frac{256}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{8A^2}{15A^3} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{15A}{8} = 5 \Rightarrow A = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$$

2) Momenti di $p_X(x)$, moda e mediana

$$\text{MODA} = \text{MEDIANA} = \frac{1}{2A}$$

$$E[X^n] = \int_0^{\frac{1}{A}} x^n \cdot Nx(1 - A^2x^2) dx$$

3) Densità $p_Y(y)$ della v.a. $Y = \sqrt{X}$

$$Y = \sqrt{X}$$

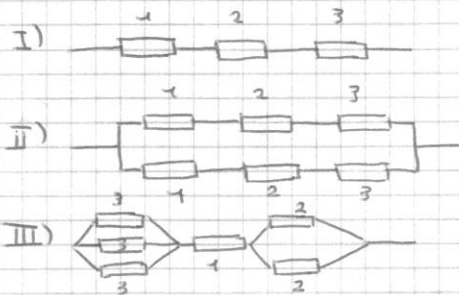
$$F_X(x) = \int_0^x Nx(1 - A^2x^2) dx = \left[\frac{Nx^2}{2} - \frac{NA^2x^4}{4} \right]_0^x = \frac{Nx^2}{2} - \frac{NA^2x^4}{4}$$

$$P(Y \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y) = P(-y^2 \leq X \leq y^2) = F_X(y^2) - F_X(-y^2)$$

ES. 1 12/08/2013

p_i : Probabilità che i -esimo componente funzioni
Componenti indipendenti tra loro.

$$p_1 > p_2 > p_3$$



1) Probabilità funzionamento I.

E_i : Funziona componente i

E : Funziona schema

$$P(E) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = p_1 p_2 p_3$$

2) Probabilità funzionamento II.

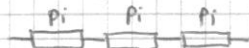
$$E = (E_1 \cap E_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

$$P(E) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) - P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 2p_1 p_2 p_3 - (p_1 p_2 p_3)^2 = p_1 p_2 p_3 (2 - p_1 p_2 p_3)$$

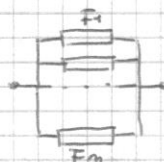
3) Probabilità funzionamento III

$$P(E) = [1 - (1 - p_3)^3] \cdot p_1 \cdot [1 - (1 - p_2)^2]$$

In generale



$$P(E) = \prod p_i$$



$$(F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \dots \cup F_m)^c = F_1^c \cap F_2^c \cap \dots \cap F_m^c$$

$$P[(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_m)^c] = \prod (1 - p_i) = 1 - P(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_m)$$

$$P(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_m) = 1 - \prod (1 - p_i)$$

ES. 2 12/09/2013

b.a. X ha densità di probabilità $p_X(x) = N(1 - A^2x^2)$

1) Determinare N e A in modo che la varianza sia 5.

$$p_X(x) = N - NA^2x^2 = 0 \Rightarrow A^2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{A}$$

$$\int_{-\frac{1}{A}}^{\frac{1}{A}} N(1 - A^2x^2) dx = 1$$

$$\left[Nx - NA^2 \frac{x^3}{3} \right]_{-1/A}^{1/A} = 1$$

$$\frac{N}{A} - NA^2 \cdot \frac{1}{A^3 \cdot 3} - \left(N(-\frac{1}{A}) - NA^2 \cdot \frac{1}{A^3 \cdot 3} \right) = 1$$

$$\frac{N}{A} - \frac{1}{3} \cdot \frac{N}{A} + \frac{N}{A} - \frac{1}{3} \cdot \frac{N}{A} = 1$$

$$\frac{4N}{3A} = 1$$

$$\int_{-\frac{1}{A}}^{\frac{1}{A}} x p_X(x) dx = \int_{-\frac{1}{A}}^{\frac{1}{A}} x N(1 - A^2x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} N - NA^2 \frac{x^4}{4} \right]_{-\frac{1}{A}}^{\frac{1}{A}} =$$

$$= \frac{1}{A^2 \cdot 2} N - NA^2 \cdot \frac{1}{A^4 \cdot 4} - \left\{ \frac{1}{A^2 \cdot 2} N - NA^2 \cdot \frac{1}{A^4 \cdot 4} \right\}$$

$$= \frac{1}{2A^2} N - \frac{N}{A^2 \cdot 4} - \frac{1}{2A^2} N + \frac{N}{A^2 \cdot 4} = 0 = E[X]$$

$$E[X^2] = \int_{-\frac{1}{A}}^{\frac{1}{A}} x^2 N(1 - A^2x^2) dx = \left[\frac{x^3}{3} N - \frac{x^5}{5} N A^2 \right]_{-\frac{1}{A}}^{\frac{1}{A}} =$$

$$= \frac{1}{3A^3} N - \frac{1}{5A^5} NA^2 \left\{ -\frac{1}{3A^3} N + \frac{1}{5A^5} NA^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{3A^3} N - \frac{1}{5A^3} N + \frac{1}{3A^3} N - \frac{1}{5A^3} N = \frac{4N}{15A^3} = 5$$

$$\begin{cases} \frac{4N}{3A} = 1 \Rightarrow N = \frac{3A}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4N}{15A^3} = 5 \Rightarrow \frac{12A}{60A^3} = 5 \Rightarrow \frac{12}{60A^2} = 5 \Rightarrow \frac{60A^2}{12} = \frac{1}{5} \Rightarrow 60A^2 = \frac{12}{5} \Rightarrow A^2 = \frac{12}{5 \cdot 60} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{12}{300}} \quad N = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\frac{12}{300}}$$

2) I momenti μ_n di $p_X(x)$, la moda e la mediana

MODA: $2NA^2x = 0 \Rightarrow x = 0$

MEDIANA:

$$F_X(x) = \int_{-\frac{1}{A}}^x N - NA^2x^2 dx = \left[Nx - NA^2 \frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{1}{A}}^x = Nx - NA^2 \frac{x^3}{3} + \frac{N}{A} - NA^2 \cdot \frac{1}{A^3 \cdot 3}$$

$$= N \left(x - A^2 \frac{x^3}{3} + \frac{1}{A} - \frac{1}{A} \right)$$

$$F_X(x^*) = \frac{1}{2} = N\left(x^* - A^2 \frac{x^{*3}}{3} + \frac{1}{A} - N \cdot \frac{1}{A}\right)$$

... Per simmetria dovrebbe risultare $x^* = 0$.

$$E[X^m] = \int x^m p_X(x) dx = \int_{-\frac{1}{A}}^{\frac{1}{A}} x^m N(1 - A^2 x^2) dx$$

3) da densità $p_Y(y)$ della v.a. $Y = |X|$

$$Y = |X|$$

$$F_X(x) = \int_{-\frac{1}{A}}^x p_X(x) dx = N\left(x - A^2 \frac{x^3}{3} + \frac{1}{A} - \frac{N}{A}\right)$$

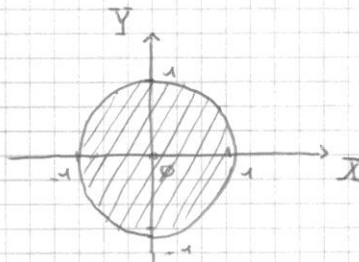
$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = F_X(y) - F_X(-y) \\ &= N\left(y - A^2 \frac{y^3}{3} + \frac{1}{A} - \frac{N}{A}\right) - N\left(-y + A^2 \frac{y^3}{3} + \frac{1}{A} - \frac{N}{A}\right) \neq \emptyset \end{aligned}$$

$$p_Y(y) = \frac{d}{dy}(\emptyset) \neq \emptyset$$

ES. 1 09/04/2013

X, Y v.a. con densità di probabilità congiunta $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ è uniformemente distribuito all'interno del cerchio unitario.

1) Densità di probabilità congiunta $p(x, y)$ e densità marginali $p_X(x)$ e $p_Y(y)$.



$$A = \pi r^2 = \pi$$

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & (X, Y) \in D \\ 0 & (X, Y) \notin D \end{cases}$$

$$D: \begin{aligned} -1 &\leq x \leq 1 \\ -1 &\leq y \leq 1 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

$$p_X(x) = \int dy p(x, y)$$

$$= \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \cdot \frac{1}{\pi} = \left[y \cdot \frac{1}{\pi} \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 - y^2 \\ -\sqrt{1-y^2} &\leq x \leq \sqrt{1-y^2} \end{aligned}$$

Per simmetria $p_Y(y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2}$

2) calcolare $E[X]$, $E[Y]$, $\text{Var}[X]$, $\text{Var}[Y]$

$$E[X] = E[Y] = 0$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \int x^2 p_X(x) dx = \int_{-1}^1 x^2 \cdot \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{4}$$

$$\text{Var}[Y] = \frac{1}{4}$$

3) calcolare $E[XY]$ chiedendo se le v.a. sono indipendenti.

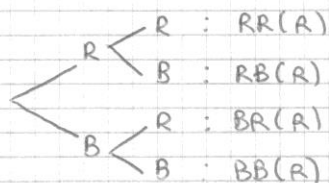
$$E[XY] = \iint dx dy p(x, y) xy = \int_{-1}^1 xy dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$p(x, y) \neq p_X(x) \cdot p_Y(y) \Rightarrow \text{v.a. dipendenti.}$$

ES. 2 09/04/2013

Due scatole A e B contengono entrambe 3 palline rosse e 3 palline nere. Si estrae una pallina da A e si mette in B. Si estrae una pallina da B e si mette in A. Si estrae una pallina da A.

1) Probabilità che l'ultima pallina estratta sia rossa.



$$P(RRR) = 3/6 \cdot 4/7 \cdot 3/6 = 36/252$$

$$P(RBR) = 3/6 \cdot 3/7 \cdot 2/6 = 18/252$$

$$P(BRR) = 3/6 \cdot 3/7 \cdot 4/6 = 36/252$$

$$P(BBR) = 3/6 \cdot 4/7 \cdot 3/6 = 36/252$$

$$P(E) = \frac{126}{252}$$

2) Prima dell'ultima estrazione si consideri la v.a.

X = "Differenza # palline rosse in A e in B". Valori assunti e probabilità.

$$X_0 = X_A - X_B$$

$$P(X_0) = P(RR) + P(BB) = 24/42$$

$$P(X_{0-2}) = P(RB) = 9/42$$

$$P(X_{0+2}) = P(BR) = 9/42$$

3) Valore medio e varianza

$$E[X] = X_0 \cdot \frac{24}{42} + (X_{0-2}) \cdot \frac{9}{42} + (X_{0+2}) \cdot \frac{9}{42}$$

$$E[X^2] = X_0^2 \cdot \frac{24}{42} + (X_{0-2})^2 \cdot \frac{9}{42} + (X_{0+2})^2 \cdot \frac{9}{42}$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

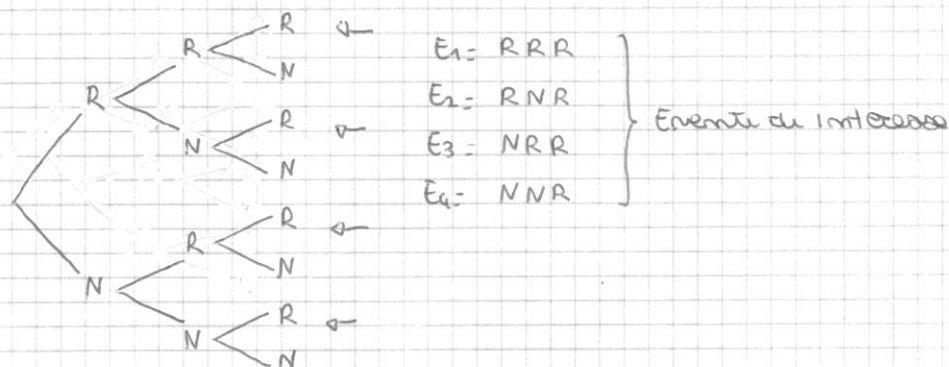
ES. 1 28/06/2013

Scatola A: r_a palline rosse
 h_a palline nere

Scatola B: r_b palline rosse
 h_b palline nere

- i) Si estrae una pallina da A e si mette in B.
- ii) Si estrae una pallina da B e si mette in A.
- iii) Si estrae una pallina da A.

1) Probabilità che la pallina estratta da A sia rossa.



$$P(E_1) = \frac{r_a}{r_a + h_a} \cdot \frac{r_b + 1}{r_b + h_b + 1} \cdot \frac{r_a}{r_a + h_a}$$

$$P(E_2) = \frac{r_a}{r_a + h_a} \cdot \frac{h_b}{r_b + h_b + 1} \cdot \frac{r_a - 1}{r_a + h_a}$$

$$P(E_3) = \frac{h_a}{r_a + h_a} \cdot \frac{r_b}{r_b + h_b + 1} \cdot \frac{r_a + 1}{r_a + h_a}$$

$$P(E_4) = \frac{h_a}{r_a + h_a} \cdot \frac{h_b + 1}{r_b + h_b + 1} \cdot \frac{r_a}{r_a + h_a}$$

$$P(X) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4)$$

2) Prima dopo l'ultima estrazione: X v.a.: Differenza tra le # di palline rosse in A e B. Valori e probabilità assunte.

$$X_0 = r_a - r_b$$

$$X = X_0 \quad P(X = X_0) = \frac{r_a}{r_a + h_a} \cdot \frac{r_b + 1}{r_b + h_b + 1} + \frac{h_a}{r_a + h_a} \cdot \frac{h_b + 1}{r_b + h_b + 1}$$

$$X = X_0 - 2 \quad P(X = X_0 - 2) = \frac{h_a}{r_a + h_a} \cdot \frac{h_b}{r_b + h_b + 1}$$

$$X = X_0 + 2 \quad P(X = X_0 + 2) = \frac{h_a}{r_a + h_a} \cdot \frac{r_b}{r_b + h_b + 1}$$

3) Determinare $E[X]$ e $\text{Var}[X]$ della v.a. precedente.

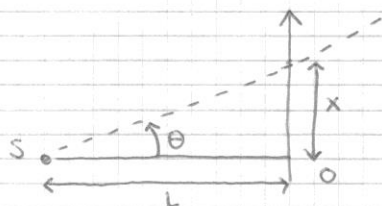
$$E[X] = \sum x p(x) = x_0 \cdot \underbrace{\frac{ra(hb+1) + na nb}{(ra+na)(rb+nb+1)}}_{p_1} + (x_{0-2}) \cdot \underbrace{\frac{ra nb}{(ra+na)(rb+nb+1)}}_{p_2} + \underbrace{\frac{na \cdot rb}{(ra+na)(rb+nb+1)}}_{p_3} (x_{0+2})$$

$$E[X^2] = \sum x^2 p(x) = x_0^2 p_1 + (x_{0-2})^2 p_2 + (x_{0+2})^2 p_3$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \dots$$

ES. 2 28/06/2013

una sorgente S emette particelle in modo anisotropo con densità di probabilità $p_\theta(\theta) = N \cos \theta$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
a distanza L è posto uno schermo rivelatore.



Specificare il valore di N .

$$p_\theta(\theta) = N \cos \theta$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} N \cos \theta d\theta = 1 \Rightarrow N [\sin \theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 \Rightarrow N = \frac{1}{2}$$

$$p_\theta(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \cos \theta$$

1) Probabilità di osservare particelle sullo schermo a distanza compresa tra x e $x+dx$.

$$X = L \tan \theta$$

$$F_\theta(\theta) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{1}{2} \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \sin \theta + c \leq 1$$

$$F_\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 + c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$F_\theta(\theta) = \frac{1}{2} (\sin \theta + 1) \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(L \tan \theta \leq x) = P(\theta \leq \arctan\left(\frac{x}{L}\right)) \\ = \frac{1}{2} (\sin\{\arctan\left(\frac{x}{L}\right)\} + 1) = \frac{1}{2} \left[\frac{x/L}{\sqrt{1+(x/L)^2}} + 1 \right]$$

$$\Rightarrow \sin(\arctan z) = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$p(x) = F'_X(x) = \frac{1}{2L} \cdot \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{L}\right)^2} \right]^{3/2}$$

2) Valore medio, moda e quartili

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx = \phi$$

moda: $x = \phi$

$$X_{1/4} = -L/\sqrt{3} = -X_{3/4}$$

3) Cosa si può dire sulla funzione caratteristica di $p(x)$?

Non esistono momenti μ^n , $n > 1$, quindi $G(k)$ non ammette sviluppo di Taylor in serie centrato in $k=0$.

ES. 1 15/02/2013

Scatola A : 4 palline rosse
2 palline nere

Scatola B : 2 palline rosse
6 palline nere

Si sceglie a caso la scatola e si estrae una pallina.

1) Probabilità che la pallina estratta sia rossa.

$$P(R) = P(R|A) \cdot P(A) + P(R|B) \cdot P(B) \\ = \frac{P(R \cap A)}{P(R)} \cdot P(A) + \frac{P(R \cap B)}{P(R)} \cdot P(B) = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{24}$$

2) Probabilità che la scatola da cui si estrae la pallina sia la A sapendo che la pallina estratta è rossa.

$$P(A|A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} \Rightarrow P(R|A) = \frac{P(R \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(R \cap A) = P(R|A) \cdot P(A) \\ = \frac{P(R|A) \cdot P(A)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{11}{24}} = \frac{4}{12} \cdot \frac{24}{11} = \frac{8}{11}$$

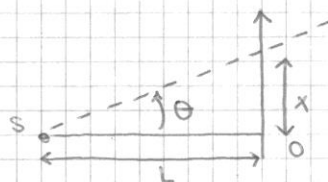
3) Probabilità che la scatola da cui si estrae la pallina sia la B sapendo che la pallina estratta è nera.

$$P(B|N) = \frac{P(B \cap N)}{P(N)} \quad P(N|B) = \frac{P(N \cap B)}{P(B)} \\ = \frac{P(N|B) \cdot P(B)}{P(N)} = \frac{\frac{6}{8} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{13}{24}} = \frac{9}{13} \quad \Rightarrow P(N \cap B) = P(N|B) \cdot P(B)$$

ES. 2 15/02/2013

una sorgente S emette particelle in modo isotropo (in modo uniforme da tutto l'angolo piatto $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$).
A distanza L è posto uno schermo rivelatore.

Determinare:



1) Probabilità di osservare le particelle sullo schermo a distanza compresa tra x e $x+dx$.

$$X = L \cdot \tan \theta$$

$$P_{\theta}(\theta) = \frac{1}{\pi}, \quad F_{\theta}(\theta) = \int \frac{1}{\pi} d\theta = \frac{\theta}{\pi} + c \leq 1$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\pi} + c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$F_{\theta}(\theta) = \frac{\theta}{\pi} + \frac{1}{2}$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(L \tan \theta \leq x) = P(\theta \leq \arctan\left(\frac{x}{L}\right)) = \frac{1}{\pi} \left(\arctan\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$P_X(x) = F'_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{L}{L^2 + x^2}$$

2) Valore medio, moda e quantili:

$$E[X] = \int x P_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\pi} \cdot \frac{L}{L^2 + x^2} dx = \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{L^2 + x^2} dx$$

$$= \frac{L}{2\pi} \left[\ln(L^2 + x^2) \right]_{-\infty}^{+\infty} = +\infty$$

$E[X]$ non esiste

$$P'_X(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-2xL}{(L^2 + x^2)^2} = 0 \Rightarrow -2xL = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ è la moda}$$

$$F(x_{1/4}) = \frac{1}{\pi} \left(\arctan\left(\frac{x_{1/4}}{L}\right) + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x_{1/4}}{L}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\arctan\left(\frac{x_{1/4}}{L}\right) = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{x_{1/4}}{L} = -1 \Rightarrow x_{1/4} = -L$$

$$F(x_{1/2}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\pi} \left(\arctan\left(\frac{x_{1/2}}{L}\right) + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \arctan\left(\frac{x_{1/2}}{L}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$

$$\Rightarrow x_{3/4} = -x_{1/4} = L$$

3) Cosa si può dire sulla funzione caratteristica di $p_X(x)$?

$$G(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{L}{L^2+x^2} dx = ?$$

$$E[X^m] = \int x^m p_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{L}{L^2+x^2} dx = \frac{L}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^m}{L^2+x^2} dx$$

$\Rightarrow$ Come per $E[X]$, i momenti non esistono, quindi $G(k)$ non ammette lo Sviluppo in Serie di Taylor centrato in $k=0$.

ES. 1 15/07/2013

Linea produzione A: 30 % r_A

Linea produzione B: 70 % r_B

Pezzi difettosi linea A: 10 % d_A

Pezzi difettosi linea B: 14 % d_B

1) Probabilità che un componente scelto a caso sia difettoso.

$$P(D) = P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) = 0,3 \cdot 0,1 + 0,7 \cdot 0,14 = 0,128$$

2) Componenti venduti in buste da 10 pezzi tutti prodotti dalla stessa linea. Una busta viene ispezionata e si trova che 1 componente è difettoso. Probabilità che la busta provenga da A.

Su N elementi tutti prodotti sulla stessa linea (A o B) m trovati difettosi

$$P(m \text{ dif. su } N|A) = \binom{N}{m} d_A^m (1-d_A)^{N-m} = 0,4162$$

$$P(m \text{ dif. su } N|B) = \binom{N}{m} d_B^m (1-d_B)^{N-m} = 0,2523$$

$$\begin{aligned} P(m \text{ dif. su } N) &= P(m \text{ dif. su } N|A) P(\text{buste da A}) + P(m \text{ dif. su } N|B) P(\text{buste da B}) \\ &= \binom{N}{m} d_A^m (1-d_A)^{N-m} \cdot r_A + \binom{N}{m} d_B^m (1-d_B)^{N-m} \cdot r_B = 0,3684 \end{aligned}$$

$$P(A|m \text{ dif. su } N) = \frac{P(m \text{ dif. su } N|A) P(A)}{P(m \text{ dif. su } N)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{d_B}{d_A}\right)^m \left(\frac{1-d_B}{1-d_A}\right)^{N-m} \cdot \frac{r_B}{r_A}} = 0,3156$$

3) Probabilità che la busta provenga da B

$$P(B|m \text{ dif. su } N) = \dots = \frac{1}{1 + \left(\frac{d_A}{d_B}\right)^m \left(\frac{1-d_A}{1-d_B}\right)^{N-m} \cdot \frac{r_A}{r_B}} = 0,6845$$

ES. 2 15/07/2013

v.a. X ha densità di probabilità:

$$p_X(x) = C e^{-2|x|}, \quad -\infty < x < +\infty$$

Determinare il valore di C .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C e^{-2|x|} dx = 1 \Rightarrow 2 \int_0^{+\infty} C e^{-2x} dx = 1$$

$$-C \int_0^{+\infty} -2 e^{-2x} dx = 1 \Rightarrow -C \left[e^{-2x} \right]_0^{+\infty} = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$p_X(x) = e^{-2|x|}$$

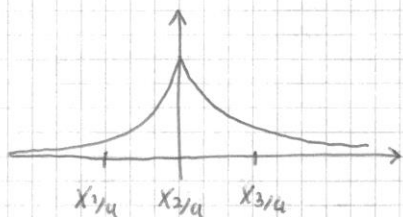
1) Momenti μ_m , moda e quartili.

Può essere utile: $\int_{\phi}^{+\infty} x^m e^{-\lambda x} dx = m! \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{m+1}$

$$\mu_m = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-2|x|} dx = 2 \int_0^{+\infty} x^m e^{-2x} dx$$

$$\begin{cases} \mu_{2m+1} = 0 & \Rightarrow \text{funzione dispari su intervalli pari} \\ \mu_{2m} = 2 \cdot \int_{\phi}^{+\infty} x^{2m} e^{-2x} dx = 2 \cdot (2m)! \frac{1}{2^{2m+1}} = \frac{(2m)!}{2^{2m}} \end{cases}$$

$$p'_X(x) = 0 \Rightarrow -2|x| e^{-2|x|} = 0 \Rightarrow x = 0$$



$$\begin{aligned} \frac{3}{4} &= \int_{-\infty}^{x_{3/4}} p_X(x) dx = \frac{1}{2} \int_{\phi}^{x_{3/4}} e^{-2x} dx \\ &= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} \right) \left[e^{-2x} \right]_{\phi}^{x_{3/4}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left\{ e^{-2x_{3/4}} - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x_{3/4}} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = 0 \\ -\frac{1}{2} e^{-2x_{3/4}} &= -\frac{1}{4} \Rightarrow e^{-2x_{3/4}} = \frac{1}{2} \\ -2x_{3/4} &= -\ln(2) \\ x_{3/4} &= \frac{\ln(2)}{2} = -x_{1/4} \end{aligned}$$

2) Funzione caratteristica $G(k)$

$$\begin{aligned} G(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} e^{-2|x|} dx = \int_{-\infty}^{\phi} e^{ikx+2x} dx + \int_{\phi}^{+\infty} e^{ikx-2x} dx \\ &= \frac{1}{ik+2} \int_{-\infty}^{\phi} (ik+2) e^{x(ik+2)} dx + \frac{1}{-ik+2} \int_{\phi}^{+\infty} (-ik+2) e^{-x(ik+2)} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{ik+2} \left[e^{x(ik+2)} \right]_{-\infty}^0 + \frac{1}{-ik+2} \left[e^{-x(ik+2)} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{ik+2} + \frac{1}{-ik+2} (-1) = \frac{1}{ik+2} - \frac{1}{ik-2} = \frac{ik-2 - ik-2}{-k^2 - ik+2 + ik-2-4} = \frac{4}{k^2+4}$$

3) Dimostrare $p_Y(y)$ data $Y = |X|$

$$Y = |X|$$

Determino per prima cosa $F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(x) dx$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x e^{-2|x|} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x 2e^{2x} dx = \frac{1}{2} [e^{2x}]_{-\infty}^x = \frac{1}{2} e^{2x} & x < 0 \\ \int_{-\infty}^0 e^{2x} dx + \int_0^x e^{-2x} dx = 1 - \frac{1}{2} e^{-2x} & x > 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = F_X(y) - F_X(-y)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} e^{-2y} - \frac{1}{2} e^{-2y} = 1 - e^{-2y}$$

$$p_Y(y) = \frac{d}{dy} (1 - e^{-2y}) = -e^{-2y} (-2) = 2e^{-2y}$$

ES. 1 28/01/2013

una moneta viene lanciata finché si ottiene testa se lancio N . Dopo si continua a lanciarla finché si ottiene un'altra testa se lancio $N+H$.

Utile sapere che:

$$\sum_{m=N_1}^{N_2} x^m = \frac{x^{N_1} - x^{N_2+1}}{1-x} \equiv f(x)$$

$$\sum_{m=N_1}^{N_2} m x^{m-1} = f'(x)$$

1) $P(N \leq 3)$

$$\frac{T}{CT} \Rightarrow P(N \leq 3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \sum_{m=1}^2 p q^{m-1}$$

2) $P(H \leq 4)$

$$\frac{T}{CT} \Rightarrow P(H \leq 4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = \sum_{m=1}^3 p q^{m-1}$$

3) $P(N+H \leq 7)$

$$Z = N+H$$

$$P(Z=z) = \sum_m P(N=m) P(H=z-m) = \sum_{m=1}^{z-1} p q^{m-1} p q^{z-m-1} = \dots = (z-1) p^2 q^{z-2}$$

i limiti su m si seguono da $m \geq 1$ e $z-m \geq 1$

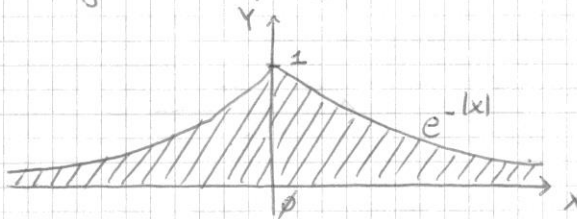
$$P(Z \leq 7) = \sum_{z=2}^6 p^2 (z-1) q^{z-2} = p^2 \sum_{z=1}^5 z q^{z-1} = \dots = q(1 \cdot q^3) + p(1 \cdot 6q^5) = \frac{57}{64}$$

ES. 2 28/04/2013

Due v.a. X e Y sono uniformemente distribuite nella regione di piano $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq y \leq e^{-|x|}$.

1) Densità di probabilità congiunta $p(x, y)$.

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \int_0^{+\infty} dx \int_0^{e^{-x}} dy \\ &= -2 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \\ &= -2 \cdot [e^{-x}]_0^{+\infty} = 2 \end{aligned}$$



$$D: \begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ 0 \leq y \leq e^{-|x|} \end{cases}$$

$$p(x, y) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } x \in D \\ 0 & \text{se } x \notin D \end{cases}$$

2) Densità di probabilità marginali $p_X(x)$, $p_Y(y)$ e condizionate $p_{X|Y}(x|y)$ e $p_{Y|X}(y|x)$.

$$p_X(x) = \int_0^{e^{-|x|}} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

$$p_Y(y) = \int_{\ln y}^{-\ln y} \frac{1}{2} dx = -\ln y$$

$$\begin{aligned} \left(y \leq e^{-|x|} \right) &\Rightarrow \ln y \leq -|x| \Rightarrow -\ln y \geq |x| \\ &\Rightarrow -\ln y \geq x \geq \ln y \end{aligned}$$

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)} = \frac{\frac{1}{2}}{-\ln y} = -\frac{1}{2 \ln y}$$

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p(x, y)}{p_X(x)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} e^{-|x|}} = e^{|x|}$$

3) Valore medio $E[X]$, $E[Y]$ e matrice delle covarianze.

$$E[X] = 0$$

$$E[Y] = \int_0^1 y \cdot (-\ln y) dy = \int_0^1 -y \ln y dy = - \left[\ln y \cdot \frac{y^2}{2} - \int \frac{1}{y} \cdot \frac{y^2}{2} dy \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\text{Var}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = 2 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} x^2 e^{-x} dx = 2! = 2$$

$$\left(\int_0^{+\infty} x^m e^{-\lambda x} dx = \frac{m!}{\lambda^{m+1}} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot (-2my) dy - \frac{1}{16} = \left[2my \cdot \frac{y^3}{3} - \int \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{3} dy \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{16} \\ &= - \left[2my \cdot \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{12} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{16} = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{7}{144} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X, Y] &= E[XY] - E[X] \cdot E[Y] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x dx \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \frac{1}{2} \cdot dy = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7/144 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} e^{-|x|} (-2my) \quad \text{v.a. dipendenti}$$