SISTEMI DINAMICI

[Fotocopie di Appunti]

A CURA DI ALESSANDRO PAGHI

PROFESSORE: Andrea Garulli (http://www3.diism.unisi.it/people/person.php?id=13)

LINK AL CORSO ANNO 2014/2015:
http://www3.diism.unisi.it/FAC/index.php?bodyinc=didattica/inc.insegnamento.php&id=54893&aa=2014

FREQUENTAZIONE: Consigliata.

3) moltiplicazione per un esponenziale

$g(k) = \rho^k \cdot f(k) \qquad \mathcal{Z}[f(k)] = F(z)$

$$\mathcal{Z}[g(k)] = \mathcal{Z}[\rho^k f(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k f(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) \cdot \left(\frac{z}{\rho}\right)^{-k} = F\left(\frac{z}{\rho}\right)$$

Esempio: segnale Esponenziale

$u(k) = \rho^k \cdot 1(k) \qquad \mathcal{Z}[1(k)] = \dfrac{z}{z-1}$

$$\mathcal{Z}[\rho^k \cdot 1(k)] = \left.\frac{z}{z-1}\right|_{z \leftarrow \frac{z}{\rho}} = \frac{z/\rho}{z/\rho - 1} = \frac{z}{z-\rho}$$

4) Moltiplicazione per K

$g(k) = k \cdot f(k) \qquad \mathcal{Z}[f(k)] = F(z)$

$$\mathcal{Z}[k \cdot f(k)] = -z \cdot \frac{dF(z)}{dz}$$

Esempio:

$r_1(k) = k \cdot 1(k)$

$$\mathcal{Z}[k \cdot 1(k)] = -z \cdot \frac{d}{dz} \frac{z}{z-1} = -z \frac{z-1-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$r_2(k) = \frac{k(k-1)}{2} \cdot 1(k) = \frac{1}{2} k^2 \cdot 1(k) - \frac{1}{2} k \cdot 1(k)$$

$$\mathcal{Z}[\underbrace{k^2 \cdot 1(k)}_{k \cdot r_1(k)}] = -z \frac{d}{dz} \frac{z}{(z-1)^2} = -z \cdot \frac{(z-1)^2 - 2(z-1)z}{(z-1)^4}$$

$$= -z \frac{z-1-2z}{(z-1)^3} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$\mathcal{Z}[r_2(k)] = \frac{1}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} - \frac{1}{2} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{1}{2} \frac{z(z+1) - z(z-1)}{(z-1)^3} = \frac{z}{(z-1)^3}$$

In generale:

$$\mathcal{Z}[r_m(k)] = \mathcal{Z}\left[\binom{k}{m} 1(k)\right] = \frac{z}{(z-1)^{m+1}}$$

* Esempio: Segnali sinusoidali

$u(k) = \cos(\omega k) = \dfrac{e^{j\omega k} + e^{-j\omega k}}{2}$

$U(z) = \mathcal{Z}[\cos(\omega k)] = \dfrac{1}{2}\mathcal{Z}[(e^{j\omega})^k] + \dfrac{1}{2}\mathcal{Z}[(e^{-j\omega})^k]$

$= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{z}{z-e^{j\omega}} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{z}{z-e^{-j\omega}} = \dfrac{z(z-e^{-j\omega}) + z(z-e^{j\omega})}{2(z-e^{j\omega})(z-e^{-j\omega})}$

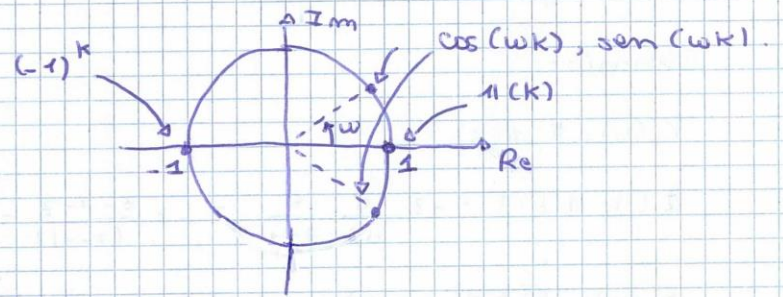
$= \dfrac{z^2 - ze^{-j\omega} + z^2 - ze^{j\omega}}{2(z^2 - e^{j\omega}z - e^{-j\omega}z + 1)} = \dfrac{2z^2 - z(e^{+j\omega}+e^{-j\omega})}{2(z^2 - z(e^{j\omega}+e^{-j\omega})+1)} = \dfrac{z^2 - \cos\omega\cdot z}{z^2 - 2\cos\omega z + 1}$

$\mathcal{Z}[\cos(\omega k)] = \dfrac{z^2 - \cos\omega\cdot z}{z^2 - 2\cos\omega\cdot z + 1}$

poli: $e^{\pm j\omega}$

già in modulo/fase con modulo $= 1$.

$\mathcal{Z}[\mathrm{sen}(\omega k)] = \dfrac{z\,\mathrm{sen}\,\omega}{z^2 - 2\cos\omega\cdot z + 1}$



casi particolari:

$\omega = 0 \Rightarrow 1\!\!1(k)$

$\omega = \pi \Rightarrow \cos(\pi\cdot k) = (-1)^k$

Esempio: Rampe Esponenziali

$f(k) = \rho^k \binom{k}{m}\cdot 1\!\!1(k)$

$m = 1 \quad f(k) = \rho^k \cdot k \cdot 1\!\!1(k)$

$\mathcal{Z}[k\cdot \underbrace{\rho^k\cdot 1\!\!1(k)}_{\frac{z}{z-\rho}}] = -z\dfrac{d}{dz}\dfrac{z}{z-\rho} = -z\dfrac{z-\rho+z}{(z-\rho)^2} = \dfrac{\rho z}{(z-\rho)^2}$

In generale:

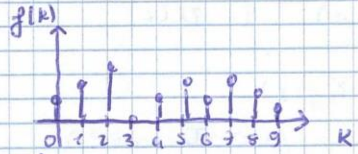
$\mathcal{Z}\left[\rho^k\binom{k}{m}\cdot 1\!\!1(k)\right] = \dfrac{\rho^m z}{(z-\rho)^{m+1}}$

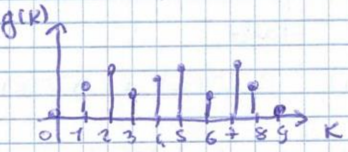
5) Prodotto di convoluzione

Si definisce prodotto di convoluzione dei segnali $f(k)$ e $g(k)$ come

$$p(k) = f(k) * g(k) = \sum_{h=0}^{k} f(h)\, g(k-h)$$

$$P(z) = \mathcal{Z}[f(k) * g(k)] = F(z) \cdot G(z).$$





$p(9) = f(0) \cdot g(9) + f(1) \cdot g(8) + \dots + f(9) \cdot g(0).$

$\vdots$

$p(0) = f(0)\, g(0).$

6) Teorema del valore finale

Se $\lim_{k \to +\infty} f(k)$ $\exists$ finito $\Rightarrow$ $\lim_{k \to +\infty} f(k) = \lim_{z \to 1} (z-1) F(z).$

Il limite esiste finito sse $F(z)$ ha tutti i poli a modulo minore di 1, tranne al più un polo semplice in $z = 1$

CALCOLO DELLE RISPOSTE NEL DOMINIO TRASFORMATO (Z)

Rappr. i/s/o

$x(k+1) = A x(k) + B u(k)$

$y(k) = C x(k) + D u(k)$ — note $u(k)$, $x(0)$

$$\mathcal{Z}[x(k+1)] = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k+1) z^{-k} \underset{h=k+1}{=} \sum_{h=1}^{+\infty} x(h) z^{-(h-1)} =$$

$$= \sum_{h=1}^{+\infty} x(h) z^{-h} \cdot z = z \cdot \sum_{h=1}^{+\infty} x(h) z^{-h} = z \left\{ \underbrace{\sum_{h=0}^{+\infty} x(h) z^{-h}}_{X(z)} - x(0) \cdot z^{-0} \right\}$$

$$= z \cdot X(z) - x(0) z$$

Trasformando le equazioni i/s/o si ha:

$$\begin{cases} z \cdot X(z) - x(0) \cdot z = A \cdot X(z) + B\,U(z) \\ Y(z) = C\,X(z) + D\,U(z) \end{cases}$$

$$z \cdot X(z) - A\,X(z) = z\,x(0) + B\,U(z)$$

$$(zI - A)\,X(z) = z\,x(0) + B\,U(z)$$

$$X(z) = \underbrace{(zI-A)^{-1} \cdot z \cdot x(0)}_{X_e(z)} + \underbrace{(zI-A)^{-1} B \cdot U(z)}_{X_f(z)}$$

Risp. libera nello stato — Risp. forzata nello stato.

$$Y(z) = C(zI-A)^{-1} z\,x(0) + C(zI-A)^{-1} B\,U(z) + D\,U(z)$$

$$= \underbrace{C(zI-A)^{-1} z\,x(0)}_{Y_e(z)} + \underbrace{\left\{ C(zI-A)^{-1} B + D \right\} U(z)}_{Y_f(z)}$$

Risp. libera nell' uscita — Risp. forzata nell' uscita

$$G(z) = C(zI-A)^{-1} B + D.$$

$$Y_f(z) = G(z) \cdot U(z).$$

Supponiamo di avere un segnale $y(k)$, per cui in generale $y(-1), y(-2), \dots, y(-n)$ sono diversi tra loro.

$$\mathcal{Z}[y(k-\ell)] = \sum_{k=0}^{+\infty} y(k-\ell) z^{-k} = y(-\ell) + y(-\ell+1) z^{-1} + y(-\ell+2) z^{-2} + \dots$$
$\ell \in N$
$$\dots + y(0) z^{-\ell} + y(1) z^{-\ell-1} + y(2) z^{-\ell-2} + \dots$$

$$= y(-\ell) + y(-\ell+1) z^{-1} + \dots + y(-1) z^{-\ell+1} + z^{-\ell}\left\{ y(0) + y(1) z^{-1} + y(2) z^{-2} + \dots \right\}$$

$$= y(-\ell) + y(-\ell+1) z^{-1} + \dots + y(-1) z^{-\ell+1} + z^{-\ell}\,Y(z).$$

Rappr. i/o

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m)$$

$$Y(z) + a_1 \left\{ y(-1) + z^{-1} Y(z) \right\} + a_2 \left\{ y(-2) + y(-1) z^{-1} + z^{-2} Y(z) \right\} + \dots +$$
$$+ a_n \left\{ y(-n) + y(-n+1) z^{-1} + \dots + y(-1) z^{-n+1} - z^{-n} Y(z) \right\}$$

$$= b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \dots + b_m z^{-m} U(z).$$

$$\{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}\} Y(z) =$$

$$= -\{a_1 y(-1) + a_2 y(-2) + a_2 y(-1) z^{-2} + \dots + a_n y(-n) + a_n y(-n+1) z^{-1} + \dots + a_n y(-1) z^{-n}\} + \{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}\} U(z).$$

$$Y(z) = \frac{-\{\text{termini che dipendono dalle condizioni iniziali}\}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} +$$

$$+ \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \cdot U(z)$$

Ipotesi: $n \geq m$ (se $n < m$ moltiplicazione per z^m).

$$Y(z) = \underbrace{\frac{c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n}}_{Y_l(z)} +$$

$$+ \underbrace{\frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_m z^{n-m}}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n} \cdot U(z)}_{Y_f(z)}$$

dove i coefficienti c_j, $j = 1, \dots, n$ dipendono dalle condizioni iniziali $y(-1), \dots, y(-n)$

$$Y_f(z) = G(z) \cdot U(z)$$

dove $G(z) = \dfrac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_m z^{n-m}}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n}$.

ANTITRASFORMATA Z

Definizione

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} F(z)\cdot z^{k-1}\,dz$$

dove Γ è un qualunque percorso chiuso nel piano complesso e che contiene i poli di $F(z)$.

Per le funzioni $F(z)$ razionali fratte, la procedura è la stessa adottata per l'antitrasformata di Laplace.

1) Calcolo dei poli;
2) Scomposizione in fratti semplici;
3) antitrasformata dei fratti semplici; (TABELLE).

Problema: Le trasformate Z elementari sono proprie (non strettamente)

$$p^k \rightarrow \frac{z}{z-p} \qquad 1(k) \rightarrow \frac{z}{z-1}$$

La scomposizione in fratti semplici fornisce elementi strettamente propri, del tipo

$$\frac{R_i}{z-p_i} \quad \text{dove } p_i \text{ è il polo i-esimo}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z-p}\right] = ?$$

Due modi:

a) $$\frac{1}{z-p} = \underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{Ritardo di un istante}} \cdot \underbrace{\frac{z}{z-p}}_{\mathcal{Z}^{-1} \downarrow\, p^k} \Rightarrow \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z-p}\right] = p^{k-1}\cdot 1(k-1)$$

b) $$\bar{F}(z) = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z-p} \qquad F(z) = \frac{1}{z-p} = z\cdot\bar{F}(z)$$

Scomposizione in fratti semplici di $\bar{F}(z)$:

$$\bar{F}(z) = \frac{R_1}{z} + \frac{R_2}{z-p} = \frac{-1/p}{z} + \frac{1/p}{z-p}$$

$$F(z) = z\cdot\bar{F}(z) = -\frac{1}{p}\cdot\frac{z}{z} + \frac{1}{p}\cdot\frac{z}{z-p} \Rightarrow f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z-p}\right] = -\frac{1}{p}\delta(k) + \frac{1}{p}p^k\cdot 1(k).$$

In generale il metodo b) consiste nello scomporre in fratti semplici $\frac{F(z)}{z}$:

$$\frac{F(z)}{z} = \sum_{i=1}^{m} \frac{R_i}{z-p_i} \qquad \text{(poli semplici)}$$

da cui:

$$F(z) = \sum_{i=1}^{m} R_i \frac{z}{z-p_i}$$

Funzioni che si trovano nella Tabella (Trasformate elementari)

Esempio:

$$F(z) = \frac{2z^2 - \frac{1}{2}z}{z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}}$$

Poli: $z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6} = 0 \qquad p_{1/2} = \frac{\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} - \frac{4}{6}}}{2} = \frac{\frac{5}{6} \pm \frac{1}{6}}{2} = \begin{cases} 1/2 \\ 1/3 \end{cases}$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{2z - 1/2}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})} = \frac{R_1}{z-1/2} + \frac{R_2}{z-1/3}$$

$$R_1 = \lim_{z \to 1/2} (z - 1/2)\frac{F(z)}{z} = \lim_{z \to 1/2} \frac{2z-1/2}{z-1/3} = \frac{1/2}{1/6} = 3.$$

$$R_2 = \lim_{z \to 1/3} (z - 1/3)\frac{F(z)}{z} = \lim_{z \to 1/3} \frac{2z-1/2}{z-1/2} = \frac{1/6}{-1/6} = -1.$$

$$F(z) = 3 \cdot \frac{z}{z-1/2} - \frac{z}{z-1/3}$$

$$f(k) = \left\{ 3 \cdot \left(1/2\right)^k - \left(1/3\right)^k \right\} \cdot 1(k)$$

Il caso di poli multipli si tratta in modo analogo:

$$F(z) = \frac{\cdots}{(z-p_1)^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot (z-p_r)^{\mu_r}}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{R_{1,1}}{z-p_1} + \frac{R_{1,2}}{(z-p_1)^2} + \ldots + \frac{R_{1,\mu_1}}{(z-p_1)^{\mu_1}} + \ldots$$

$$F(z) = R_{1,1} \cdot \frac{z}{z-p_1} + R_{1,2} \cdot \frac{z}{(z-p_1)^2} + \ldots + R_{1,\mu_1} \cdot \frac{z}{(z-p_1)^{\mu_1}}$$

$p_1^k \qquad k \cdot p_1^{k-1} \qquad \binom{k}{\mu_1-1} \cdot p_1^{k-\mu_1+1} \cdot 1(k)$

MODI NEI SISTEMI LTI A TEMPO DISCRETO

POLI	MODI
$p \in \mathbb{R}$ semplice	$p^k \cdot 1(k)$
$p_{1,2} = \rho e^{\pm j\phi} \in \mathbb{C}$ semplici	$\rho^k \cos(\phi k)$, $\rho^k \sin(\phi k)$
$p \in \mathbb{R}$ molteplicità μ	$p^k \cdot 1(k)$, $k \cdot p^k \cdot 1(k)$, ..., $k^{\mu-1} p^k \cdot 1(k)$
$p_{1,2} = \rho e^{\pm j\phi} \in \mathbb{C}$ molt. μ	$\rho^k \cos(\phi k)$, $\rho^k \sin(\phi k)$ $k\rho^k \cos(\phi k)$, $k\rho^k \sin(\phi k)$ ... $k^{\mu-1}\rho^k \cos(\phi k)$, $k^{\mu-1}\rho^k \sin(\phi k)$
$p = 0$	$\delta(k)$ modi impulsivi

CARATTERE DI CONVERGENZA DEI MODI

1) Modi convergenti sse $|p_i| < 1$ (indipendentemente dalla molteplicità del polo p_i)
2) Modi limitati non convergenti.
   sse $|p_i| = 1$ e p_i $\mu_i = 1$ (polo semplice)
3) In tutti gli altri casi si hanno poli divergenti.

ANALOGIE CON I SISTEMI A TEMPO CONTINUO

1) Risposta Impulsiva e funzione di Trasferimento.

$u(k) = \delta(k) \longrightarrow U(z) = 1$

$Y_f(z) = G(z) \cdot U(z) = G(z)$

$y_F(k) = \underbrace{\mathcal{Z}^{-1}[G(z)]}_{g(k)}$ La Risp. Impulsiva è l'antitrasformata Z della funzione di trasferimento.

Per un generico ingresso $u(k)$, la risposta forzata $y_f(k)$ è il prodotto di convoluzione tra $u(k)$ e la risposta impulsiva $g(k)$.

$$y_f(k) = \sum_{i=0}^{k} g(i)\, u(k-i)$$

2) Interconnessione di sistemi LTI

$$u \longrightarrow \boxed{G(z)} \longrightarrow y$$

Esattamente come nel caso tempo-continuo.

3) Teorema della Risposta in Frequenza

Si consideri un sistema la cui trasformata $G(z)$ ha tutti i poli a modulo minore di 1.

Sia $u(k) = M \cdot \cos(\omega k + \phi)$, allora:

$$y_F(k) = y_T(k) + y_{PERM}(k)$$

dove $\lim_{k \to +\infty} y_T(k) = 0$ (Risposta di Regime Transitorio)

e

$$y_{PERM}(k) = M \cdot |G(e^{j\omega})| \cdot \cos(\omega k + \varphi + \angle G(e^{j\omega}))$$

si chiama risposta di regime permanente.

$$G(e^{j\omega}) = G(z) \Big|_{z = e^{j\omega}}$$

ESERCITAZIONE 2

1)

$x_1(k)$: giocatori che al turno k hanno indovinato

$x_2(k)$: giocatori che al turno k non hanno indovinato

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{1}{3} x_2(k) + \frac{1}{3} u(k) \\ x_2(k+1) = \frac{2}{3} x_1(k) + \frac{2}{3} u(k) \\ y(k) = \frac{1}{3} x_1(k) \end{cases}$$: uomini via che hanno vinto.

al turno k entrano $u(k)$ giocatori.

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \end{bmatrix} x(k) + [0]\, u(k)$$

N.B: non c'è $\dot{x}(k)$ ma $x(k+1)$ perchè siamo nel tempo discreto.

2)

$$G(z) = C(zI - A)^{-1} B + D$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & -1/3 \\ -2/3 & z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{bmatrix} \circ & - \\ | & \end{bmatrix}^{-1} \end{array} = Agg[\quad]^T$$

$(-1)^{i+j} \det(\dots)$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} z & 1/3 \\ 2/3 & z \end{bmatrix}}{z^2 - \frac{2}{9}} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} z^2 + \frac{2}{9} \end{bmatrix}}{z^2 - \frac{2}{9}} = \frac{\frac{1}{9} z + \frac{2}{27}}{z^2 - \frac{2}{9}}$$

$$Y_f(z) = G(z) \cdot U(z) = \frac{\frac{1}{9} z + \frac{2}{27}}{z^2 - \frac{2}{9}} \cdot U(z)$$

$$\left(z^2 - \frac{2}{9}\right) Y_f(z) = \left(\frac{1}{9} z + \frac{2}{27}\right) U(z)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}[z Y(z)] = y(k+1)$$

$$y(k+2) - \frac{2}{9} y(k) = \frac{1}{9} u(k+1) + \frac{2}{27} u(k) \quad i/o$$

3) $u(k) = N \cdot 1(k)$

$$\lim_{k \to +\infty} y_f(k) = ?$$

Poiché $G(z)$ ha tutti i poli a modulo < 1, il limite $\exists$ finito $\rightarrow$ applico il Teorema del valore finale.

$$\lim_{k \to \infty} y_f(k) = \lim_{z \to 1} (z-1) Y_f(z) = \lim_{z \to 1} (z-1) G(z) \cdot U(z)$$

$$= \lim_{z \to 1} \cancel{(z-1)} \frac{\frac{1}{9} z + \frac{2}{27}}{z^2 - \frac{2}{9}} N \cdot \frac{z}{\cancel{(z-1)}} = \frac{\frac{1}{9} + \frac{2}{27}}{1 - \frac{2}{9}} N = \frac{5}{27} \cdot \frac{9}{7} \cdot N = \frac{5}{21} \cdot N$$

Dopo che il gioco si è assestato $\frac{5}{21}$ dei giocatori vincono

α: quota d'ingresso

A regime, a ogni turno incasso $N\alpha$ e quindi devo ripartire $\frac{N\alpha}{2}$ fra i $\frac{5}{21} N$ vincitori.

$$\text{Vincità}: \frac{\frac{N\alpha}{2}}{\frac{5}{21} N} = \frac{21}{10} \alpha$$

In generale se i poli di $G(z)$ hanno tutti modulo < 1, il limite per $k \to +\infty$ della risposta al gradino è data da:

$$\lim_{z\to 1} \cancel{(z-1)}\, G(z) \cdot \frac{z}{\cancel{z-1}} = G(1)$$

- guadagno stazionario
- guadagno in continua

ES. 2

$$y(k) - \frac{1}{4} y(k-2) = u(k-1) - u(k-2)$$

$$y(k) + a_1\, y(k-1) + \underset{\substack{\uparrow \\ n=2}}{a_2}\, y(k-2) = b_0\, u(k) + b_1\, u(k-1) + b_2\, u(k-2)$$

1)

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k)$$

$$y(k+2) - \frac{1}{4} y(k) = u(k+1) - u(k)$$

i)

$$x(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \end{bmatrix} \quad ?$$

$$x_1(k+1) = y(k+1) = x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = \frac{1}{4} \underbrace{y(k)}_{x_1(k)} + \underset{\substack{\uparrow \\ ?}}{u(k+1)} - \underbrace{u(k)}_{u(k)}$$

non ci può essere.

ii)

$$x(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) - u(k) \end{bmatrix} \quad ?$$

$$\begin{cases} x_1(k+1) = y(k+1) = x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = y(k+2) - u(k+1) = \frac{1}{4} y(k) - u(k) = \frac{1}{4} x_1(k) - u(k) \\ y(k) = x_1(k) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

2)

$$y(k) - \frac{1}{4} y(k-2) = u(k-1) - u(k-2)$$

$y_e(k)$ relativo a $y(-1) = 1$ e $y(-2) = 0$.

$$y(k) - \frac{1}{4} y(k-2) = 0 \implies y(k) = \frac{1}{4} y(k-2)$$

$y(0) = 1/4 \; y(-2) = 0$

$y(1) = 1/4 \; y(-1) = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$

$y(2) = 1/4 \; y(0) = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0$

$y(3) = 1/4 \; y(1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

Usiamo la rappr. i/s/o.

$Y_e(z) = C(zI - A)^{-1} \cdot z \cdot x(0)$

$x(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) - u(k) \end{bmatrix} \rightarrow x(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) - u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

$Y_e(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & -1 \\ -\frac{1}{4} & z \end{bmatrix}^{-1} z \begin{bmatrix} 0 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \frac{\frac{1}{4} z}{z^2 - \frac{1}{4}}$

$\frac{Y_e(z)}{z} = \frac{R_1}{z - \frac{1}{2}} + \frac{R_2}{z + \frac{1}{2}} = \frac{R_1(z + \frac{1}{2}) + R_2(z - \frac{1}{2})}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{2})}$

$R_1 z + \frac{1}{2} R_1 + R_2 z - \frac{1}{2} R_2 = \frac{1}{4}$

$\begin{cases} R_1 + R_2 = 0 \\ \frac{1}{2} R_1 - \frac{1}{2} R_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$ $\quad R_1 = -R_2 \quad -R_2 = 1/4 \quad R_1 = 1/4 \quad R_2 = -1/4$

$Y_e(z) = \frac{1}{4} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \frac{z}{z + \frac{1}{2}}$

$y_e(k) = \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right\} \cdot 1(k)$

3) $\exists\, u(k) : y_f(k) = y_e(k)$ dell'es. 2 $= \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right\} \cdot 1(k)$. ?

$\Leftrightarrow \exists\, U(z) : G(z) \cdot U(z) = \frac{\frac{1}{4} z}{z^2 - \frac{1}{4}}$?

$y(k) - \frac{1}{4} y(k-2) = u(k-1) - u(k-2)$

$Y(z) - \frac{1}{4} z^{-2} Y(z) = z^{-1} U(z) - z^{-2} U(z)$

$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 - \frac{1}{4} z^{-2}} = \frac{z - 1}{z^2 - 1/4}$

$$\frac{z-1}{\cancel{z^2-\frac{1}{4}}} \cdot U(z) = \frac{\frac{1}{4}z}{\cancel{z^2-\frac{1}{4}}}$$

$$U(z) = \frac{\frac{1}{4}z}{z-1} = \frac{\frac{1}{4}z}{z-1} \Rightarrow u(k) = \frac{1}{4} \cdot 1\!\!1(k\;\;)$$

ANALISI DEI SISTEMI LTI A TEMPO DISCRETO NEL DOMINIO DEL TEMPO.

Nel dominio della Trasformata z:

$$X(z) = (zI - A)^{-1} z\, x(0) + (zI - A)^{-1} B \cdot U(z)$$

$k=0 \Rightarrow x(1) = A x(0) + B u(0)$

$k=1 \Rightarrow x(2) = A x(1) + B u(1) = A^2 x(0) + AB u(0) + B u(1)$

$k=2 \Rightarrow x(3) = A x(2) + B u(2)$

$$= \underbrace{A^3 x(0)}_{x_\ell(k)} + \underbrace{A^2 B u(0) + AB u(1) + B u(2)}_{x_f(k)}$$

k generico $\Rightarrow x(k) = A^k x(0) + A^{k-1} B u(0) + A^{k-2} B u(1) + \dots + AB u(k-2) + B u(k-1)$

$$x(k) = \underbrace{A^k x(0)}_{x_\ell(k)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i)}_{x_f(k)}$$

$A^k = \mathcal{Z}^{-1}[(zI - A)^{-1} z]$ analogia col caso scalare, se $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$

$$\mathcal{Z}[A^k] = \frac{z}{z-A}$$

Esempio:

$x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k)$

$x_2(k+1) = \frac{1}{2} x_2(k)$ $\qquad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \longrightarrow x_\ell(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_\ell(z) = (zI - A)^{-1} z\, x(0) = \begin{pmatrix} z-1 & -1 \\ 0 & z-1/2 \end{pmatrix}^{-1} z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} z-1/2 & 1 \\ 0 & z-1 \end{pmatrix} z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{(z-1)(z-1/2)} = \frac{\begin{pmatrix} z \\ z(z-1) \end{pmatrix}}{(z-1)(z-1/2)} = \begin{pmatrix} \dfrac{z}{(z-1)(z-1/2)} \\[2ex] \dfrac{z\cancel{(z-1)}}{\cancel{(z-1)}(z-1/2)} \end{pmatrix}$$

$$\frac{X_1(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-1/2)} = \frac{R_1}{z-1} + \frac{R_2}{z-1/2}$$

$$R_1 = \lim_{z\to 1} \frac{1}{z-1/2} = 2 \qquad R_2 = \lim_{z \to 1/2} \frac{1}{z-1} = -2$$

$$X_1(z) = 2 \cdot \frac{z}{z-1} - 2 \cdot \frac{z}{z-1/2}$$

$$x_\ell(k)=\begin{pmatrix} 2\cdot 1(k) - 2\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot 1(k) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot 1(k) \end{pmatrix}$$

ANALISI MODALE NELLO SPAZIO DEGLI STATI

$x_\ell(k) = A^k x(0)$

Proprietà di A^k:

1) Se $Av = \lambda v$, $v \in \mathbb{C}^m$, $\lambda \in \mathbb{C}$
allora $A^k v = \lambda^k \cdot v$

2) Se $\exists T$, $\det T \neq 0$: $A = T\cdot \bar{A}\cdot T^{-1}$ allora $A^k = T\cdot \bar{A}^k \cdot T^{-1}$

CASO 1) A Diagonalizzabile

$\exists T: A = T \Lambda T^{-1}$ $\quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix}$

$T = [v_1 \vdots v_2 \vdots \dots \vdots v_m]$

$\Rightarrow A^k = T \Lambda^k T^{-1} = T \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m^k \end{bmatrix} T^{-1}$

$x_\ell(k) = A^k\cdot x(0) = T \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m^k \end{bmatrix} T^{-1}\cdot x(0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k v_i \cdot \alpha_i$

dove $\alpha = T^{-1} x(0)$.

Caso Particolare: $x(0) = v_i \Rightarrow x_\ell(k) = \lambda_i^k \cdot v_i$

CASO 2) A non Diagonalizzabile

$\exists T$: $\det T \neq 0$ e $A = T\cdot J\cdot T^{-1}$

$J = \begin{bmatrix} \boxed{J_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{J_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{J_m} \end{bmatrix}$ $\quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$

$A^k = T\cdot J^k \cdot T^{-1} = T \begin{bmatrix} \boxed{J_1^k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{J_2^k} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{J_m^k} \end{bmatrix} T^{-1}$

dove $J_i^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \cdots & \binom{k}{i-1}\lambda_i^{k-i+1} \\ 0 & \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i^k \end{bmatrix}$

Autovalore λ: molt. alg (λ) = molt. geom. (λ)

$\rightarrow$ modo λ^k

molt. alg (λ) > molt. geom (λ)

$\rightarrow$ modi λ^k, $\underline{k \cdot \lambda^k}$, $k^2 \cdot \lambda^k$, ...

di sicuro almeno uno.

Modi convergenti $\rightarrow$ $|\lambda| < 1$

Modi limitati non convergenti $\rightarrow$ $|\lambda| = 1$ molt. alg (λ) = molt. geom. (λ)

Modi Divergenti $\rightarrow$ altri casi

Esempio: Corso di Laurea (2 anni)

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} x(k)$$

$$x_e(k) = A^k x(0)$$

Autovalori: $\lambda = \beta$, molt. alg. = 2.

$$\mathrm{Ker}(\lambda I - A) = \mathrm{Ker}(\beta I - A) = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Se $\alpha \neq 0$, $\mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} = L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ molt. geom = 1
non diagonalizzabile

Se $\alpha = 0$ $\mathrm{Ker}\, 0 = \mathbb{R}^2$ Diagonalizzabile

$$\exists\, T: \quad A = T \underbrace{\begin{bmatrix} \beta & 1 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}}_{\text{Matrice di Jordan}} T^{-1} \qquad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^k = T\begin{bmatrix} \beta & 1 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta^k & \binom{k}{1}\beta^k \\ 0 & \beta^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1/\alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k\beta^k & \frac{1}{\alpha}\beta^k \\ \beta^k & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^k & 0 \\ \alpha k\beta^k & \beta^k \end{bmatrix}$$

$$x_l(k) = A^k x(0) = \begin{bmatrix} \beta^k x_1(0) \\ \alpha k \beta^k x_1(0) + \beta^k x_2(0) \end{bmatrix}$$

Per la risposte la risposte libera e forzate nell'uscita valgono considerazione analoghe.

In z:

$$Y(z) = \underbrace{C(zI-A)^{-1} z x(0)}_{Y_l(z)} + \underbrace{\left\{ C(zI-A)^{-1}B + D \right\} U(z)}_{Y_f(z)}$$

$$y(k) = C x(k) + D u(k)$$

$$= \underbrace{C A^k x(0)}_{y_l(k)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} C A^{k-1-i} B u(i) + D u(k)}_{y_f(k)}$$

Risposta Impulsiva : $u(k) = \delta(k)$

$$y_f(0) = \cancel{\sum_{i=0}^{-1}} + D\delta(0) = D$$

$$y_f(1) = \sum_{i=0}^{0} C \cdot A^{-i} B \delta(i) + D\delta(1) = C \cdot B\delta(0) + D\delta(1) = CB$$

$$y_f(2) = CAB$$

$$y_f(3) = CA^2B$$

$$\rightarrow \text{Risp. Impulsiva} = \begin{cases} D & \text{se } k=0 \\ CA^{k-1}B & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

I modi della Risp. Impulsiva sono gli stessi della Risp libera.

RISPOSTA DI REGIME PERMANENTE A SEGNALI SINUSOIDALI

Se $G(s)$ ha $Re(p_i) < 0$

$u(t) = M \cos(\omega t + \phi)$

$y_{PERM}(t) = M \cdot |G(j\omega)| \cos(\omega t + \phi + \measuredangle G(j\omega))$

$\Rightarrow$ Studio di $|G(j\omega)|$ e $\measuredangle G(j\omega)$ in funzione di $\omega \in \mathbb{R}$

Motivazioni:

1) Risposta di regime permanente a segnali sinusoidali di qualunque pulsazione ω;

2) Se $f(t) = f(t+T)$ $\forall t$ (con $T > 0$)
(funzione periodica di periodo T)

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k \underbrace{e^{j\frac{2\pi}{T}kt}}_{\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot kt\right) + j\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot kt\right)}$$

3) Se $f(t)$ è un segnale generico, $\exists\, F(j\omega)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(j\omega) = F(s)\big|_{s=j\omega}$$

4) Se $G(s)$ è una funzione razionale fratta, conoscere $G(j\omega), \forall \omega \in \mathbb{R}$, equivale a conoscere $G(s), \forall s \in \mathbb{C}$

DIAGRAMMI DI BODE

Rappresentazione grafica delle funzioni:

$|G(j\omega)|$
$\measuredangle G(j\omega)$
in funzione di ω $(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$

$|G(-j\omega)| = |\overline{G(j\omega)}| = |G(j\omega)|$ Funzione Pari

$\measuredangle G(-j\omega) = \measuredangle \overline{G(j\omega)} = -\measuredangle G(j\omega)$ Funzione Dispari

$\Rightarrow$ Si possono disegnare per $\omega > 0$.

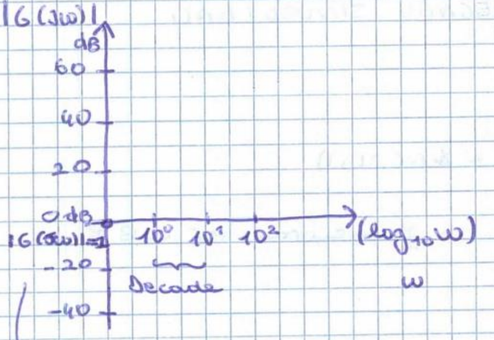
SCALE

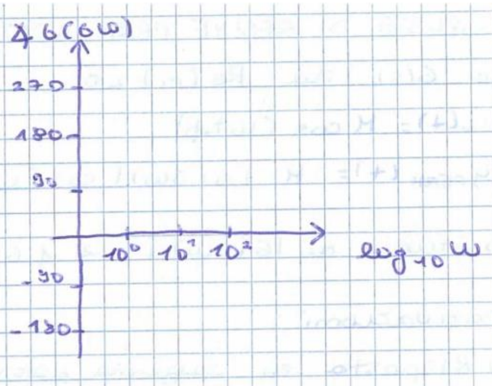
Diagramma del modulo:

$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$ vs. $\log_{10} \omega$

Diagramma della Fase:

$\measuredangle G(j\omega)$ in gradi vs. $\log_{10} \omega$





$\rightarrow -20\ dB = 20\log_{10}\left(\frac{1}{10}\right) \rightarrow$ attenuo di $\frac{1}{10}$

ad alte frequenze il sistema non si muove e il grafico va giù molto velocemente

FUNZIONI RAZIONALI FRATTE IN FORMA DI BODE

$$G(s) = \frac{K_B}{s^g} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{r_z}(1+\tau_i s) \cdot \prod_{i=1}^{c_z}\left(1+2\frac{\hat{\zeta}_i}{\hat{\omega}_i}s+\frac{1}{\hat{\omega}_i^2}s^2\right)}{\prod_{i=1}^{r_p}(1+\tau_i s) \cdot \prod_{i=1}^{c_p}\left(1+2\frac{\zeta_i}{\omega_i}s+\frac{1}{\omega_i^2}s^2\right)}$$

K_B: termine costante (guadagno di Bode)

s^g: termine monomio

g = # di poli in zero, se $g>0$

$-g$ = # di zeri in zero, se $g<0$

r_z: numero di zeri reali, zero $= -\frac{1}{\tau_i}$

r_p: numero di poli reali, polo $= -\frac{1}{\tau_i}$

$1+\tau s$: termine binomio

es. $(s-3) = (-3)\left(1-\frac{1}{3}s\right)$ $\quad -3 \rightarrow K_B$, $\tau = -\frac{1}{3}$

$1+2\frac{\zeta}{\omega}s+\frac{1}{\omega^2}s^2$: termine trinomio

$|\zeta| < 1 \rightarrow$ coppia di radici complesse coniugate

c_z: # numero di coppie di zeri compl. coniug

c_p: # numero di coppie di poli compl. coniug

Idea di base per il disegno dei diagrammi:

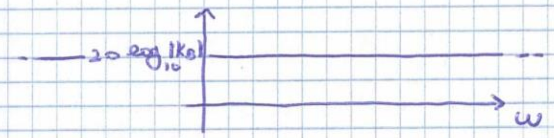
$\log|a\cdot b| = \log|a| + \log|b|$

$\angle a\cdot b = \angle a + \angle b$

=> Si possono sommare / sottrarre i diagrammi di modulo e fase dei singoli termini

1) Termine costante K_B

modulo: $|K_B|_{dB} = 20\log_{10}|K_B|$



fase: $\angle K_B = \begin{cases} 0 & \text{se } K_B > 0 \\ 180 & \text{se } K_B < 0 \end{cases}$

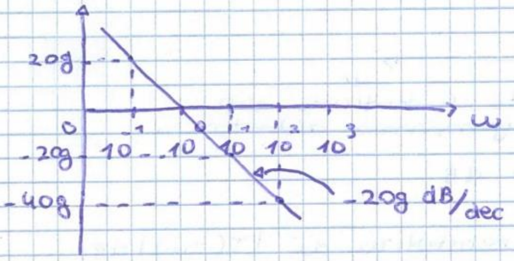
2) Termine monomio $\frac{1}{s^g}$

modulo:

$$\left|\frac{1}{(j\omega)^g}\right|_{dB} = 20\log_{10}\left|\frac{1}{(j\omega)^g}\right| = 20\log_{10}\frac{1}{|j\omega|^g}$$

$$= 20\log_{10}\frac{1}{\omega^g} = -20\log_{10}\omega^g = -20g\log_{10}\omega$$

-> Retta con pendenza $-20g$



Esatta a bassa frequenza e ad alta frequenza

Immutata la frequenza $\omega = 1$.

Se $g < 0$ -> pendenza positiva

Fase:

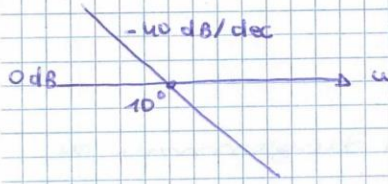
$$\angle\frac{1}{(j\omega)^g} = -\angle(j\omega)^g = -g\angle j\omega = -g\cdot 90°$$

g poli in zero: $-g90° < 0$ sfasamento negativo

h zeri in zero: $+g90° > 0$ sfasamento positivo

$(g - h)$

Esempio : $G(s) = \frac{1}{s^2}$



$y(t) = \iint u(\tau)\, d\tau$

$u(t) = \cos(\omega t)$

$y(t) = -\frac{1}{\omega^2}\cos(\omega t) = \frac{1}{\omega^2}\cos(\omega t - \pi)$

$20 \log_{10} \frac{1}{\omega^2} = -40 \log_{10} \omega$

3) Termine Binomio

$T(s) = 1 + s\tau \qquad \tau \in \mathbb{R}$

modulo:

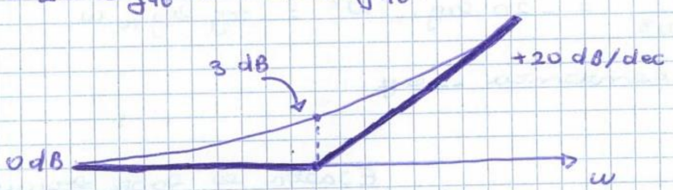
$|T(j\omega)| = |1 + j\omega\tau|$

$|T(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau| = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$

Se $\omega \ll \frac{1}{|\tau|} \rightarrow |T(j\omega)|_{dB} \simeq 20 \log_{10}(1) = 0 \text{ dB}$

Se $\omega \gg \frac{1}{|\tau|} \rightarrow |T(j\omega)|_{dB} \simeq 20 \log_{10} \sqrt{\omega^2\tau^2} = 20 \log_{10} \omega|\tau|$

$= 20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} |\tau|$



$\frac{1}{|\tau|}$: Punto di rottura del diagramma asintotico

$20 \log_{10} \frac{1}{|\tau|} + 20 \log_{10} |\tau| = 0 \text{ dB}$

Spezzata $\rightarrow$ Diagramma asintotico di $|T(j\omega)|_{dB}$

Zero reale in $-\frac{1}{\tau}$: pendenza di +20 dB/dec a destra del punto di rottura $\frac{1}{|\tau|}$

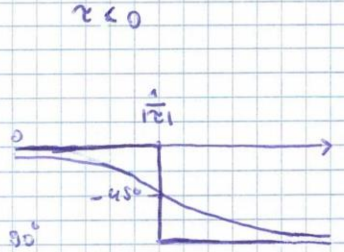
Polo reale in $-\frac{1}{\tau}$: pendenza di -20 dB/dec a destra del punto di rottura $\frac{1}{|\tau|}$

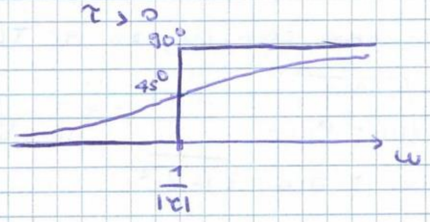
Fase : $\measuredangle 1 + j\omega\tau = \arctan(\omega\tau)$

$\omega \ll \frac{1}{\tau} \rightarrow \measuredangle 1 + j\omega\tau \simeq 0°$

$\omega \gg \frac{1}{\tau} \to 1 + j\omega\tau \simeq \begin{cases} \pi/2 & se\ \tau > 0 \\ -\pi/2 & se\ \tau < 0 \end{cases}$

$\tau < 0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\tau > 0$





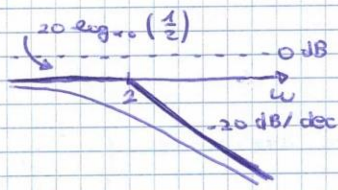
- Guadagno di 90° a destra del punto di rottura per zeri reali negativi e poli reali positivi
- Perdita di 90° a destra del punto di rottura per zeri reali positivi e poli reali negativi

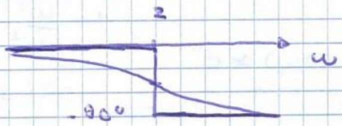
numeratore $\to 1 + s\hat{\tau} \to$ zero $s = -\frac{1}{\hat{\tau}}$

denominatore $\to 1 + s\tau \to$ polo $s = -\frac{1}{\tau}$

Esempio:

$G(s) = \frac{1}{s+2} = \frac{1}{2(1+\frac{1}{2}s)} = \frac{\frac{1}{2} = K_B}{1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\tau} s}$ $\qquad$ p.to di Rottura: $\frac{1}{|\tau|} = 2$





4) Termine Trinomio

$T(s) = 1 + 2\frac{\zeta_i}{\omega_i}s + \frac{1}{\omega_i^2}s^2$ $\qquad\qquad$ $\omega_i > 0$, $|\zeta_i| < 1$

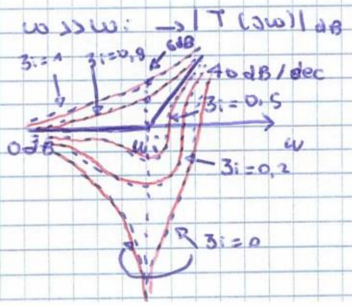
$T(j\omega) = 1 + 2\frac{\zeta_i}{\omega_i}j\omega + \frac{1}{\omega_i^2}(-\omega^2) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2} + j\left(\frac{2\zeta_i}{\omega_i}\omega\right)$

Modulo:

$|T(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2}\right)^2 + \left(2\zeta_i \frac{\omega}{\omega_i}\right)^2}$

$\omega \ll \omega_i \to |T(j\omega)|_{dB} \simeq 20\log_{10}(1) = 0\ dB$.

$\omega \gg \omega_i \to |T(j\omega)|_{dB} \simeq 20\log_{10}\left(\frac{\omega^2}{\omega_i^2}\right) = \underbrace{40\log_{10}\omega}_{retta} - \underbrace{40\log_{10}\omega_i}_{costante}$



$\frac{d}{d\omega}|T(j\omega)|_{dB} = 0 \to \omega = \omega_i\sqrt{1 - 2\zeta_i^2}$

P.to di minimo
$\exists$ sse $1 - 2\zeta_i^2 < 0$

$|\zeta_i| < 1/\sqrt{2} \simeq 0{,}7$

Caso particolare: se $\omega = \omega_i$, $\zeta_i = 0$
avremo $|T(j\omega_i)| = 0 \Rightarrow -\infty$ in dB

Radici complesse coniugate di $T(s)$

$$s_{1/2} = -\zeta_i \omega_i \pm j\omega_i \sqrt{1-\zeta_i^2}$$

$\zeta_i = \pm 1 \rightarrow$ due radici reali coincidenti in $\mp \omega_i$

$\zeta_i = 0 \rightarrow$ due radici immaginarie pure in $\pm j\omega_i$

Contributo al modulo del termine trinomio

- retta di pendenza +40 dB/dec a destra del punto di rottura ω_i per una coppia di zeri complessi coniugati;
- retta di pendenza -40dB/dec a destra del punto di rottura ω_i per una coppia di poli complessi coniugati
- attenzione a $|\zeta_i|$ nel disegno del diagramma vero;

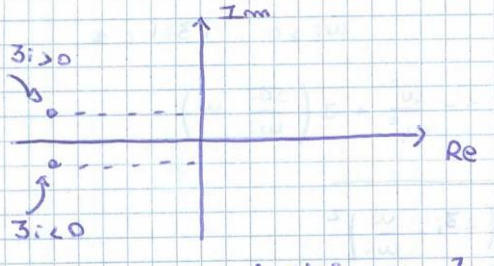
Fase:

$$\measuredangle\, 1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2} + j\left(2\zeta_i \frac{\omega}{\omega_i}\right) = \arctan \frac{2\zeta_i \frac{\omega}{\omega_i}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2}}$$

se $\omega \ll \omega_i \rightarrow \measuredangle T(j\omega) \simeq 0°$

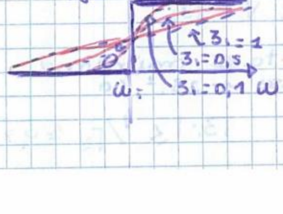
se $\omega \gg \omega_i \rightarrow$

$$\rightarrow \measuredangle T(j\omega) \simeq \measuredangle -\frac{\omega^2}{\omega_i^2} + j\left(2\zeta_i \frac{\omega}{\omega_i}\right)$$

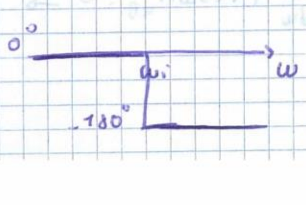


$$\text{se } \omega \gg \omega_i = \begin{cases} 180° & \text{se } \zeta_i > 0 \\ -180° & \text{se } \zeta_i < 0 \end{cases}$$

$\zeta_i > 0$



$\zeta_i < 0$



Per $\zeta_i = 0$ ho $\measuredangle T(j\omega) = \measuredangle\, 1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2}$ → I diagrammi asintotici sono esatti

→ zeri a parte reale negativa e poi a parte reale positiva → 180° a destra di ω_i.

→ zeri a parte reale positiva e poi a parte reale negativa → -180° a destra di ω_i

REGOLE DI TRACCIAMENTO DEI DIAGRAMMI DI BODE

MODULO

- Si parte dal termine $\frac{k_g}{s^g}$ che corrisponde ad una retta di pendenza $-20g$ dB/dec e che passa per il punto $\omega = 1$, $|\cdot|_{dB} = 20 \log_{10}(|k_g|)$;

- Si riportano in ascissa i p.ti di rottura pari a $\frac{1}{|\tau_i|}$ per i termini binomi e ω_i per i termini trinomi;

- Partendo da sinistra in corrispondenza dei p.ti di rottura si varia la pendenza di
  - *) $+20\mu$ dB/dec ∀ zero reale di molteplicità μ
  - *) -20μ dB/dec ∀ polo " " " "
  - *) $+40\mu$ dB/dec ∀ coppia di zeri complessi coniugati di molteplicità μ
  - *) -40μ dB/dec ∀ coppia di poli " " " "

FASE

- Si parte con una semiretta orizzontale da $\omega = -\infty$ (sinistra) fino al primo p.to di rottura, di valore pari a:

$$\measuredangle \frac{k_g}{(j\omega)^g} = \begin{cases} -90° g & \text{se } k_g > 0 \\ -90° g - 180° & \text{se } k_g < 0 \end{cases}$$

- Si tracciano (riportano) gli stessi p.ti di rottura del diagramma del modulo.
- In corrispondenza dei p.ti di rottura si varia la fase di
  - *) $90°\mu$ ∀ zero reale negativo o polo reale positivo di

molteplicità μ;

*) $-90°\mu$ $\forall$ polo reale negativo o zero reale positivo di molteplicità μ.

*) $+180°\mu$ $\forall$ coppia di zeri complessi a parte reale negativa o poli complessi a parte reale positiva di molt. μ.

*) $-180°\mu$ $\forall$ coppia di poli complessi a parte reale negativa o ~~poli~~ zeri complessi a parte reale positiva di molt. μ.

Esempio:

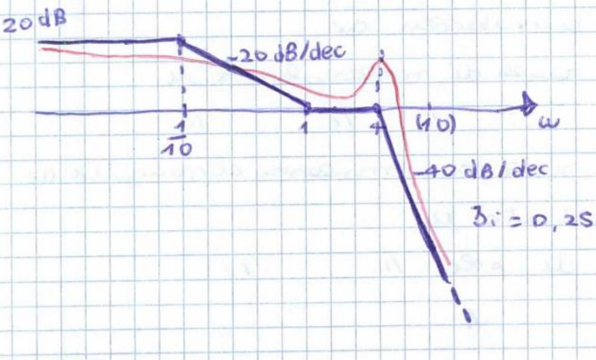
$$G(s) = \frac{16(s+1)}{(s+0{,}1)(s^2+2s+16)} = \frac{\cancel{16}(1+s)}{0{,}1(1+10s)\cancel{16}\left(1+\frac{2}{16}s+\frac{1}{16}s^2\right)}$$

$$= \frac{10(s+1)}{\underbrace{(1+10s)}_{\tau_1=10}\left(1+\underbrace{\frac{2\cdot 0{,}25}{4}}_{2\frac{\xi_i}{\omega_i}}s+\frac{1}{(4)^2}s^2\right)} \qquad \tau_1 = 1$$

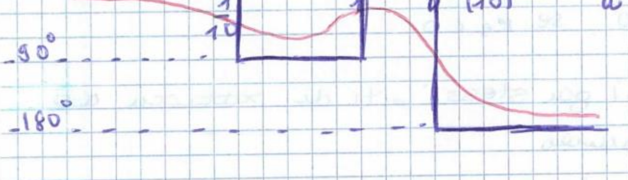
$\xi_i = 0{,}25$

$\omega_i = 4$

MODULO.



FASE.



Esempio:

$$G(s) = \frac{10(s-1)}{s^2(s+5)} = \frac{10(-1)(1-s)}{s^2(5)(1+\frac{1}{5}s)} = \frac{-2}{s^2}\frac{(1+(-1)\cdot s)}{(1+\frac{1}{5}\cdot s)}$$

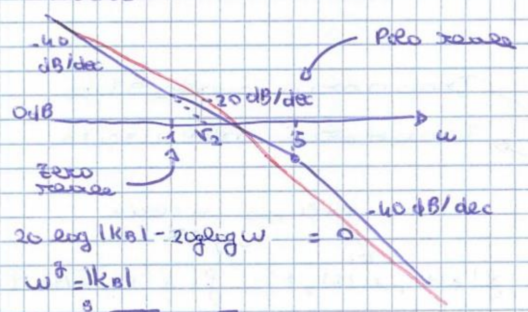
$K_B = -2$

Termine monomio: $g = 2$

Termine binomio: $\tau_1 = 1$, $\tau = \frac{1}{5}$

$\hookrightarrow$ p.ti di rottura: 1, $\frac{1}{5}$

MODULO

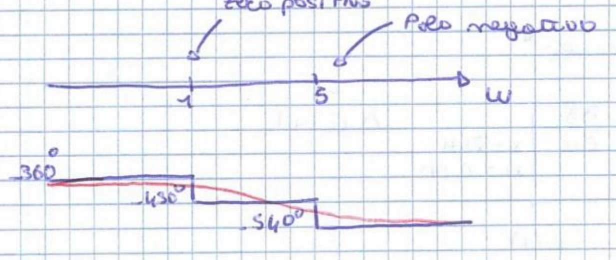


$20\log|K_B| - 20g\log\omega = 0$

$\omega^g = |K_B|$

$\omega = \sqrt[g]{|K_B|} = \sqrt{2}$

FASE



ANALISI DEI SISTEMI NON LINEARI: TECNICA DI LINEARIZZAZIONE

RAPPR. I/S/O

$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$

$y(t) = h(x(t), u(t), t)$

f, h: funzioni non lineari.

$\bar{x}(0)$, $u(t)$ noti $\rightarrow$ $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$ sono soluzioni del sistema.

cioè $\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)$ $\quad \bar{x}(0)$ noto

$\bar{y}(t) = h(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)$

Definiamo

$\Delta x(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ → Traiettoria nello stato

$\Delta y(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ → Traiettoria nell'uscita

$\Delta u(t) = u(t) - \bar{u}(t)$

sviluppo in serie

$$\Delta \dot{x}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t) = \frac{d}{dt}\Delta x(t) = f(x(t), u(t), t) - f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)$$

$$= \cancel{f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t)\\ u=\bar{u}(t)}} \cdot (x(t) - \bar{x}(t)) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t)\\ u=\bar{u}(t)}} (u(t) - \bar{u}(t))$$

$$+ o\left(\left\| \begin{matrix} x(t) - \bar{x}(t) \\ u(t) - \bar{u}(t) \end{matrix} \right\|^2\right) - \cancel{f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)}$$

Se $\Delta x(t)$ e $\Delta u(t)$ sono "piccoli"

$$\Delta \dot{x}(t) \cong \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t)\\ u=\bar{u}(t)}}}_{A(t)} \cdot \Delta x(t) + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t)\\ u=\bar{u}(t)}}}_{B(t)} \cdot \Delta u(t)$$

sistema linearizzato nell'intorno della soluzione $\bar{x}(t), \bar{u}(t)$.

$$A(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t)\\ u=\bar{u}(t)}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial f_m} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t)\\ u=\bar{u}(t)}}$$

$f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$B(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t)\\ u=\bar{u}(t)}} = \left.\begin{bmatrix} \text{analoga alla precedente} \\ \text{con } \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t)\\ u=\bar{u}(t)}}$$

Per l'equazione di uscita si ottiene:

$\Delta y(t) = C(t) \cdot \Delta x(t) + D(t) \cdot \Delta u(t)$

dove $C(t) = \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t)\\ u=\bar{u}(t)}}$ e $D(t) = \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t)\\ u=\bar{u}(t)}}$

Sistema linearizzato:

$\Delta \dot{x}(t) = A(t)\, \Delta x(t) + B(t)\, \Delta u(t)$

$\Delta y(t) = C(t)\, \Delta x(t) + D(t)\, \Delta u(t)$

... idem per i sistemi tempo discreto:

$\Delta x(k+1) = A(k) \cdot \Delta x(k) + B(k)\, \Delta u(k)$

$\Delta y(k) = C(k) \cdot \Delta x(k) + D(k) \cdot \Delta u(k)$

dove le matrici $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$, $D(k)$ sono definite nello stesso modo.

Il sistema linearizzato fornisce una buona approssimazione del comportamento del sistema non lineare di partenza nell'intorno della soluzione $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$, $\bar{y}(t)$, a patto che $\Delta x(t)$, $\Delta u(t)$, $\Delta y(t)$ restino "piccoli" ($\ll 1$).

STATI DI EQUILIBRIO

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ si dice STATO DI EQUILIBRIO per un sistema dinamico se:

$$x(0) = \bar{x} \Rightarrow x(t) = \bar{x} \quad , \forall t \geq 0.$$

Calcolo degli stati di equilibrio:

Sistema Tempo-Invariante a tempo-continuo

$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$

$u(t) = \bar{u} \quad \forall t$ (costante)

$\Rightarrow \dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$.

Gli stati di equilibrio, $\bar{x}$ relativi all'ingresso $\bar{u}$, sono tutte e sole le soluzioni di $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$

$\rightarrow$ I sistemi linearizzati nell'intorno degli stati di equilibrio $\bar{x}, \bar{u}$ sono LTI!

Sistema tempo-invariante a tempo-discreto

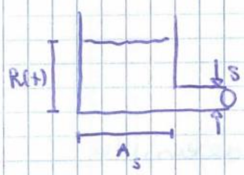
$x(k+1) = f(x(k), u(k))$

$u(k) = \bar{u} \quad \forall k$ (costante)

$\rightarrow \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u})$

Gli stati di equilibrio $\bar{x}$, relativi all'ingresso $\bar{u}$, sono tutte e sole le soluzioni di $f(\bar{x}, \bar{u}) - \bar{x} = 0$

Esempio : Serbatoio



$\dot{h}(t) = -\frac{s}{A_s}\sqrt{2g} \cdot \sqrt{h(t)} + \frac{1}{A_s} Q_i(t)$

Rappr. I/S/O

$x(t) = h(t) = y(t)$

$u(t) = Q_i(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\left(\frac{s}{A_s}\sqrt{2g}\right)\sqrt{x(t)} + \frac{1}{A_s} u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

non lineare

Stati di equilibrio

$u(t) = \bar{u}, \forall t$

$$\underbrace{\dot{\bar{x}} = 0 = -\frac{s}{A_s}\sqrt{2g} \cdot \sqrt{\bar{x}} + \frac{1}{A_s}\bar{u}}_{f(\bar{x}, \bar{u}) = 0}$$

$s\sqrt{2g} \cdot \sqrt{\bar{x}} = \bar{u}$

$\sqrt{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{2g} \cdot s} \cdot \bar{u} \longrightarrow \bar{x} = \frac{1}{2g} \cdot \frac{\bar{u}^2}{s^2}$

Sistema Linearizzato

$\Delta x(t) = x(t) - \bar{x} = x(t) - \frac{1}{2gs^2} \cdot \bar{u}$

$\Delta u(t) = u(t)$

$\Delta \dot{x}(t) = A \cdot \Delta x(t) + B \cdot \Delta u(t)$

$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{s}{A_s}\sqrt{2g}\sqrt{x} + \frac{1}{A_s} u\right]\Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$

$$= -\frac{S}{A_s}\sqrt{2g}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\Bigg|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = -\frac{S}{A_s}\sqrt{2g}\,\frac{1}{2\sqrt{\bar{x}}} = -\frac{S}{A_s}\sqrt{2g}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1}{2g}\cdot\frac{\bar{u}^2}{S^2}}}$$

$$= -\frac{S}{A_s}\sqrt{2g}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\frac{\bar{u}}{S}} = -\frac{S^2}{A_s}\cdot\frac{g}{\bar{u}}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u}\Bigg|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = \frac{\partial}{\partial u}\left[-\frac{S}{A_s}\sqrt{2g}\sqrt{x} + \frac{1}{A_s}u\right] = \frac{1}{A_s}$$

$$\boxed{\Delta\dot{x}(t) = \left(-\frac{S^2 g}{A_s\bar{u}}\right)\Delta x(t) + \frac{1}{A_s}\cdot\Delta u(t)}$$

$$\boxed{\Delta y(t) = \Delta x(t)} \quad \to \text{modo } e^{-\frac{S^2 g}{A_s \bar{u}}\cdot t}$$

Simulazione $\left[A_s = 1\,m^2,\ S = 0{,}01\,m^2,\ \bar{u} = 0{,}2\,m^3/s \Rightarrow \bar{x} \cong 20{,}41\,m\right]$

caso a) $\Delta u(t) = \pm 0{,}005\ m^3/s \quad (u(t) \in [0{,}195 \div 0{,}205])$

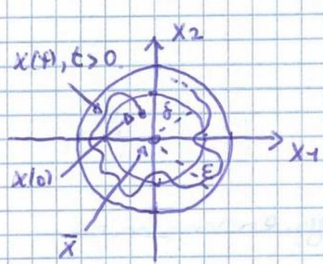
caso b) $\Delta u(t) = \pm 0{,}05\ m^3/s \quad (u(t) \in [0{,}15 \div 0{,}25])$

STABILITÀ

Sia $\bar{x}$ uno stato di equilibrio del sistema:

$$\left.\begin{matrix}\dot{x}(t)\\ x(t+1)\end{matrix}\right\} = f(x(t), u(t)) \quad \begin{matrix}(TC)\\(TD)\end{matrix}$$

Def: Lo stato di equilibrio $\bar{x}$ si dice stabile se $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 : \|x(0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon \quad , \forall t \geq 0$



Def: Lo stato di equilibrio $\bar{x}$ si dice convergente se

$$\exists \delta > 0 : \|x(0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0$$

Def: Lo stato di equilibrio $\bar{x}$ si dice ASINTOTICAMENTE STABILE se è sia stabile che convergente.

Osservazioni:

- Uno stato di equilibrio non stabile si dice instabile;
- Uno stato di equilibrio stabile ma non convergente si dice "marginalmente stabile";
- Esistono stati di equilibrio convergenti ma instabili;

Esempio:

$$x(k+1) = \begin{cases} 2 \cdot x(k) & \text{se } |x(k)| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x(k)| > 1 \end{cases}$$

Calcolo degli stati di equilibrio:

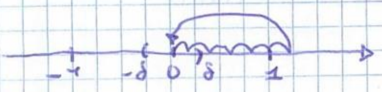
$\bar{x} = f(\bar{x})$

$$\bar{x} = \begin{cases} 2\bar{x} & \text{se } |\bar{x}| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |\bar{x}| > 1 \end{cases} \qquad x(k) = x(k+1) = \bar{x} \; !$$

$\bar{x} = 2\bar{x}$

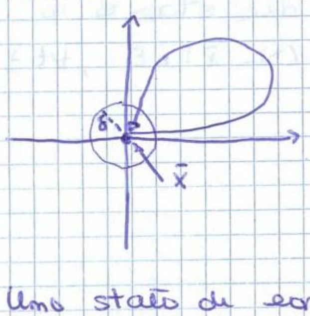
$0 = 2\bar{x} - \bar{x}$

$0 = \bar{x} \quad \rightarrow$ unico S.d.E.



Non è stabile! Ma convergente!

nel caso TC esistono esempi (con $n \geq 2$)



Def: Uno stato di equilibrio si dice globalmente asintoticamente stabile (GAS) se:

$$\forall x(0) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0.$$

Esempio:

$\dot{x}(t) = -x(t)$

$-\bar{x} = 0 \rightarrow \bar{x} = 0$ è l'unico s. d. E

$x(t) = e^{-t} x(0)$

$\lim_{t \to +\infty} x(t) - \bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x}$ è GAS.

CRITERIO RIDOTTO DI LYAPUNOV

Sia $\bar{x}$ uno stato di equilibrio del sistema

$\dot{x}(t) = f(x(t))$

Sia $A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}}$

Il criterio ridotto di Lyapunov afferma che:

1) se tutti gli autovalori di A hanno parte reale < 0, $\bar{x}$ è uno stato di equilibrio as. stabile.

2) se $\exists$ almeno un autovalore di A a parte reale > 0, $\bar{x}$ è uno stato di equilibrio instabile

Nei rimanenti casi non si può concludere nulla.

Esempio: si considerino i 3 sistemi:

(a) $\dot{x}(t) = -x^3(t)$

(b) $\dot{x}(t) = 0$

(c) $\dot{x}(t) = x^3(t)$

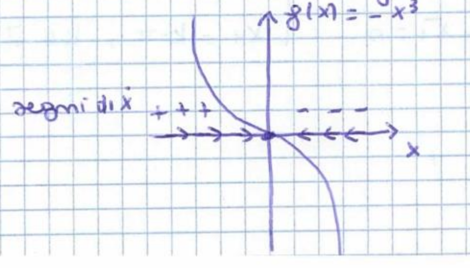
$\bar{x}(0)$ è s. d. E. per tutti e 3 i sistemi.

(a) $A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x}=0} = \left.\frac{\partial(-x^3)}{\partial x}\right|_{x=0} = -3x^2\Big|_{x=0} = 0$

(b) $A = \left.\frac{\partial(0)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$

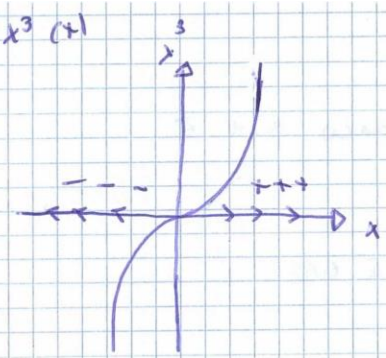
(c) $A = \frac{\partial}{\partial x} x^3 = 3x^2\Big|_{x=0} = 0.$

(a) $\dot{x}(t) = -x^3(t) = f(x(t))$



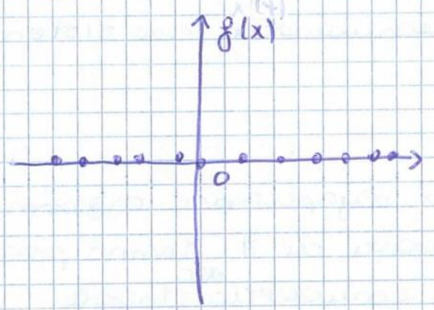
$\left[\begin{array}{c} \bar{x} = 0 \\ \text{è GAS} \end{array}\right]$

(c) $\dot{x}(t) = x^3(t)$



$[\bar{x} = 0$ è instabile$]$

(b) $\dot{x}(t) = 0$



$[\bar{x} = 0$ è marginalmente stabile$]$

VERSIONE TD DEL CRITERIO RIDOTTO DI LYAPUNOV

Sia $\bar{x}$, S.d.E. del sistema $x(k+1) = f(x(k))$

$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}}$

1) Se tutti gli autovalori di A hanno modulo < 1, $\bar{x}$ è as. stabile.

2) Se $\exists$ almeno un autovalore di A con modulo > 1, $\bar{x}$ è instabile.

Esempio: Pendolo Inverso.

$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$

$\dot{x}_2(t) = -\operatorname{sen}(x_1(t)) - \beta x_2(t) \quad , \beta > 0$

a) Calcolare gli stati di equilibrio.

$\dot{x}(t) = f(x(t)) \Rightarrow f(\bar{x}) = 0$

$\begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ -\operatorname{sen}\bar{x}_1 - \beta\bar{x}_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ \operatorname{sen}\bar{x}_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_1 = k \cdot \pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Fisicamente consideriamo:

$\bar{x}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{x}_B = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Studiare la stabilità di $\bar{x}_A$ e $\bar{x}_B$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -\beta \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_A : \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\beta \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda+\beta \end{bmatrix} = \lambda^2 + \beta\lambda + 1$$

Se $\beta > 0 \Rightarrow$ 2 autovalori a parte reale < 0

$\Rightarrow \bar{x}_A$ è S.d.E. AS. STABILE

Se $\beta = 0 \Rightarrow \lambda = \pm j \Rightarrow$ non posso concludere nulla.

Con attrito è stabile, senza no!

$$\bar{x}_B : \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\beta \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + \beta\lambda - 1$$

$\forall \beta$, 1 variazione di segno $\Rightarrow$ 1 radice a parte reale > 0

$\Rightarrow \bar{x}_B$ è INSTABILE.

Esempio:

$x_1(k+1) = x_2(k) + u(k)$

$x_2(k+1) = x_1(k) - \beta x_2(k)$, $\beta \in \mathbb{R}$

Determinare gli SdE e studiare la stabilità assumendo $u(k) = 1, \forall k$.

$x(k+1) = f(x(k), u(k)) \Rightarrow \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u})$.

È Lineare!

Esempio:

$x_1(k+1) = \beta x_1(k) + x_1(k)\, x_2(k)$

$x_2(k+1) = -x_1(k) + \frac{1}{2} x_2(k)$

Calcolare gli SdE e studiarne la stabilità al variare di $\beta \in \mathbb{R}$.

$\bar{x} = f(\bar{x})$

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \beta \bar{x}_1 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \\ \bar{x}_2 = -\bar{x}_1 + \frac{1}{2}\bar{x}_2 \end{cases}$$

$\frac{1}{2}\bar{x}_2 = -\bar{x}_1 \Rightarrow \bar{x}_2 = -2\bar{x}_1$

$\bar{x}_1 = \beta\bar{x}_1 + \bar{x}_1(-2\bar{x}_1)$

$2\bar{x}_1^2 + (1-\beta)\bar{x}_1 = 0$ → $\bar{x}_1 = 0 \rightarrow \bar{x}_2 = 0$; $\bar{x}_1 = \frac{\beta-1}{2} \rightarrow \bar{x}_2 = 1-\beta$

$\bar{x}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\bar{x}_B = \begin{pmatrix} \frac{\beta-1}{2} \\ 1-\beta \end{pmatrix}$

Stati di Equilibrio!

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \beta + x_2 & x_1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}_A} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{autovalori}: \beta, \frac{1}{2}$$

Se $|\beta| < 1 \rightarrow \bar{x}_A$ è AS. STABILE

Se $|\beta| > 1 \rightarrow \bar{x}_A$ è INSTABILE

Nei casi $\beta = \pm 1$ non posso concludere nulla.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}_B} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta-1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -\frac{\beta-1}{2} \\ 1 & \lambda - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\lambda-1)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) + \frac{\beta-1}{2}$$

$$= \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} + \frac{\beta-1}{2} = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{\beta}{2}$$

$$\lambda = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2\beta}}{2} = \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{9-8\beta}}{4}$$

Caso 1: $9 - 8\beta \geq 0 \Rightarrow \beta \leq \frac{9}{8}$

$\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{9-8\beta}}{4} < 1 \rightarrow \beta > 1 \rightarrow \beta \in \left(1, \frac{9}{8}\right]$ $\bar{x}_B$ è AS. STABILE

Per $\beta < 1 \rightarrow \bar{x}_B$ è INSTABILE

Per $\beta = 1 \rightarrow$ Non so!

Caso 2: $\beta > \frac{9}{8}$

$$\lambda = \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{9-8\beta}}{4} = \frac{3}{4} \pm j\frac{\sqrt{8\beta-9}}{4}$$

$$|\lambda| = \sqrt{\frac{9}{16}+\frac{8\beta-9}{16}} = \sqrt{\frac{\beta}{2}} < 1 \rightarrow \beta < 2.$$

$\bar{x}_B$ è AS. STABILE per $\beta \in \left(\frac{9}{8}, 2\right)$

$\bar{x}_B$ è INSTABILE per $\beta > 2$.

per $\beta = 2$ non so!

STABILITÀ NEI SISTEMI LINEARI

Sistemi autonomi

$\dot{x}(t) = A x(t)$ TC

$x(k+1) = A x(k)$ TD

Calcolo degli SdE

TC: $\bar{x}: A\bar{x} = 0 \rightarrow \bar{x} \in \ker(A)$.

se $\det A \neq 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$ è l'unico SdE

se $\det A = 0 \Rightarrow \exists$ infiniti SdE (tra cui $\bar{x} = 0$).

TD: $\bar{x}: \bar{x} = A\bar{x}$

$(I-A)\bar{x} = 0 \rightarrow \bar{x} \in \ker(I-A)$

$\bar{x} = 0$ è sempre SdE ed è unico sse $\det(I-A) \neq 0$.

Stabilità:

TC: $x(t) = e^{At} \cdot x(0)$

la risposta libera!

TD: $x(t) = A^k \cdot x(0)$

Tutti i modi convergenti => AS. STABILE

Modi convergenti + modi limitati (con almeno un modo limitato non convergente => MARG. STABILE

Almeno un modo divergente => INSTABILE

TC: $\lambda_i,\ i = 1, \dots, n$ gli autovalori di A.

* $Re[\lambda_i] < 0,\ \forall i \Rightarrow$ Sistema AS. STABILE
* $Re[\lambda_i] \leq 0,\ \forall i$ e se $Re[\lambda_j] = 0 \Rightarrow$ m. alg. (λ_j) = m. geom (λ_j)

=> sistema MARG. STABILE

* altri casi => Sistema INSTABILE

TD:

* $|\lambda_i| < 1 \ \forall i \Rightarrow$ AS. STABILE
* $|\lambda_i| \leq 1 \ \forall i$ + se $|\lambda_i| = 1 \Rightarrow m.\ alg(\lambda_i) = m.\ geom(\lambda_i)$

  $\Rightarrow$ MARG. STABILE
* altri casi $\Rightarrow$ INSTABILE

Osservazioni:

1) $\bar{x} = 0$ è sempre SdE
2) Il sistema può essere AS. STABILE solo se $\bar{x} = 0$ è l'unico SdE
3) se $\bar{x} = 0$ è convergente allora è anche stabile (e quindi AS. STABILE)
4) se $\bar{x} = 0$ è AS. STABILE è anche GAS.

Esempio:

$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) - 2x_2(t)$

$\dot{x}_2(t) = 4x_1(t) + \alpha x_2(t)$ $\qquad \alpha \in \mathbb{R}$

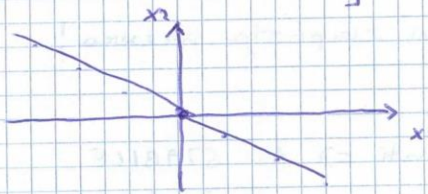
Studiare la stabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & \alpha \end{bmatrix}$

$\bar{x} \in \ker A \qquad \det A = -\alpha + 8$

$\bar{x} = 0$ è l'unico SdE se $\alpha \neq 8$

se $\alpha = 8$ $\quad \bar{x} \in \ker \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = L\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$



$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda+1 & 2 \\ -4 & \lambda - 8 \end{pmatrix} = \lambda^2 + (1-\alpha)\lambda + 8 - \alpha$

$\begin{cases} 1-\alpha > 0 \\ 8-\alpha > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha < 1 \\ \alpha < 8 \end{cases} \rightarrow$

- $\alpha < 1$ AS. STABILE
- $\alpha > 1$ INSTABILE

$\alpha = 1$

$\hookrightarrow \lambda^2 + 7 \Rightarrow \lambda = \pm j\sqrt{7}$

- $\alpha = 1$ MARG. STABILE

Caso non autonomo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad u(t) = \bar{u} \quad \forall t$$

$\bar{x}$ è SdE se $A\bar{x} + B\bar{u} = 0$

$$A \cdot \bar{x} = \underbrace{-B\bar{u}}_{b}$$

Se $\det A \neq 0 \Rightarrow \bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$ è l'unico SdE

Se $\det A = 0$ $\begin{cases} \infty \text{ SdE se } B\bar{u} \in Im(A) \\ \nexists \text{ SdE se } B\bar{u} \notin Im(A) \end{cases}$

Esempio:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bar{u} \notin Im \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{no SdE}$$

Quella vista finora è una nozione di stabilità definita nello spazio degli stati (aka STABILITÀ INTERNA)

Esiste anche una nozione di stabilità ingresso-uscita, nota come stabilità ILUL o BIBO

STABILITÀ ILUL (Ingresso limitato, Uscita limitata).
Def. un sistema si dice stabile in senso ILUL se:
$\forall Y > 0, \exists U > 0$: se $\|u(t)\| < U, \forall t \Rightarrow \|y(t)\| < Y, \forall t$.

Sistemi LTI $\to$ Funzione di Trasferimento!

TC:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

$\forall$ polo di $G(s)$ a parte reale nulla, $\exists$ un ingresso $u(t)$ limitato che genera una $y(t)$ divergente.
$\Rightarrow$ il sistema è stabile in senso ILUL sse tutti i poli di $G(s)$ hanno parte reale < 0

TD:
$\Rightarrow$ il sistema è stabile in senso ILUL sse tutti i poli di $G(z)$ hanno modulo < 1.

STUDIO DEL SEGNO DELLA PARTE REALE DELLE RADICI DI UN POLINOMIO

Problema importante per l'analisi dei sistemi LTI a tempo continuo.

- convergenza dei modi dei sistemi LTI;
- stabilità asintotica degli stati di equilibrio;
- stabilità ILUL dei sistemi LTI;

$$p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad , a_i \in \mathbb{R}$$

Regola di Cartesio: condizione necessaria affinché le radici di $p(s)$ abbiano tutte parte reale <0 è $a_i > 0$, $\forall i = 0, \dots, n-1$

[necessaria e sufficiente se $n=2$].

→ CRITERIO DI ROUTH

Si deve costruire una tabella che ha $n+1$ righe

$$\begin{array}{c|ccccc}
n & 1 & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots \\
n-2 & b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & \dots & \\
\vdots & c_{n-3} & c_{n-4} & \dots & & \\
1 & & & & & \\
0 & * & & & &
\end{array}$$

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-3} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-4} = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$c_{n-3} = \frac{b_{n-2}a_{n-3} - a_{n-1}b_{n-3}}{b_{n-2}}$$

Risultato: ad ogni variazione di segno nella prima colonna della tabella di Routh corrisponde una radice di $p(s)$ a parte reale ~~negativa~~ POSITIVA; ad ogni permanenza una radice a parte reale negativa.

Esempi:

1) $p(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$

3	1	2	$\emptyset$
2	2	1	$\emptyset$
1	$\frac{3}{2}$	$\emptyset$	
0	1		

$\rightarrow$ P(s) ha 3 radici a parte reale < 0

Infatti: $P(s) = (s+1)(s^2+s+1)$

$$\underset{-1}{(s+1)} \quad \underset{\frac{-1 \pm \sqrt{3}\,j}{2}}{(s^2+s+1)}$$

2) $P(s) = s^3 + 8s^2 + 6s + K$, $K \in \mathbb{R}$

Per quali K tutte le radici hanno parte reale < 0?

Cartesio: $K > 0$ (condizione necessaria).

3	1	6	$\emptyset$
2	8	K	$\emptyset$
1	$\frac{48-K}{8}$	$\emptyset$	
0	K		

$$\begin{cases} 48 - K > 0 \\ K > 0 \end{cases} \rightarrow 0 < K < 48.$$

Casi particolari:

(a) coefficiente nullo nella prima colonna

$p(s) = s^4 + 2s^3 + s^2 + 2s + 2$

4	1	1	2	1
3	2	2	$\emptyset$	2
2	ε ($\emptyset$)	2		ε
1	$\frac{2\varepsilon-4}{\varepsilon}$	$\emptyset$		$\frac{2\varepsilon-4}{\varepsilon}$
0	2			2

analisi: per $\varepsilon \to 0^+$: $+ + + - +$

per $\varepsilon \to 0^-$: $+ + - + +$

In entrambi i casi 2 variazioni di segno.

$\Rightarrow$ 2 radici a parte reale > 0

Infatti: $p(s) = (s+1)(s^3+s^2+2)$

$(s+1) \to -1$

$(s^3+s^2+2) \to -1,6956$; $0,3478 \pm j \cdot 1,0289$.

Esercizio: $p(s) = s^3 + s^2 + 2$.

(b) un intera riga nulla di Routh

$p(s) = s^3 + s^2 - s - 1$ Cartesio: # di radici ≥ 1 $Re > 0$

3	1	-1
2	1	-1
1	∅	∅ ← Riga nulla
0		

Costruisco il polinomio ausiliario $p_a(s)$ con i coefficienti dell'ultima riga non nulla.

$p_a(s) = 1 \cdot s^2 + (-1) \cdot s^0 = s^2 - 1$

Faccio la derivata di $p_a(s) \to p_a'(s) = 2s$

Inserisco i coefficienti di $p_a'(s)$ al posto della riga nulla.

3	1	-1
2	1	-1
1	2	∅ ← coeff. di $P_a(s)$
0	-1	

1 Variazione $\Rightarrow$ 1 radice a parte reale > 0.

Infatti: $p(s) = (s+1)(s^2-1) = (s+1)^2 (s-1)$

$-1, -1$ 1

Esempio:

$p(s) = s^6 + s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 3s^2 + s + 1$

6	1	3	3	1
5	1	2	1	
4	1	2	1 ← $P_a(s) = s^4 + 2s^2 + 1$	
3	$\cancel{∅}$ 4	$\cancel{∅}$ 4	∅ $P_a'(s) = 4s^3 + 4s$	
2	1	1 ← $P_a(s) = (s^2+1)$		
1	$\cancel{(∅)}$ 2 $P_a'(s) = 2s$			
0	1			

$(s^2+1)^2 \to \pm j$

$\pm j$

Risultato: quando la tabella presenta una riga nulla, dopo l'introduzione dei polinomi $p_a'(s)$ le permanenze di segno danno il # di radici a parte reale negativa o nulla, mentre le variazioni danno il # di radici a parte reale positiva.

Im particolare si dimostra che: le

- le radici di $p_a(s)$ sono anche radici di $p(s)$;
- le radici di $p_a(s)$ sono simmetriche rispetto all'asse immaginario;

Infatti: $p(s) = (s^2+s+1)\cdot(s^2+1)^2$.

caso TD: Criterio di Jury $\rightarrow$ nella dispensa.

PROPRIETÀ STRUTTURALI DEI SISTEMI DINAMICI

$\rightarrow$ Raggiungibilità;

$\rightarrow$ Osservabilità;

RAGGIUNGIBILITÀ E PROBLEMA DEL CONTROLLO

Sistema LTI a tempo discreto, in rappresentazione di stato.

$$x(k+1) = A\cdot x(k) + B\cdot u(k)$$

Sia $x(0) = x_{in}$ e $x(T) = x_{fin}$

Esiste una sequenza di ingressi $u(0), u(1), \dots, u(T-1)$ in grado di portare lo stato del sistema da x_{in} a $t=0$ fino a x_{fin} a $t=T$?

Sappiamo che:

$$x(k) = \underbrace{A^k x(0)}_{x_e(k)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B\, u(i)}_{x_f(k)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Ax=b \\ \exists x \iff b \in \operatorname{Im}(A) \end{array}}$$

$$x(T) - A^T x(0) = \sum_{i=0}^{T-1} A^{T-1-i} B\, u(i)$$

$$x_{fin} - A^T x_{in} = A^{T-1}B\,u(0) + A^{T-2}B\,u(1) + \dots + AB\,u(T-2) + B\,u(T-1)$$

$$\underbrace{x_{fin} - A^T x_{in}}_{n\times 1} = \underbrace{\left[\, B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{T-2}B \mid A^{T-1}B \,\right]}_{R_T \in \mathbb{R}^{n\times T\cdot m}} \underbrace{\begin{bmatrix} u(T-1) \\ u(T-2) \\ u(T-3) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}}_{mT\times 1}$$

Il problema ammette soluzione sse:

$$x_{fin} - A^T x_{in} \in \operatorname{Im} R_T$$

Def: Uno stato $\bar{x}$ si dice raggiungibile (dallo stato zero) in k passi se esiste una sequenza di ingressi $u(0), u(1), \dots, u(k-1)$ tale che: $x(k) = \bar{x}$, con $x(0) = 0$.

$\Rightarrow$ L'insieme degli stati raggiungibili in K passi è dato dall'immagine della matrice $R_k = [B \;\; AB \;\; \dots \;\; A^{k-1}B]$

$X_k^R = Im\, R_k$ sottospazio lineare di R^n!

$X_1^R = Im\, R_1 = Im\, B$

$x(1) = A \cancel{x(0)} + B \cdot u(0)$

$X_2^R = Im\, R_2 = Im[B \;\; AB] \supseteq X_1^R$

$X_3^R = Im\, R_3 = Im\, [B \;\; AB \;\; A^2B] \subseteq X_2^R \subseteq X_1^R$

In generale:

$X_1^R \subseteq X_2^R \subseteq X_3^R \dots \subseteq X_k^R \subseteq X_{k+1}^R \dots$

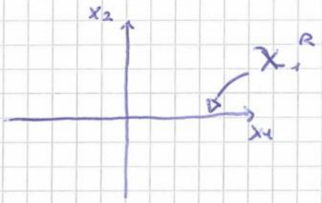
Se $\exists\, \bar{k} : X_{\bar{k}}^R = \mathbb{R}^n$, il sistema si dice completamente raggiungibile!

Esempio 1

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \qquad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

$X_1^R = Im[B] = L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$X_2^R = Im[B \;\; AB] = Im \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_2}$



Esempio 2

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$X_1^R = Im[B] = Im\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$X_2^R = Im[B \;\; AB] = Im\begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = X_1^R$

$X_3^R = Im[B \;\; AB \;\; A^2B] = Im\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$X_k^R = Im[B \;\; AB \;\; \dots \;\; A^{k-1}B] = Im\begin{bmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall a_1$

Sistema non completamente raggiungibile.

Riscrivendo il sistema:

$x_1(k+1) = a_1 x_1(k) + x_2(k) + u(k)$

$x_2(k+1) = a_2 x_2(k)$

Se $x(0)=0 \Rightarrow x_2(k)=0, \forall k$

Teorema di Cayley-Hamilton

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$.

$\Rightarrow A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$.

(A è radice del suo polinomio caratteristico)

Conseguenza:

$A^n = -\alpha_{n-1} A^{n-1} - \alpha_{n-2} A^{n-2} - \ldots - \alpha_1 A - \alpha_0 I$

$A^n B = -\alpha_{n-1} A^{n-1} B - \alpha_{n-2} A^{n-2} B - \ldots - \alpha_1 AB - \alpha_0 B$.

$\Rightarrow \operatorname{Im} R_{n+1} = \operatorname{Im} [A^n B \;\; A^{n-1} B \ldots AB \;\; B]$

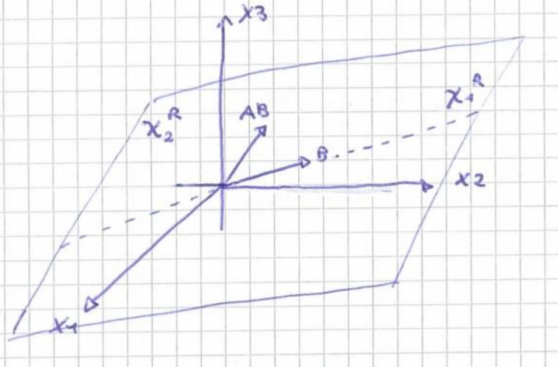
coincide con $\operatorname{Im} R_n = \operatorname{Im} [A^{n-1} B \ldots AB \;\; B]$

$\Rightarrow X_1^R \subseteq X_2^R \subseteq X_3^R \ldots \subseteq X_n^R = X_{n+1}^R = \ldots X_k^R$

L'insieme degli stati raggiungibili coincide con il sottospazio raggiungibile in n passi, che quindi prende il nome di sottospazio raggiungibile del sistema (X^R).

$X^R = \operatorname{Im} R$

dove $R = [B \;\; AB \ldots A^{n-1}B]$ è la MATRICE DI RAGGIUNGIBILITÀ del sistema $(n = \dim(x))$



Se $x(0) \neq 0$, devo verificare se il vettore $v = x_{fin} - A^T x_{in} \in \operatorname{Im} R_T$

che equivale a $x_{fin} \in A^T x_{in} + \operatorname{Im} R_T$

Calcolo della sequenza di ingresso $u(0), u(1), \dots, u(T-1)$.

$$x_{fin} - A^T x_{in} = v = R_T \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u(T-1) \\ u(T-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}}_{\mathcal{U}}$$

dobbiamo risolvere:

$$\underbrace{R_T}_{n \times Tm} \cdot \underbrace{\mathcal{U}}_{Tm \times 1} = \underbrace{v}_{n \times 1}$$ nell'incognita $\mathcal{U}$

Se $m = 1$ e $T = n$ e il sistema è completamente raggiungibile, si ha l'unica soluzione:

$\mathcal{U} = R^{-1} v$ [caso molto particolare]

In generale, se $T \cdot m > n$ (caso più comune) ci sono infinite soluzioni.

$\mathcal{U} = \bar{\mathcal{U}} + \mathcal{U}_{om}$ dove $R_T \mathcal{U}_{om} = 0$

e $\bar{\mathcal{U}}$ è una soluzione particolare di $R_T \mathcal{U} = v$.

Sia $\operatorname{Im} R_T = \mathbb{R}^n$ (sist. compl. raggiungibile)

e poniamo $\bar{\mathcal{U}} = R_T^T \eta$, $\eta \in \mathbb{R}^n$

$$\underbrace{R_T}_{n \times Tm} \cdot \underbrace{(R_T^T \eta)}_{Tm \times n} = v$$

$$\underbrace{(R_T R_T^T)}_{n \times n} \eta = v$$

$\hookrightarrow$ invertibile ($\operatorname{rank} R_T = n$)

$\eta = (R_T R_T^T)^{-1} v$

$\bar{\mathcal{U}} = R_T^T (R_T R_T^T)^{-1} v \longleftarrow$ soluzione particolare

$\mathcal{U} = R_T^T (R_T R_T^T)^{-1} v + \mathcal{U}_{om}$

con $\mathcal{U}_{om} \in \operatorname{Ker} R_T$

Problema: Dato $x(0) = x_{in}$ e $x(T) = x_{fin}$, determinare la sequenza $u(0), \dots, u(T-1)$ in grado di portare lo stato da x_{in} a x_{fin} in T passi, in modo che $\sum_{t=0}^{T-1} \|u(t)\|^2$ sia minima.

(problema di controllo a minima energia).

$\Rightarrow$ La soluzione è proprio

$\bar{\mathcal{U}} = R_T^T (R_T R_T^T)^{-1} v$!

$$\begin{cases} \min \sum \|u(t)\|^2 = \mathcal{U}^T \mathcal{U} \\ \mathcal{U} = \bar{\mathcal{U}} + \mathcal{U}_{om} \end{cases}$$

$\hat{\left[\right.}$ Vincolo del minimo

$\bar{\mathcal{U}} = R_T^T (R_T R_T^T)^{-1} v$

$\mathcal{U}_{om} \in \operatorname{Ker} R_T$

$\Rightarrow \bar{\mathcal{U}}^T \cdot \mathcal{U}_{om} = 0$

$$\mathcal{U}^T \mathcal{U} = (\bar{\mathcal{U}} + \mathcal{U}_{om})^T (\bar{\mathcal{U}} + \mathcal{U}_{om}) = \bar{\mathcal{U}}^T \bar{\mathcal{U}} + \cancel{\mathcal{U}_{om}^T \bar{\mathcal{U}}} + \cancel{\bar{\mathcal{U}}^T \mathcal{U}_{om}} + \mathcal{U}_{om}^T \mathcal{U}_{om} = \bar{\mathcal{U}}^T \bar{\mathcal{U}} + \mathcal{U}_{om}^T \mathcal{U}_{om}$$

Il minimo di $\mathcal{U}^T\mathcal{U}$ si ha scegliendo $\mathcal{U}_{om} = 0$ e quindi $\mathcal{U} = \bar{\mathcal{U}}$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \min \bar{\mathcal{U}}^T \bar{\mathcal{U}} + \mathcal{U}_{om}^T \mathcal{U}_{om} \\ \mathcal{U}_{om} \in \operatorname{Ker} R_T \end{cases} \Rightarrow \mathcal{U}_{om} \neq 0$$

Esempio: ← ESEMPIO TOP RAGGIUNGIBILITÀ

$x_1(k+1) = 2x_1(k) + x_2(k) + u(k)$

$x_2(k+1) = x_2(k)$

$x_3(k+1) = u(k)$

1) Determinare χ^R

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\chi^R = \operatorname{Im} \underbrace{[B \;\; AB \;\; A^2B]}_{R} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cancel{4} \\ 0 & 0 & \cancel{0} \\ 1 & 0 & \cancel{0} \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Sistema non completamente raggiungibile

2) Determinare il minor numero di passi per raggiungere lo stato $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ partendo da $x(0) = 0$ e la corrispondente sequenza di ingresso

$\bar{x} \in \chi^R$

$\chi_1^R = \operatorname{Im}[B] = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ <u>no</u>

$\chi_2^R = \operatorname{Im}[B \;\; AB] = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ <u>ok</u> $\qquad \bar{x} \in \operatorname{Im}[B \;\; AB]$

$$\underset{\bar{x}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \underset{[B \;\; AB]}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u(1) + 2u(0) = 2 \\ u(1) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u(0) = 1/2 \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

3) Determinare il minor numero di passi necessari per portare a 0 lo stato partendo da $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e la corrispondente sequenza di ingresso.

min k

tale che $\cancel{x(k)} - \underbrace{A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{} \in Im R_k$

$k=1 \quad -A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin Im R_1 = Im B = L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$k=2 \quad -A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in Im R_2 = Im \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ok

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u(1) + 2u(0) = -4 \\ u(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(0) = -2 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

DECOMPOSIZIONE DI RAGGIUNGIBILITA'

Supponiamo che il sistema non sia completamente raggiungibile e $\text{rank } R = \text{rank } [B \; AB \; \dots \; A^{n-1}B] = r < n$

Indice di Raggiungibilità.

Sia T_r una matrice $n \times r$, le cui colonne siano una base del sottospazio $X^R = Im R$

$T = [\underbrace{T_r}_{n \times r} \; \vdots \; \underbrace{T_{\bar{r}}}_{n \times (n-r)}]$ in modo che $\det T \neq 0$.

$T^{-1} = \begin{bmatrix} U_r \\ \bar{U}_r \end{bmatrix} \begin{matrix} \} r \times n \\ \} (n-r) \times n \end{matrix} \quad : U_{\bar{r}} T_r = 0$

Uso T per una trasformazione di similitudine del sistema.

$\bar{x}(k) = T^{-1} x(k)$

$\bar{x}(k+1) = T^{-1} x(k+1) = T^{-1} (Ax(k) + Bu(k))$

$= T^{-1} Ax(k) + T^{-1} Bu(k) = \underbrace{T^{-1} AT}_{\bar{A}} \bar{x}(k) + \underbrace{T^{-1} B}_{\bar{B}} u(k)$

$$\bar{A} = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} U_r \\ U_{\bar{r}} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} T_r & T_{\bar{r}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} U_r \\ U_{\bar{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AT_r & AT_{\bar{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_r A T_r & U_r A T_{\bar{r}} \\ U_{\bar{r}} A T_r & U_{\bar{r}} A T_{\bar{r}} \end{bmatrix}$$

Per Caley - Hamilton, $AT_r \in Im\, R$

$\Rightarrow U_{\bar{r}} A T_r = 0$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_r & A_{r\bar{r}} \\ 0 & A_{\bar{r}} \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = T^{-1} B = \begin{bmatrix} U_r B \\ U_{\bar{r}} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$B \in Im\, R \rightarrow U_{\bar{r}} B = 0$

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x_r(k) \\ x_{\bar{r}}(k) \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, r \\ \}\, n-r \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x_r(k+1) = A_r x_r(k) + A_{r\bar{r}} x_{\bar{r}}(k) + B_r u(k) \\ x_{\bar{r}}(k+1) = A_{\bar{r}} x_{\bar{r}}(k) \end{cases}$$

Parte non raggiungibile del sistema

{autovalori di A} = {autovalori di A_r} ∪ {autovalori di $A_{\bar{r}}$}

raggiungibili — non raggiungibili

$$y(k) = C x(k) + D u(k) = \underbrace{C\,T}_{\bar{C}}\, \bar{x}(k) + \underbrace{D}_{\bar{D}}\, u(k)$$

Sistemi equivalenti:

$\bar{A} = T^{-1} A T$

$\bar{B} = T^{-1} B$

$\bar{C} = C T$

$\bar{D} = D$

Ogni rappresentazione iso equivalente corrisponde a un cambio di base $\bar{x} = T^{-1} x$ nello spazio degli stati $\mathbb{R}^n$. (Hanno tutti la stessa funzione di trasferimento).

Esempio: ESEMPIO TOP DECOMPOSIZIONE RAGGIUNGIBILITÀ

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

$$R = [B \; AB] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{rank} = 1$$

$$\text{Im}\, R = L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \chi^R$$ il sistema non è completamente raggiungibile.

$$T = [\underbrace{T_r}_{\text{base di } \chi^R} \; \vdots \; \underbrace{T_{\bar r}}_{\text{completa la base di } \mathbb{R}^2}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_r & A_{r\bar r} \\ 0 & A_{\bar r} \end{bmatrix}$$

$\lambda_r = 3$ autov. raggiungibile

$\lambda_{\bar r} = -1$ autov. non raggiungibile.

$$\bar{B} = T^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = C T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_r(k+1) = 3\bar{x}_r(k) - 2\bar{x}_{\bar r}(k) + u(k)$$
$$\bar{x}_{\bar r}(k+1) = -\bar{x}_{\bar r}(k)$$
$$y(k) = \bar{x}_r(k)$$

$$G(z) = \bar{C}(zI - \bar{A})^{-1}\bar{B} = [1 \; 0] \begin{bmatrix} z-3 & 2 \\ 0 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{[1 \; 0]\begin{bmatrix} z+1 & 2 \\ 0 & z-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{(z-3)(z+1)} = \frac{\cancel{z+1}}{(z-3)\cancel{(z+1)}} = \frac{1}{z-3}$$ ← Sparisce il polo in -1 perché è un autovalore non raggiungibile.

Dalla decomposizione di raggiungibilità, si ottiene:

$$\bar{C}(zI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D} = C_r(zI - A_r)^{-1}B_r + D$$

dove $\bar{C} = CT = [C_r \;\; C_{\bar r}]$.

$\Rightarrow$ I poli della funzione di trasferimento sono gli autovalori raggiungibili. Quelli non raggiungibili si cancellano.

CONTROLLO IN RETROAZIONE DELLO STATO

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

Supponendo di conoscere lo stato $x(k)$ all'istante k, scegliamo l'ingresso

$u(k) = F \cdot x(k) + r(k)$

dove $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $r(k)$ è un opportuno segnale esterno di riferimento.

Schema di controllo ad anello chiuso

$x(k+1) = Ax(k) + B[Fx(k) + r(k)]$

$x(k+1) = Ax(k) + BFx(k) + Br(k)$

$x(k+1) = (A + BF)x(k) + Br(k)$

$$\underbrace{A}_{n \times n} + \underbrace{B}_{n \times m} \cdot \underbrace{F}_{m \times n}$$

Gradi di libertà: $m \cdot n$ elementi di F

Risultato: Se la coppia (A, B) è completamente raggiungibile $\forall$ insieme di autovalori $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n$ dati, $\exists$ una matrice F:

$\det(\lambda I - A - BF) = (\lambda - \bar{\lambda}_1)(\lambda - \bar{\lambda}_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \bar{\lambda}_n)$

ALLOCAZIONE DEGLI AUTOVALORI

MATLAB: Place, Acker

Un algoritmo per costruire la matrice F

0) Sono dati $A, B, \{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n\}$

1) Si costruiscono le matrici:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dove: $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$

Si noti che:

$A_c = T^{-1} A T$

$B_c = T^{-1} B$

dove $T = R \cdot R_c^{-1}$

$R = [\, B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1} B \,]$

$$R_c^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

2) $F_c = (F \cdot T) = [\, \hat{f}_0 \quad \hat{f}_1 \quad \dots \quad \hat{f}_{n-1} \,]$

$$A_c + B_c F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 + \hat{f}_0 & -a_1 + \hat{f}_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} + \hat{f}_{n-1} \end{bmatrix}$$

$\det(\lambda I - A_c - B_c F_c) = \lambda^n + (a_{n-1} - \hat{f}_{n-1}) \lambda^{n-1} + \dots + (a_1 - \hat{f}_1)\lambda + (a_0 - \hat{f}_0)$

3) Impongo:

$\lambda^n + (a_{n-1} - \hat{f}_{n-1}) \lambda^{n-1} + \dots + (a_1 - \hat{f}_1)\lambda + (a_0 - \hat{f}_0)$

$= (\lambda - \bar{\lambda}_1)(\lambda - \bar{\lambda}_2) \cdot \dots \cdot (\lambda - \bar{\lambda}_n)$ noto!

e trovo gli $\hat{f}_j$, $j = 0, 1, \dots, n-1$

4) $F = F_c \cdot T^{-1} = [\, \hat{f}_0 \quad \hat{f}_1 \quad \dots \quad \hat{f}_{n-1} \,] \cdot T^{-1}$

$\Rightarrow \det(\lambda I - A - BF) = \det(\lambda I - A_c - B_c F_c) = (\lambda - \bar{\lambda}_1)(\lambda - \bar{\lambda}_2) \cdot \dots \cdot (\lambda - \bar{\lambda}_n)$

NOTA:

Data una funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

le matrici A_c, B_c e

$C_c = [\, b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{n-1} \,]$, $D_c \neq 0$

formano la REALIZZAZIONE CANONICA DI CONTROLLO del sistema e si ha: $G(s) = C_c (sI - A_c)^{-1} B_c$

Cosa succede se (A, B) non è completamente raggiungibile?

Dalla decomposizione di raggiungibilità

$$x_r(k+1) = A_r x_r(k) + A_{r\bar{r}} x_{\bar{r}}(k) + B_r u(k)$$
$$x_{\bar{r}}(k+1) = A_{\bar{r}} x_{\bar{r}}(k)$$

$$u(k) = Fx(k) = \underbrace{FT}_{\bar{F}} \bar{x}(k) = [\bar{F}_r \mid \bar{F}_{\bar{r}}] \begin{bmatrix} x_r(k) \\ x_{\bar{r}}(k) \end{bmatrix}$$
$$= \bar{F}_r x_r(k) + \bar{F}_{\bar{r}} x_{\bar{r}}(k).$$

Sostituendo nel sistema:

$$x_r(k+1) = A_r x_r(k) + A_{r\bar{r}} x_{\bar{r}}(k) + B_r(\bar{F}_r x_r(k) + \bar{F}_{\bar{r}} x_{\bar{r}}(k))$$
$$= (A_r + B_r \bar{F}_r) x_r(k) + (A_{r\bar{r}} + B_r \bar{F}_{\bar{r}}) x_{\bar{r}}(k).$$

$$x_{\bar{r}}(k+1) = A_{\bar{r}} x_{\bar{r}}(k)$$

$$\bar{A} + \bar{B}\bar{F} = \left[\begin{array}{c|c} A_r + B_r F_r & A_{r\bar{r}} + B_r F_{\bar{r}} \\ \hline 0 & A_{\bar{r}} \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ con la retroazione dello stato è possibile modificare solo gli autovalori della parte raggiungibile A_r (che possono essere allocati a piacere)

Def: un sistema si dice STABILIZZABILE se può essere reso asintoticamente stabile mediante retroazione dello stato.

Risultato: Un sistema è stabilizzabile sse gli autovalori non raggiungibili sono asintoticamente stabili (cioè a modulo < 1 nei sistemi TD, a parte reale < 0 nei sistemi TC).

SISTEMI A TEMPO CONTINUO

Tutti i concetti e i risultati visti per i sistemi TD valgono anche per quelli TC.

Uno stato $\bar{x} \in \operatorname{Im}[B \; AB \dots A^{n-1}B]$ è raggiungibile $\forall T > 0$. cioè $\exists u(t), t \in [0, T] : \bar{x} = \int_0^T e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$.

Esercizio:

$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + u(t)$

$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$

$\dot{x}_3(t) = x_2(t) + u(t)$

Determinare, se possibile, una legge di controllo $u(t) = Fx(t)$ di modo che il sistema risultante abbia modi: e^{-t}, e^{-2t}, te^{-2t}.

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $u(t) = Fx(t)$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = (A + BF)x(t)$

Gli autovalori di $A + BF$ devono essere $-1, -2, -2$ cioè

$\det(sI - A - BF) = (s+1)(s+2)^2$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$R = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\det R = 1 - (-3) = 4 \Rightarrow (A, B)$ è completamente raggiungibile.

Calcolo di F

1° metodo. Algoritmo (A_c, B_c)

$\det(sI - A) = \det\begin{pmatrix} s-1 & -2 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & -1 & s \end{pmatrix} = (s-1)(s^2-1) = s^3 - s^2 - s + 1$

$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$s^3 + (a_2 - \hat{f}_2)s^2 + (a_1 - \hat{f}_1)s + (a_0 - \hat{f}_0) = (s+1)(s+2)^2$

$s^3 + (-1 - \hat{f}_2)s^2 + (-1 - \hat{f}_1)s + (1 - \hat{f}_0) = (s+1)(s^2+4s+4)$

$= s^3 + 5s^2 + 8s + 4$.

$\begin{cases} -1 - \hat{f}_2 = 5 \\ -1 - \hat{f}_1 = 8 \\ 1 - \hat{f}_0 = 4 \end{cases}$ $\quad \hat{f}_1 = -9 \quad \hat{f}_2 = -6 \quad \hat{f}_0 = -3$ $\quad F_c = [-3 \ -9 \ -6]$

$F = F_c \cdot T^{-1}$ dove $T = R \cdot R_c^{-1}$

$R = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$R_c^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(In alternativa $R_c = [B_c \quad A_c B_c \quad A_c^2 B_c])$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{\underset{\underset{2}{\parallel}}{\det T}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = [-3 \ -8 \ -6] \ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [-18 \ -12 \ 6] = [-9 \ -6 \ 3]$$

Verifica: $A + BF$ deve avere autovalori $-1, -2, -2$

2° metodo: sostituzione diretta di F

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad F = [f_0 \ f_1 \ f_2]$$

$$A + BF = \begin{bmatrix} 1+f_0 & 2+f_1 & f_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ f_0 & 1+f_1 & f_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A - BF) = (s+1)(s+2)^2 = s^3 + 5s^2 + 8s + 4$$

$$\det \begin{pmatrix} s-1-f_0 & -2-f_1 & -f_2 \\ 0 & s & -1 \\ -f_0 & -1-f_1 & s-f_2 \end{pmatrix} = (s-1-f_0)(s^2 - f_2 s - 1 - f_1)$$

$$-f_0(2 + f_1 + f_2 s) = s^3 + s^2(1 - f_0 - f_2) + s(-1 - f_1 + f_2)$$

$$+ 1 + f_0 + f_1 + \cancel{f_0} f_1 - 2f_0 - \cancel{f_0} f_1 = s^3 + 5s^2 + 8s + 4$$

$$\begin{cases} -1 - f_0 - f_2 = 5 \\ -1 - f_1 + f_2 = 8 \\ 1 - f_0 + f_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow F = [-9 \ -6 \ 3]$$

Esercizio

$x_1(k+1) = x_2(k) + \alpha x_3(k)$

$x_2(k+1) = \alpha x_1(k) + x_3(k)$

$x_3(k+1) = -x_3(k) + u(k)$

1) Per quali valori di α non è compl. raggiungibile?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 0 & 1 & \alpha^2 - 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det R = \alpha(\alpha^2-1) - (1-\alpha) = \alpha(\alpha-1)(\alpha+1) + \alpha - 1 = (\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)$

Sistema compl. raggiungibile $\forall \alpha \neq 1$

per $\alpha = 1$ non compl. ragg.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad X^R = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2) $$T = [\, T_R \mid T_{\bar{R}} \,] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$\underbrace{\qquad}_{\text{Base di } X^R}$

$\bar{A} = T^{-1} A T$

$$T^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{c|c} \underset{}{\overset{2\times 2}{A_R}} & A_{R\bar{R}} \\ \hline 0 & \underset{1\times 1}{A_{\bar{R}}} \end{array} \right]$$

Autovalore non raggiungibile.

$\Downarrow$

Sistema non stabilizzabile

($\forall F$ avrò sempre il modo $(-1)^k$)

3)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad F = [\, f_0 \quad f_1 \quad f_2 \,]$$

$\det[zI - A - BF] = z^3$

$$A + BF = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ f_0 & f_1 & -1+f_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(zI - A - BF) = \det \begin{pmatrix} z & -1 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ -f_0 & -f_1 & z+1-f_2 \end{pmatrix}$$

$$= z\,[z^2 + (1-f_2)z - f_1] - f_0 = \underbrace{z^3 + (1-f_2)z^2 - f_1 z}_{z^3}$$

$$\begin{cases} 1 - f_2 = 0 \\ -f_1 = 0 \\ -f_0 = 0 \end{cases} \qquad F = [0 \ 0 \ 1]$$

$u(k) = x_3(k)$

$x_1(k+1) = x_2(k)$

$x_2(k+1) = x_3(k)$

$x_3(k+1) = -x_3(k) + u(k)$

Se $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_e(k) = (A+BF)^k x(0) \Rightarrow \qquad A+BF = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x_e(1) = (A+BF)\, x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_e(2) = (A+BF)\, x_e(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_e(3) = 0 \rightarrow x_e(k) = 0 \quad \forall k \geq 3$.

OSSERVATIVITÀ

$x(k+1) = Ax(k)$

$y(k) = C \cdot x(k)$

Def: Uno stato $\bar{x}$ si dice NON OSSERVABILE (o indistinguibile dallo stato nullo) in k passi se da $x(0) = \bar{x}$ si genera l'uscita:

$y(0) = y(1) = y(2) = \dots = y(k-1) = 0$.

Chi sono gli stati non osservabili?

$x_e(k) = A^k x(0)$

$y_e(k) = C \cdot A^k x(0)$

$y(0) = C\, x(0)$

$y(1) = C \cdot A\, x(0)$

$y(2) = CA^2 x(0)$

$\vdots$

$y(k-1) = CA^{k-1} x(0)$

$$\rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(k-1) \end{bmatrix}}_{kp \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix}}_{kp \times n} \underbrace{x(0)}_{n \times 1}$$

La matrice $O_k = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix}$ si dice MATRICE DI OSSERVABILITÀ in k passi.

L'insieme degli stati non osservabili in k passi è dato da:

$X_k^{no} = \operatorname{Ker} O_k$ (sono gli $\bar{x}$: $O_k \bar{x} = 0$)

$$X_1^{no} \supseteq X_2^{no} \supseteq X_3^{no} \supseteq \dots \supseteq X_k^{no} \supseteq X_{k+1}^{no} \dots$$

Per il teorema di Cayley-Hamilton:

$$A^n = \alpha_{n-1} A^{n-1} + \alpha_{n-2} A^{n-2} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I$$

e quindi

$$CA^n = \alpha_{n-1} CA^{n-1} + \alpha_{n-2} CA^{n-2} + \dots + \alpha_1 CA + \alpha_0 C.$$

perciò ho che:

$$X_n^{no} = X_k^{no} \quad \forall k \geq n.$$

La matrice:

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$ si dice MATRICE di OSSERVABILITÀ del sistema

e $X^{no} = \operatorname{Ker} \mathcal{O}$ è lo spazio degli stati non osservabili.

Se $\operatorname{rank} \mathcal{O} = n$, allora $\operatorname{Ker} \mathcal{O} = \{0\}$ e il sistema si dice COMPLETAMENTE OSSERVABILE.

Se il sistema è completamente osservabile, è possibile risalire allo stato iniziale $x(0)$, a partire dalle prime n uscite $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix}}_{pn \times 1} = \mathcal{O} \cdot \underbrace{x(0)}_{n \times 1}$$

$pn \times 1 \to Y$

Se il sistema non è completamente osservabile, il sistema lineare $Y = \mathcal{O} x(0)$ ammette infinite soluzioni del tipo: $x(0) = \bar{x} + x_{no}$

dove $\bar{x}$ è una soluzione particolare di $Y = \mathcal{O} \cdot x(0)$ e $x_{no} \in \operatorname{Ker} \mathcal{O}$.

Nel caso di sistemi con ingresso $u(k)$ (noto):

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

$$y_{tot}(k) = CA^k x(0) + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-1-i} Bu(i) + Du(k)}_{y_f(k)}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{TOT}(0) - y_f(0) \\ y_{TOT}(1) - y_f(1) \\ \vdots \\ y_{TOT}(n-1) - y_F(n-1) \end{bmatrix}}_{Y} \begin{matrix} = Cx(0) \\ = CAx(0) \\ \vdots \\ = CA^{n-1}x(0) \end{matrix}$$

$Y \leftarrow$ Applico la stessa idea del caso autonomo a questo vettore

Esempio: ESEMPIO OSSERVABILITÀ

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x(k) \qquad n = 2$$

$$y(k) = [\,1 \;\; 0\,]\, x(k)$$

Studiare l'osservabilità del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_2 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

Se $\alpha \neq 0$ il sistema è completamente osservabile.

$x_1(k+1) = x_1(k) + \alpha \cdot x_2(k)$

$y(k) = x_1(k)$

Se $\alpha = 0$ il sistema non osservabile è dato da:

$$\mathcal{X}^{no} = \operatorname{Ker} \mathcal{O} = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

DECOMPOSIZIONE DI OSSERVABILITÀ

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

$y(k) = Cx(k) + Du(k)$

$$\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{O}) = \dim \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \sigma \geq 0$$

Sia $v_1, v_2, \dots, v_\sigma$ una base di $\mathcal{X}^{no} = \operatorname{Ker} \mathcal{O}$

Si costruisca la matrice T non singolare

$$T = [\, \underbrace{w_1 \,\vdots\, w_2 \,\vdots\, \dots \,\vdots\, w_{n-\sigma}}_{\substack{\text{in modo da} \\ \text{completare la base} \\ \text{di } \mathbb{R}^n}} \,\vdots\, \underbrace{v_1 \,\vdots\, v_2 \,\vdots\, \dots \,\vdots\, v_\sigma}_{\text{Base di } \mathcal{X}^{no}} \,]$$

$\bar{A} = T^{-1}AT$

$\bar{B} = T^{-1}B \qquad \bar{D} = D$

$\bar{C} = CT$

Con la seguente struttura:

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} A_o & 0 \\ \hline A_{o\bar{o}} & A_{\bar{o}} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, n-\sigma \\ \}\, \sigma \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{n-\sigma} & \underbrace{\quad}_{\sigma} \end{array} \end{array}$$

$$\bar{B} = T^{-1}B = \left[\begin{array}{c} B_o \\ \hline B_{\bar{o}} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, n-\sigma \\ \}\, \sigma \end{array}$$

$$\bar{C} = CT = [\, \underbrace{C_o}_{n-\sigma} \mid \underbrace{0}_{\sigma} \,] \; \}\, p$$

$$\bar{D} = D$$

$$\bar{x}(k) = T^{-1}x(k) = \begin{bmatrix} \bar{x}_o(k) \\ \bar{x}_{\bar{o}}(k) \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_o(k+1) = A_o \cdot \bar{x}_o(k) + B_o u(k)$$

$$\bar{x}_{\bar{o}}(k+1) = A_{o\bar{o}} \bar{x}_o(k) + A_{\bar{o}} \bar{x}_{\bar{o}}(k) + B_{\bar{o}}(k)$$

$$y(k) = C_o \bar{x}_o(k) + Du(k)$$

{autovalori di A} = {Autovalori di A_o} ∪ {Autovalori di $A_{\bar{o}}$}

autov. osservabili — autov. non osservabili (dinamica dello spazio non osservabile X^{no}).

Funzione di Trasferimento:

$$G(z) = \bar{C}(zI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D}$$

$$= [C_o \;\; 0] \left[\begin{array}{c|c} zI - A_o & 0 \\ \hline -A_{o\bar{o}} & zI - A_{\bar{o}} \end{array}\right]^{-1} \begin{bmatrix} B_o \\ B_{\bar{o}} \end{bmatrix} + D$$

$$= [C_o \;\; 0] \left[\begin{array}{c|c} (zI - A_o)^{-1} & 0 \\ \hline * & (zI - A_{\bar{o}})^{-1} \end{array}\right] \begin{bmatrix} B_o \\ B_{\bar{o}} \end{bmatrix} + D$$

$$= [\, C_o(zI - A_o)^{-1} \mid 0 \,] \begin{bmatrix} B_o \\ B_{\bar{o}} \end{bmatrix} + D$$

$$= C_o (zI - A_o)^{-1} B_o + D.$$

Solo gli autovalori osservabili sono poli della funz. di trasferimento. Quelli non osservabili si cancellano con altrettanti zeri.

<u>Risultato</u>: I poli della funzione di trasferimento sono tutti e soli gli autovalori raggiungibili e osservabili della matrice A.

Esempio: ESEMPIO DECOMPOSIZIONE OSSERVABILITÀ

$$x(k+1) = \left[\begin{array}{cc:c} 1/2 & 0 & -2 \\ \hdashline -1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] x(k) \rightarrow \text{autovalori}: \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1$$

$$y(k) = [\,1 \;\; 0 \;\; 1\,]\, x(k)$$

$\hookrightarrow$ non è in forma di matrici di osservabilità c'è 1 e non $\emptyset$.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1 \\ 1/4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{O})) = 1$$

$$\mathrm{Ker}\,\mathcal{O} = L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = X^{no}$$

Decomposizione di osservabilità:

$$T = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow T^{-1} = T$$

Base di X^{no}

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hdashline -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} A_o & 0 \\ \hdashline A_{o\bar{o}} & A_{\bar{o}} \end{array}\right]$$

$$\bar{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hdashline 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} B_o \\ \hdashline B_{\bar{o}} \end{array}\right]$$

$$\bar{C} = CT = [\,1\;0\;1\,]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [\,1 \;\; 1 \,\vdots\, 0\,] = [\,C_o \,,\, 0\,]$$

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B = [\,1\;0\;1\,]\begin{bmatrix} z-\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 1 & z-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$[1\ 0\ 1]\ \frac{\begin{bmatrix} (z-\frac{1}{3})(z-1) & 0 & -2(z-\frac{1}{3}) \\ -(z-1) & (z-\frac{1}{2})(z-1) & -\frac{1}{3}(z-\frac{1}{2})+2 \\ 0 & 0 & (z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3}) \end{bmatrix}}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})(z-1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\left[(z-\frac{1}{3})(z-1) \quad 0 \quad -2(z-\frac{1}{3})+(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3}) \right]}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})(z-1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\cancel{(z-\frac{1}{3})}(z-1) - 2\cancel{(z-\frac{1}{3})} + (z-\frac{1}{2})\cancel{(z-\frac{1}{3})}}{(z-\frac{1}{2})\cancel{(z-\frac{1}{3})}(z-1)} = \frac{2z - \frac{7}{2}}{(z-\frac{1}{2})(z-1)}$$

Viene cancellato l'autovalore non osservabile $\lambda = \frac{1}{3}$

"DUALITÀ"

Si dice che raggiungibilità e osservabilità sono concetti duali.

Siano (A, B, C, D) le matrici di un sistema Σ.
Il sistema "duale" Σ_d è definito dalle matrici (A^T, C^T, B^T, D^T)

Il sistema Σ è completamente raggiungibile sse il sistema Σ_d è completamente osservabile.
Il sistema Σ è completamente osservabile sse il sistema Σ_d è completamente raggiungibile.

Σ

$$R = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$$

Σ_d

$$R_d = [C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T] = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^T$$

OSSERVATORE ASINTOTICO DELLO STATO

Problema: determinare ad ogni istante k, una stima $\hat{x}(k)$ di $x(k)$, basata sulle uscite $y(0), y(1), \dots, y(k-1), y(k)$:

$$\lim_{k \to +\infty} \|x(k) - \hat{x}(k)\| = 0.$$

$\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ errore di stima all'istante k.

1) Osservatore asintotico ad anello aperto:

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

$y(k) = Cx(k)$ $\qquad x(0)$ vero

$\Rightarrow \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k)$ $\qquad \hat{x}(0)$ stima iniziale

$$\tilde{x}(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) = Ax(k) + B\cancel{u(k)} - A\hat{x}(k) - B\cancel{u(k)}$$
$$= A(x(k) - \hat{x}(k)) = A\tilde{x}(k)$$

$\tilde{x}(k+1) = A\tilde{x}(k)$ $\qquad \tilde{x}(0) = x(0) - \hat{x}(0)$.

È un osservatore asintotico sse il sistema è asintoticamente stabile (cioè A ha tutti autovalori interni al cerchio unitario).

Questo metodo è concettualmente sbagliato perché non usa le uscite!

2) Osservatore asintotico ad anello chiuso.

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L\underbrace{(y(k) - C\hat{x}(k))}_{\text{Errore di stima dell'uscita}}$$

$$\tilde{x}(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + B\cancel{u(k)} - A\hat{x}(k) - B\cancel{u(k)}$$
$$- L(y(k) - C\hat{x}(k))$$
$$= Ax(k) - A\hat{x}(k) - L(Cx(k) - C\hat{x}(k))$$
$$= A(x(k) - \hat{x}(k)) - LC(x(k) - \hat{x}(k))$$
$$= (A - LC)(x(k) - \hat{x}(k)) = (A - LC)\tilde{x}(k).$$

$$\Rightarrow \tilde{x}(k+1) = (\underbrace{A}_{n\times n} - \underbrace{L}_{n\times p}\underbrace{C}_{p\times n})\tilde{x}(k).$$

È possibile scegliere L in modo da allocare arbitrariamente gli autovalori di $A - LC$?

Risultato: Se la coppia (A, C) è completamente osservabile, $\forall$ insieme di autovalori $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ dati, esiste una matrice L:

$$\det(\lambda I - A + LC) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n)$$

Se il sistema non è completamente osservabile, dalla decomposizione di osservabilità si ha:

$$x_o(k+1) = A_o x_o(k) + B_o u(k)$$
$$x_{\bar{o}}(k+1) = A_{o\bar{o}} x_o(k) + A_{\bar{o}} x_{\bar{o}}(k) + B_{\bar{o}} u(k)$$
$$y(k) = C_o x_o(k)$$

$$L = \begin{bmatrix} L_o \\ \hline L_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n-\sigma \\ \} \sigma \end{matrix}$$

$$\bar{A} - \bar{L}\bar{C} = \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ A_{o\bar{o}} & A_{\bar{o}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_o \\ L_{\bar{o}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_o & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} A_o - L_o C_o & 0 \\ \hline A_{o\bar{o}} - L_{\bar{o}} C_o & A_{\bar{o}} \end{array}\right]$$

La matrice L non è in grado di modificare gli autovalori della parte non osservabile.

Risultato: Se la coppia (A, C) non è completamente osservabile è possibile costruire un osservatore asintotico sse gli autovalori non osservabili sono asintoticamente stabili. In tal caso il sistema si dice rivelabile.

Costruzione della matrice L.

$(A-LC)$ ha gli stessi autovalori di $(A-LC)^T$

$$(A-LC)^T = A^T - C^T \cdot L^T = A_d + B_d F_d$$

$A_d = A^T$

$B_d = C^T$

$F_d = -L^T$

Algoritmo:

1) Determinare F_d in modo da allocare gli autovalori di $A^T + C^T F_d$. (con "place" o "acker")
2) Porre $L = -F_d^T$

Osservazione: La coppia (A, B) è stabilizzabile sse la coppia (A^T, B^T) è rivelabile.
La coppia (A, C) è rivelabile sse la coppia (A^T, C^T) è stabilizzabile.

Caso Tempo - Continuo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad t \in \mathbb{R}$$
$$y(t) = Cx(t)$$

Tutti i concetti visti valgono analogamente, apparte il concetto di osservabilità in k passi.

Uno stato $\bar{x}$ è non osservabile se:

$$\bar{x} \in Ker\, \mathcal{O} = Ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

L'osservatore asintotico sarà:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t))$$

e il sistema è rivelabile se gli autovalori non osservabili di A hanno parte reale < 0.

Esempio:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

Determinare un osservatore asintotico dello stato in modo che l'errore di stima $x(k) - \hat{x}(k)$ si annulli in tempo finito.

-> equivale a determinare L : A - LC abbia tutti autovalori nulli (garantisce $\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k) = 0$ $\forall k \geq 2$, $\forall \hat{x}(0)$).

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \quad A - LC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - l_1 & 1 \\ -1 - l_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - (A - LC)) = \lambda^2 \leftarrow \text{Doppio autovalore nullo.}$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 1 + l_1 & -1 \\ 1 + l_2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1 + l_1)(\lambda - 1) + 1 + l_2$$
$$= \lambda^2 + \lambda(-2 + l_1) + 1 - l_1 + 1 + l_2 = \lambda^2$$

$$\begin{cases} -2 + l_1 = 0 \\ +2 + l_2 - l_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_1 = 2 \\ l_2 = 0 \end{cases} \quad L = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - C\hat{x}(k))$$

$$\hat{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}(k) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \left(y(k) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(k) \right)$$

$$\begin{cases} \hat{x}_1(k+1) = \hat{x}_1(k) + \hat{x}_2(k) + 2\left(y(k) - \hat{x}_1(k)\right) \\ \hat{x}_2(k+1) = -\hat{x}_1(k) + \hat{x}_2(k) \end{cases}$$

Esempio:

Dato il sistema:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -2 \\ -1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

determinare, se possibile, un osservatore asintotico: l'errore di sistema $x(k) - \hat{x}(k)$ converga a $\emptyset$ con modi del tipo ρ^k, con $|\rho| \leq \frac{1}{3}$

Dalla decomposizione di osservabilità abbiamo visto che:

A_o

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1/2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \qquad \frac{1}{3} \text{ unico } \lambda \text{ non osservabile}$$

$A_{\bar{o}}$

Tramite la matrice L dell'osservatore asintotico, è possibile modificare gli autovalori osservabili $\frac{1}{2}$ e 1.

autovalori di $A - LC = \{ \lambda_1, \lambda_2, \frac{1}{3} \}$

posso allocarli

$$A - LC = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -2 \\ -1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 - l_1 & 0 & -2 - l_1 \\ -1 - l_2 & 1/3 & -1/3 - l_2 \\ -l_3 & 0 & 1 - l_3 \end{bmatrix}$$

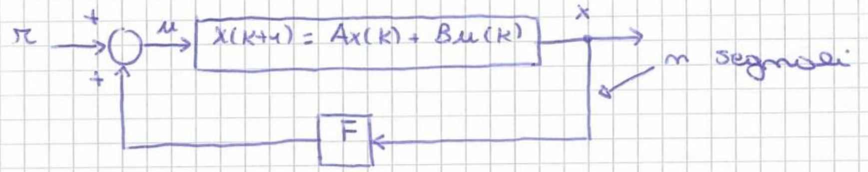
$$\det(\lambda I - (A - LC)) = \left(\lambda - \frac{1}{3}\right) \det \begin{pmatrix} \lambda - \frac{1}{2} + l_1 & 2 + l_1 \\ l_3 & \lambda - 1 + l_3 \end{pmatrix}$$

-> tramite l_1 e l_3 possiamo allocare gli autovalori λ_1 e λ_2 (al posto di quelli osservabili)

-> l'elemento l_2 è inutile (posso metterci qualunque valore)

adesso devo trovare i λ rimanenti!

RETROAZIONE DELLO STATO

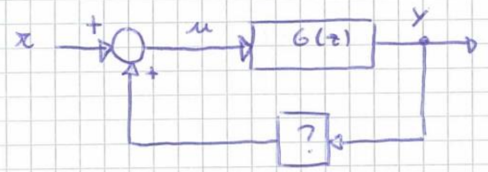


$u(k) = r(k) + F \cdot x(k) = r(k) + f_1 x_1(k) + f_2 x_2(k) + \ldots + f_n x_n(k)$

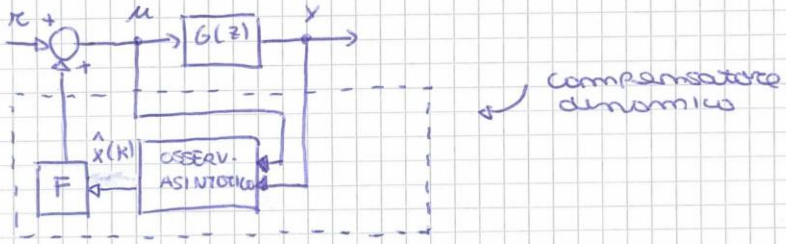
Devo avere accesso a tutte le variabili di stato

Se non posso (o non voglio) misurare tutti gli stati, ma solo i segnali di uscita $y(k) = Cx(k) + Du(k)$ posso ancora modificare la dinamica del sistema?

RETROAZIONE DELL'USCITA



COMPENSATORE DINAMICO



Idea: Retroazione (statica) dello stato stimato dall'osservatore asintotico (dinamico!)

Sistema $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$

Osservatore $\left\{ \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L\{y(k) - C\hat{x}(k)\} \right.$

Retroazione $\left\{ u(k) = r(k) + F\hat{x}(k) \right.$

Obiettivo: Determinare una rappresentazione I/S/O del sistema complessivo.

Vettore di stato esteso

$$\mathcal{E}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \tilde{x}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k) - \hat{x}(k) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}(k+1) = \bar{A}\,\mathcal{E}(k) + \bar{B}\, r(k)$$

$$y(k) = \bar{C}\,\mathcal{E}(k)$$

$$\mathcal{E}(k+1) = \begin{bmatrix} x(k+1) \\ \tilde{x}(k+1) \end{bmatrix} \qquad \tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$$

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) = Ax(k) + Br(k) + BF\hat{x}(k)$$
$$= Ax(k) + Br(k) + BF(x(k) - \tilde{x}(k))$$
$$= (A+BF)x(k) - BF\tilde{x}(k) + Br(k).$$

$$\tilde{x}(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) = Ax(k) + \cancel{Bu(k)} - A\hat{x}(k) - \cancel{Bu(k)} + LC\hat{x}(k)$$
$$- Ly(k) = Ax(k) - A\hat{x}(k) - LCx(k) + LC\hat{x}(k)$$
$$= A\tilde{x}(k) - LC\tilde{x}(k) = (A-LC)\tilde{x}(k).$$

$$y(k) = Cx(k) = \begin{bmatrix} C & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \tilde{x}(k) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}(k+1) = \left[\begin{array}{c|c} A+BF & -BF \\ \hline \emptyset & A-LC \end{array}\right] \mathcal{E}(k) + \begin{bmatrix} B \\ \emptyset \end{bmatrix} r(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} C & \emptyset \end{bmatrix} \mathcal{E}(k)$$

{autovalori del sistema complessivo} =
= {autovalori di $A+BF$} ∪ {autovalori di $A-LC$}

→ Principio di Separazione: la dinamica dell'osservatore è separata da quella della retroazione

Il sistema è già in decomposizione di raggiungibilità: gli autovalori di $A-LC$ sono non raggiungibili.
La funzione di trasferimento $W(z)$ da $r(k)$ a $y(k)$ è:
$$W(z) = C(zI - (A+BF))^{-1}B$$
I poli di $W(z)$ coincidono con gli autovalori di $A+BF$.
La dinamica dell'osservatore non entra nella funzione di trasferimento (attenzione: influenza la risposta libera del sistema).

$$\mathcal{E}_e(k) = \begin{bmatrix} A+BF & -BF \\ 0 & A-LC \end{bmatrix}^k \mathcal{E}_e(0)$$

$$x(k+1) = (A+BF)\,x(k) - BF\tilde{x}(k)$$
$$\tilde{x}(k+1) = (A-LC)\,\tilde{x}(k)$$

Per questo motivo si tende a fare in modo che i modi di A-LC vadano a zero più velocemente di quelli di A+BF (se possibile!)

ES. 3

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

1) Determinare modi della risp. libera e stabilità del sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ $\rightarrow$ modi: $1(t)$, e^{-t}

Sistema marginalmente stabile.

2) Determinare $x(0)$ sapendo che:

$t=0 \Rightarrow y_e(0) = 1$

$t=1 \Rightarrow y_e(1) = 2$

Riportare l'espressione di $y_e(t)$.

$$y_e(t) = C\cdot e^{At}\cdot x(0) \nearrow \begin{matrix} C\cdot e^{A\cdot 0}\cdot x(0) = 1 \\ C\cdot e^{A\cdot 1}\, x(0) = 2 \end{matrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ compl. osservabile}$$

$$Y_e(s) = C(sI-A)^{-1}\cdot x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}}{s(s+1)} = \frac{x_1(0)\cdot(s+1) + x_2(0)}{s(s+1)} = \frac{x_1(0)}{s} + \frac{x_2(0)}{s(s+1)}$$

$$= \frac{x_1(0)}{s} + x_2(0)\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right]$$

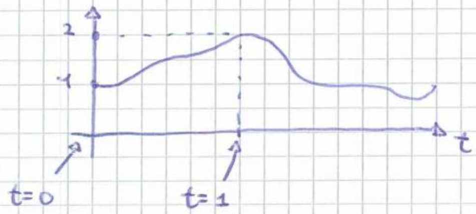
$y_e(t) = x_1(0)\cdot 1(t) + x_2(0)\left[1(t) - e^{-t}\cdot 1(t)\right]$

$y_e(0) = x_1(0) + x_2(0)\,[1-1] = x_1(0) = 1$

$y_e(1) = x_1(0) + x_2(0)\,[1 - e^{-1}] = 2$

$x_1(0) = 1$

$1 + x_2(0)\,[1 - e^{-1}] = 2 \Rightarrow x_2(0) = \frac{1}{1-e^{-1}}$



3) Determinare le equazioni di un osservatore asintotico ad anello chiuso: l'evoluzione dell'errore di stima dello stato sia pari a

$$x(t) - \hat{x}(t) = \gamma_1 e^{-2t} + \gamma_2 t e^{-2t}$$

$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t))$

$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ evolve secondo $\dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\,\tilde{x}(t)$

$\to \tilde{x}(t) = \gamma_1 e^{-2t} + \gamma_2 t e^{-2t}$

Devo scegliere L in modo che $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -2$:

$$\det(\lambda I - A + LC) = (\lambda+2)^2$$

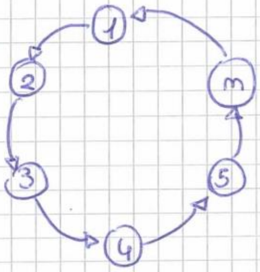
$A - LC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 & 1 \\ -l_2 & -1 \end{pmatrix}$

$\det\begin{pmatrix} \lambda + l_1 & -1 \\ l_2 & \lambda+1 \end{pmatrix} = (\lambda + l_1)(\lambda+1) + l_2 = (\lambda+2)^2$

$\lambda^2 + (1 + l_1)\lambda + l_1 + l_2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4$

$\begin{cases} 1 + l_1 = 4 \\ l_1 + l_2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} l_1 = 3 \\ l_2 = 1 \end{cases} \quad L = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Es. 5



$x_i(k)$: stato del nodo i

$x_i(k+1) = x_{i+1}(k)$ per $i = 1, \dots, n$

$x_1(k+1) = x_2(k)$

$x_2(k+1) = x_3(k)$

$\vdots$

$x_n(k+1) = x_n(k)$

$n = 4$.

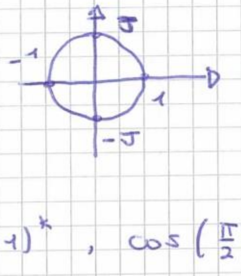
1) Determinare modi della risposta libera e discutere la stabilità del sistema

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^4 + 1(-1) = \lambda^4 - 1 = 0$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = j$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = -j$

In generale le radici di $\lambda^n = +1$ sono gli n numeri complessi che dividono in parti uguali il cerchio unitario



Modi

$1(k)$, $(-1)^k$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)$, $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}k\right)$

Il sistema è marginalmente stabile.

2) Dimostrare che il sistema è completamente osservabile nel caso in cui $y(k)$ sia una qualsiasi delle 4 variabili di stato.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se misuro $y(k) = x_1(k) = [1\ 0\ 0\ 0]\, x(k)$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Completamente osservabile!

Se misuro $y(k) = x_2(k) = [0\ 1\ 0\ 0]\, x(k)$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Completamente osservabile

Idem se misuro x_3 e x_4.

3) Assumendo $y(k) = x_1(k) + x_2(k)$, determinare il sottospazio degli stati n.o. del sistema. Determinare se è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato.

Se misuro:

$y(k) = x_1(k) + x_2(k) = [1\ 1\ 0\ 0]\, x(k)$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det \mathcal{O} = 1 - 1 \cdot 1 = \varnothing$

Sistema non è completamente osservabile.

$$X^{no} = \operatorname{Ker} \mathcal{O} = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x + y = 0$
$x + z = 0$
$z + w = 0$
$w + x = 0$