SISTEMI DINAMICI

[Fotocopie di Appunti]

A CURA DI ALESSANDRO PAGHI

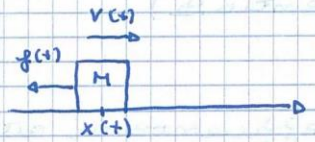
PROFESSORE: Andrea Garulli (http://www3.diism.unisi.it/people/person.php?id=13)

LINK AL CORSO ANNO 2014/2015:
http://www3.diism.unisi.it/FAC/index.php?bodyinc=didattica/inc.insegnamento.php&id=54893&aa=2014

FREQUENTAZIONE: Consigliata.

SISTEMA DINAMICO: fenomeno naturale o artificiale le cui grandezze caratteristiche variano nel tempo.

RAPPRESENTAZIONE DEI SISTEMI DINAMICI



t = tempo

$x(t)$ = posizione all'istante t

$v(t)$ = velocità all'istante t

$f(t)$ = forza esercitata sul corpo a t.

VARIABILI D'INGRESSO: Sono quelle variabili che provengono dall'esterno

Scriviamo un modello matematico per questo sistema:

$M \cdot \dot{v}(t) = -f(t)$ dove $\frac{\partial v(t)}{\partial t} = \dot{v}(t) = a(t)$

$v(t)$ è la VARIABILE D'USCITA

Questa è la RAPPRESENTAZIONE IMPLICITA, in quanto mette in relazione la variabile d'ingresso e di uscita ma non chiarisce il valore di quest'ultima.

Supponiamo che: $v(t_0) = v_0$

Problema: noto $f(t)$, determinare $v(t)$, $\forall t > t_0$

Ipotesi: $f(t) = u(t, v(t))$

ESEMPIO 1

$u(t, v(t)) = R \cdot v(t) \quad R > 0 \Rightarrow \begin{cases} M \cdot \dot{v}(t) = -R\,v(t) \\ v(t_0) = v_0 \end{cases}$

Soluzione:

$M \frac{dv}{dt} = -Rv \Rightarrow M \frac{1}{v} dv = -R\,dt \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{1}{v} dv = \int_{t_0}^{t} \left(-\frac{R}{M}\right) d\sigma$

$\Rightarrow [\ln v]_{t_0}^{t} = \left[-\frac{R}{M}\sigma\right]_{t_0}^{t} \Rightarrow \ln(v(t)) - \ln(v(t_0)) = -\frac{R}{M}t + \frac{R}{M}t_0$

$\Rightarrow \ln \frac{v(t)}{v_0} = -\frac{R}{M}(t - t_0) \Rightarrow \frac{v(t)}{v_0} = e^{-\frac{R}{M}(t-t_0)}$

$\Rightarrow v(t) = e^{-\frac{R}{M}(t-t_0)} \cdot v_0$. RAPPRESENTAZIONE ESPLICITA.

Questo appena fatto è un sistema lineare, in quanto la risposta è combinazione lineare degli elementi iniziali.

Inoltre esso è TEMPO-INVARIANTE (o STAZIONARIO) perché le costanti non dipendono dal tempo

=> SISTEMA LINEARE E TEMPO-INVARIANTE (LTI)
(hanno sempre andamento esponenziale)

ESEMPIO 2

$u(t, v(t)) = -R(1+\varepsilon\cos\omega t)\cdot v(t)$ il coefficiente di attrito varia fra $R(1+\varepsilon)$ e $(1-\varepsilon)R$.

$$\begin{cases} M\dot{v}(t) = -R(1+\varepsilon\cos\omega t)\,v(t) \\ v(t_0) = v_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v(t) = v(t)\, e^{-\frac{R}{M}(t-t_0)}\, e^{-\frac{R\varepsilon}{M\omega}(\sin\omega t - \sin\omega t_0)}$$

anche se c'è il coseno è comunque un sistema lineare perché possiamo scriverlo come:

$M\cdot\dot{v}(t) = -a(t)\,v(t)$ però la a è un coefficiente che dipende da t.

=> SISTEMA LINEARE E TEMPO-VARIANTE quindi dipende da quando si parte, poiché il sistema varia nel tempo.

ESEMPIO 3

$u(t, v(t)) = -R\sqrt{v(t)}$

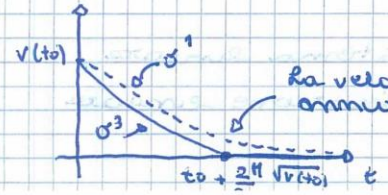
$$\begin{cases} M\cdot\dot{v}(t) = -R\sqrt{v(t)} \\ v(t_0) = v \end{cases}$$

=> SISTEMA NON LINEARE E TEMPO-INVARIANTE

$$M\frac{dv}{dt} = -R\sqrt{v(t)} \Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{v(t)}} = -\frac{R}{M}dt \Rightarrow \int_{t_0}^{t}\frac{dv}{\sqrt{v(t)}} = \int_{t_0}^{t} -\frac{R}{M}\,d\vartheta$$

$$\Rightarrow \left[2\sqrt{v(t)}\right]_{t_0}^{t} = \left[-\frac{R}{M}\vartheta\right]_{t_0}^{t} \Rightarrow \sqrt{v(t)} - \sqrt{v(t_0)} = -\frac{R}{2M}(t-t_0).$$

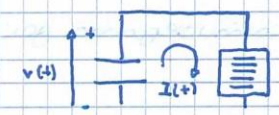
$$\Rightarrow v(t) = \begin{cases} \left(\sqrt{v(t_0)} - \frac{R}{2M}(t-t_0)\right)^2 & \text{se } \sqrt{v(t)} - \frac{R}{2M}(t-t_0) \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



mentre nel I esempio la velocità andava a 0 in un tempo indefinito, in questo caso va a 0 in un tempo finito.

www.alessandropaghi.it

ESEMPIO: Scarica del condensatore



$V(t)$: tensione all'istante t

$I(t)$: corrente all'istante t

$$C \cdot \frac{dV(t)}{dt} = -I(t) = -g(t, v(t))$$

↑ caratteristica del carico

Se il carico è una resistività $R \Rightarrow g(t, v(t)) = \frac{V(t)}{R}$

Sostituendo:

$$\begin{cases} C \cdot \dot{V}(t) = -\frac{1}{R} V(t) \\ V(t_0) = V_0 \end{cases}$$

Sistema analogo a quello dell'esempio 1.

$$\Rightarrow V(t) = C \cdot e^{-\frac{1}{RC}(t - t_0)}$$

RAPPRESENTAZIONE INGRESSO - USCITA

VARIABILI DI INGRESSO: grandezze che agiscono sul sistema dall'esterno ("cause").

VARIABILI DI USCITA: grandezze interne al sistema delle quali mi interessa analizzare l'andamento.



ESEMPIO (massa)

Variabili di uscita: $x(t)$ posizione

$$V(t) = \dot{x}(t) \rightarrow x(t) = \int_{t_0}^{t} v(\theta)\, d\theta + x(t_0)$$

$$M\ddot{x}(t) = -f(t)$$ rappresentazione INPUT / OUTPUT

Ingresso: $u(t) = f(t)$

Uscita: $y(t) = x(t)$

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} V(t_0)\, e^{-\frac{R}{M}(\sigma - t_0)}\, d\sigma + x(t_0) = \left[V(t_0) \left(-\frac{M}{R}\right) e^{-\frac{R}{M}(\sigma - t_0)} \right]_{t_0}^{t} + x(t_0)$$

$$= x(t_0) + \frac{M}{R} V(t_0) \left(1 - e^{-\frac{R}{M}(t - t_0)}\right).$$

www.alessandropaghi.it

Per la classe di sistemi in cui $t \in \mathbb{R}$ (sistemi a tempo-continuo) la rappresentazione i/o (input/output) è data da una o più equazioni che coinvolgono gli ingressi, le uscite e le loro derivate.

$R(y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots, y^n(t), u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t), \dots, u^m(t)) = 0$

dove $y^n(t) = \frac{\partial^n}{\partial t} y(t)$ $\quad u^m(t) = \frac{\partial^m}{\partial t} u(t)$

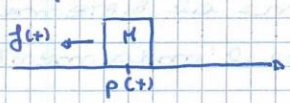
per la causalità $n \geq m$

$y(t) = \dot{u}(t)$ per conoscere l'uscita in questo caso devo conoscere la derivata dell'entrata che però è un FUTURO IMMEDIATO: non si può fare.

RAPPRESENTAZIONE INGRESSO - STATO - USCITA (i/s/o)

VARIABILI DI STATO $x(t)$: insieme delle variabili che è necessario conoscere all'istante t, per poter determinare l'evoluzione del sistema $\forall \tau > t$, note le variabili d'ingresso.

esempio:



$M\ddot{p}(t) = -f(t)$

$x_1(t) = p(t)$ posizione

$x_2(t) = \dot{p}(t) = v(t)$ velocità

$\dot{x}_1(t) = \dot{p}(t) = x_2(t)$

$\dot{x}_2(t) = \ddot{p}(t) = -\frac{1}{M} u(t)$ $\quad u(t) = f(t) = \text{ingresso}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{1}{M} u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$ rappresentazione i/s/o (*)

In generale, un sistema avente ingressi $u_i(t)$, uscite $y_i(t)$ e variabili di stato $x_i(t)$ ammette una rappresentazione i/s/o della seguente forma:

Ingressi: $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$

Uscite: $y_1(t), y_2(t), \dots, y_p(t)$

Stati: $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$

www.alessandropaghi.it

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t)$$
$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_m(t) = f_m(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t)$$

$$y_1(t) = y_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t)$$
$$y_2(t) = y_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t)$$
$$\vdots$$
$$y_p(t) = y_p(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t)$$

è formata da n equazioni differenziali del primo ordine dove n sono le numero delle variabili di stato e p equazioni statiche

NOTAZIONE VETTORIALE

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \qquad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \qquad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \qquad \text{con } f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m \qquad g: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^p$$

↑ Rappresentazione I/S/O

Caso notevole: SISTEMI LTI

le funzioni $f(\,)$ e $g(\,)$ sono lineari e quindi non dipendono da t; posso allora scriverle come:

$$\underbrace{\dot{x}(t)}_{m\times 1} = \underbrace{A}_{m\times m} \cdot \underbrace{x(t)}_{m\times 1} + \underbrace{B}_{m\times m} \cdot \underbrace{u(t)}_{m\times 1}$$

$$\underbrace{y(t)}_{p\times 1} = \underbrace{C}_{p\times m} \cdot \underbrace{x(t)}_{m\times 1} + \underbrace{D}_{p\times m} \cdot \underbrace{u(t)}_{m\times 1}$$

A, B, C, D sono matrici

(*) ESEMPIO: $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ $m=2$ $p=1$ $m=1$ SISTEMA SISO (singola entrata e singola uscita)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \overset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \overset{B}{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M} \end{bmatrix}} u(t)$$

$$y(t) = \overset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \overset{D}{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}} u(t)$$

www.alessandropaghi.it

Caso notevole: SISTEMI LTI, rappresentazione i/o.

$a_m y^{m}(t) + a_{m-1} y^{m-1}(t) + \dots + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) =$

$= b_m u^{m}(t) + b_{m-1} u^{m-1}(t) + \dots + b_2 \ddot{u}(t) + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t).$

dove i coefficienti a_i e b_i sono costanti reali.

$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j u^{(j)}(t) \quad n \geq m$

n = ORDINE DEL SISTEMA

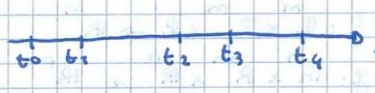
Data una rappresentazione i/o esistono infinite rappresentazioni di stato, data una rappr. di stato esiste una e una sola rappr. i/o.

SISTEMI A TEMPO CONTINUO: $t \in \mathbb{R}$

Le variabili caratteristiche cambiano con continuità nel tempo.

SISTEMI A TEMPO DISCRETO:

Le variabili caratteristiche cambiano ogni tot tempo (non necessariamente uguale ogni volta)



ESEMPIO: Conto in Banca

$c(t_k)$ = quantità di denaro all'istante t_k

$u(t_k)$ = versamento effettuato all'istante t_k

$c(t_{k+1}) = (1+f_k)(c(t_k) + u(t_k))$

f_k = tasso di interesse nel periodo $[t_k, t_{k+1})$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

È un sistema lineare e tempo-variante (f varia nel tempo).

Per comodità poniamo $k \in \mathbb{Z}$ e scriviamo: $c(k+1) = (1+f_k)(c(k) + u(k))$.

Passiamo da una rappr. implicita a una esplicita (cioè la soluzione del sistema).

Per comodità $f_k = f$, $\forall k$ (costante $\rightarrow$ LTI)

Sia $k=0$ l'istante iniziale e sia $c(0)$ il deposito iniziale.

$k=0 \quad c(1) = (1+f)[c(0) + u(0)]$

$k=1 \quad c(2) = (1+f)[c(1) + u(1)] = [(1+f)c(0) + (1+f)u(0) + u(1)](1+f) =$

www.alessandropaghi.it

$= (1+\beta)^2 c(0) + (1+\beta)^2 u(0) + (1+\beta) u(1)$

$K=2 \quad c(3) = (1+\beta)[c(2) + u(2)] = (1+\beta)[(1+\beta)^2 c(0) + (1+\beta)^2 u(0)$
$+ (1+\beta) u(1) + u(2)]$
$= (1+\beta)^3 c(0) + (1+\beta)^3 u(0) + (1+\beta)^2 u(1) + (1+\beta) u(2).$

Per il generico K:

$c(K) = (1+\beta)^K c(0) + (1+\beta)^K u(0) + (1+\beta)^{K-1} c(1) + (1+\beta)^{K-2} u(2) + \ldots =$
$(1+\beta)^K c(0) + \sum_{j=0}^{K-1} (1+\beta)^{K-j} u(j)$

RAPPRESENTAZIONE I/O SISTEMI TEMPO-DISCRETO

$R(y(k), y(k-1), \ldots, y(k-m), u(k), u(k-1), \ldots, u(k-m)) = 0$

N.B: $c(k+1) = (1+\beta_k)(c(k) + u(k))$ è analogo a:

$c(k) = (1+\beta_{k-1})(c(k-1) + u(k-1))$

ESEMPIO: Corso di laurea

$x_i(k)$ = numero di studenti iscritti all'i-esimo anno, nell'anno accademico k.

Lo qui è evidente come x dipenda da k, in quanto il numero di iscritti cambia ogni anno.

$u(k)$ = numero di studenti che si iscrivono al I anno, nell'anno accademico k+1.

$y(k)$ = numero di laureati nell'anno accademico k.

(β ← TASSO DI BOCCIATURA)

$$\begin{cases} x_1(k+1) = u(k) + \beta x_1(k) & \text{studenti del I anno} \\ x_2(k+1) = \alpha x_1(k) + \beta x_2(k) & \text{" " II " } \\ x_3(k+1) = \alpha x_2(k) + \beta x_3(k) & \text{" " III " } \\ y(k) = \alpha \cdot x_3(k) & \text{Laureati} \end{cases}$$

RAPPR. I/S/O

(α ← TASSO DI PROMOZIONE)

$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ variabile di stato del sistema.

RAPPRESENTAZIONE I/S/O SISTEMI TEMPO-DISCRETO

$x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \qquad f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$y(k) = g(x(k), u(k), k) \qquad g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$

www.alessandropaghi.it

SISTEMI LTI (LINEARI TEMPO-INVARIANTI) A TEMPO DISCRETO

$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_m y(m-k) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m)$$

$$\sum_{i=0}^{m} a_i y(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_j u(k-j)$$

$a_0 = 1$ Questo esprime la causalità del sistema, perché se $a_0 = 0$ cioè non varierebbe.

RAPPR. I/S/O
$$\begin{cases} x(k+1) = A x(k) + B u(k) \\ y(k) = C x(k) + D u(k) \end{cases}$$

PROPRIETÀ DEI SISTEMI DINAMICI

1) CAUSALITÀ: Le variabili d'ingresso $u(t)$, all'istante t, non influenzano il valore della variabile di stato $x(\tau)$ e di uscita $y(\tau)$, $\forall \tau < t$ (cioè u all'istante t non può influenzare x e y agli istanti precedenti o al più all'istante t stesso).

2) TEMPO-INVARIANZA: Il comportamento del sistema è invariante rispetto a traslazioni dell'asse del tempo.

Sia $u(t)$, $t \geq 0$ l'ingresso ed $y(t)$, $t \geq 0$ la relativa uscita.



Se il sistema è t-invariante, applicando l'ingresso $u(t-\Delta)$, si ottiene l'uscita $y(t-\Delta)$, $\forall \Delta \in \mathbb{R}$

3) LINEARITÀ: Le funzioni $f(..)$, $g(..)$, $R(..)$ sono funzioni lineari delle variabili u, y, x.

Per i sistemi lineari vale il Principio della sovrapposizione degli effetti:
Sia $u^{(A)}(t)$ un segnale di ingresso e sia $y^{(A)}(t)$ la corrispondente uscita. Sia $u^{(B)}(t)$ un altro segnale di ingresso e sia $y^{(B)}(t)$ la corrispondente uscita.
Se il sistema è lineare, applicando l'ingresso $u(t) = \alpha \cdot u^{(A)}(t) + \beta u^{(B)}(t)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ottiene l'uscita $y(t) = \alpha y^{(A)}(t) + \beta y^{(B)}(t)$.

www.alessandropaghi.it

Dimostrazione:

Rappr. I/S/O

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

Integrando con $u = u^{(A)} \rightarrow x = x^{(A)}$

Integrando con $u = u^{(B)} \rightarrow x = x^{(B)}$

Quindi:

$\dot{x}^{(A)}(t) = Ax^{(A)}(t) + Bu^{(A)}(t)$

$\dot{x}^{(B)}(t) = Ax^{(B)}(t) + Bu^{(B)}(t)$

$\bar{x} = \alpha x^{(A)} + \beta x^{(B)}$

$\dot{\bar{x}}(t) = \alpha \dot{x}^{(A)}(t) + \beta \dot{x}^{(B)}(t) =$

$= \alpha [Ax^{(A)}(t) + Bu^{(A)}(t)] + \beta [Ax^{(B)}(t) + Bu^{(B)}(t)]$

$= \alpha Ax^{(A)}(t) + \alpha Bu^{(A)}(t) + \beta Ax^{(B)}(t) + \beta Bu^{(B)}(t)$

$= A[\alpha x^{(A)}(t) + \beta x^{(B)}(t)] + B[\alpha u^{(A)}(t) + \beta u^{(B)}(t)]$

$= A\bar{x}(t) + B[\alpha u^{(A)}(t) + \beta u^{(B)}(t)]$

Controesempio:

$y(k) = u^2(t)$

$u^{(A)} = 1 \rightarrow y^{(A)} = 1$

$u^{(A)} = 1+1 \rightarrow y^{(A)} \neq 1+1$

$\Rightarrow$ non è lineare.

RISPOSTA LIBERA E FORZATA

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

$y(t) = Cx(t) + Du(t)$

Essendo il sistema tempo-invariante possiamo scegliere come istante iniziale $t = 0$.

Sia $x(0)$ la condizione iniziale del sistema.

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, la soluzione del sistema avrà la forma:

$x(t) = x_p(t) + x_p(t)$

$y(t) = y_p(t) + y_p(t)$

RISP. LIBERA: dove $x_p(t)$ e $y_p(t)$ sono le soluzioni nel caso in cui $u(t) = 0 \ \forall t$.

RISP. FORZATA: dove $x_p(t)$ e $y_p(t)$ sono le soluzioni nel caso $x(0) = 0$.

www.alessandropaghi.it

$x_p(t)$ RISP. LIBERA NELLO STATO

$x_p(t)$ RISP. FORZATA NELLO STATO

$x(t)$ RISP. TOTALE NELLO STATO.

$y_p(t)$ RISP. LIBERA NELL'USCITA

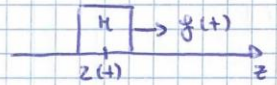
$y_p(t)$ RISP. FORZATA NELL'USCITA

$y(t)$ RISP. TOTALE NELL'USCITA

MODELLISTICA DI SISTEMI MECCANICI

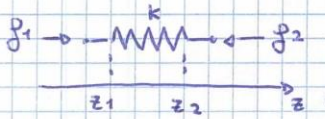
ELEMENTI DI TRASLAZIONE

1) Massa



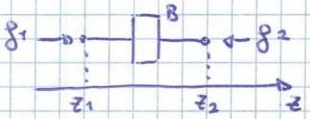
$M \cdot \ddot{z}(t) = f(t)$.

2) Elemento elastico (molla)



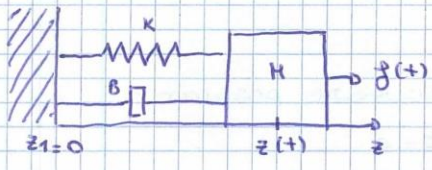
$f_1 = k(z_2 - z_1)$ $\quad f_2 = -k(z_2 - z_1)$

3) Elemento dissipativo (smorzatore)



$f_1(t) = B(\dot{z}_2(t) - \dot{z}_1(t))$ $\quad f_2(t) = -B(\dot{z}_2(t) - \dot{z}_1(t))$.

Esempio massa - molla - smorzatore



$M \cdot \ddot{z}(t) = f(t) - K(z(t) - z_1) - B(\dot{z}(t) - \dot{z}_1)$ (entrambi $= 0$)

$\Rightarrow f(t) = M \cdot \ddot{z}(t) + K(z(t)) + B(\dot{z}(t))$.

→ sistema tempo continuo.

(eq. diff. ordinaria)

Rappresentazione i/o

$u(t) = f(t)$

$y(t) = z(t)$

$\Rightarrow M\ddot{y}(t) + B\dot{y}(t) + Ky(t) = u(t)$ → forma diff. lineare data uscite e data entrate, tempo invariante.

↑ È un sistema LTI

www.alessandropaghi.it

Rappresentazione I/S/O

Ipotesi:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}$$

Obiettivo: Scrivere un sistema nella forma:

$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$

$y(t) = g(x(t), u(t), t)$

$\dot{x}_1(t) = \dot{z}(t) = x_2(t)$

$\dot{x}_2(t) = \ddot{z}(t) = \frac{1}{M} f(t) - \frac{k}{M} z(t) - \frac{B}{M} \dot{z}(t) = \frac{1}{M} u(t) - \frac{k}{M} x_1(t) - \frac{B}{M} x_2(t)$.

$y(t) = z(t) = x_1(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{M} u(t) - \frac{k}{M} x_1(t) - \frac{B}{M} x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$ Rappr. I/S/O

N.B.: Se non sono presenti le derivate delle entrate e le uscite hanno ordine 4 allora le variabili di stato sono:

$$x(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ \ddot{z}(t) \\ \dddot{z}(t) \end{bmatrix}$$

Il numero di variabili di stato da utilizzare è pari all'ordine massimo dell'entrata dell'equazione differenziale ordinaria che corrisponde alla rappresentazione I/O.

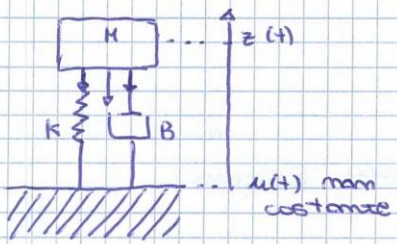
Sistema LTI → Rappr. matriciale.

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} u(t)$$

www.alessandropaghi.it

Esercizio: Ammortizzatore.



$M \cdot \ddot{z}(t) = -Mg - K(z(t) - f(t)) - B(\dot{z}(t) - \dot{f}(t))$

$u(t) = f(t) \quad y(t) = z(t) + \frac{Mg}{K}$

scuola i/o e i/s/o.

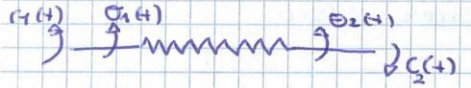
ELEMENTI DI ROTAZIONE

1) Massa di rotazione



$J \cdot \ddot{\theta}(t) = C(t)$ coppia

2) Elemento elastico di rotazione



$C_1(t) = K(\theta_2(t) - \theta_1(t))$

$C_2(t) = -K(\theta_2(t) - \theta_1(t))$

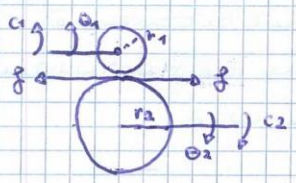
3) Elemento dissipativo di rotazione



$C_1(t) = B(\dot{\theta}_2(t) - \dot{\theta}_1(t))$

$C_2(t) = -B(\dot{\theta}_2(t) - \dot{\theta}_1(t))$

Altri elementi (accoppiamenti)



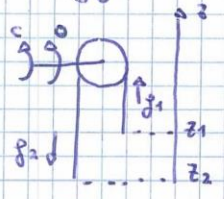
$C_1(t) = f_1(t) r_1$

$C_2(t) = f_2(t) r_2$

$$\begin{cases} C_2(t) = \frac{r_1}{r_2} C_1(t) \\ \theta_2(t) = \frac{r_2}{r_1} \theta_1(t) \end{cases} \quad \angle = r_1 \theta_1(t) = r_2 \theta_1(t).$$

Non deve esserci scorrimento fra i due ingranaggi.

Puleggia



$z_1(t) = r\theta(t)$

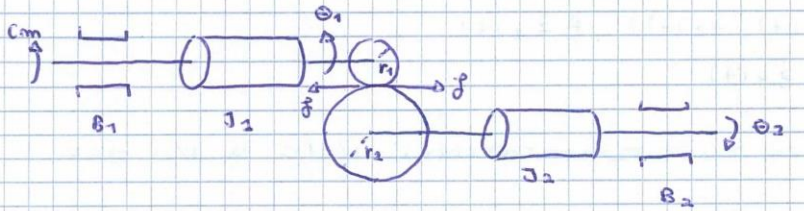
$z_2(t) = -r\theta(t)$

$c(t) = f_1(t) \cdot r$

$c(t) = -f_2(t) \cdot r$

www.alessandropaghi.it

Esempio:



$$\begin{cases} J_1\ddot{\theta}_1(t) = C_m(t) - B_1\dot{\theta}_1(t) - r_1 f(t) \\ J_2\ddot{\theta}_2(t) = r_2 f(t) - B_2\dot{\theta}_2(t) \\ \theta_2(t) = \frac{r_1}{r_2}\theta_1(t) \end{cases}$$

Rappr. i/o $\quad u(t) = C_m(t) \quad y(t) = \theta_2(t)$

$\theta_1(t) = \frac{r_2}{r_1}\theta_2(t) \qquad \frac{r_2}{r_1} = \eta$

$J_1\eta\ddot{\theta}_2 = C_m - B_1\eta\dot{\theta}_2 - r_1 f$

$J_2\ddot{\theta}_2 = r_2 f - B_2\dot{\theta}_2 \rightarrow f = \frac{J_2\ddot{\theta}_2 + B_2\dot{\theta}_2}{r_2}$

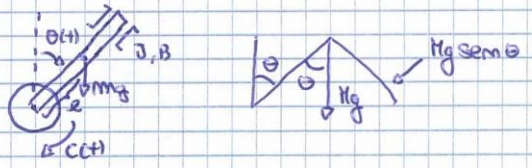
$J_1\eta\ddot{\theta}_2 = C_m - B_1\eta\dot{\theta}_2 - r_1 \cdot \frac{J_2\ddot{\theta}_2 + B_2\dot{\theta}_2}{r_2}$

$\Rightarrow J_1\eta^2\ddot{\theta}_2 = \eta C_m - B_1\eta^2\dot{\theta}_2 - J_2\ddot{\theta}_2 - B_2\dot{\theta}_2$

$\Rightarrow \ddot{\theta}_2\underbrace{(J_1\eta^2 + J_2)}_{J_t} + \dot{\theta}_2\underbrace{(B_1\eta^2 + B_2)}_{B_t} = \eta C_m$

$J_t\ddot{y}(t) + B_t\dot{y}(t) = \eta u(t)$

Esempio: Pendolo inverso



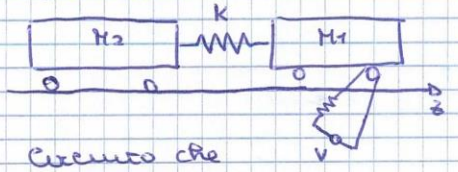
$J\ddot{\theta}(t) = C(t) - B\cdot\dot{\theta}(t) + Mg\,\mathrm{sen}(\theta(t))\cdot l$

Rappr. i/o $\quad u(t) = C(t) \quad y(t) = \theta(t)$

$J\ddot{y}(t) + B\dot{y}(t) - Mg\,l\,\mathrm{sen}(\theta(t)) = u(t)$

- non è lineare perché c'è sen(...)
- è tempo-invariante

Esercizio:



B coefficiente di attrito

Circuito che alimenta la ruota del cassetto.

www.alessandropaghi.it

$M_1 \ddot{z}_1(t) = -k(z_1(t) - z_2(t)) - B\dot{z}_1(t) + f(t)$

$M_2 \ddot{z}_2(t) = k(z_1(t) - z_2(t)) - B\dot{z}_2(t)$

$f(t) = \alpha v(t) - \gamma \dot{z}_1(t)$

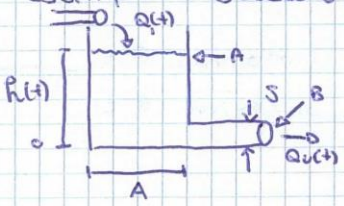
Determinare la rappresentazione i/s/o e i/o del sistema.

con $u(t) = v(t)$ e $y(t) = z_2(t)$.

www.alessandropaghi.it

MODELLISTICA DI SISTEMI IDRAULICI

Esempio: serbatoio



$Q_i(t)$: portata volumetrica in ingresso $[m^3/s]$

$R(t)$: livello liquido

$$\frac{d}{dt}\{A \cdot R(t)\} = Q_i(t) - Q_u(t)$$ CONSERVAZIONE DEL VOLUME

conservazione dell'energia:

en. potenziale + en. cinetica + pressione = costante

(A) $\rho g R + 0 + P_{atm} = cost$

ρ = densità

(B) $0 + \frac{1}{2}\rho V_B^2 + P_{atm} = cost$

V = velocità in B

$\rho g R + P_{atm} = \frac{1}{2}\rho V_B^2 + P_{atm} \Rightarrow V_B^2(t) = 2gR(t)$

$Q_u(t) = V_B(t) \cdot S$

$A \cdot \dot{R}(t) = Q_i(t) - S \cdot \sqrt{2gR(t)}$

$u(t) = Q_i(t) \qquad y(t) = R(t)$

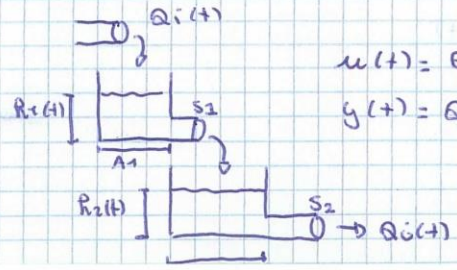
$A \cdot \dot{y}(t) + S\sqrt{2g\,y(t)} = u(t)$ RAPPR. i/o

$x(t) = R(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{S}{A}\sqrt{2g\,x(t)} + \frac{1}{A}u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$ RAPPR. i/s/o

Esercizio:

Scrivere la rappr. i/s/o del sistema



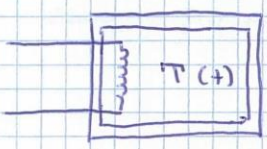
$u(t) = Q_i(t)$

$y(t) = Q_u(t)$

www.alessandropaghi.it

MODELLISTICA DI SISTEMI TERMICI

Esempio: Forno



$T_e(t)$ $T(t)$: Temp. interna @ t

$T_e(t)$: Temp. esterna @ t

$$\frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{dT}{dt}$$

C: CAPACITÀ TERMICA

$P(t)$ = quantità di calore fornita dalla resistenza nell'unità di tempo.

$$C \cdot \frac{dT(t)}{dt} = P(t) - K(T(t) - T_e(t))$$

K: CONDUTTANZA TERMICA

Rappr. i/o

con $u_1(t) = P(t)$, $u_2(t) = T_e(t)$, $y(t) = T(t)$

semplificazione: $T_e(t) \cong \bar{T}_e$ (costante)

$y(t) = T(t) - \bar{T}_e$

↳ $C\dot{y}(t) = u_1(t) - Ky(t)$

Esempio: Forno (con temperatura delle pareti)

$T_p(t)$: temperatura delle pareti @ t.

C_f: capacità termica del forno

K_F: conduttanza termica forno → pareti

C_p: capacità termica delle pareti

K_p: conduttanza termica pareti → esterno

$$C_F \cdot \frac{dT(t)}{dt} = P(t) - K_F(T(t) - T_p(t))$$

$$C_p \cdot \frac{dT_p(t)}{dt} = K_F(T(t) - T_p(t)) - K_p(T_p(t) - T_e(t))$$

Rappr. i/s/o

$$x(t) = \begin{bmatrix} T(t) \\ T_p(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} P(t) \\ T_e(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = T(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{K_F}{C_F} & \frac{K_F}{C_F} \\ \frac{K_F}{C_p} & -\frac{K_F + K_p}{C_p} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1/C_F & 0 \\ 0 & \frac{K_p}{C_p} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} u(t)$$

www.alessandropaghi.it

MODELLI DI TRASFERIMENTO DI RISORSE

Def: Modello in cui le variabili di stato rappresentano la quantità di "risorsa" contenuta in un certo "compartimento".

Esempio: Modello a classi di età

$x_i(k)$: numero di individui di età compresa tra $(i-1)T$ e iT anni nel periodo k-esimo

(es: $T = 1$ anno, k: anno solare)

S_i: Tasso di sopravvivenza classe x_i

f_i: Tasso di fertilità classe x_i

$$x_i(k+1) = S_{i-1} \cdot x_{i-1}(k) \qquad i = 2, \dots, N-1.$$

$$x_N(k+1) = S_{N-1} x_{N-1}(k) + S_N x_N(k)$$

(N: # di classi)

$$x_1(k+1) = f_1 x_1(k) + f_2 x_2(k) + \dots f_N x_N(k).$$

$$A = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_N \\ S_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & S_3 & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ 0 & 0 & 0 & S_{N-1} \; S_N \end{bmatrix}$$

matrice Sparsa.

⊛ Rappr. I/S/O

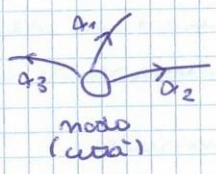
$$x(k+1) = A \cdot x(k)$$

Un sistema senza ingresso è detto autonomo.

Esempio: Modello del Traffico automobilistico.

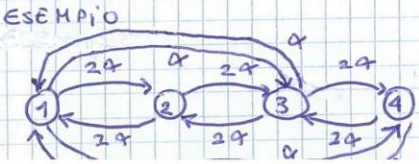
$x_i(t)$ = quantità di automobili nella città i-esima all'istante t ($t \in \mathbb{R}$)

Ipotesi: il flusso di automobili in uscita dalla città i-esima è proporzionale a $x_i(t)$.



$$\dot{x}_i(t) = -\alpha_1 x_i(t) - \alpha_2 x_i(t) - \alpha_3 x_i(t).$$

ESEMPIO



$$\dot{x}_1(t) = -2\alpha x_1(t) - \alpha x_1(t) - \alpha x_1(t) + 2\alpha x_2(t) + \alpha x_3(t) + \alpha x_4(t)$$

www.alessandropaghi.it

$\dot{X}_2(t) = -2\alpha X_2(t) - 2\alpha X_2(t) + 2\alpha X_4(t) + 2\alpha X_3(t)$

$\dot{X}_3(t) = -2\alpha X_3(t) - \alpha X_3(t) - 2\alpha X_3(t) + 2\alpha X_2(t) + 2\alpha X_4(t) + \alpha X_4(t)$

$\dot{X}_4(t) = -2\alpha X_4(t) - \alpha X_4(t) + 2\alpha X_3(t) + \alpha X_4(t)$

Sistema a tempo continuo in forma $\dot{x} = Ax + Bu$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -4\alpha & 2\alpha & \alpha & \alpha \\ 2\alpha & -4\alpha & 2\alpha & 0 \\ \alpha & 2\alpha & -5\alpha & 2\alpha \\ \alpha & 0 & 2\alpha & -3\alpha \end{bmatrix} x(t) = \alpha \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} x(t)$$

Osservazioni:

1) Se $x(0) = N \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} \Rightarrow x(t) = x(0) \quad \forall t \geq 0$

↳ macchine distribuite in maniera equa nella città.

Se questa è la condizione iniziale $\dot{x}(0) = 0$

$x(0) = N \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$ condizione di equilibrio.

La somma delle righe e delle colonne è 0.

2) È ancora vero se si interrompe il collegamento $1 \to 2$? NO

3) Cosa succede per $x(0)$ generico?

4) Verificare che $\dot{X}_1(t) + \dot{X}_2(t) + \dot{X}_3(t) + \dot{X}_4(t) = 0 \quad \forall t \; \forall x(0)$

Esempio: partita doppia

Attività	Passività
$X_1(t)$: cassa	$X_3(t)$ = debito
$X_2(t)$: valore merci in magazzino	$X_4(t)$ = capitale versato
	$X_5(t)$ = riserve di utili

Vincolo (bilancio dello stato patrimoniale)

$X_1(t) + X_2(t) = X_3(t) + X_4(t) + X_5(t) \quad \forall t.$

MODELLO TEMPO-CONTINUO

Operazioni:

1) Versamento di capitale $u_1(t)$

$\dot{X}_4(t) = \dot{X}_4(t) = u_1(t)$

www.alessandropaghi.it

2) accendo deposito $u_2(t)$

$\dot{x}_1(t) = \dot{x}_3(t) = u_2(t)$

3) acquisto merci $u_3(t)$

$\dot{x}_1(t) = -u_3(t) \qquad \dot{x}_2(t) = u_3(t)$

4) vendita di merce con guadagno α (%)
e incasso $u_4(t)$

$\dot{x}_1(t) = u_4(t) \qquad \dot{x}_5(t) = \frac{\alpha}{1+\alpha} u_4(t)$

$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{1+\alpha} u_4(t)$

MODELLO COMPLESSIVO

$\dot{x}_1(t) = u_1(t) + u_2(t) - u_3(t) + u_4(t)$

$\dot{x}_2(t) = u_3(t) - \frac{1}{1+\alpha} u_4(t)$

$\dot{x}_3(t) = u_2(t)$

$\dot{x}_4(t) = u_1(t)$

$\dot{x}_5(t) = \frac{\alpha}{1+\alpha} u_4(t)$

$$\dot{x}(t) = \underbrace{[0]}_{A_{5\times5}} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{1+\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha}{1+\alpha} \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

Osservazioni

1) Se $x_1(0) + x_2(0) = x_3(0) + x_4(0) + x_5(0)$,
allora $x_1(t) + x_2(t) = x_3(t) + x_4(t) + x_5(t) \quad \forall t \geq 0$
qualunque sia l'ingresso $u(t)$.

2) Può essere modellato come un sistema a tempo discreto sostituendo a $\dot{x}_i(t) \rightarrow x_i(k+1) - x_i(k)$, $k \in \mathbb{N}$

www.alessandropaghi.it

MODELLI DI TRANSAZIONE TRA STATI

Def: modelli in cui gli stati rappresentano la probabilità della presenza (o assenza) di attributi o qualità, oppure di trovarsi in una certa condizione.

Esempio: Page Rank

N pagine web

Prob. di passare dalla pag. i alla pag. j $\quad P_{ij} = \begin{cases} 1/m & \text{se } \exists \text{ link da } i \text{ a } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

m_i = numero di link della pag. i

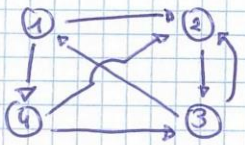
$x_i(k)$: Prob. di trovarsi nella pag. i all'istante k.

$$x_i(k+1) = p_{1i}\, x_1(k) + p_{2i}\, x_2(k) + \dots + p_{Ni}\, x_N(k) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} p_{ji}\, x_j(k) \qquad i = 1 \dots N$$

$$x(k+1) = A\, x(k)$$

$$A_{i,j} = \begin{cases} p_{ji} & \text{se } j \neq i \\ 0 & \text{se } j = i \end{cases}$$

Esempio:



$$x_1(k+1) = \frac{1}{2} x_3(k)$$

$$x_2(k+1) = \frac{1}{2} x_1(k) + \frac{1}{2} x_3(k) + \frac{1}{2} x_4(k)$$

$$x_3(k+1) = x_2(k) + \frac{1}{2} x_4(k)$$

$$x_4(k+1) = \frac{1}{2} x_1(k)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Somma colonne = 1 ⇓ Somma prob. di uscire da un nodo.

$$\lim_{k \to +\infty} x(k) = \lim_{k \to +\infty} A^k x(0) = \begin{cases} 4/24 \\ 7/24 \\ 8/24 \\ 2/24 \end{cases}$$

$$\forall x(0) : \sum_{i=1}^{N} x_i(0) = 1$$

$$x(k+1) = A\, x(k)$$

$$x(1) = A\, x(0)$$

$$x(2) = A\, x(1) = A \cdot A\, x(0) = A^2 x(0)$$

$$x(3) = A\, x(2) = A \cdot A^2 x(0) = A^3 x(0)$$

$$x(k) = A^k x(0) = \dots$$

www.alessandropaghi.it

MODELLI DI INFLUENZA

Definizione: modelli che esprimono relazioni causa - effetto tra le variabili del sistema.

Esempio: modello macroeconomico (Samuelson)

$Y(k)$: prodotto interno lordo k: anno.

$$Y(k) = C(k) + I(k) + G(k)$$

$C(k)$: consumi; $I(k)$: investimenti; $G(k)$: spesa pubblica

$$C(k+1) = C_0 + c \cdot Y(k)$$

: consumo dell'anno $k+1$

C_0: consumo fisso; c: propensione marginale al consumo

$$I(k+1) = I_0 + a \cdot (C(k+1) - C(k))$$

I_0: investimenti fissi; a: acceleratore

MODELLO i/s/o

$$x(k) = \begin{bmatrix} C(k) \\ I(k) \end{bmatrix} \qquad u(k) = \begin{bmatrix} G(k) \\ C_0 \\ I_0 \end{bmatrix} \qquad y(k) = Y(k)$$

modello lineare e tempo-invariante (a e c costanti)

$$C(k+1) = C_0 + c\{C(k) + I(k) + G(k)\}$$
$$I(k+1) = I_0 + a\{C_0 + c[C(k) + I(k) + G(k)] - C(k)\}$$

$$x_1(k+1) = c \cdot x_1(k) + c \cdot x_2(k) + c \cdot u_1 + u_2(k)$$
$$x_2(k+1) = (ac - a)x_1(k) + ac\,x_2(k) + ac\,u_1(k) + a \cdot u_2(k) + u_3(k)$$
$$y(k) = x_1(k) + x_2(k) + u_1(k)$$

MODELLO SEMPLIFICATO (SISO)

$x_1(k) = C(k) - C_0$ $\qquad u(k) = G(k) + C_0 + I_0$

$x_2(k) = I(k) - I_0$ $\qquad y(k) = Y(k)$

$$\underbrace{C(k+1) - C_0}_{x_1(k+1)} = c \cdot \{\underbrace{C(k) - C_0}_{x_1(k)} + \underbrace{I(k) - I_0}_{x_2(k)} + \underbrace{G(k) + C_0 + I_0}_{u(k)}\}$$

www.alessandropaghi.it

$$\underbrace{I(k+1) - I_0}_{x_2(k+1)} = a\{c[\underbrace{C(k) - C_0}_{x_1(k)} + \underbrace{I(k) - I_0}_{x_2(k)} + \underbrace{G(k) + C_0 + I_0}_{u(k)}] - \underbrace{(C(k) - C_0)}_{x_1(k)}\}$$

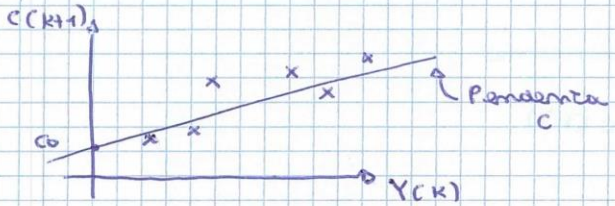
$$y(k) = x_1(k) + x_2(k) + u(k)$$

RAPPRESENTAZIONE MATRICIALE

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} c & c \\ ac - a & ac \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} c \\ ac \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(k) + [1]\, u(k).$$

a e c sono <u>parametri</u> del sistema



k	Y(k)	C(k+1)
1		
2		
3		
...		

Simulazione

Sia $c = 0,2$ e $u(k) = 500 \quad \forall k = 1, 2, \dots, 30$. Vedere come evolve il PIL $y(k)$, per:

(a) = 0,3

(b) = 5

(c) = 6

MATLAB:

- Definire parametri: `c = 0,2` `a = 0,3;`
  WHO: parametri inseriti
- `A = [ c c ; a*c - a a*c ]`

ANALISI DEI SISTEMI LTI A TEMPO CONTINUO

Sia $t=0$ l'istante iniziale, tale che $u(t)=0 \ \forall t<0$.

RAPPR. i/o

Dato il sistema

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

determinare $y(t) \ \forall t>0$ a partire da $u(t)$ e dalle condizioni iniziali $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$.

RAPPR. i/s/o

Dato il sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

determinare $x(t)$ e $y(t) \ \forall t>0$, a partire da $u(t)$ e da $x(0)$

$x(t)$: Risposta totale dallo stato.

$y(t)$: Risposta totale dall'uscita.

SEGNALI TIPICI NEI SISTEMI A TEMPO CONTINUO

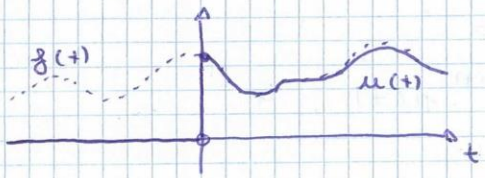
1) GRADINO UNITARIO

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$



Tutti i segnali che consideriamo sono del tipo:

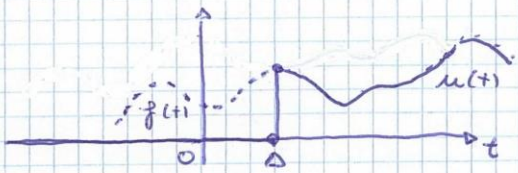
$u(t) = f(t) \cdot 1(t)$ $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Operatore di traslazione nel tempo

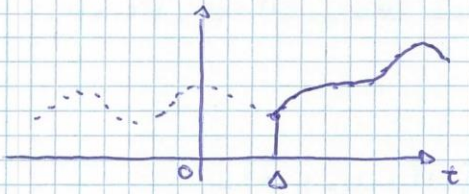
$u(t) = f(t-\Delta) \cdot 1(t-\Delta)$

avviene la traslazione del segnale.



www.alessandropaghi.it

$u(t) = f(t) \cdot 1(t-\Delta)$



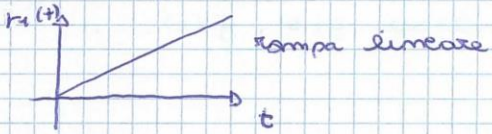
Considero solo la funzione da Δ in poi dopo traslata nulla.

2) SEGNALI CANONICI

$r_k(t) = \frac{t^k}{k!} \cdot 1(t) \qquad k = 0, 1, 2, \dots$

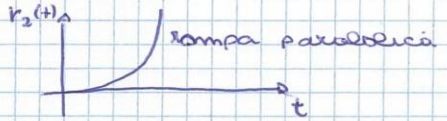
$r_0(t) = 1(t)$

$r_1(t) = t \cdot 1(t)$



rampa lineare

$r_2(t) = \frac{t^2}{2} \cdot 1(t)$



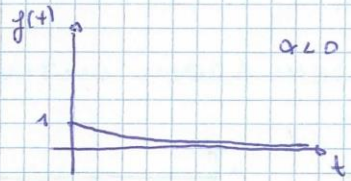
rampa parabolica

3) SEGNALI ESPONENZIALI

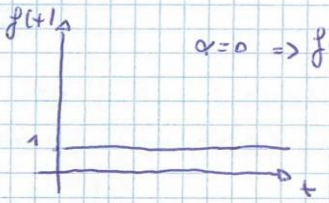
$f(t) = e^{\alpha t} \cdot 1(t) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$



$\alpha > 0$



$\alpha < 0$



$\alpha = 0 \Rightarrow f(t) = 1(t)$.

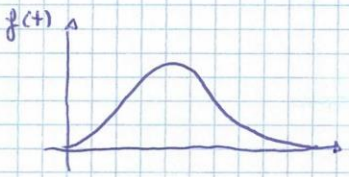
4) SEGNALI A RAMPA ESPONENZIALE

$f_k(t) = \frac{t^k}{k!} e^{\alpha t} \cdot 1(t)$

$k = 0 \rightarrow$ segnale esponenziale

$\alpha = 0 \rightarrow$ segnale canonico

ES. $k = 1, \ \alpha < 0 \Rightarrow f_1(t) = t e^{\alpha \cdot t} \cdot 1(t)$



www.alessandropaghi.it

5) SEGNALI SINUSOIDALI

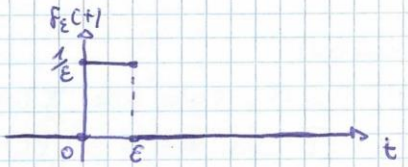
$$f(t) = \cos(\omega t) \cdot 1(t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \cdot 1(t)$$

$$= \frac{1}{2} e^{j\omega t} 1(t) + \frac{1}{2} e^{-j\omega t} 1(t)$$

$$f(t) = \operatorname{sen}(\omega t) \cdot 1(t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} 1(t)$$

6) SEGNALE IMPULSIVO (DELTA DI DIRAC)

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{se } 0 \le t \le \varepsilon \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Si definisce Delta di Dirac:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t)$$

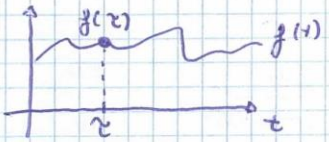


Proprietà:

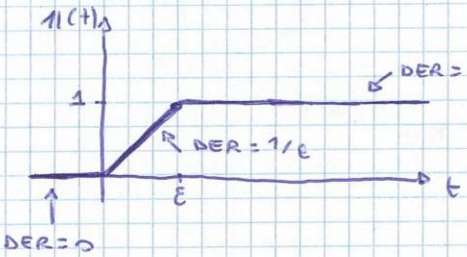
a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$ deriva da $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t)\,dt = 1 \quad \forall \varepsilon$.

b) Se $f(t)$ è una funzione continua, accade:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t - \tau)\,dt = f(\tau)$$



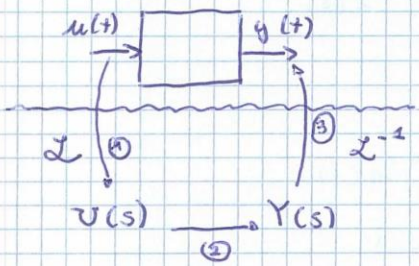
c) La funzione $\delta_\varepsilon(t)$ è la derivata della funzione $1_\varepsilon(t)$:



Per estensione ($\varepsilon \to 0$) si considera $\delta(t)$ come la "derivata" di $1(t)$ (e viceversa $1(t)$ è l'"integrale" di $\delta(t)$).

www.alessandropaghi.it

TRASFORMATA DI LAPLACE



Definizione:

Sia $f(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tale che $f(t) = 0, \forall t < 0$

$\exists M > 0, t_0 \geq 0$ ed $\alpha \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \forall t \geq t_0$

Si definisce allora trasformata di Laplace di $f(t)$ la funzione $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$ e si indica con $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$

L'integrale di $F(s)$ converge?

$$|f(t)\, e^{-st}| = |f(t)\, e^{-\sigma t}\, e^{-j\omega t}| = |f(t)|\, e^{-\sigma t}\, \underbrace{|e^{-j\omega t}|}_{1} \quad (*)$$

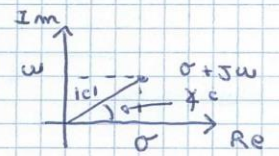
$s = \sigma + j\omega$

RIPASSO:

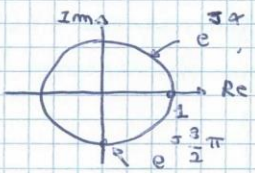
$c = \sigma + j\omega$

$|c| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$

$\measuredangle c = \arctan \frac{\omega}{\sigma}$



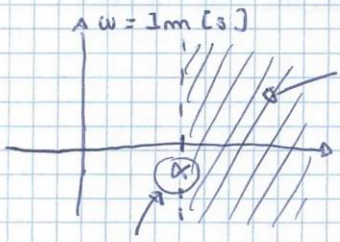
$$c = |c|\, e^{j \measuredangle c} = |c| \{\cos \measuredangle c + j \operatorname{sen} \measuredangle c\}$$



$(*)$

$$|f(t)| \cdot e^{-\sigma \cdot t} \cdot \underbrace{|e^{-j\omega t}|}_{1} \leq M \cdot e^{\alpha t}\, e^{-\sigma t} = M e^{(\alpha - \sigma) t}$$

La $F(s)$ converge $\forall \sigma > \alpha$



www.alessandropaghi.it

PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE

1) LINEARITÀ

$$f(t) = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$
$$F(s) = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$$

In quanto l'operazione di integrazione è lineare.

2) TRASFORMATA DI SEGNALI CON RITARDO

$$g(t) = f(t-\Delta)\cdot 1(t-\Delta) \qquad \Delta \in \mathbb{R},\ \Delta > 0$$
$$G(s) = F(s)\, e^{-\Delta s}$$

Dim:

$$G(s) = \int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\Delta}^{+\infty} f(\tau+\Delta)\, e^{-s(\tau+\Delta)}\, d\tau$$

$t = \tau + \Delta$

$$= \int_{-\Delta}^{+\infty} f(\tau)\cdot 1(\tau)\cdot e^{-s\tau}\cdot e^{-s\Delta} = e^{-s\Delta}\underbrace{\int_0^{+\infty} f(\tau)\cdot 1(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau}_{F(s)}$$

Tra $-\Delta$ e 0 l'integrale è nullo dia $1(t)$.

3) MOLTIPLICAZIONE PER UN ESPONENZIALE

$$g(t) = f(t)\, e^{\gamma t} \qquad \gamma \in \mathbb{R}$$
$$G(s) = F(s-\gamma)$$

Dim:

$$G(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{\gamma t}\, e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-(s-\gamma)t}\, dt = F(s-\gamma).$$

Alcune trasformate di segnali notevoli:

I) $1(t)$

$$\int_0^{+\infty} 1(t)\, e^{-st}\, dt = \left[\frac{1}{(-s)}\, e^{-st}\right]_0^{+\infty} = 0 - \frac{1}{-s}\cdot e^0 = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$$

II) $\delta(t)$

$$\int_0^{+\infty} \delta(t)\, \underbrace{e^{-st}}_{f(t)}\, dt = \left[e^{-st}\right]_{t=0} = 1$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

www.alessandropaghi.it

III) SEGNALE ESPONENZIALE $e^{\alpha t} \cdot 1(t)$

$g(t) = \underbrace{1(t)}_{f(t)} \cdot e^{\alpha t}$

$G(s) = F(s-\alpha) = \frac{1}{s-\alpha}$

$\mathcal{L}[e^{\alpha t} \cdot 1(t)] = \frac{1}{s-\alpha}$

4) MOLTIPLICAZIONE PER t

$g(t) = t \cdot f(t)$

$G(s) = -\frac{d}{ds} F(s)$

Dim:

$\frac{d}{ds} F(s) = \frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(t) \left[\frac{d}{ds} e^{-st}\right] dt = \int_0^{+\infty} f(t)(-t) e^{-st} dt$

$= -\int_0^{+\infty} [t \cdot f(t)] e^{-st} dt$

IV) TRASFORMATA DEI SEGNALI CANONICI

$r_k(t) = \frac{t^k}{k!} 1(t)$

$r_1(t) = t \cdot \underbrace{1(t)}_{f(t)} \qquad \mathcal{L}[r_1(t)] = R_1(s) = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$

$r_2(t) = \frac{t}{2} \cdot r_1(t) = \frac{t^2}{2} \cdot 1(t) \qquad \mathcal{L}[r_2(t)] = R_2(s) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{d}{ds} R_1(s)\right)$

$= -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \frac{1}{s^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{-2s}{s^4}\right) = \frac{1}{s^3}$

$\vdots$

$\mathcal{L}[r_k(t)] = \frac{1}{s^{k+1}}$

V) RAMPA ESPONENZIALE

$f_k(t) = \frac{t^k}{k!} e^{\alpha t} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$\frac{t^k}{k!} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^{k+1}}$

$\mathcal{L}[f_k(t)] = F_k(s) = \frac{1}{(s-\alpha)^{k+1}}$

α è una radice di molt. algebrica $k+1$ del polinomio $(s-\alpha)^{k+1}$.

VI) SEGNALI SINUSOIDALI

$u(t) = \cos(\omega t) \cdot 1(t)$

$U(s) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} 1(t)\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{j\omega t} \cdot 1(t)\right] + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{-j\omega t} \cdot 1(t)\right]$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+j\omega} = \frac{s+j\omega+s-j\omega}{2(s-j\omega)(s+j\omega)} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$

Radici: $j\omega$ e $-j\omega$ che sono immaginari puri

$\mathcal{L}[\text{sen}(\omega t) \cdot 1(t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

3) TRASFORMATA DELLA DERIVATA

$g(t) = \dot{f}(t) \cdot 1(t) \qquad \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

$G(s) = \mathcal{L}[\dot{f}(t)] = s \cdot F(s) - f(0)$

DIM.

$G(s) = \int_0^{+\infty} \dot{f}(t) e^{-st} dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)(-s) e^{-st} dt =$

$= 0 - f(0) + s\underbrace{\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt}_{F(s)} = -f(0) + sF(s)$ (per parti)

$|f(t)e^{-st}| \leq Ke^{-(\sigma-\alpha)t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \qquad \forall \sigma > \alpha$

6) TRASFORMATA DELL'INTEGRALE

$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$

$G(s) = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s)$

DIM:

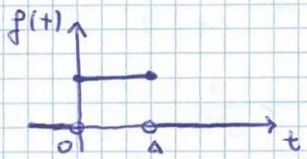
$\dot{g}(t) = f(t)$

$\mathcal{L}[\dot{g}(t)] = sG(s) - \cancel{g(0)}^{0} = F(s) \Rightarrow G(s) = \frac{1}{s} F(s)$ in quanto $\int_0^0 f(\tau) d\tau = 0$.

www.alessandropaghi.it

ESEMPI DI TRASFORMATE

(a) FUNZIONE RETTANGOLARE



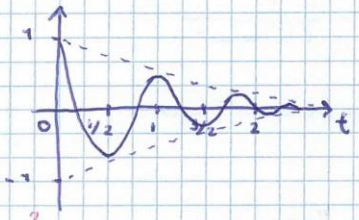
$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le \Delta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f(t) = 1(t) - 1(t-\Delta)$$

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-\Delta s} = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-\Delta s}\right)$$

b) SINUSOIDE SMORZATA

$$u(t) = e^{-2t} \cos(2\pi t) \cdot 1(t)$$



?

$$U(s) = \mathcal{L}[\cos(2\pi t)]\Big|_{s \to s+2} = \frac{s}{s^2 + (2\pi)^2}\Big|_{s \to s+2}$$

(?)

$$= \frac{s+2}{(s+2)^2 + 4\pi^2}$$

Radici: $-2 \pm j2\pi$ complesse coniugate

c) ... FUNZIONE INCASINATA!

$$f(t) = \int_0^t \tau\, e^{-\tau} \cos(2\tau)\, d\tau \cdot 1(t)$$

$$\mathcal{L}[\cos(2t)] = \frac{s}{s^2+4}$$

$$\mathcal{L}[e^{-t}\cos(2t)] = \frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

$$\mathcal{L}[t\, e^{-t}\cos(2t)] = -\frac{d}{ds}\frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s}\left[-\frac{d}{ds}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right)\right]$$

7) TEOREMA DEL VALORE FINALE

Se $\lim_{t \to +\infty} f(t)$ esiste finito, allora $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s)$

ESEMPIO:

* $f(t) = e^{-t}$

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 0 = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s+1} = 0$$

* $f(t) = 1(t)$

$$\lim_{t \to \infty} 1(t) = 1 = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s} = 1$$

* $f(t) = e^{t}$

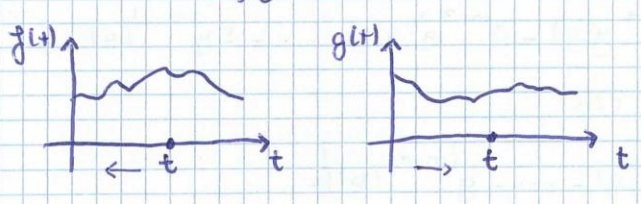
$$\lim_{t \to \infty} e^{t} = +\infty \neq \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s-1} = 0$$

Non c'è intersezione in quanto lim non è finito.

8) TRASFORMATA DEL PRODOTTO DI CONVOLUZIONE

Si definisce prodotto di convoluzione di due funzioni $f(t)$ e $g(t)$

$$P(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau$$



$$P(s) = \mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s)$$

USO DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE PER LA SOLUZIONE DI SISTEMI LTI (lineari tempo invarianti).

Es. Massa - molla - smorzatore

Equazione i/o: $M\ddot{y}(t) + B\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$

y: posizione della massa

u: forza applicata alla massa

Trasformata dell'equazione:

$$\mathcal{L}[M\ddot{y}(t) + B\dot{y}(t) + ky(t)] = \mathcal{L}[u(t)] = U(s)$$

$$M \cdot \mathcal{L}[\ddot{y}(t)] + B\underbrace{\mathcal{L}[\dot{y}(t)]}_{sY(s) - y(0)} + k\underbrace{\mathcal{L}[y(t)]}_{Y(s)} = U(s)$$

$$\mathcal{L}[\ddot{y}(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\dot{y}(t)\right] = s \cdot \mathcal{L}[\dot{y}(t)] - \dot{y}(0)$$

$$= s\{sY(s) - y(0)\} - \dot{y}(0) = s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0).$$

Sostituendo:

$$M\{s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)\} + B\{sY(s) - y(0)\} + kY(s) = U(s)$$

$$[Ms^2 + Bs + k]Y(s) = Msy(0) + M\dot{y}(0) + By(0) + U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{(My(0))s + (M\dot{y}(0) + By(0))}{Ms^2 + Bs + k}}_{Y_e(s)} + \underbrace{\frac{u}{Ms^2 + Bs + k}}_{Y_f(s)} \cdot U(s)$$

(?)

Trasf. della Risp. Libera ⇒ Ingresso Nullo

Trasf. della risposta Forzata ⇒ Cond. Iniz. = 0.

www.alessandropaghi.it

$Y_f(s) = G(s) \cdot U(s)$

con $G(s) = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}$ ← Funz. di trasferimento del sistema.

$y^{(m)}(t) = \frac{d^m}{dt^m} y(t)$

$\mathcal{L}[y^{(m)}(t)] = s^m Y(s) - s^{m-1} y(0) - s^{m-2} \dot{y}(0) - \dots - s y^{(m-2)}(0) - y^{(m-1)}(0)$.

TRASFORMATA DELLA RAPPR. I/O

$\{ s^m Y(s) - s^{m-1} y(0) - s^{m-2} \dot{y}(0) - \dots - y^{(m-1)}(0) \} +$
$a_{m-1} \{ s^{m-1} Y(s) - s^{m-2} y(0) - s^{m-3} \dot{y}(0) - \dots - y^{(m-2)}(0) \}$
$+ \dots + a_1 \{ s Y(s) - y(0) \} + a_0 Y(s) =$
$= b_m s^m \cdot U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$.

$\{ s^m + a_{m-1} s^{m-1} + a_{m-2} s^{m-2} + \dots + a_1 s + a_0 \} Y(s)$
$= s^{m-1} y(0) + s^{m-2} \dot{y}(0) + \dots + y^{m-1}(0) + a_{m-1} \{ s^{m-2} y(0) + s^{m-3} \dot{y}(0) + \dots$
$\dots + y^{(m-2)}(0) \} + \dots + a_1 y(0) + \{ b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0 \} U(s)$.

Divido per $\{ s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0 \}$ e ottengo:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{c_{m-1} s^{m-1} + c_{m-2} s^{m-2} + \dots + c_1 s + c_0}{s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}}_{\to Y_e(s)} + \underbrace{\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0} \cdot U(s)}_{\to Y_g(s)}$$

dove i coefficienti c_j, $j = 0, 1, \dots, m-1$ dipendono da a_i e dalle condizioni iniziali $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(m-1)}(0)$

$Y_f(s) = G(s) \cdot U(s)$

dove:

$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}$ è la FUNZIONE di TRASFERIMENTO del SISTEMA.

Osservazioni:

Grado dei polinomi:

$c_{m-1} = y(c) \quad c_{m-2} = \dot{y}(0) + a_{m-1} y(0)$

Al massimo il grado del numer di $Y(s)$ è $m-1$

Il grado del denom. è sempre m.

*) $Y_e(s)$ è una funzione razionale fratta e strettamente propria

www.alessandropaghi.it

*) $Y_e(s)$ e $G(s)$ hanno lo stesso denominatore. Le radici del denominatore si chiamano poli del sistema.

*) Poiché $m \leq n$ (per la causalità), la funzione di trasferimento $G(s)$ è una funzione razionale fratta propria (se $m = n$) oppure strettamente propria ($m < n$).

*) La funzione di trasferimento $G(s)$ contiene tutta l'informazione della rappresentazione i/o.

TRASFORMATA DI LAPLACE DELLA RAPPR. i/s/o

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = \mathcal{L}[Ax(t) + Bu(t)]$$

$$sX(s) - x(0) = A \cdot X(s) + B \cdot U(s)$$

$$\underbrace{sX(s)}_{1\times 1\ \ m\times 1} - \underbrace{AX(s)}_{m\times m\ \ m\times 1} = x(0) + B \cdot U(s)$$

Moltiplico per la mat. identità perché s è uno scalare e A è una matrice.

$$s \cdot I_{m\times m} X(s) - AX(s) = x(0) + B \cdot U(s)$$

$$(sI - A) \cdot X(s) = x(0) + B \cdot U(s)$$

$$X(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1} x(0)}_{\text{VETTORE } m} + \underbrace{(sI - A)^{-1} B \cdot U(s)}_{\text{VETTORE } m}.$$

$X_l(s)$ — Risposta libera nello stato

$X_f(s)$ — Risposta forzata nello stato

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) = C\{(sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} B U(s)\} + DU(s)$$

$$= C(sI - A)^{-1} x(0) + C(sI - A)^{-1} BU(s) + DU(s)$$

$$= \underbrace{C(sI - A)^{-1} x(0)}_{Y_e(s)} + \underbrace{\{C(sI - A)^{-1} B + D\} U(s)}_{Y_f(s)}$$

$Y_e(s)$ — Risp. libera nello uscita

$Y_f(s)$ — Risp. forzata nello uscita.

$$Y_f(s) = \underbrace{\{C(sI - A)^{-1} B + D\}}_{G(s)} U(s)$$

Funzione di trasferimento

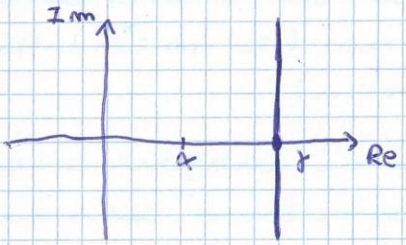
www.alessandropaghi.it

ANTITRASFORMATA DI LAPLACE

Problema: data $Y(s)$, determinare $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$

Risultato:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} Y(s)\, e^{st}\, ds \qquad \gamma > \alpha \text{ ascissa di convergenza.}$$



A noi interessano le

$Y(s)$ razionali fratte proprie e strettamente proprie.

Esempio: molla - massa - smorzatore

$$Y_e(s) = \frac{My(0)s + M\dot{y}(0) + By(0)}{Ms^2 + Bs + K}$$

$$Y_f(s) = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \cdot U(s)$$

Calcolare $y_e(t)$ (perché $y_e(t)$ e non $y_f(t)$?) per $M=1$, $B=3$, $K=2$, $y(0)=1$, $\dot{y}(0)=0$.

$$Y_e(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

1°) Calcolo le radici del denom. (poli del sistema)

$$s = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

$$Y_e(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

2°) Scomposizione in fratti semplici

$$Y_e(s) = \frac{R_1}{(s+1)} + \frac{R_2}{(s+2)} = \frac{R_1(s+2) + R_2(s+1)}{(s+1)(s+2)} = s+3$$

$$R_1(s+2) + R_2(s+1) = s+3$$

$$(R_1+R_2)s + 2R_1 + R_2 = s+3$$

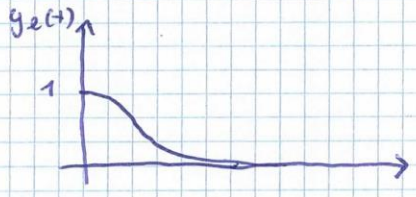
$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 1 \\ 2R_1 + R_2 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} R_1 = 2 \\ R_2 = -1 \end{cases}$$

$$Y_e(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

www.alessandropaghi.it

3°) antitrasformata

$$y_e(t) = 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] = \left\{2e^{-t} - e^{-2t}\right\} \cdot 1(t)$$



Percorso della molla/massa.

ANTITRASFORMATA DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

CASO 1)

$F(s)$ strettamente propria ($n > m$) e poli semplici (le radici di $D(s)$ hanno molteplicità algebrica 1).

Posso scrivere $F(s)$ nella forma zeri - poli.

$$F(s) = K \cdot \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_m)}$$

z_j : zeri

p_j : poli

$z_j, p_j \in \mathbb{C}$

N.B: Polinomio di grado n ha sempre n radici

Poli semplici $\Rightarrow p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_m$.

Decomposizione in fratti semplici (Sviluppo di Heaviside)

$$F(s) = \frac{R_1}{s-p_1} + \frac{R_2}{s-p_2} + \dots + \frac{R_m}{s-p_m}$$

R_i : Residuo del polo p_i

$$R_i = \lim_{s \to p_i} (s-p_i) F(s)$$

Esempio: $Y_e(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+2}$

$p_1 = -1$, $p_2 = -2$

$$R_1 = \lim_{s \to -1} (s+1) Y_e(s) = \lim_{s \to -1} \frac{s+3}{s+2} = 2$$

$$R_2 = \lim_{s \to -2} (s+2) Y_e(s) = \lim_{s \to -2} \frac{s+3}{s+1} = -1$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = g(t) = R_1 e^{p_1 t} + R_2 e^{p_2 t} + \dots + R_m e^{p_m t} = \sum_{i=1}^{m} R_i e^{p_i t}$$

www.alessandropaghi.it

Esempio: mmm

$$Y_e(s) = \frac{M y(0) s + M \dot{y}(0) + B y(0)}{M s^2 + \beta s + k}$$

Calcolare $y_e(t)$ per $M=1$, $\beta=1$, $k=1$

$y(0)=1$, $\dot{y}(0)=0$.

$$Y_e(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1} \qquad \text{poli: } \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \;\nearrow p_1 \;\searrow p_2$$

Scomposizione in fratti semplici:

$$Y_e(s) = \frac{R_1}{s-\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{R_2}{s-\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

N.B: poli complessi e coniugati hanno residui complessi e coniugati.

$p_2 = \overline{p_1} \Rightarrow R_2 = \overline{R_1}$

$$R_1 = \lim_{s\to p_1} (s-p_1) Y_e(s) = \lim_{s\to p_1} \left(s-\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \cdot \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

($p_1 = -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$)

$$= \lim_{s\to p_1} \left(s-\left(-\tfrac{1}{2}+j\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \cdot \frac{s+1}{\left(s-\left(-\tfrac{1}{2}+j\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(s-\left(-\tfrac{1}{2}-j\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}$$

$$= \lim_{s\to p_1} \frac{-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}}{j\sqrt{3}}$$

← moltiplico per j sopra e sotto

$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}} j + \frac{1}{2} = R_1 \qquad j \cdot j = -1$$

$$\downarrow$$

$$R_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} j$$

$$y_e(t) = R_1 e^{p_1 t} + R_2 e^{p_2 t}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} j\right) e^{\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} j\right) e^{\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}$$

$$R_1 = +\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} j \qquad |R_1| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

FASE $\rightarrow \not\propto R_1 = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$

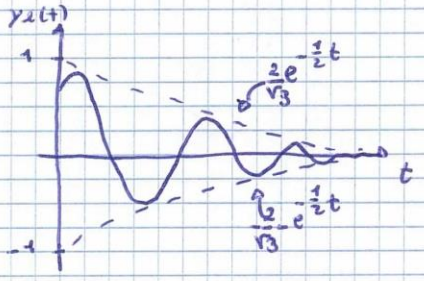
$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}} \Rightarrow R_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$y_e(t) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}}}_{R_1} e^{-\frac{1}{2}t} e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}} e^{j\frac{\pi}{6}}}_{R_2} e^{-\frac{1}{2}t} e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \left\{ e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}t} e^{-j\frac{\pi}{6}} + e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}t} e^{j\frac{\pi}{6}} \right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \frac{e^{j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{6}\right)} + e^{-j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{6}\right)}}{2}$$

$$y_2(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{6}\right)$$



OSCILLAZIONE DOMINATA DA UN'ESPONENZIALE.

N.B: Non parte da 1.

Esercizio: Ripetere con $\beta = 0$ (senza attrito)

In generale:

una coppia di poli complessi e coniugati $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$, di residui $R_1 = \rho e^{j\varphi}$, $R_2 = \rho e^{-j\varphi}$, da origine ai "modi" (antitrasformata):

$$2\rho e^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi) = \underbrace{r_1 e^{\sigma t} \cos\omega t}_{\text{MODO}} + \underbrace{r_2 e^{\sigma t} \operatorname{sen}\omega t}_{\text{MODO}}$$

e^{pt} con $p \in \mathbb{R}$ modi "aperiodici"

$e^{\sigma t}\cos(\omega t)$

$e^{\sigma t}\operatorname{sen}(\omega t)$ con $p = \sigma \pm j\omega$ e σ modi "pseudoperiodici"

METODO ALTERNATIVO (Calcoli senza numeri complessi)

So che i poli sono: $p_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$, cioè

$$Y_e(s) = \frac{s+1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

So anche che i modi risultanti sono:

$$e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \quad e^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

le cui trasformate sono:

$$\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}, \quad \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

www.alessandropaghi.it

Devo imporre:

$$\frac{s+1}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \gamma_1 \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \gamma_2 \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$s+1 = \gamma_1(s+\tfrac{1}{2}) + \gamma_2(\tfrac{\sqrt{3}}{2})$$

$$s+1 = \gamma_1 s + \tfrac{1}{2}\gamma_1 + \gamma_2\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\gamma_1 = 1 \qquad \frac{1}{2}\gamma_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_2 = 1 \qquad \begin{cases} \gamma_1 = 1 \\ \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_2(t) = \gamma_1 e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t) + \gamma_2 e^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{sen}(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t) + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{sen}(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t)$$

Esercizio: Calcolare l'antitrasformata di:

$$F(s) = \frac{20}{s(s^2+2s+5)}$$

CASO 2)

$F(s)$ strettamente propria ($n < m$) con poli multipli:

μ_i: molteplicità algebrica del polo p_i.

Forma zeri-poli:

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)^{\mu_1}\cdot(s-p_2)^{\mu_2}\cdots(s-p_r)^{\mu_r}}$$

$\mu_i \in \mathbb{N}$, $\mu_i \geq 1$. $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = m$.

Decomposizione in fratti semplici:

$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_r(s)$

dove

$$F_i(s) = \frac{R_{i,1}}{s-p_i} + \frac{R_{i,2}}{(s-p_i)^2} + \dots + \frac{R_{i,\mu_i}}{(s-p_i)^{\mu_i}} \qquad \text{per } i = 1, 2, \dots, r$$

NB: Il numero di fratti semplici è uguale al grado del polinomio.

www.alessandropaghi.it

Poiché sappiamo che:

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!}e^{\alpha t}1(t)\right] = \frac{1}{(s-\alpha)^{k+1}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F_i(s)\right] = R_{i,1}e^{p_i t} + R_{i,2}te^{p_i t} + R_{i,3}\frac{t^2}{2}e^{p_i t} + \dots$$
$$\dots + R_{i,\mu_i}\frac{t^{\mu_i-1}}{(\mu_i-1)!}e^{p_i t}$$

I Residui $R_{i,k}$ sono dati da:

$$R_{i,k} = \frac{1}{(\mu_i-k)!}\lim_{s\to p_i}\frac{d^{\mu_i-k}}{ds^{\mu_i-k}}\left[(s-p_i)^{\mu_i}F(s)\right] \qquad k = 1, 2, \dots, \mu_i$$

Esempio: $F(s) = \dfrac{s-6}{s^2(s+3)}$

$p_1 = 0$ con $\mu_1 = 2$

$p_2 = -3$ con $\mu_2 = 1$

$$F(s) = \underbrace{\frac{R_{1,1}}{s} + \frac{R_{1,2}}{s^2}}_{F_1(s)} + \underbrace{\frac{R_{2,1}}{s+3}}_{F_2(s)}$$

$$R_{1,2} = \frac{1}{(2-2)!}\lim_{s\to 0}\frac{d^{2-2}}{ds^{2-2}}\left[s^2F(s)\right]$$

$$= 1\cdot\lim_{s\to 0}\frac{s-6}{s+3} = -2$$

$$R_{1,1} = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to 0}\frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}}\left[s^2F(s)\right]$$

$$= 1\cdot\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left[\frac{s-6}{s+3}\right] = \lim_{s\to 0}\frac{s+3-(s-6)}{(s+3)^2} = \lim_{s\to 0}\frac{9}{(s+3)^2} = 1$$

$$R_{2,1} = \lim_{s\to -3}(s+3)F(s) = \lim_{s\to -3}\frac{s-6}{s^2} = -1$$

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s+3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = 1(t) - 2t\,1(t) - e^{-3t}\cdot 1(t)$$

? PERCHÉ?

Nel caso di coppie di poli complessi e coniugati $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ con molteplicità $\mu > 1$, i modi risultanti saranno:

www.alessandropaghi.it

$e^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $e^{\sigma t}\text{sen}(\omega t)$, $t e^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $t e^{\sigma t}\text{sen}(\omega t)$,
$t^2 e^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $t^2 e^{\sigma t}\text{sen}(\omega t)$, ..., $t^{\mu-1} e^{\sigma t}\cos(\omega t)$
$t^{\mu-1} e^{\sigma t}\text{sen}(\omega t)$

CASO 3) $F(s)$ propria (ma non strettamente).

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$$= K + \frac{\tilde{N}(s)}{s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

quando $\tilde{N}(s) \leq m-1$.

$K = b_m$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = K \cdot \delta(t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\tilde{N}(s)}{s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0}\right]$$

Esempio:

$$F(s) = \frac{s^2+6s+3}{2s^2+6s+4} = \frac{\frac{1}{2}s^2 + \frac{6}{2}s + \frac{3}{2}}{s^2+3s+2} = \frac{1}{2} + \frac{\tilde{N}(s)}{s^2+3s+2}$$

$\tilde{N}(s) = c_1 s + c_0$?

$$= \frac{s^2+3s+2+2c_1 s+2c_0}{2(s^2+3s+2)} = \frac{s^2+5s+3}{2s^2+6s+4}$$

$3+2c_1 = 6 \rightarrow c_1 = 1$

$2+2c_0 = 3 \rightarrow c_0 = \frac{1}{2}$

$$F(s) = \frac{1}{2} + \frac{s+\frac{1}{2}}{s^2+3s+2}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2}\delta(t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+\frac{1}{2}}{s^2+3s+2}\right]$$

In alternativa:

$$F(s) = \frac{\frac{1}{2}(s^2+3s+2) + s + \frac{1}{2}}{s^2+3s+2} = \frac{1}{2} + \frac{s+\frac{1}{2}}{s^2+3s+2}$$

www.alessandropaghi.it

ANALISI MODALE DEI SISTEMI LTI (TEMPO-CONTINUO)

"Modi": funzioni del tempo che compongono la risposta libera dei sistemi LTI.

Poli di $Y_\ell(s)$	Modi
$p \in \mathbb{R}$, $\mu = 1$ Polo reale semplice	e^{pt}
$p = \sigma + j\omega$, $\mu = 1$ coppia di poli complessi coniugati semplici	$e^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $e^{\sigma t}\sin(\omega t)$ modi pseudo-periodici
$p \in \mathbb{R}$, $\mu > 1$ polo reale multiplo	$e^{pt}, te^{pt}, t^2e^{pt}, \dots, t^{\mu-1}e^{pt}$
$p = \sigma + j\omega$, $\mu > 1$ coppia di poli complessi coniugati multipli	$e^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $e^{\sigma t}\sin(\omega t)$ $te^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $te^{\sigma t}\sin(\omega t)$ $\vdots$ $t^{\mu-1}e^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $t^{\mu-1}e^{\sigma t}\sin(\omega t)$

CARATTERE DI CONVERGENZA DEI MODI

Definizione:

Un modo $m(t)$ si dice:

- convergente, se $\lim_{t\to+\infty} m(t) = 0$;
- limitato non convergente, se non è convergente ma $\exists M > 0 : |m(t)| \le M \quad \forall t \ge 0$;
- divergente, se $\forall M > 0$, $\exists \bar{t} > 0 : |m(\bar{t})| > M$;

Risultato:

1) Il modo relativo al polo p_i è convergente sse $\mathrm{Re}[p_i] < 0$;
2) Il modo relativo al polo p_i è limitato non convergente sse $\mathrm{Re}[p_i] = 0$ e il polo è semplice [$\mu = 1$];
3) In tutti gli altri casi il modo è divergente;
4) $\lim_{t\to\infty} m(t)$ esiste finito se $H(s) = \mathcal{L}[m(t)]$ Ra $\Rightarrow$

Tutti i poli a parte reale negativa tranne al più un polo semplice in zero (in tal caso posso utilizzare il teorema del valore finale);

RISPOSTA FORZATA E INGRESSI SPECIALI

① Risposta Impulsiva



La risposta impulsiva del sistema è la risposta forzata $y_f(t)$ relativa all'ingresso $u(t) = \delta(t)$.

$$Y_f(s) = G(s) \cdot U(s)$$

$u(t) = \delta(t) \longrightarrow U(s) = 1$

$Y_f(s) = G(s)$

$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$

> La risposta impulsiva è l'antitrasformata di Laplace della funzione di trasferimento

Per un generico segnale di ingresso $u(t)$:

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s) \cdot U(s)] = \int_0^t g(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau .$$

La risposta forzata ad un generico ingresso $u(t)$ è la convoluzione di $u(t)$ con la risposta impulsiva del sistema.

Basta conoscere la risposta di un segnale per poter calcolare quella di tutti gli altri.

Sia $\hat{y}(t)$ la risposta forzata al segnale di ingresso $u(t)$. Come faccio a calcolare la risposta forzata ad un qualunque altro ingresso $\bar{u}(t)$?

$$\hat{Y}(s) = G(s)\,\hat{U}(s) \rightarrow G(s) = \frac{\hat{Y}(s)}{\hat{U}(s)}$$

$$\bar{Y}(s) = G(s) \cdot \bar{U}(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\bar{Y}(s)] = \bar{y}(t)$$

www.alessandropaghi.it

② Risposta al gradino unitario

$u(t) = 1(t) \longrightarrow U(s) = \frac{1}{s}$

$Y_f(s) = G(s)\,U(s) = G(s)\,\frac{1}{s}$

$\exists$ finito $\lim_{t\to+\infty} y_f(t)$? (Risposta al gradino)

Se limite della risposta al gradino $\exists$ finito se $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa.

In tal caso:

$$\lim_{t\to+\infty} y_f(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot Y_f(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s} = G(0)$$

$G(0)$ prende il nome di guadagno in continua o guadagno statunario del sistema.

Nel tempo si ha:

$$y_f(t) = \int_0^t g(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t g(\sigma)\,d\sigma$$?

La risposta al gradino è l'integrale della risposta impulsiva.

Perché? Il gradino è l'integrale dell'impulso.

Come scrivere l'inversa di una matrice.

$$(sI-A)^{-1} = \frac{Agg[(sI-A)]^T}{\det(sI-A)}$$

$Agg[(sI-A)]^T$ ← matrice $n \times n$ di polinomi di grado $\leq n-1$.

$\det(sI-A)$ ← Polinomio di grado n in s.

$$Y_z(s) = \frac{C \cdot Agg[(sI-A)]^T}{\det(sI-A)}$$

I poli di $Y_z(s)$ sono gli autovalori di A.

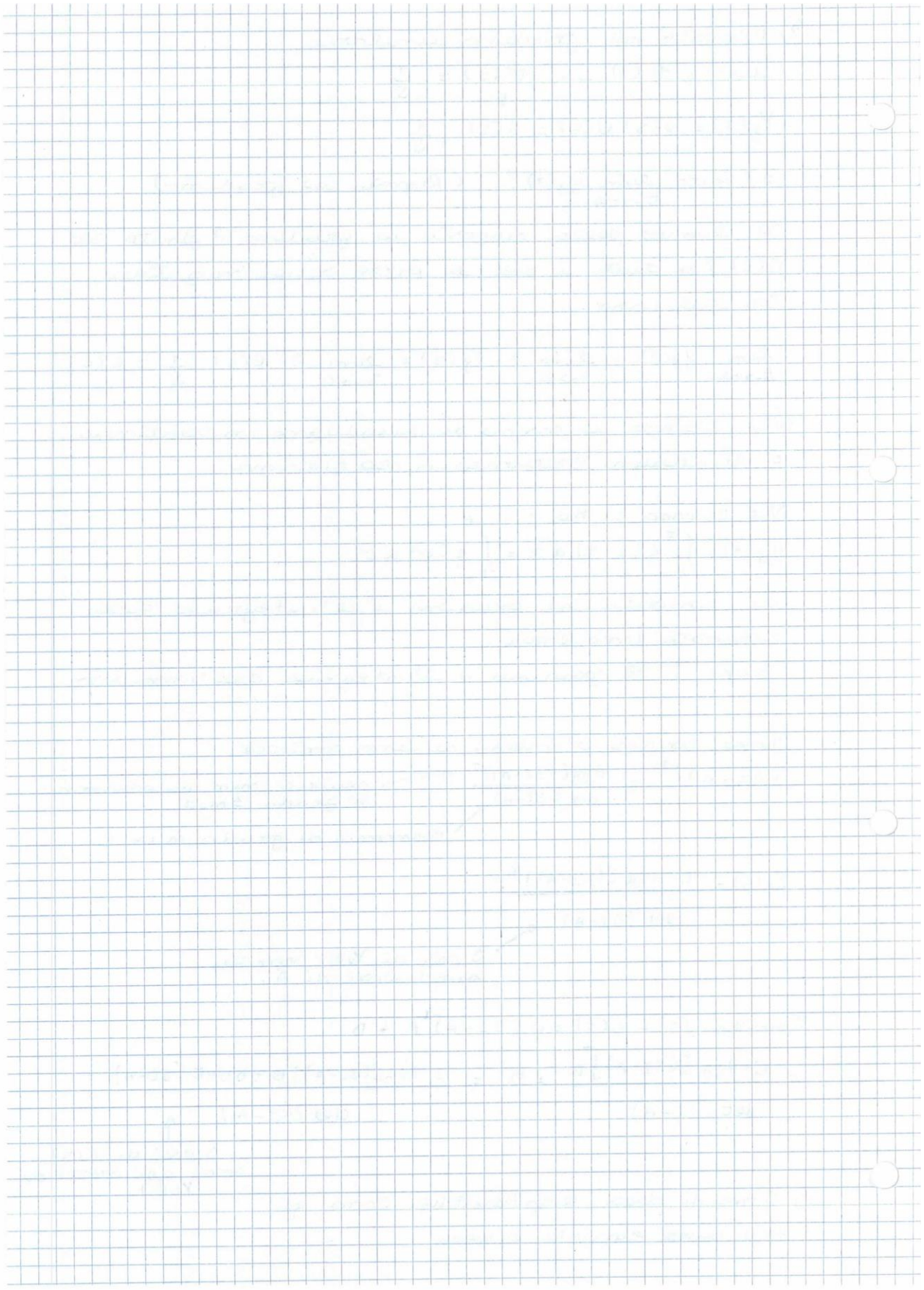
$$Y_{impulsiva}(s) = G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$$

$$= \frac{C \cdot Agg[(sI-A)]^T B}{\det(sI-A)} + D = \frac{C \cdot Agg[(sI-A)]^T B + D\det(sI-A)}{\det(sI-A)}$$

I poli di $G(s)$ sono gli stessi di $Y_z(s)$.

⇒ I modi della Risp. impulsiva sono gli stessi della risposta libera

www.alessandropaghi.it



RISPOSTA AL GRADINO NEI SISTEMI DEL PRIMO ORDINE

$$\dot{x}(t) = \underbrace{(-a)}_{A\ (1\times1)} x(t) + \underbrace{a}_{B} u(t)$$

$$y(t) = x(t) \qquad \leftarrow C = 1,\ D = 0$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = 1 \cdot (s - (-a)^{-1})a + 0$$

$$= (s+a)^{-1} \cdot a = \frac{a}{s+a}$$

Ordine del sistema $\begin{cases} \#\text{ di stati i/s/o} \\ \text{grado del denominatore di } G(s) \text{ i/o} \end{cases}$

$$u(t) = 1(t) \longrightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y_f(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{a}{s+a} \cdot \frac{1}{s}$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s(s+a)}\right] =$$

$$\frac{a}{s(s+a)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+a} \qquad \text{se } a \neq 0$$

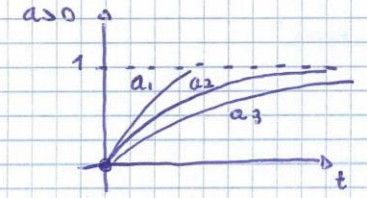
$p_1 = 0 \quad p_2 = -a$

$$R_1 = \lim_{s\to 0} s\, Y_F(s) = \lim_{s\to 0} \frac{a}{s+a} = 1$$

$$R_2 = \lim_{s\to -a} (s+a)\, Y_F(s) = \lim_{s\to -a} \frac{a}{s} = -1$$

$$y_F(t) = 1(t) - e^{-at} \cdot 1(t) = (1 - e^{-at}) \cdot 1(t)$$

$a > 0$



$a_1 < a_2 < a_3$

$$G(s) = \frac{a}{s+a} \qquad \text{polo} = -a < 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} y_F(t) = G(0) = \left.\frac{a}{s+a}\right|_{s=0} = 1.$$

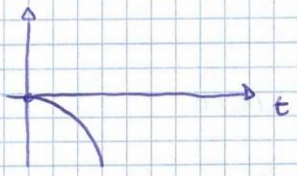
$$G(s) = \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{1}{a}}_{\tau} s} = \frac{1}{1+\tau s} \qquad \tau: \text{costante di tempo del sistema.}$$

www.alessandropaghi.it

$$y_F(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot 1(t)$$

Quando $t \simeq 5\tau$, si può considerare che $y_F(t) \simeq 1$
(con un errore $< 1\%$)

Se $a < 0$



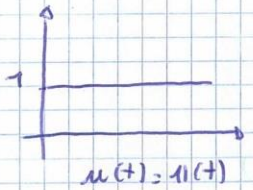
Se $a = 0$?

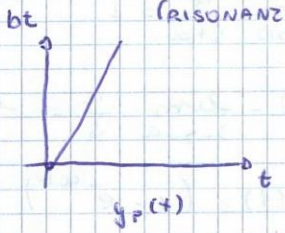
$$\dot{x}(t) = -a x(t) + b u(t)$$
$$y(t) = x(t)$$
$$G(s) = \frac{b}{s+a} = \Big|_{a=0} \frac{b}{s}$$

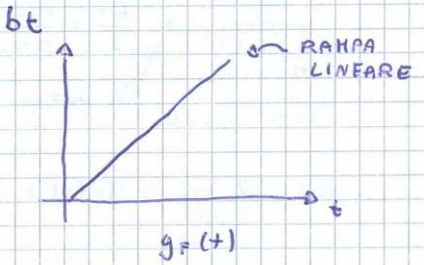
$u(t) = 1(t) \qquad U(s) = \frac{1}{s}$

$$Y_g(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{b}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{b}{s^2}$$
$$y_g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b}{s^2}\right] = b \cdot t \cdot 1(t)$$

← MODO NUOVO (RISONANZA).







$y_F(t)$ è l'integrale di $u(t) = 1(t)$.

Azione integrale: $G(s) = \frac{1}{s}$ "integratore"

www.alessandropaghi.it

RISPOSTA AL GRADINO NEI SISTEMI DEL SECONDO ORDINE

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\omega_m^2 x_1(t) - 2\zeta\omega_m x_2(t) + \omega_m^2 u(t)$$
$$\omega_m > 0$$
$$y(t) = x_1(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_m^2 & -2\zeta\omega_m \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_m^2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + [0]\, u(t)$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ \omega_m^2 & s + 2\zeta\omega_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_m^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} s + 2\zeta\omega_m & 1 \\ -\omega_m^2 & s \end{bmatrix}}{s^2 + 2\zeta\omega_m s + \omega_m^2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_m^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\omega_m^2}{s^2 + 2\zeta\omega_m s + \omega_m^2}$$

Calcolo dei poli:

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_m \pm \sqrt{(\zeta\omega_m)^2 - \omega_m^2} = -\zeta\omega_m \pm \omega_m\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Se $|\zeta| \geq 1$ ho due radici reali
(→ comportamento "del primo ordine").

Caso $|\zeta| < 1$ → $p_{1,2} = -\zeta\omega_m \pm j\omega_m\sqrt{1-\zeta^2}$

→ modi: $e^{-\zeta\omega_m t}\cos(\omega_m\sqrt{1-\zeta^2}\cdot t)$
$e^{-\zeta\omega_m t}\,\mathrm{sen}(\omega_m\sqrt{1-\zeta^2}\cdot t)$

Quando $\zeta = 0$ ⇒ Pulsazione massima.
ω_m: Pulsazione naturale.
ζ: smorzamento

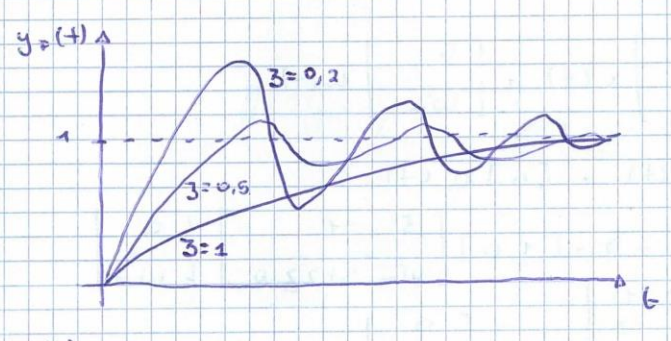
$0 < \zeta < 1$ modi convergenti
$-1 < \zeta < 0$ modi divergenti
$\zeta = 0$ modi limitati $(\cos(\omega_m t), \mathrm{sen}(\omega_m t))$

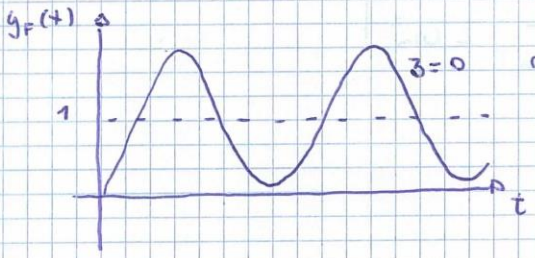
$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\cdot\frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_m^2}{s^2 + 2\zeta\omega_m s + \omega_m^2}\cdot\frac{1}{s}\right]$$

www.alessandropaghi.it

$$Y_F(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{\frac{2\zeta}{\omega_n}\left(1 + \frac{s}{2\zeta\omega_n}\right)}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

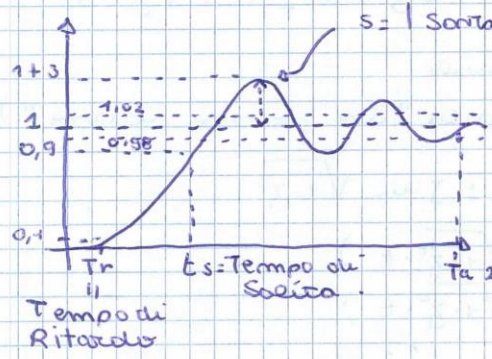
$$y_F(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\, t + \operatorname{arctan}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$





non si adegua mai.

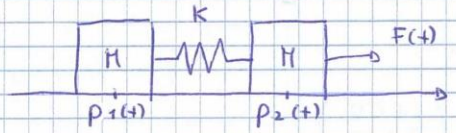
PARAMETRI CARATTERISTICI DEI SISTEMI DEL SECONDO ORDINE



www.alessandropaghi.it

ESERCITAZIONE 1

ESERCIZIO 1



$M = 1\,kg$

$k = 2\,N/m$

$M\ddot{p}_1(t) = k(p_2(t) - p_1(t))$

$M\ddot{p}_2(t) = F(t) - k(p_2(t) - p_1(t))$

$u(t) = F(t) \qquad y(t) = x_1(t)$

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ \dot{p}_1(t) \\ p_2(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2(x_3(t) - x_1(t)) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = u(t) - 2(x_3(t) - x_1(t)) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

RAPPR. I/S/O.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 2 & s & -2 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ -2 & 0 & 2 & s \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = s \cdot \det\begin{pmatrix} s & -2 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & -2 & s \end{pmatrix} - (-1)\det\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -2 & 2 & s \end{pmatrix}$$

$$= s \cdot s(s^2 + 2) + 2\det\begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ s & -1 \end{pmatrix}$$

$$= s^2(s^2 + 2) + 2(s^2 + 2) - 2 \cdot 2 = s^2(s^2 + 2) + 2(s^2 + 2 - 2)$$

$$= s^2(s^2 + 2) + 2s^2 = s^2(s^2 + 4)$$

www.alessandropaghi.it

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix}1&0&0&0\end{bmatrix}\left(\text{Agg}\begin{bmatrix}s&-1&0&0\\2&s&-2&0\\0&0&s&-1\\-2&0&2&s\end{bmatrix}\right)^T\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}}{s^2(s^2+4)}$$

L'inversa è l'aggiunta trasposta del determinante.

$$= \frac{\text{Agg}(4,4)}{s^2(s^2+4)} = \frac{(-1)^{4+4}\det\begin{pmatrix}-1&0&0\\s&-2&0\\0&s&-1\end{pmatrix}}{s^2(s^2+4)} = \frac{2}{s^2(s^2+4)} = \frac{2}{s^4+4s^2}$$

$$\frac{Y_F(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{2}{s^4+4s^2}$$

$$(s^4+4s^2)\,Y_F(s) = 2\cdot U(s)$$

$$\frac{d^4}{dt^4}y(t) + 4\frac{d^2}{dt^2}y(t) = 2u(t) \qquad (i/o)$$

Poli: $p_1=0$, $p_2=0$, $p_3=+j2$, $p_4=-j2$

modi: $1(t)$, $t\cdot 1(t)$, $\cos(2t)$, $\text{sen}(2t)$

aperiod. lim. — aperiod. div. — pseudoper. lim. — pseudoper. lim.

Risposta impulsiva — Domanda: $y_g(t)$ relativa a $u(t)=\delta(t)$.

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right]$$

$$\frac{2}{s^2(s^2+4)} = \frac{\gamma_1}{s} + \frac{\gamma_2}{s^2} + \frac{\gamma_3 s}{s^2+4} + \frac{\gamma_4 2}{s^2+4}$$

$$2 = \gamma_1 s(s^2+4) + \gamma_2(s^2+4) + \gamma_3 s\cdot s^2 + \gamma_4 2\cdot s^2$$

$$2 = \gamma_1 s^3 + 4\gamma_1 s + \gamma_2 s^2 + 4\gamma_2 + \gamma_3 s^3 + 2\gamma_4 s^2$$

$$\begin{aligned}&\gamma_1+\gamma_3=0 && \gamma_3=0\\ &\gamma_2+2\gamma_4=0 && \gamma_4=-\tfrac{1}{4}\\ &4\gamma_1=0 && \gamma_1=0\\ &4\gamma_2=2 && \gamma_2=\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

$$y_F(t) = \left\{\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\text{sen}(2t)\right\}\cdot 1(t).$$

www.alessandropaghi.it

5) Determinare $u(t)$ costituito da modi del tipo $t^k e^{-t}$ con $k = 1, 2, \dots$ in modo che la risposta forzata del sistema sia limitata

$$Y_f(s) = G(s) \cdot U(s)$$

$$\frac{2}{s^2(s^2+4)}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!} e^{-t}\right] = \frac{1}{(s+1)^{k+1}}$$

$$u(t) = \gamma_0 e^{-t} + \gamma_1 t e^{-t} + \gamma_2 \frac{t^2}{2!} e^{-t} + \dots$$

$$U(s) = \gamma_0 \frac{1}{s+1} + \gamma_1 \frac{1}{(s+1)^2} + \gamma_2 \frac{1}{(s+1)^3} + \dots$$

Solo γ_0: $Y_F(s) = \frac{2}{s^2(s^2+4)} \cdot \gamma_0 \cdot \frac{1}{s+1}$

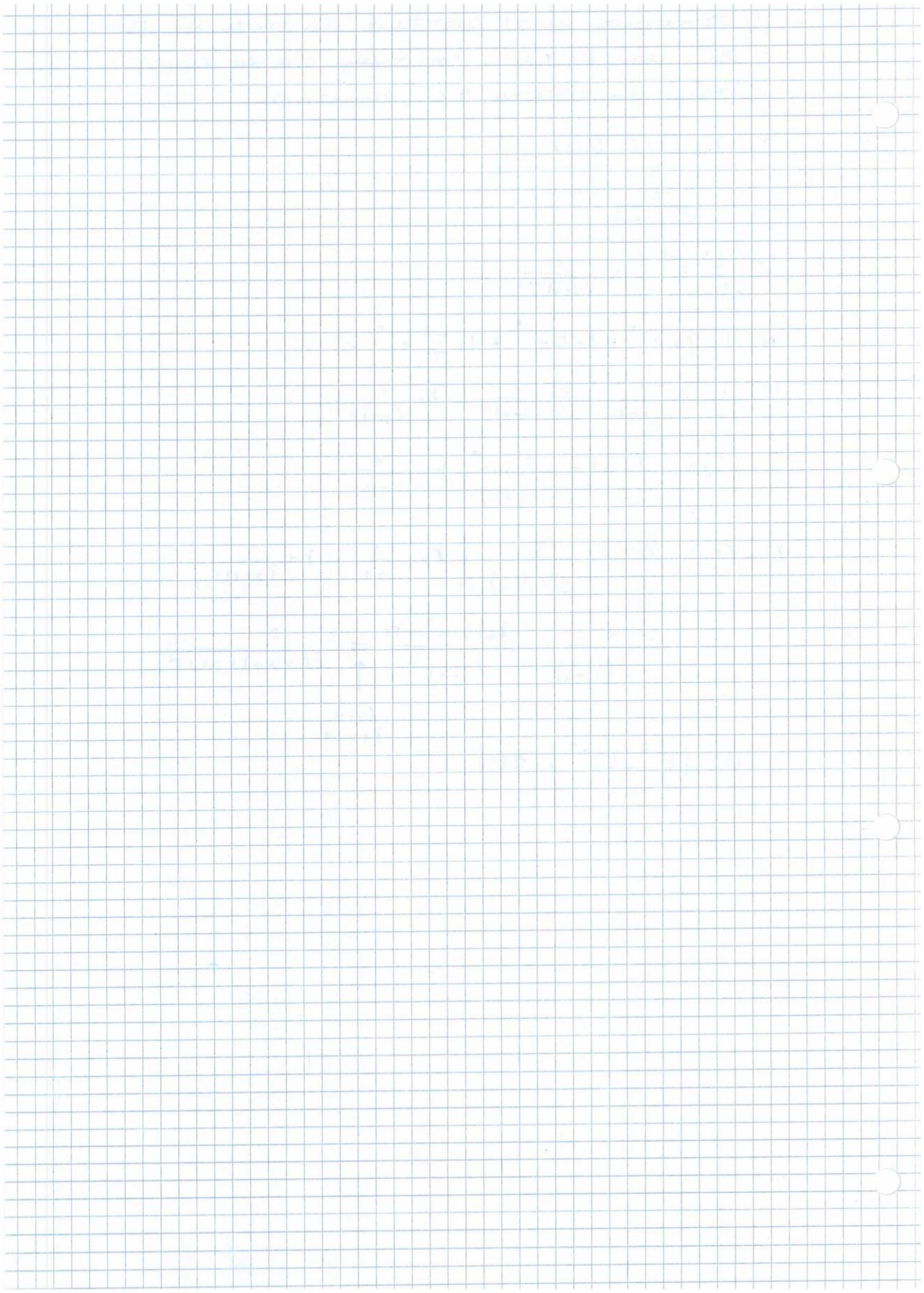
γ_0, γ_1: $Y_F(s) = \frac{2}{s^2(s^2+4)} \left\{ \gamma_0 \cdot \frac{1}{s+1} + \gamma_1 \frac{1}{(s+1)^2} \right\}$

$$= \frac{2}{s^2(s^2+4)} \cdot \frac{\gamma_0(s+1)+\gamma_1}{(s+1)^2} = \frac{2}{s(s^2+4)(s+1)^2}$$

$\gamma_0 = 1$, $\gamma_1 = -1$

$$u(t) = \left\{ e^{-t} - t e^{-t} \right\} \cdot 1(t) .$$

www.alessandropaghi.it



ANALISI MODALE NELLO SPAZIO DEGLI STATI
(SISTEMI LTI A TEMPO CONTINUO)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$X(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1} x_0}_{X_l(s)} + \underbrace{\{(sI - A)^{-1} B\} \cdot U(s)}_{X_f(s)}$$

$$x_l(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1} x_0] = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]\, x_0$$

Come è fatto $x_e(t)$?

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{i-esima}$$

$$x(0) = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \dot{x}(t) = Ax(t),\ x(0) = e_1 \rightarrow x(t) = \phi_1(t)$$

evoluzione libera dello stato

$$x(0) = e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \dot{x}(t) = Ax(t),\ x(0) = e_2 \rightarrow x(t) = \phi_2(t)$$

$$\vdots$$

$$x(0) = e_m = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \dot{x}(t) = Ax(t),\ x(0) = e_m \rightarrow x(t) = \phi_m(t)$$

$\phi_i(t) \in \mathbb{R}^m$

$$\Phi(t) = [\phi_1(t) \,|\, \phi_2(t) \,|\, \dots \,|\, \phi_m(t)] \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

1) $\dot{\Phi}(t) = [\dot{\phi}_1(t), \dot{\phi}_2(t), \dots, \dot{\phi}_m(t)] = A[\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_m(t)]$

$= A\Phi(t)$

2) $\Phi(0) = [\phi_1(0) \,|\, \phi_2(0) \,|\, \dots \,|\, \phi_m(0)] = I_{m \times m}$

$\forall x_0$ può essere espresso come $x_0 = \Phi(0) \cdot x_0$

$\Rightarrow$ la soluzione $x(t)$ del problema di partenza

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$
$$x(0) = x_0$$

Sarà $x(t) = \Phi(t) \cdot x_0 = \phi_1(t) \cdot x_{01} + \phi_2(t) \cdot x_{02} + \dots + \phi_m x_{0m}$

$\Rightarrow$ Principio di sovrapposizione degli effetti.

(perché $x_0 = e_1 \cdot x_{01} + e_2 \cdot x_{02} + \dots + e_m x_{0m}$).

www.alessandropaghi.it

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$$

Risultato:

$$\Phi(t) = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{A^i t^i}{i!} = e^{At}$$

MATRICE ESPONENZIALE

Dim:

ii) Per $t=0 \rightarrow \Phi(0) = I$

i) $\dot{\Phi}(t) = A + A^2\frac{t}{1!} + A^3\cdot\frac{2t^2}{2!} + \dots + A^K\cdot\frac{K\cdot t^{K-1}}{K!\,(K-1)!}$

$= A\left\{I + A\frac{t}{1!} + A^2\frac{t^2}{2!} + \dots + A^{K-1}\frac{t^{K-1}}{(K-1)!}\right\}$

$= A\cdot\Phi(t)$.

$$e^x = \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{x^i}{i!}$$

Nel dominio del tempo la risposta libera è data da:

$x_l(t) = e^{At}\cdot x_0 \qquad y_l(t) = C e^{At}\cdot x_0$

Per la risposta forzata:

$X_f(s) = (sI - A)^{-1}B\cdot U(s)$

$$x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\sigma)}B\,u(\sigma)\,d\sigma$$ ← Prodotto di convoluzione.

$$y_f(t) = C x_f(t) + D u(t) = C\cdot\int_0^t e^{A(t-\sigma)}B\,u(\sigma)\,d\sigma + D u(t).$$

Proprietà di e^{At}:

1) $e^{A\cdot 0} = I$

2) $e^{(A+B)t} = e^{At}\cdot e^{Bt}$ sse $A\cdot B = B\cdot A$

3) $\left[e^{At}\right]^{-1} = e^{-At}$

$e^{At}\cdot e^{-At} = e^{(A+(-A))t} = I$

↑ A e −A commutano.

4) $\frac{d}{dt}e^{At} = A\cdot e^{At}$ (Soluzione di $\dot{\Phi} = A\cdot\Phi$).

5) $A\cdot v = \lambda v \Rightarrow e^{At}\cdot v = e^{\lambda t}\cdot v$

$v \in \mathbb{C}^n$ (autovettore), $\lambda \in \mathbb{C}$ (autovalore)

v autovettore di A è autovettore di e^A

$\Rightarrow$ A e A^t hanno gli stessi autovettori

$\Rightarrow$ gli autovalori di e^{At} sono $e^{\lambda t}$ se gli autovalori di A sono λ.

www.alessandropaghi.it

6) Sia T, $\det T \neq 0$ e $A = T \cdot \bar{A} T^{-1} \Rightarrow e^{At} = T e^{\bar{A}t} \cdot T^{-1}$

Analisi modale:

Caso 1: Matrice A diagonalizzabile

$\exists T: A = T \cdot \Lambda T^{-1}$ con $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$

$\downarrow$

$AT = T \cdot \Lambda$

$T = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ v_i: autovettore di A.

$e^{At} = T \cdot e^{\Lambda t} \cdot T^{-1}$

$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$

WARNING:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $e^{At} \neq \begin{bmatrix} e^{a_{11} t} & e^{a_{12} t} \\ e^{a_{21} t} & e^{a_{22} t} \end{bmatrix}$

Se la matrice è diagonalizzabile, i modi del sistema sono del tipo $e^{\lambda_i t}$, dove λ_i è autovalore di A.

Caso 2: Matrice A non diagonalizzabile

→ $\exists$ un autovalore λ di A: molt. algebrica di λ > molt. geometrica di λ

molt. geometrica = $\dim \ker (\lambda I - A)$

$\exists T, \det T \neq 0 : A = T \cdot J \cdot T^{-1}$ dove J è la forma di Jordan

$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & J_r \end{bmatrix}$ $J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$ $e^{At} = T e^{Jt} T^{-1}$

$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{J_r t} \end{bmatrix}$ $e^{J_i t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & t^2 e^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-i)!} e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & e^{\lambda_i t} & \\ 0 & & \dots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$

$\uparrow$ $\mathbb{R}^{m \times m}$ → dimensione blocco di Jordan.

www.alessandropaghi.it

Un blocco di Jordan di dimensione m, relativo all'autovalore λ, genera i modi:

$$e^{\lambda t},\ t e^{\lambda t},\ t^2 e^{\lambda t},\ \dots,\ t^{m-1} e^{\lambda t}$$

Caratteri di convergenza dei modi:

$\mathrm{Re}[\lambda_i] < 0$ → modi convergenti

$\mathrm{Re}[\lambda_i] = 0$ e molt. geom(λ_i) = molt. alg.(λ_i) → modi limitati e non convergenti

In tutti gli altri casi: modi divergenti

($\mathrm{Re}[\lambda_i] > 0$; $\mathrm{Re}[\lambda_i] = 0$ + molt. alg(λ_i) > molt. geom.(λ_i))

$$x_2(t) = e^{At} \cdot x_0$$

Caso diagonalizzabile: $e^{At} = T e^{\Lambda t} T^{-1}$

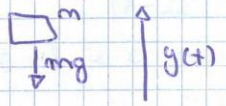
$$T = [v_1, v_2, \dots, v_m]$$

$$x_2(t) = T \cdot e^{\Lambda T} \underbrace{T^{-1} x_0}_{\alpha} = \qquad \alpha = T^{-1} x_0$$

$$= [v_1, v_2, \dots, v_m] \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_m t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha_1 \cdot e^{\lambda_1 t} v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + \alpha_m e^{\lambda_m t} v_m .$$

Esempio: massa in caduta libera



$$\ddot{y}(t) = -g \rightarrow \dddot{y}(t) = 0$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \dddot{y}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t)$$

$\lambda = 0$, molt. alg = 3

$\dim \mathrm{Ker}(A) = 1$

$(A = J)$

modi: $1(t)$, $t \cdot 1(t)$, $t^2 \cdot 1(t)$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

www.alessandropaghi.it

Esempio:

$$x(0) = \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

$$x_2(t) = e^{At} x(0) = \begin{bmatrix} h - g\frac{t^2}{2} \\ -gt \\ -g \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{POSIZIONE} \\ \text{VELOCITÀ} \\ \text{ACCELERAZIONE} \end{matrix}$$

TRAIETTORIE NELLO SPAZIO DEGLI STATI

Al variare di t, lo stato $x(t)$ disegna una traiettoria in $\mathbb{R}^n$ (n = dimensione di x).

Caso $n = 2$.

Esempio

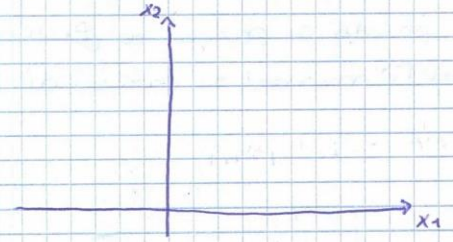
$$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

matrice di esempio

$$\dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \lambda_2 x_2(t)$$

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} \cdot x_1(0)$$
$$x_2(t) = e^{\lambda_2 t} \cdot x_2(0)$$

SPAZIO DEGLI STATI



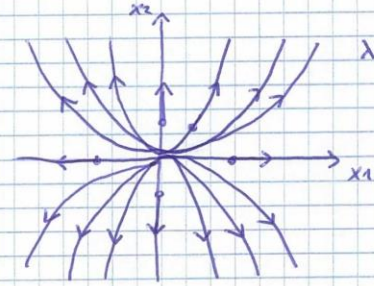
$$\ln \frac{x_1(t)}{x_1(0)} = \lambda_1 t$$

$$t = \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{x_1(t)}{x_1(0)}$$

$$x_2 = e^{\lambda_2 \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{x_1}{x_1(0)}} \cdot x_2(0)$$

$$\frac{x_2}{x_2(0)} = \left(e^{\ln \frac{x_1}{x_1(0)}}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \rightarrow \frac{x_2}{x_2(0)} = \left(\frac{x_1}{x_1(0)}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

$$x_2 = \gamma x_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \qquad \gamma = \frac{x_2(0)}{(x_1(0))^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}}$$

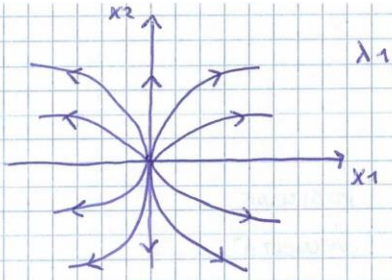


λ_2, λ_1

Dipende dalle condizioni iniziali e fatto che la parabola sia più larga o più stretta.

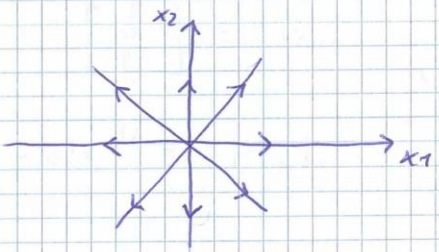
Gli assi sono parabole degenere.

www.alessandropaghi.it



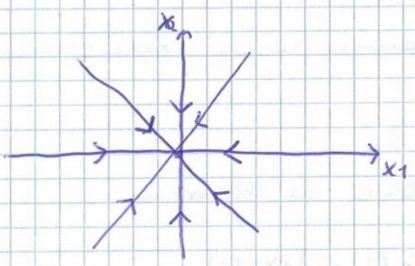
$\lambda_1 > \lambda_2$

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$



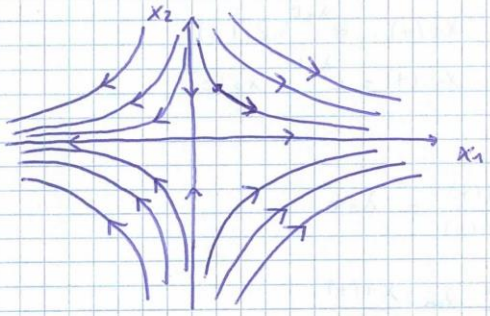
Sono divergenti

$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$



Sono convergenti

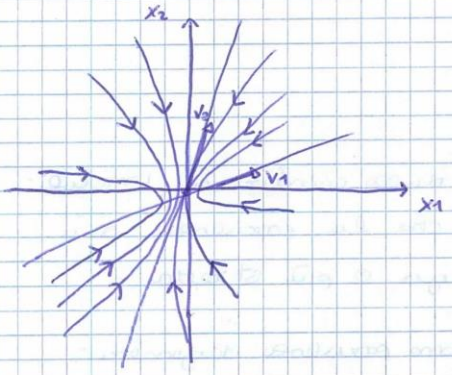
$\lambda_1 > 0 \quad , \quad \lambda_2 < 0$



N.B: Se le traiettorie partono o arrivano in un solo punto si parla di fuoco, altrimenti si parla di sella.

Per una generica matrice A con autovalori reali λ_1, λ_2 e autovettori v_1, v_2, avrò gli stessi disegni, ma rispetto al sistema di riferimento $v_2 \times v_2$.

$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$



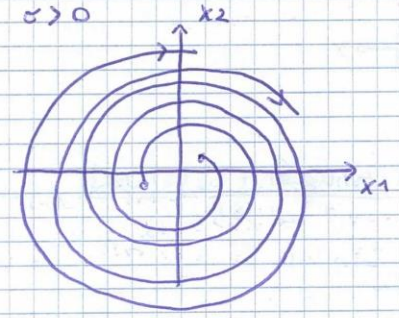
Coppia di poli complessi coniugati

$\dot{x}(t) = Ax(t)$ $\quad A = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$ ← matrice di esempio.

$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda-\sigma & -\omega \\ \omega & \lambda-\sigma \end{pmatrix} = (\lambda-\sigma)^2 + \omega^2 = 0$.

$\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ => modi: $\begin{cases} e^{\sigma t}\cos(\omega t) \\ e^{\sigma t}\sin(\omega t) \end{cases}$

$\sigma > 0$

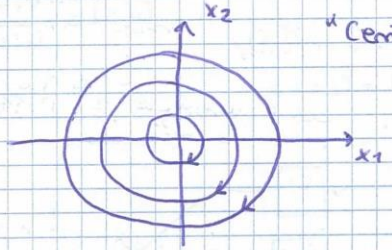


"Fuoco"

con $\sigma < 0$

Inverto le frecce

$\sigma = 0$



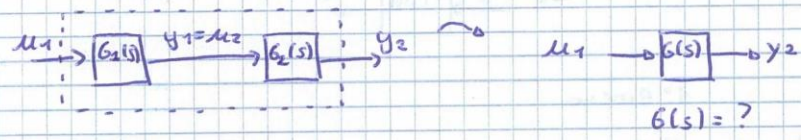
"Centro"

INTERCONNESSIONE DI SISTEMI DINAMICI

I sistemi dinamici "complessi" (formati da tanti sottosistemi collegati fra loro) possono essere ricondotti alla combinazione di tre interconnessioni elementari:

1) Serie
2) Parallelo
3) Retroazione (feedback)

1) Interconnessione in serie



$G(s) = ?$

$$\begin{cases} Y_1(s) = G_1(s) \cdot U_1(s) & 1^\circ \text{ BLOCCO} \\ Y_2(s) = G_2(s) \cdot U_2(s) & 2^\circ \text{ BLOCCO} \\ u_2(s) = Y_1(s) & \text{SERIE} \end{cases}$$

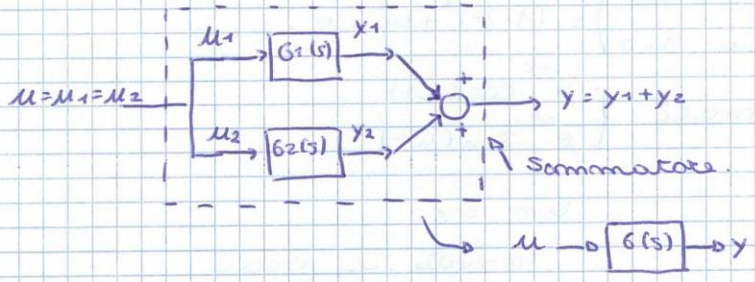
$$G(s) = \frac{Y_2(s)}{u_1(s)} = \frac{G_2(s) \cdot u_2(s)}{u_1(s)} = \frac{G_2(s) \cdot Y_1(s)}{u_1(s)} = \frac{G_2(s) G_1(s) \cancel{u_1(s)}}{\cancel{u_1(s)}} = G_2(s) G_1(s)$$

www.alessandropaghi.it



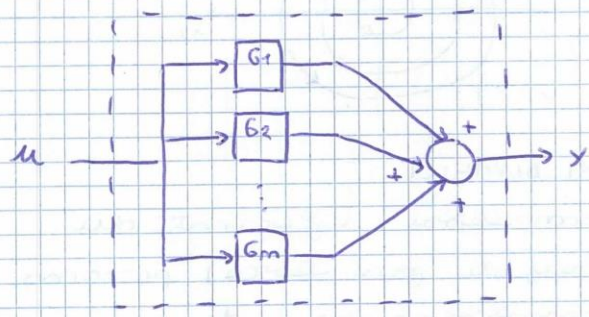
$G = G_m \cdot G_{m-1} \cdot \ldots \cdot G_2 \cdot G_1$

2) INTERCONNESSIONE IN PARALLELO



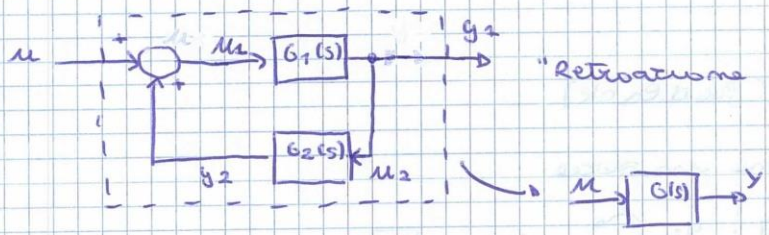
$$\begin{cases} Y_1(s) = G_1(s)\, U_1(s) \\ Y_2(s) = G_2(s)\, U_2(s) \\ U_1(s) = U_2(s) = U(s) \\ Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)\,U_1(s) + G_2(s)\,U_2(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s)$$



$G = G_1 + G_2 + \ldots + G_m$

3) INTERCONNESSIONE IN RETROAZIONE



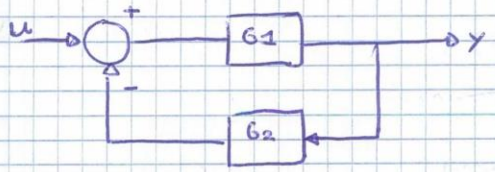
$$\begin{cases} Y_1(s) = G_1(s)\, U_1(s) & 1^\circ \text{ BLOCCO} \\ Y_2(s) = G_2(s)\, U_2(s) & 2^\circ \text{ BLOCCO} \\ U_2(s) = Y_1(s) & \text{DERIVAZIONE} \\ U_1(s) = U(s) + Y_2(s) & \text{SOMMATORE} \end{cases}$$

$$Y_1(s) = G_1(s) \cdot U_1(s) = G_1(s) \cdot [U(s) + Y_2(s)] = G_1(s)[U(s) + G_2(s)\, U_2(s)]$$

$$Y_1(s) - G_1(s)\, G_2(s)\, Y_1(s) = G_1(s)\, U(s)$$

$$[1 - G_1(s) G_2(s)]\, Y_1(s) = G_1(s) \cdot U(s) \Rightarrow Y_1(s) = \underbrace{\frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)\, G_2(s)}}_{G(s)} \cdot U(s) \quad [\text{SISO}]$$

www.alessandropaghi.it



"Retroazione negativa"

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)\,G_2(s)}$$

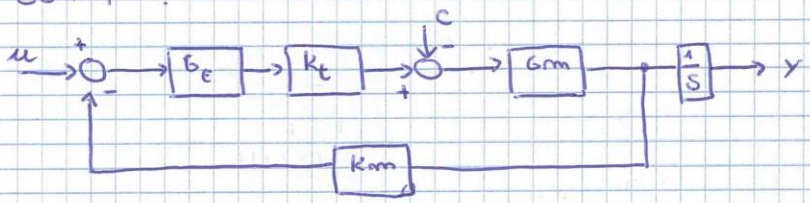
Nel caso MIMO

$$Y_1(s) = [I \pm G_1(s)\,G_2(s)]^{-1}\,G_1(s)\,U(s)$$

+ retroazione negativa

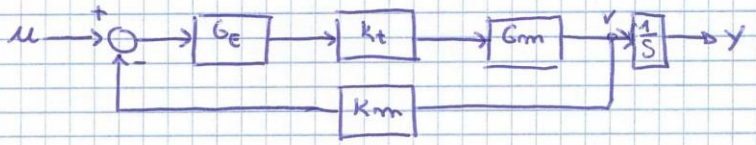
− retroazione positiva

Esempio:



$$Y(s) = G_{U\to y}(s)\,U(s) + G_{C\to y}(s)\,C(s)$$

$G_{U\to y}$ $(C=0)$

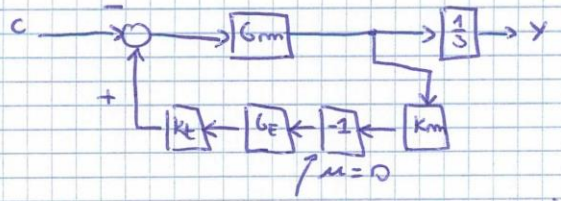






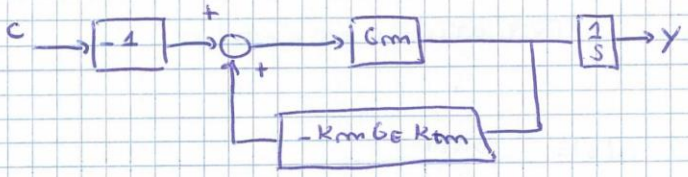
$$G_{U\to y}(s) = \frac{1}{S} \cdot \frac{G_m K_t G_E}{1 + G_m K_t G_E K_m}$$

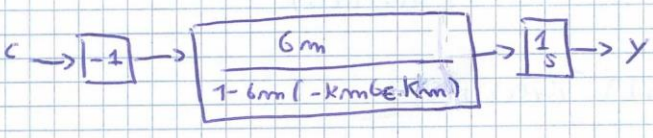
$G_{D\to y}$ $(u=0)$



in quanto Km viene sottratto

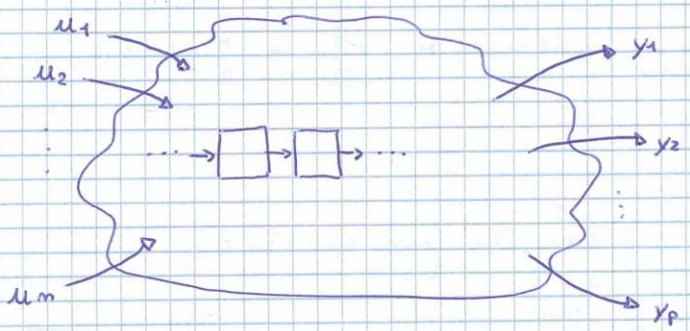
www.alessandropaghi.it





$$G_{c \to y} = -\frac{1}{s} \cdot \frac{G_m}{1 + G_m K_t G_\varepsilon K_m}$$

SISTEMA COMPLESSO



- se tutti i sottosistemi sono LTI, è possibile calcolare la funzione di trasferimento $G_{ij}(s)$ da qualunque ingresso $u_j(t)$ a qualunque uscita $y_i(t)$.

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_p(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ \vdots & & & \\ G_{p1}(s) & G_{p2}(s) & \dots & G_{pm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ \vdots \\ u_m(s) \end{bmatrix}$$

- Strumenti di calcolo.

TEOREMA DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA

Sistema LTI: $u \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow y$

Ingresso sinusoidale: $u(t) = M \cdot \cos(\omega t)$

M: ampiezza

ω: pulsazione

Ipotesi: I poli di $G(s)$ hanno parte reale negativa (→ molti dei sistemi convergenti)

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_m)} \qquad Re[p_i] < 0, \ \forall i$$

Calcolo risposta forzata:

$$Y_f(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \cdot M \cdot \frac{s}{s^2+\omega^2} =$$

$$= \frac{\bar{N}(s)}{D(s)} + \frac{R}{s-j\omega} + \frac{\bar{R}}{s+j\omega}$$

$(s-j\omega)$ e $(s+j\omega)$ hanno molteplicità 1 in quanto $j\omega$ non può essere radice di $D(s)$.

www.alessandropaghi.it

$$R = \lim_{s \to j\omega} (s - j\omega) Y_f(s) = \lim_{s \to j\omega} (s - j\omega) \cdot G(s) \cdot M \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$= \lim_{s \to j\omega} G(s) \cdot M \cdot \frac{s}{s + j\omega} = G(j\omega) \cdot M \cdot \frac{j\omega}{2j\omega} = \frac{M}{2} G(j\omega)$$

$$\bar{R} = \frac{M}{2} \overline{G(j\omega)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\bar{N}(s)}{\bar{D}(s)}\right] = y_T(t) \quad \text{è tale che} \quad \lim_{t \to +\infty} y_T(t) = 0.$$

$$y_f(t) = y_T(t) + R e^{j\omega t} + \bar{R} e^{-j\omega t} = y_T(t) + \frac{M}{2} G(j\omega) e^{j\omega t} + \frac{M}{2} \overline{G(j\omega)} e^{-j\omega t}$$

$$= y_T(t) + \frac{M}{2} |G(j\omega)| e^{j \measuredangle G(j\omega)} e^{j\omega t} + \frac{M}{2} |G(j\omega)| e^{-j \measuredangle G(j\omega)} e^{-j\omega t}$$

$$= y_T(t) + M |G(j\omega)| \left\{ \frac{e^{j(\omega t + \measuredangle G(j\omega))} + e^{-j(\omega t + \measuredangle G(j\omega))}}{2} \right\}$$

$$y_F(t) = y_T(t) + M |G(j\omega)| \cos(\omega t + \measuredangle G(j\omega))$$

$y_T(t)$: Risposta di Regime Transitorio

$M |G(j\omega)| \cos(\omega t + \measuredangle G(j\omega))$: Risposta di Regime Permanente.

$\lim_{t \to +\infty} y_T(t) = 0$.

- I sistemi lineari non alterano la frequenza delle onde;
- Si modificano ampiezza e fase;

1) La pulsazione della risposta di regime permanente è la stessa dell'ingresso;
2) L'ampiezza M viene moltiplicata per $|G(j\omega)|$
3) La fase viene sfasata di $\measuredangle G(j\omega)$

$$u(t) = M \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$y_{PER\,H}(t) = M |G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \measuredangle G(j\omega)).$$

Le funzioni di ω, $|G(j\omega)|$ e $\measuredangle G(j\omega)$ ci dicono come i segnali sinusoidali vengono amplificati e sfasati in funzione della pulsazione ω (→ Diagrammi di Bode).

Cosa succede se $G(s)$ ha una coppia di poli complessi e coniugati proprio di $\pm j\omega$?

$$G(s) = \frac{N(s)}{\bar{D}(s)(s - j\omega)(s + j\omega)} = \frac{N(s)}{\bar{D}(s)(s^2 + \omega^2)}$$

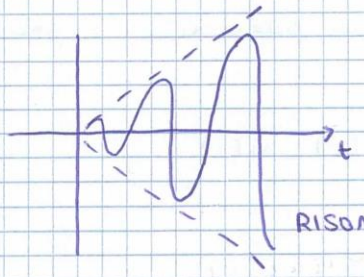
$$u(t) = M \cos(\omega t) \rightarrow U(s) = M \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

www.alessandropaghi.it

$$Y_F(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{N(s) \cdot M \cdot s}{\overline{D}(s)(s^2+\omega^2)^2}$$

l'antitrasformata dei poli di $\overline{D}(s)$ da dei modi che non influiscono sull'uscita.

$y_F(t)$ = Roba che va a zero + $\gamma t \cos(\omega t + \phi)$



Ampiezza cresce linearmente con t.

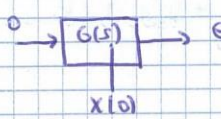
INTERPRETAZIONE FISICA DI POLI E ZERI DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO.

$$G(s) = k \cdot \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_r)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_m)}$$

z_j: zeri della funz. di trasferimento

p_i: Poli " " " "

Polo in p_i → il sistema è in grado di generare il segnale $e^{p_i t}$.



Zero in z_j → il segnale di ingresso $e^{z_j t}$ non si trasferisce all'uscita ("eliminating zeros").

$e^{z_j t} \rightarrow [G(s)] \rightarrow y_F(t)$ non contiene il modo $e^{z_j t}$.

$$\mathcal{L}[e^{z_j t}] = \frac{1}{s - z_j}$$

$$Y_F(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s-z_j} = k \cdot \frac{\cdots(s-z_j)\cdots}{\cdots} \cdot \frac{1}{s-z_j}$$

www.alessandropaghi.it

Esercizio:

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + (3-k)\frac{d}{dt} y(t) + k y(t) = \dot{u}(t) - u(t) \qquad k \in \mathbb{R}$$

1) Determinare per quali k, i modi di Ye sono convergenti. Distinguere i modi convergenti in periodici e pseudoperiodici in funzione di k.

$$s^2 Y(s) + (3-k) s Y(s) + k Y(s) = sU(s) - U(s)$$
$$\{s^2 + (3-k)s + k\} Y(s) = (s-1) U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s-1}{s^2 + (3-k)s + k}$$

Per avere dei convergenti, $Re[p_i] < 0$.

$$s_{1/2} = \frac{k-3 \pm \sqrt{k^2 - 10k + 9}}{2}$$

$$\Delta = k^2 - 10k + 9 = (k-9)(k-1)$$

$\Delta < 0$ se $1 < k < 9$ $\rightarrow$ $Re[p_{1/2}] = \frac{k-3}{2} < 0$ per $k < 3$.

$\Rightarrow$ $1 < k < 3$ ok!

$\Delta \geq 0$ se $k \leq 1$ o $k \geq 9$ $\rightarrow$ $\frac{k-3 \pm \sqrt{k^2-10k+9}}{2} < 0$.

$\Rightarrow k - 3 + \sqrt{k^2 - 10k + 9} < 0 \Rightarrow \sqrt{k^2 - 10k + 9} < 3 - k$

$3 - k > 0 \rightarrow k < 3$

$k^2 - 10k + 9 < 9 + k^2 - 6k \Rightarrow 4k > 0 \Rightarrow k > 0$

$\Rightarrow$ $0 < k \leq 1$

$\{1 < k < 3\} \cup \{0 < k \leq 1\} \Rightarrow \{0 < k < 3\}$

REGOLA DI CARTESIO:
Se polinomio $s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$ ha un numero di radici a parte reale positiva maggiore o uguale del numero di variazioni di segno della successione $\{1, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0\}$.

Se $n = 2$, vale l'uguaglianza!
Quindi $s^2 + (3-k)s + k$ ha zero radici a parte reale positiva sse:

www.alessandropaghi.it

$3-K>0 \rightarrow K<3$

$K>0 \rightarrow K>0$ $\qquad 0<K<3$

Poli Reali per $\Delta \geq 0$, cioè $K \leq 1$ o $K \geq 9$

Poli Complessi per $\Delta < 0$, cioè $1 < K < 9$

Modi aperiodici convergenti: $0 < K \leq 1$

Modi Pseudoperiodici convergenti: $1 < K < 3$.

2) Determinare per quali valori di K esiste finito il valore asintotico per $t \to \infty$ di y_F relativo all'ingresso gradino unitario $u(t) = 1(t)$ e riportare tale valore in funzione di K.

$u(t) = 1(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y_F(s) = \frac{G(s)}{s}$

Se la $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa $\exists \lim_{t\to\infty} y_F(t)$ finito e vale

$$\lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s} = G(0)$$

Per $K \in (0,3)$, $\lim_{t\to\infty} y_F(t) = -\frac{1}{K}$

3) Assumendo $K=2$ determinare la risposta a regime permanente relativa all'ingresso $u(t) = 10 \operatorname{sen}(\sqrt{2}t)$.

Per $K=2$

$G(s) = \frac{s-1}{s^2+s+2}$

$u(t) = 10 \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \qquad \omega = \sqrt{2}$

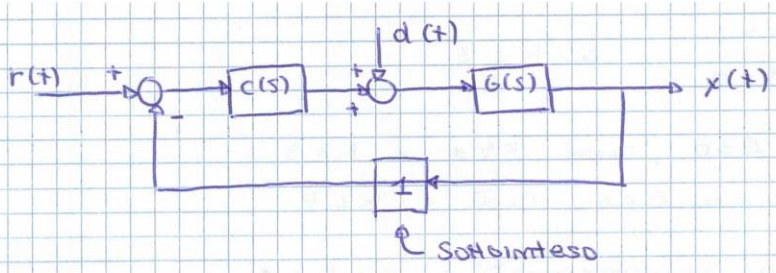
$y_{PERM}(t) = 10 \cdot |G(j\sqrt{2})| \operatorname{sen}(\sqrt{2}t + \angle G(j\sqrt{2}))$

$$G(s)\Big|_{s=j\sqrt{2}} = \frac{j\sqrt{2}-1}{(j\sqrt{2})^2 + j\sqrt{2} + 2} = \frac{j\sqrt{2}-1}{-2+j\sqrt{2}+2} = \frac{j\sqrt{2}-1}{j\sqrt{2}} = 1 + j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|G(j\sqrt{2})| = \sqrt{1+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \qquad \angle G(j\sqrt{2}) = \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y_{PERM}(t) = 10\sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{2}t + \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

www.alessandropaghi.it



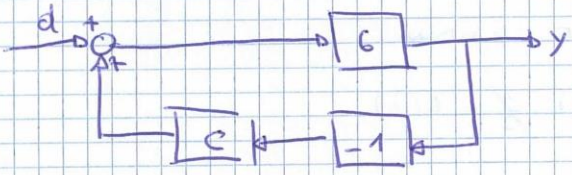
$C(s) = \frac{1+s}{s}$, $G(s) = \frac{1}{s+3}$

1) Determinare le funzioni di trasferimento $W_1(s)$ e $W_2(s)$, rispettivamente degli ingressi $r(t)$ e $d(t)$, all'uscita $x(t)$.

Funzione di trasferimento $W_1(s)$ da r a y.

$$W_1(s) = \frac{C(s)\cdot G(s)}{1 + C(s)\cdot G(s)} = \frac{\frac{1+s}{s}\cdot\frac{1}{s+3}}{1 + \frac{1+s}{s}\cdot\frac{1}{s+3}} = \frac{1+s}{s(s+3)+1+s} = \frac{s+1}{s^2+4s+1}$$

Funzione di trasferimento $W_2(s)$ da d a y.

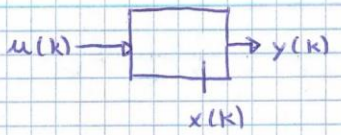


$$W_2(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)(-1)C(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)C(s)} = \frac{\frac{1}{s+3}}{1 + \frac{1}{s+3}\cdot\frac{s+1}{s}} = \frac{s}{s(s+3)+s+1}$$

$$= \frac{s}{s^2+4s+1}$$

www.alessandropaghi.it

ANALISI DEI SISTEMI LTI A TEMPO DISCRETO



$k \in \mathbb{Z}$

Rappr. i/o

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_m y(k-m) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m)$$

Rappr. i/s/o

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

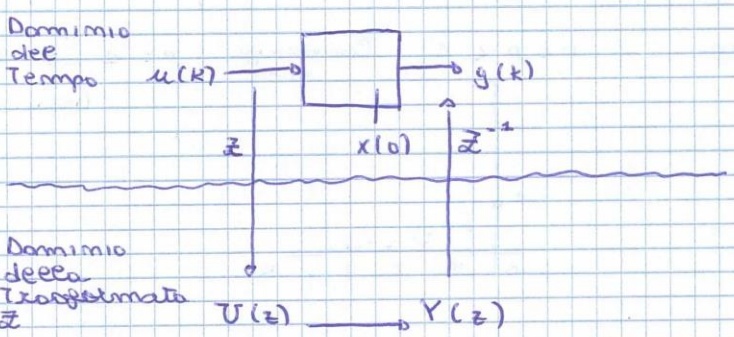
Problemi

1) Rappr. i/o

Conoscendo l'ingresso $u(k)$, $\forall k \geq 0$, e le condizioni iniziali $y(-1), y(-2), \dots, y(-m)$, determinare $y(k)$, $\forall k \geq 0$.

2) Rappr. i/s/o

Conoscendo l'ingresso $u(k)$, $\forall k \geq 0$, e le condizioni iniziali $x(0)$, determinare $x(k)$ e $y(k)$, $\forall k \geq 0$.



$z \in \mathbb{C}$

SEGNALI CARATTERISTICI A TEMPO DISCRETO ($u(k) = 0$, $\forall k < 0$).

* IMPULSO UNITARIO

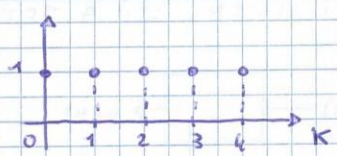
$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$



www.alessandropaghi.it

* GRADINO UNITARIO

$$1(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \geq 0 \\ 0 & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

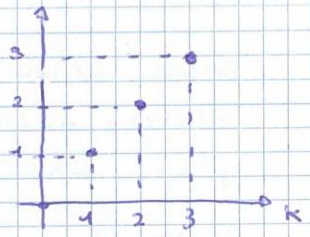


* SEGNALI CANONICI

$$r_m(k) = \binom{k}{m} 1(k) = \frac{k!}{m!\,(k-m)!} \cdot 1(k)$$

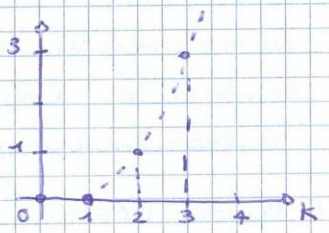
$m = 0 \Rightarrow r_0(k) = 1(k)$

$m = 1 \Rightarrow r_1(k) = \frac{k!}{1!\,(k-1)!} \cdot 1(k) = k \cdot 1(k)$



$m = 2 \Rightarrow r_2(k) = \frac{k!}{2!\,(k-2)!} \cdot 1(k)$

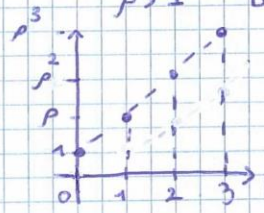
$= \frac{k(k-1)}{2} \cdot 1(k)$



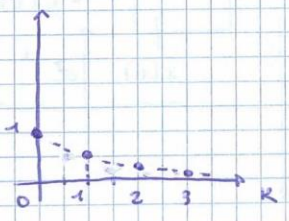
* SEGNALI ESPONENZIALI

$$f(k) = \rho^k \cdot 1(k)$$

$\rho > 1$ Diverge

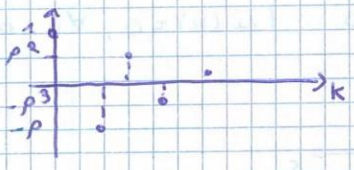


$0 < \rho < 1$ Converge

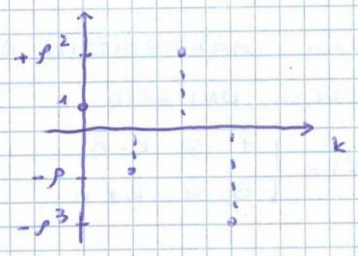


$\rho = 1 \Rightarrow 1(k)$ Gradino

$-1 < \rho < 0$ Converge

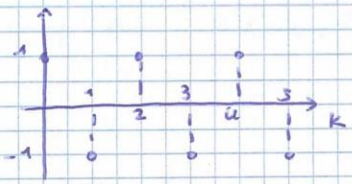


$\rho < -1$ Diverge



www.alessandropaghi.it

$\rho = -1$ Limitata non convergente



$\rho = 0$

$f(k) = 0^k = \delta(k)$. in quanto $0^0 := 1$

$|\rho| > 1$ Divergente (modi)

$|\rho| < 1$ Convergenti (modi)

$|\rho| = 1$ Limitati non convergenti (modi)

* SEGNALI A RAMPA ESPONENZIALE

$$f(k) = \rho^k \binom{k}{m} \cdot 1(k)$$

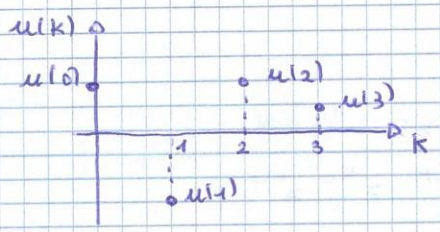
* SEGNALI SINUSOIDALI

$$f(k) = \cos(\omega k) = \frac{e^{j\omega k} + e^{-j\omega k}}{2} = \frac{1}{2}(e^{j\omega})^k + \frac{1}{2}(e^{-j\omega})^k$$

In generale, qualunque segnale $u(k)$, $k = 0 \dots +\infty$, può essere scritto come:

$$u(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} u(i) \cdot \delta(k-i)$$

$$= u(0)\cdot\delta(k) + u(1)\,\delta(k-1) + u(2)\cdot\delta(k-2) + \dots$$



www.alessandropaghi.it

TRASFORMATA ZETA

Sia $f(k)$ un segnale a tempo discreto tale che $f(k)=0 \quad \forall k<0$, ed $\exists M>0$ e $\rho_0 \in \mathbb{R}$, $\rho_0>0$ ed un istante $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che:

$$|f(k)| < M \rho_0^k \qquad \forall k \geq k_0$$

Allora la TRASFORMATA ZETA di $f(k)$ è la funzione $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) z^{-k} = f(0) + f(1) z^{-1} + f(2) z^{-2} + \dots$$

Risultato: La serie in $F(z)$ converge, $\forall z \in \mathbb{C} : |z| > \rho_0$ (ρ_0 raggio di convergenza)

Esempi:

1) Impulso $\delta(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$

$$\mathcal{Z}[\delta(k)] = 1 \cdot z^{-0} + 0 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} \dots = 1$$

2) Gradino $1(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$

$$\mathcal{Z}[1(k)] = 1 \cdot z^{-0} + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

PROPRIETÀ DELLE TRASFORMATE

1) Linearità

$$f = \alpha u_1 + \beta u_2 \iff \mathcal{Z}[f] = \alpha \cdot \mathcal{Z}[u_1] + \beta \mathcal{Z}[u_2]$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2) Ritardo

$$g(k) = f(k-k_0) \cdot 1(k-k_0) \qquad , k_0 > 0 \ , k_0 \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{Z}[g(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k-k_0) \cdot 1(k-k_0) z^{-k} \cdot z^{k_0} \cdot z^{-k_0} =$$

$$= z^{-k_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{f(k-k_0)}_{m} z^{-(k-k_0)} \cdot 1(k-k_0)$$

$$= z^{-k_0} \sum_{m=-k_0}^{+\infty} f(m) z^{-m} \cdot 1(m) = z^{-k_0} \sum_{m=0}^{+\infty} f(m) z^{-m} = z^{-k_0} F(z).$$

www.alessandropaghi.it