SISTEMI DINAMICI

[Fotocopie di Appunti]

A CURA DI ALESSANDRO PAGHI

PROFESSORE: Andrea Garulli (http://www3.diism.unisi.it/people/person.php?id=13)

LINK AL CORSO:
http://www3.diism.unisi.it/FAC/index.php?bodyinc=didattica/inc.insegnamento.php&id=54893&aa=2014

FREQUENTAZIONE: Consigliata.

SISTEMA DINAMICO: Fenomeno naturale o artificiale le cui grandezze caratteristiche variano nel tempo.

VARIABILI DI INGRESSO: Variabili che provengono dall'esterno.

SISTEMA TEMPO-INVARIANTE (STAZIONARIO): le costanti non dipendono dal tempo

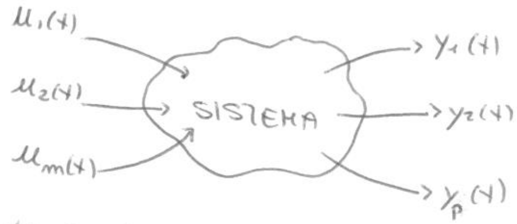
SISTEMA LINEARE E TEMPO-INVARIANTE (LTI): Hanno andamento esponenziale

SISTEMA LINEARE E TEMPO-VARIANTE: Sistema varia nel tempo.

RAPPRESENTAZIONE I/O TEMPO CONTINUO

VARIABILI D'INGRESSO: grandezze che agiscono sul sistema dall'esterno

VARIABILI D'USCITA: grandezze interne al sistema delle quali mi interessa analizzare l'andamento.



Per la classe di sistemi a tempo-continuo, la rappresentazione I/O è data da una o più equazioni che coinvolgono gli ingressi, le uscite e le loro derivate.

$$R(y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots, y^n(t), u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t), \dots, u^m(t)) = 0$$

con $y^n(t) = \frac{\partial^n}{\partial t} y(t)$, $u^m(t) = \frac{\partial^m}{\partial t} u(t)$

Per la CAUSALITÀ $n \geq m$

$y(t) = \dot{u}(t)$ => non si può fare.

SISTEMI LTI:

$$a_n y^n(t) + a_{n-1} y^{n-1}(t) + \dots + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^m(t) + b_{m-1} u^{m-1}(t) +$$
$$+ \dots + b_2 \ddot{u}(t) + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$a_i, b_i \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j u^{(j)}(t) \quad , n \geq m.$$

RAPPRESENTAZIONE I/S/O TEMPO CONTINUO

VARIABILI DI STATO: insieme delle variabili che è necessario conoscere all'istante t, per poter determinare l'evoluzione sistema $\forall \tau > t$, note le variabili d'ingresso.

$u_m(t)$ ingressi
$y_p(t)$ uscite
$x_n(t)$ variabili di stato

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t) \\ y_1(t), y_2(t), \dots, y_p(t) \\ x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \end{cases}$$

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t)$$
$$y_1(t) = y_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t)$$
$$\vdots$$
$$y_p(t) = y_p(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t)$$

NOTAZIONE VETTORIALE:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

con: $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
$g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$

SISTEMI LTI:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

con: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$
$C \in \mathbb{R}^{p \times n}$
$D \in \mathbb{R}^{p \times m}$

$x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$
$y(t) \in {}^{p \times 1}$
$u(t) \in {}^{m \times 1}$

RAPPRESENTAZIONE I/S/O TEMPO DISCRETO

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \\ y(k) = g(x(k), u(k), k) \end{cases}$$

$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
$g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$

SISTEMI LTI:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B \cdot u(k) \\ y(k) = C \cdot x(k) + D \cdot u(k) \end{cases}$$

RAPPRESENTAZIONE I/O TEMPO DISCRETO

SISTEMI LTI:

$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_m y(k-m) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m)$

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{m} a_i y(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_j u(k-j)$

PROPRIETA' DEI SISTEMI DINAMICI

1) CAUSALITA': le variabili di ingresso $u(t)$ all'istante t non influenzano il valore delle variabili di stato $x(\tau)$ e di uscita $y(\tau)$, $\forall \tau < t$.

2) TEMPO-INVARIANZA: Il comportamento del sistema è invariante rispetto a traslazioni dell'asse del tempo.

$u(t-\Delta) \Rightarrow y(t-\Delta)$, $\forall \Delta \in \mathbb{R}$.

3) LINEARITA': le funzioni $f(\dots)$, $g(\dots)$ e $h(\dots)$ sono funzioni lineari delle variabili u, y, x.

Per i sistemi lineari vale:

PRINCIPIO DELLA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI:

Sia $u^{(A)}(t)$ un segnale di ingresso e sia $y^{(A)}(t)$ la corrispondente uscita. Sia $u^{(B)}(t)$ un altro segnale di ingresso e sia $y^{(B)}(t)$ la corrispondente uscita.

Se il sistema è lineare, applicando l'ingresso

$u(t) = \alpha \cdot u^{(A)}(t) + \beta \cdot u^{(B)}(t)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ottiene l'uscita

$y(t) = \alpha y^{(A)}(t) + \beta y^{(B)}(t)$.

DIM:

RAPPR. I/S/O

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

Integrando con: $u = u^{(A)} \rightarrow x = x^{(A)}$

$u = u^{(B)} \rightarrow x = x^{(B)}$

Quindi:

$\dot{x}^{(A)}(t) = Ax^{(A)}(t) + Bu^{(A)}(t)$

$\dot{x}^{(B)}(t) = Ax^{(B)}(t) + Bu^{(B)}(t)$

$\bar{x} = \alpha x^{(A)} + \beta x^{(B)}$

$\dot{\bar{x}} = \alpha \dot{x}^{(A)}(t) + \beta \dot{x}^{(B)}(t) =$

$\Downarrow$

$= \alpha [Ax^{(A)}(t) + Bu^{(A)}(t)] + \beta [Ax^{(B)}(t) + Bu^{(B)}(t)]$

$= \alpha A x^{(A)}(t) + \alpha B u^{(A)}(t) + \beta A x^{(B)}(t) + \beta B u^{(B)}(t)$

$= A[\alpha x^{(A)}(t) + \beta x^{(B)}(t)] + B[\alpha u^{(A)}(t) + \beta u^{(B)}(t)]$

$= A\bar{x}(t) + B[\alpha u^{(A)}(t) + \beta u^{(B)}(t)]$

RISPOSTA LIBERA E FORZATA

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Scelgo come istante iniziale $t=\emptyset$.

$\Rightarrow x(\emptyset)$ condizione iniziale del sistema

Per il Principio di Sovrapposizione degli effetti:

$$\begin{cases} x(t) = x_\ell(t) + x_f(t) \\ y(t) = y_\ell(t) + y_f(t) \end{cases}$$

RISP. LIBERA: $x_\ell(t)$, $y_\ell(t)$, soluzioni nel caso in cui $u(t) = \emptyset$, $\forall t$.

RISP. FORZATA: $x_f(t)$, $y_f(t)$, soluzioni nel caso in cui $x(\emptyset) = \emptyset$.

MODELLI DI TRASFERIMENTO DI RISORSE

Modello in cui le variabili di stato rappresentano la quantità di "risorsa" contenuta in un certo "compartimento".

MODELLI DI TRANSIZIONE TRA STATI

Modello in cui gli stati rappresentano la probabilità della presenza di attributi o qualità, oppure di trovarsi in una certa condizione.

MODELLI DI INFLUENZA

Modello che esprime relazioni causa - effetto tra le variabili del sistema.

ANALISI DEI SISTEMI LTI TEMPO CONTINUO

$t=0$ istante iniziale tale che $u(t)=0$, $\forall t<0$.

RAPPR. I/O

Dato il sistema:

$$y^{n}(t) + a_{n-1}y^{n-1}(t) + \dots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{m}(t) + b_{m-1}u^{m-1}(t) + \dots + b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

determiniamo $y(t)$, $\forall t>0$ a partire da $u(t)$ e dalle condizioni iniziali $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{n-1}(0)$.

RAPPR. I/S/O

Dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

determiniamo $x(t)$ e $y(t)$, $\forall t>0$ a partire da $u(t)$ e $x(0)$.

SEGNALI TIPICI NEI SISTEMI A TEMPO CONTINUO

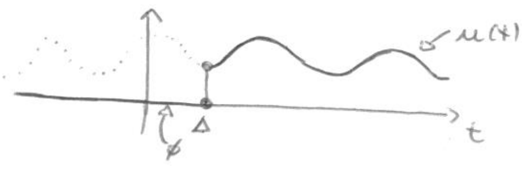
① GRADINO UNITARIO

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

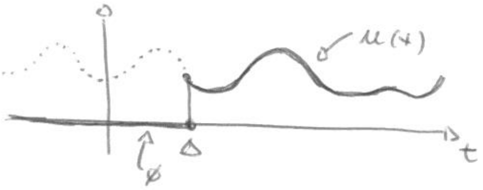
Tutti i segnali sono del tipo: $u(t) = f(t)\cdot 1(t)$

Operatore di traslazione nel tempo:

$u(t) = f(t-\Delta)\cdot 1(t-\Delta)$



$u(t) = f(t)\cdot 1(t-\Delta)$ ← Considero la funzione da Δ in poi.



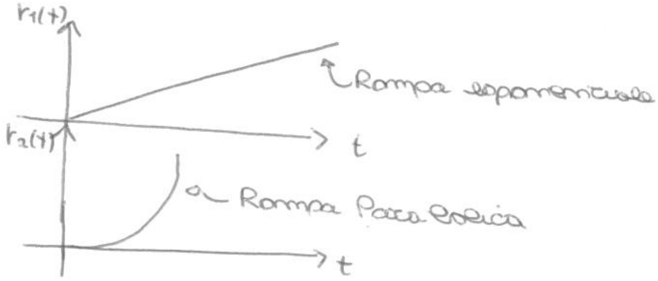
② SEGNALI CANONICI

$$r_k(t) = \frac{t^k}{k!} \cdot 1\!\!1(t) \qquad , k = 0, 1, 2, \dots$$

$$r_0(t) = 1\!\!1(t)$$

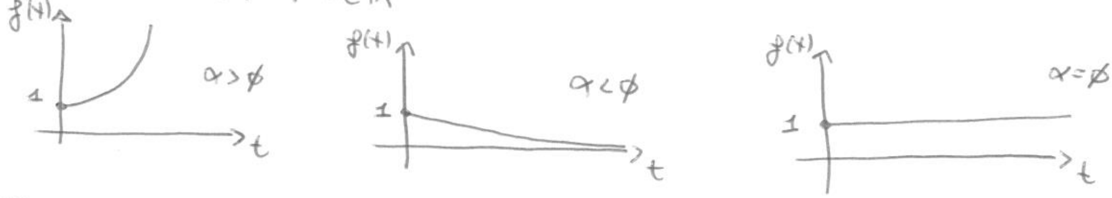
$$r_1(t) = t \cdot 1\!\!1(t)$$

$$r_2(t) = \frac{t^2}{2} \cdot 1\!\!1(t)$$



③ SEGNALI ESPONENZIALI

$$f(t) = e^{\alpha t} \cdot 1\!\!1(t) \qquad , \alpha \in \mathbb{R}$$



④ SEGNALI A RAMPA ESPONENZIALE

$$f_k(t) = \frac{t^k}{k!} e^{\alpha t} \cdot 1\!\!1(t).$$

⑤ SEGNALI SINUSOIDALI

$$f(t) = \cos(\omega t) \cdot 1\!\!1(t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \cdot 1\!\!1(t)$$

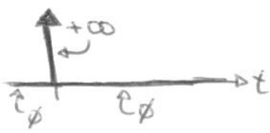
$$f(t) = \mathrm{sen}(\omega t) \cdot 1\!\!1(t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \cdot 1\!\!1(t)$$

⑥ SEGNALE IMPULSIVO (DELTA DI DIRAC)

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{se } 0 \le t \le \varepsilon \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Delta di Dirac:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t)$$



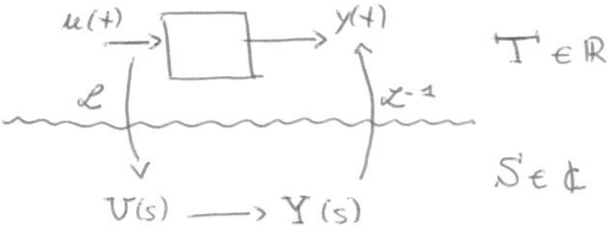
PROPRIETÀ:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t)\, dt = 1 \quad , \forall \varepsilon$

b) $f(t)$ funzione continua, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t - \tau)\, dt = f(\tau)$

c) $\delta_\varepsilon(t)$ è la derivata di $1\!\!1_\varepsilon(t)$, $\forall \varepsilon$.

TRASFORMATA DI LAPLACE



DEF: Sia $f(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tale che $f(t) = 0$, $\forall t < 0$.

$\exists M > 0$, $t_0 > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$: $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$, $\forall t \geq t_0$.

Si definisce Trasformata di Laplace di $f(t)$ la funzione

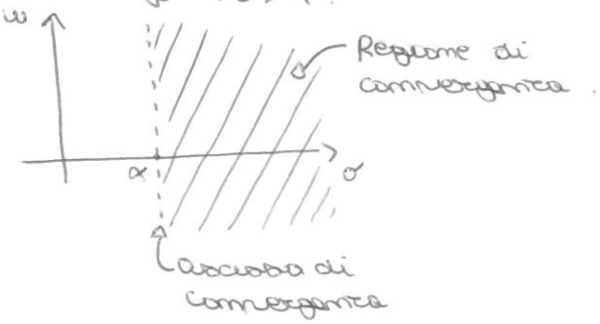
$F(s): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$ e si indica con $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$.

- L'integrale di $F(s)$ converge?

$$|f(t)\, e^{-st}| \underset{s=\sigma+j\omega}{=} |f(t)\, e^{-\sigma t}\, e^{-j\omega t}| = |f(t)|\, e^{-\sigma t} \underbrace{|e^{-j\omega t}|}_{1} \leq M e^{\alpha t} e^{-\sigma t} = M e^{(\alpha - \sigma)t}.$$

$F(s)$ converge $\forall \sigma > \alpha$.



PROPRIETÀ:

① LINEARITÀ

$f(t) = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$

$F(s) = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$ $\qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

② TRASFORMATA DI SEGNALI CON RITARDO

$g(t) = f(t-\Delta) \cdot \mathbb{1}(t-\Delta)$, $\Delta \in \mathbb{R}$, $\Delta > 0$

$G(s) = F(s)\, e^{-\Delta s}$

DIM: $$G(s) = \int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-st}\, dt \underset{t=\tau+\Delta}{=} \int_{-\Delta}^{+\infty} g(\tau+\Delta)\, e^{-s(\tau+\Delta)}\, d\tau = \int_{-\Delta}^{+\infty} f(\tau) \cdot \mathbb{1}(\tau)\, e^{-s\tau} \cdot e^{-s\Delta}\, d\tau$$

$\int_{-\Delta}^{0} \ldots$ è nullo!!

$$= e^{-\Delta s} \underbrace{\int_0^{+\infty} f(\tau)\, \mathbb{1}(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau}_{F(s)} = e^{-\Delta s} \cdot F(s).$$

③ MOLTIPLICAZIONE PER UN ESPONENZIALE

$g(t) = f(t)\, e^{\gamma t}$, $\gamma \in \mathbb{R}$

$G(s) = F(s-\gamma)$

DIM: $G(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{\gamma t}\, e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-(s-\gamma)t}\, dt = F(s-\gamma)$

④ MOLTIPLICAZIONE PER t

$g(t) = t \cdot f(t)$

$G(s) = -\frac{d}{ds} F(s)$

DIM: $\frac{d}{ds} F(s) = \frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} f(t) \left[\frac{d}{ds} e^{-st}\right] dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,(-t)\, e^{-st}\, dt$

$= -\int_0^{+\infty} [t \cdot f(t)]\, e^{-st}\, dt = -t \cdot f(t)$

⑤ TRASFORMATA DELLA DERIVATA

$g(t) = \dot{f}(t) \cdot 1(t)$

$G(s) = s \cdot F(s) - f(\emptyset)$

DIM: $\int_0^{+\infty} \dot{f}(t)\, e^{-st}\, dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{PER PARTI}}}{=} \left[f(t)\, e^{-st}\right]_{\emptyset}^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)\,(-s)\, e^{-st}\, dt = \emptyset - f(\emptyset) + s \underbrace{\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt}_{F(s)}$

$= -f(\emptyset) + sF(s).$

⑥ TRASFORMATA DELL'INTEGRALE

$g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$

$G(s) = \frac{1}{s} F(s)$

DIM: $\dot{g}(t) = f(t) \Rightarrow \mathcal{L}[\dot{g}(t)] = s \cdot G(s) - \underbrace{\cancel{g(\emptyset)}}_{\to \emptyset} = F(s)$

⑦ T. VALORE FINALE

Se $\lim_{t \to +\infty} f(t)$ $\exists$ finito $\Rightarrow \lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{s \to \emptyset} s \cdot F(s)$.

⑧ TRASFORMATA DEL PRODOTTO DI CONVOLUZIONE

PRODOTTO DI CONVOLUZIONE FRA $f(t)$ e $g(t)$: $P(t) = f(t) * g(t) = \int_{\emptyset}^{t} f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau$

$P(s) = \mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s)$.

TRASFORMATE DI SEGNALI NOTEVOLI

① $f(t) = 1\!\!1(t)$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} 1\!\!1(t)\, e^{-st}\, dt = \left[\frac{1}{-s}\, e^{-st} \right]_{\emptyset}^{+\infty} = \emptyset - \frac{1}{-s} \cdot e^{\emptyset} = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[1\!\!1(t)] = \frac{1}{s}$$

② $f(t) = \delta(t)$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-st}\, dt = \left[e^{-st} \right]_{t=\emptyset} = 1$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1.$$

③ $g(t) = e^{\alpha t} \cdot 1\!\!1(t)$

$$G(s) = F(s-\alpha) = \frac{1}{s-\alpha}$$

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} \cdot 1\!\!1(t)] = \frac{1}{s-\alpha}$$

④ $r_k(t) = \frac{t^k}{k!}\, 1\!\!1(t)$

$$r_1(t) = t \cdot 1\!\!1(t) \Rightarrow \mathcal{L}[r_1(t)] = R_1(s) = -\frac{d}{ds}\, \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

$$r_2(t) = \frac{t^2}{2} \cdot 1\!\!1(t) \Rightarrow \mathcal{L}[r_2(t)] = R_2(s) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{d}{ds} R_1(s) \right) = \frac{1}{s^3}$$

$\vdots$

$$\mathcal{L}[r_k(t)] = \frac{1}{s^{k+1}}$$

⑤ $f_k(t) = \frac{t^k}{k!}\, e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}[f_k(t)] = F_k(s) = \frac{1}{(s-\alpha)^{k+1}}$$

⑥ $u(t) = \cos(\omega t) \cdot 1\!\!1(t)$

$$U(s) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\, 1\!\!1(t) \right] = \frac{1}{2} \mathcal{L}\left[e^{j\omega t} \cdot 1\!\!1(t) \right] + \frac{1}{2} \mathcal{L}\left[e^{-j\omega t} \cdot 1\!\!1(t) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s + j\omega} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t) \cdot 1\!\!1(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\mathrm{sen}(\omega t) \cdot 1\!\!1(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

USO DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE PER LA SOLUZIONE DI SISTEMI LTI

TRASFORMATA DELLA RAPPR. I/O

$$y^{m}(t) = \frac{d^m}{dt^m} y(t)$$

$$\mathcal{L}[y^m(t)] = s^m Y(s) - s^{m-1} y(0) - s^{m-2}\dot{y}(0) - \dots - s y^{m-2}(0) - y^{m-1}(0)$$

$$\left\{s^m Y(s) - s^{m-1} y(0) - s^{m-2}\dot{y}(0) - \dots - y^{m-1}(0)\right\} + a_{m-1}\left\{s^{m-1} Y(s) - s^{m-2} y(0) - s^{m-3}\dot{y}(0) - \dots\right.$$
$$\left. - y^{m-2}(0)\right\} + \dots + a_1\left\{sY(s) - y(0)\right\} + a_0 Y(s) =$$
$$= b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$$

$$\left\{s^m + a_{m-1} s^{m-1} + a_{m-2} s^{m-2} + \dots + a_1 s + a_0\right\} Y(s) = s^{m-1} y(0) + s^{m-2}\dot{y}(0) + \dots$$
$$+ y^{m-1}(0) + a_{m-1}\left\{s^{m-2} y(0) + s^{m-3}\dot{y}(0) + \dots + y^{m-2}(0)\right\} + \dots + a_1 y(0) +$$
$$+ \left\{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0\right\} \cdot U(s)$$

Divido per $\left\{s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0\right\}$ e ottengo:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{c_{m-1} s^{m-1} + c_{m-2} s^{m-2} + \dots + c_1 s + c_0}{s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}}_{Y_\ell(s)} + \underbrace{\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0} \cdot U(s)}_{Y_f(s)}$$

Dove i coefficienti c_J, dipendono da a_i e dalle condizioni iniziali $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{m-1}(0)$.

$$Y_f(s) = G(s) \cdot U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Funzione di Trasferimento.

Grado dei Polinomi:

$c_{m-1} = y(0)$, $c_{m-2} = \dot{y}(0) + a_{m-1} y(0)$

max grado numeratore: $m-1$

grado denominatore: m

TRASFORMATA DELLA RAPPR. i/s/o

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = \mathcal{L}[Ax(t) + B\,u(t)]$$

$$sX(s) - x(0) = A \cdot X(s) + BU(s)$$

$$sX(s) - AX(s) = x(0) + BU(s)$$

$$sIX(s) - AX(s) = x(0) + BU(s)$$

$$(sI - A)\,X(s) = x(0) + BU(s)$$

$$X(s) = \underbrace{(sI-A)^{-1}x(0)}_{X_\ell(s)} + \underbrace{(sI-A)^{-1}B \cdot U(s)}_{X_f(s)}$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) = C\left\{(sI-A)^{-1}x(0) + (sI-A)^{-1}B\,U(s)\right\} + DU(s)$$

$$= C(sI-A)^{-1}x(0) + C(sI-A)^{-1}B\,U(s) + DU(s)$$

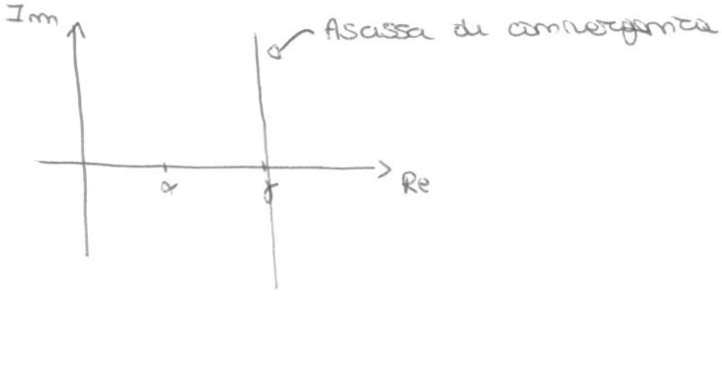
$$= \underbrace{C(sI-A)^{-1}x(0)}_{Y_\ell(s)} + \underbrace{\left\{C(sI-A)^{-1}B + D\right\} \cdot U(s)}_{Y_f(s)}$$

$$Y_f(s) = G(s) \cdot U(s) \Rightarrow G(s) = C\,(sI-A)^{-1}B + D$$

ANTITRASFORMATA DI LAPLACE

Data $Y(s)$, determinare $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} Y(s)\,e^{st}\,ds \quad , \gamma > \alpha$$



ANALISI MODALE DEI SISTEMI LTI, TEMPO CONTINUO

"Modi": Funzioni del tempo che compongono la risposta libera dei sistemi LTI.

POLI DI $Y_e(s)$	MODI
$p \in \mathbb{R}$, $\mu = 1$ Polo Reale Semplice	e^{pt}
$p = \sigma \pm j\omega$, $\mu = 1$ Coppia di Poli complessi coniugati semplici	$e^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $e^{\sigma t}\text{sen}(\omega t)$ modi Pseudoperiodici
$p \in \mathbb{R}$, $\mu > 1$ Polo Reale multiplo	$e^{pt}, te^{pt}, t^2 e^{pt}, \dots, t^{\mu-1} e^{pt}$
$p = \sigma \pm j\omega$, $\mu > 1$ Coppia di poli complessi coniugati multipli	$e^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $e^{\sigma t}\text{sen}(\omega t)$ $te^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $te^{\sigma t}\text{sen}(\omega t)$ $\vdots$ $t^{\mu-1}e^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $t^{\mu-1}e^{\sigma t}\text{sen}(\omega t)$

CARATTERE DI CONVERGENZA DEI MODI:

DEF. Un modo $m(t)$ si dice:

- Convergente, se $\lim_{t \to +\infty} m(t) = \emptyset$
- Limitato non convergente, se non è convergente ma $\exists M > \emptyset : |m(t)| \leq M, \forall t \geq \emptyset$
- Divergente, se $\forall M > \emptyset, \exists \epsilon > \emptyset : |m(\epsilon)| > M$.

RIS:

1) Il modo relativo al polo p_i è convergente sse $R[p_i] \ \emptyset$.
2) Il modo relativo al polo p_i è limitato non convergente sse $Re[p_i] = \emptyset$ e $\mu = 1$
3) In tutti gli altri casi il modo è divergente.
4) $\lim_{t \to +\infty} m(t) \ \exists$ finito se $M(s) = \mathcal{L}[m(t)]$ ha tutti i poli a parte reale negativa tranne al più un polo semplice in $\emptyset$.

RISPOSTA FORZATA A INGRESSI SPECIALI

RISPOSTA IMPULSIVA

$u(t) = \delta(t)$

$U(s) = 1$

$Y_f(s) = G(s) \cdot \cancel{U(s)}^{1} = G(s) \quad \Rightarrow Y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$

La Risposta Impulsiva è l'antitrasformata di Laplace della funzione di trasferimento.

=> I modi della risposta impulsiva sono gli stessi della risposta libera. (*)

RISPOSTA AL GRADINO UNITARIO

$u(t) = 1(t)$

$U(s) = \frac{1}{s}$

$Y_f(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{G(s)}{s}$

$\exists$ finito $\lim_{t \to +\infty} y_f(t)$? $\exists$ finito sse $G(s)$ ha $Re[p_i] < \emptyset$

$\Rightarrow \lim_{t \to +\infty} y_f(t) = \lim_{s \to \emptyset} s \cdot Y_f(s) = \lim_{s \to \emptyset} \cancel{s} \cdot \frac{G(s)}{\cancel{s}} = G(\emptyset)$

Guadagno stazionario del sistema.

GENERICO INGRESSO (*)

$u(t) \Rightarrow y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s) \cdot U(s)] = \int_0^t g(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$

La risposta forzata ad un generico ingresso $u(t)$ è la convoluzione di $u(t)$ con la risposta impulsiva del sistema.

ANALISI MODALE NELLO SPAZIO DEGLI STATI NEI SISTEMI LTI TEMPO CONTINUO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \qquad x(\emptyset) = x_0$$

$$X(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1} x(\emptyset)}_{X_\ell(s)} + \underbrace{\{(sI - A)^{-1} B\} U(s)}_{X_f(s)}$$

$$x_\ell(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1} x(\emptyset)] = \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}] x_0$$

Come è fatto $x_\ell(t)$?

$e_i = \begin{bmatrix} \emptyset \\ 1 \\ \emptyset \\ \vdots \\ \emptyset \end{bmatrix}$ ← i-esima riga

$x(\emptyset) = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \emptyset \\ \vdots \\ \emptyset \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(\emptyset) = e_1 \end{cases} \rightarrow x(t) = \phi_1(t)$

$\vdots$

$x(\emptyset) = e_m = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \vdots \\ \emptyset \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(\emptyset) = e_m \end{cases} \rightarrow x(t) = \phi_m(t)$

$\phi_i(t) \in \mathbb{R}^m$

$\phi(t) = [\phi_1(t) \,\vdots\, \phi_2(t) \,\vdots\, \dots \,\vdots\, \phi_m(t)] \in \mathbb{R}^{m \times m}$

① $\dot{\phi}(t) = [\dot{\phi}_1(t) \,\vdots\, \dot{\phi}_2(t) \,\vdots\, \dots \,\vdots\, \dot{\phi}_m(t)] = A[\phi_1(t) \,\vdots\, \phi_2(t) \,\vdots\, \dots \,\vdots\, \phi_m(t)] = A\phi(t)$.

② $\phi(\emptyset) = [\phi_1(\emptyset) \,\vdots\, \phi_2(\emptyset) \,\vdots\, \dots \,\vdots\, \phi_m(\emptyset)] = I_{m \times m}$

$\forall x(\emptyset)$ può essere espresso come $x_0 = \phi(\emptyset) x_0$

→ La soluzione $x(t)$ del problema di partenza:

$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(\emptyset) = x_0 \end{cases}$ sarà $x(t) = \phi(t) \cdot x_0 = \phi_1(t) \cdot x_{01} + \phi_2(t) \cdot x_{02} + \dots + \phi_m(t) x_{0m}$.

→ Principio di Sovrapposizione degli effetti.
$(x_0 = e_1 x_{01} + e_2 x_{02} + \dots + e_m x_{0m})$

$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$

$$\phi(t) = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots = \sum_{i=\emptyset}^{+\infty} \frac{A^i t^i}{i!} = e^{At} \leftarrow \text{MATRICE ESPONENZIALE}$$

DIM:

① $\dot{\phi}(t) = A + A^2 t + A^3 \frac{t^2}{2!} + \dots + A^k \cdot \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = A\left\{ I + At + \dots + A^{k-1} \cdot \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \right\} = A\phi(t)$.

② $t = \emptyset \rightarrow \phi(\emptyset) = I$.

nel dominio del tempo:

$$x_e(t) = e^{At} \cdot x_0 \quad , \quad y_e(t) = C e^{At} \cdot x_0 .$$

Per $x_f(t)$:

$$X_f(s) = (sI - A)^{-1} B \cdot U(s)$$

$$\hookrightarrow x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\sigma)} B u(\sigma) \, d\sigma$$

$$y_f(t) = C x_f(t) + D u(t) = C \cdot \int_0^t e^{A(t-\sigma)} B u(\sigma) \, d\sigma + D u(t)$$

PROPRIETÀ DI e^{At}

① $e^{A \cdot 0} = I$

② $e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$ sse $A \cdot B = B \cdot A$

③ $[e^{At}]^{-1} = e^{-At}$

$e^{At} \cdot e^{-At} = I$

④ $\frac{d}{dt} e^{At} = A \cdot e^{At}$ (soluzione di $\dot{\phi} = A \phi$)

⑤ $A \cdot v = \lambda \cdot v \Rightarrow e^{At} \cdot v = e^{\lambda t} \cdot v$, $v \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$

autovettore — autovalore

- A e A^t hanno gli stessi autovettori
- autovalori di e^{At} sono $e^{\lambda t}$ se gli autovalori di A sono λ.

⑥ Sia T, $\det T \neq \emptyset$ e $A = T \bar{A} T^{-1} \Rightarrow e^{At} = T e^{\bar{A}t} T^{-1}$.

ANALISI MODALE:

① A diagonalizzabile

$\exists T: A = T \Lambda T^{-1}$, con $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \emptyset & \dots & \emptyset \\ \emptyset & \lambda_2 & & \vdots \\ \emptyset & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$

$T = [v_1, v_2, \dots, v_n]$, v_i autovettore di A.

$$e^{At} = T e^{\Lambda t} T^{-1}$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \emptyset & \dots & \emptyset \\ \emptyset & e^{\lambda_2 t} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \emptyset \\ \emptyset & \dots & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Se A è diagonalizzabile i modi del sistema sono del tipo $e^{\lambda_i t}$, λ_i autovalori di A.

(*)

② A non diagonalizzabile

$\exists$ autovalore λ_i di A : $ma(\lambda) > mg(\lambda)$

$mg(\lambda) = \dim . Ker(\lambda I - A)$.

$\exists T$, $\det T \neq \emptyset$: $A = T \cdot J \cdot T^{-1}$, J forma di Jordan.

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & \emptyset & \dots & \emptyset \\ \emptyset & J_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \emptyset \\ \emptyset & \dots & \emptyset & J_r \end{bmatrix} \qquad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \emptyset & \dots & \emptyset \\ \emptyset & \lambda_i & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \emptyset \\ & & & & 1 \\ \emptyset & \dots & & \emptyset & \lambda_i \end{bmatrix} \qquad e^{At} = T e^{Jt} T^{-1}$$

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & \emptyset & \dots & \emptyset \\ \emptyset & e^{J_2 t} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \emptyset \\ \emptyset & \dots & \emptyset & e^{J_r t} \end{bmatrix} \qquad e^{J_i t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{m-1}}{m-1} e^{\lambda_i t} \\ \emptyset & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ & & & & te^{\lambda_i t} \\ \emptyset & \dots & & \emptyset & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

Un blocco di Jordan di dimensioni m, relativo all'autovalore λ, genera i modi: $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{m-1} e^{\lambda t}$

Carattere di convergenza:

- $Re[\lambda_i] < \emptyset$ -> modi convergenti
- $Re[\lambda_i] = \emptyset$, $mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i)$ -> modi limitati non convergenti
- altri casi -> modi divergenti

(*)

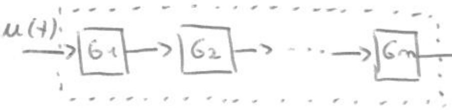
$X_e(t) = T e^{\Lambda T} T^{-1} x_0$, $\alpha = T^{-1} x_0$, $T = [v_1, v_2, \dots, v_m]$

$\Rightarrow X_e(t) = T e^{\Lambda T} \alpha$

$$= [v_1, v_2, \dots, v_m] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \emptyset & \dots & \emptyset \\ \emptyset & e^{\lambda_2 t} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \emptyset \\ \emptyset & \dots & \emptyset & e^{\lambda_m t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + \alpha_m e^{\lambda_m t} v_m.$$

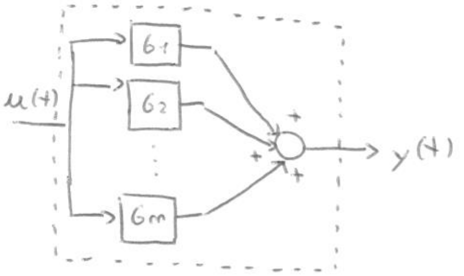
INTERCONNESSIONE DI SISTEMI DINAMICI

SERIE



$$G(s) = G_m(s) \cdot G_{m-1}(s) \cdot \ldots \cdot G_2(s) \cdot G_1(s).$$

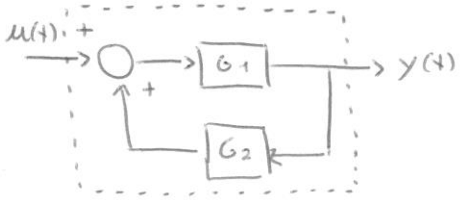
PARALLELO



$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) + \ldots + G_m(s)$$

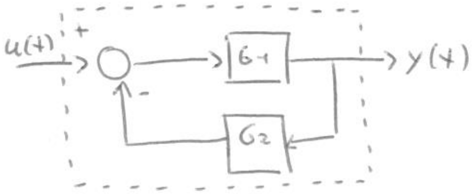
RETROAZIONE

- POSITIVA



$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)}$$

- NEGATIVA



$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

TEOREMA DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA

Sistema LTI : $u \to \boxed{G(s)} \to y$

$u(t) = M \cdot \cos(\omega t)$, $U(s) = M \cdot \frac{s}{s^2+\omega^2}$

Ipotesi : $Re[p_i] < \phi$.

$$G(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_m)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\Rightarrow Y_f(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \cdot M \cdot \frac{s}{s^2+\omega^2} = \frac{\bar{N}(s)}{D(s)} + \frac{R}{s-j\omega} + \frac{\bar{R}}{s+j\omega}$$

$$R = \lim_{s \to j\omega} (s - j\omega) Y_f(s) = \lim_{s \to j\omega} (s - j\omega) \cdot G(s) \cdot \frac{MS}{s^2 + \omega^2} = \lim_{s \to j\omega} G(s) \cdot M \cdot \frac{s}{s + j\omega}$$

$$= G(j\omega) \cdot M \cdot \frac{j\omega}{2j\omega} = \frac{M}{2} G(j\omega).$$

$$\bar{R} = \frac{M}{2} \overline{G(j\omega)}$$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{N(s)}{D(s)}\right] = y_T(t)$ è tale che $\lim_{t \to +\infty} y_T(t) = \phi$

$$y_f(t) = y_T(t) + R e^{j\omega t} + \bar{R} e^{-j\omega t} = y_T(t) + \frac{M}{2} G(j\omega) e^{j\omega t} + \frac{M}{2} \overline{G(j\omega)} e^{-j\omega t}$$

$$= y_T(t) + \frac{M}{2} |G(j\omega)| e^{j \measuredangle G(j\omega)} e^{j\omega t} + \frac{M}{2} |G(j\omega)| e^{-j \measuredangle G(j\omega)} e^{-j\omega t}$$

$$= y_T(t) + M |G(j\omega)| \left\{ \frac{e^{j(\omega t + \measuredangle G(j\omega))} + e^{-j(\omega t + \measuredangle G(j\omega))}}{2} \right\}$$

$$\Rightarrow y_f(t) = \underbrace{y_T(t)}_{\text{Risposta di Regime Transitorio}} + \underbrace{M |G(j\omega)| \cos(\omega t + \measuredangle G(j\omega))}_{y_{PERM}(t)}$$

Risposta di regime Permanente.

Se $G(s)$ ha una coppia di poli complessi e coniugati di $\pm j\omega$.

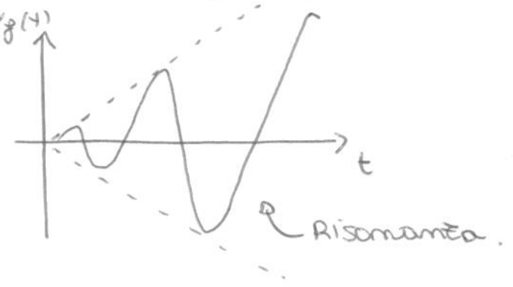
$$G(s) = \frac{N(s)}{\bar{D}(s)(s - j\omega)(s + j\omega)} = \frac{N(s)}{\bar{D}(s)(s^2 + \omega^2)}$$

$u(t) = M \cdot \cos(\omega t) \to U(s) = M \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

$$Y_F(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{N(s) \cdot M \cdot s}{\bar{D}(s)(s^2 + \omega^2)^2}$$

$\downarrow$

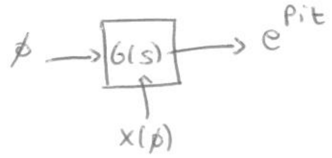
$y_f(t) =$ Roba che va a ϕ $+ \gamma t \cos(\omega t + \phi)$



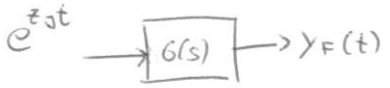
INTERPRETAZIONE FISICA DI POLI E ZERI DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$$G(s) = k \cdot \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_r)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_m)}$$

Polo in p_i → Sistema è in grado di generare il segnale $e^{p_i t}$.



Zero in z_j → Il segnale di ingresso $e^{z_j t}$ non si trasferisce all'uscita.



non contiene il modo $e^{z_j t}$.

$$\mathcal{L}[e^{z_j t}] = \frac{1}{s-z_j}$$

$$Y_F(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s-z_j} = k \cdot \frac{\cdots\cancel{(s-z_j)}\cdots}{\cdots} \cdot \frac{1}{\cancel{(s-z_j)}}$$

RISPOSTA AL GRADINO NEI SISTEMI DEL PRIMO ORDINE

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases} \qquad \begin{aligned} A &= -a \\ B &= a \\ C &= 1 \\ D &= 0 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (-a)\,x(t) + a\,u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

$$G(s) = C\,(sI - A)^{-1}B + D = 1 \cdot (s - (-a))^{-1} \cdot a + 0 = \frac{a}{s+a}$$

$$u(t) = 1\!\!1(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y_f(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{a}{s(s+a)}$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s(s+a)}\right] \overset{a \neq 0}{=} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} + \frac{-1}{s+a}\right] = \left(1 - e^{-at}\right) \cdot 1\!\!1(t).$$

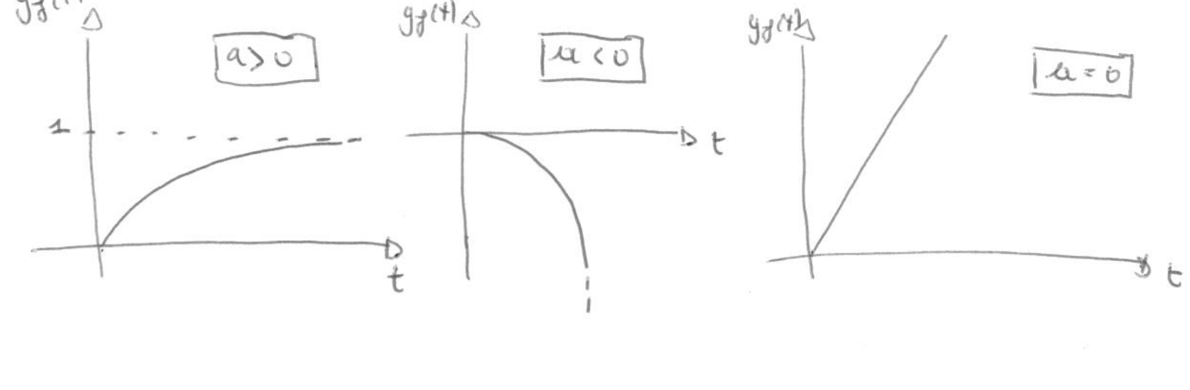
$$\lim_{t \to +\infty} G(s) = G(0) = \left.\frac{a}{s+a}\right|_{s=0} = 1$$

Se $a = 0 \Rightarrow \dot{x}(t) = (-a)\,x(t) + b\,u(t)$

$$G(s) = \frac{b}{s}$$

$$Y_f(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{b}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{b}{s^2}$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b}{s^2}\right] = b \cdot t \cdot 1\!\!1(t).$$



*

RISPOSTA AL GRADINO NEI SISTEMI DEL SECONDO ORDINE

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\omega_n^2 x_1(t) - 2\zeta\omega_n x_2(t) + \omega_n^2 u(t) \\ \omega_n > 0 \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} u(t).$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + [0] u(t).$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Se $|\zeta| \geq 1$ ho due radici reali (comportamento 1° ordine).

Se $|\zeta| < 1$ $\longrightarrow$ $p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$$m_1 = e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\cdot t)$$

$$m_2 = e^{-\zeta\omega_n t}\,\mathrm{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\cdot t)$$

$\zeta = 0 \Rightarrow$ Pulsazione massima.

$0 < \zeta < 1$ modi convergenti

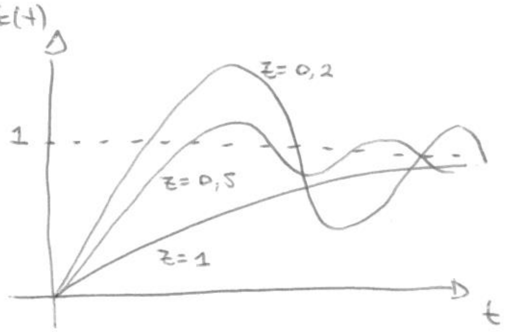
$-1 < \zeta < 0$ modi divergenti

$\zeta = 0$ modi limitati $(\cos(\omega_n t), \mathrm{sen}(\omega_n t))$

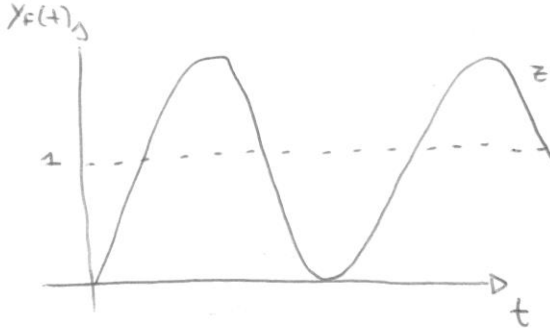
(*)

$$Y_F(s) = \frac{1}{s} - \frac{\frac{2z}{\omega_n}\left(1 + \frac{s}{2z\omega_n}\right)}{1 + \frac{2z}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

$$y_F(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\, e^{-z\omega_n t}\, \mathrm{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-z^2}\,t + \arctan\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$$



Si adegua a 1



non si adegua a 1.

(*)

TRAIETTORIE NELLO SPAZIO DEGLI STATI

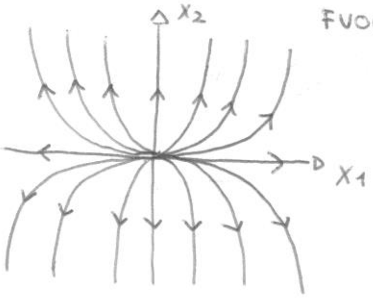
$\mathbb{R}^2$

$\dot{x}(t) = A x(t)$, $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = \lambda_2 x_2(t) \end{cases}$

$\begin{cases} x_1(t) = e^{\lambda_1 t} x_1(0) \\ x_2(t) = e^{\lambda_2 t} x_2(0) \end{cases}$

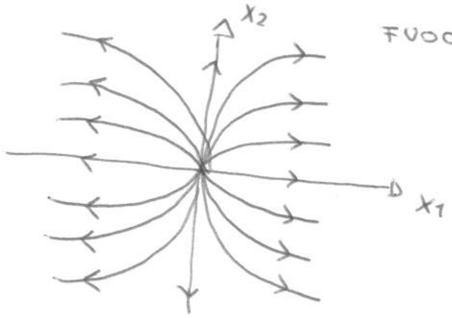
$x_2 = \gamma x_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$, $\gamma = \dfrac{x_2(0)}{(x_1(0))^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}}$

$\lambda_2 > \lambda_1$



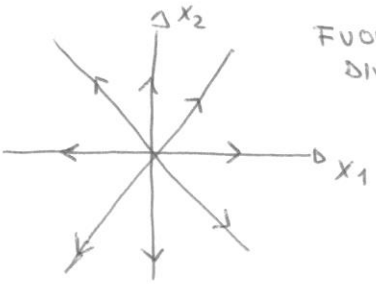
FUOCO

$\lambda_1 > \lambda_2$



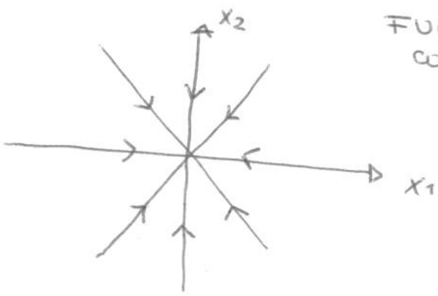
FUOCO

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$



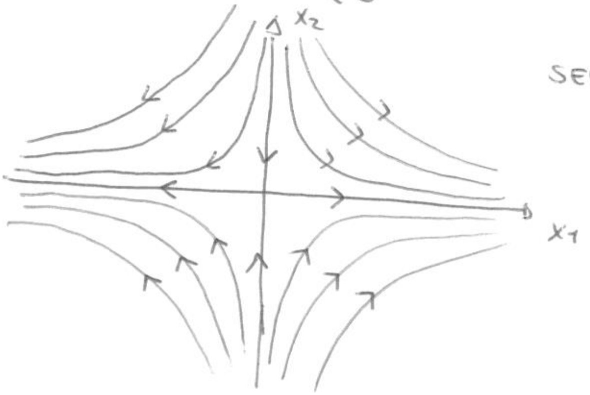
FUOCO DIVERGENTE

$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$



FUOCO CONVERGENTE

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$



SELLA.

(*)

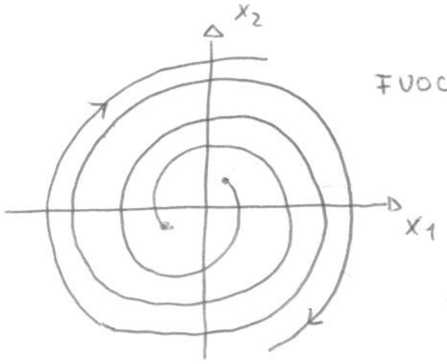
COPPIA DI POLI COMPLESSI E CONIUGATI.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad , \quad A = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - \sigma & \omega \\ -\omega & \lambda - \sigma \end{pmatrix} = (\lambda - \sigma)^2 + \omega^2 = 0 .$$

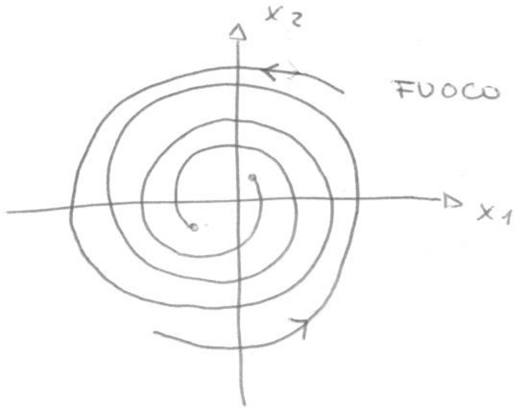
$$\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega \quad \Rightarrow \quad \text{modi} \begin{cases} e^{\sigma t} \cos(\omega t) \\ e^{\sigma t} \operatorname{sen}(\omega t) \end{cases}$$

$\sigma > 0$



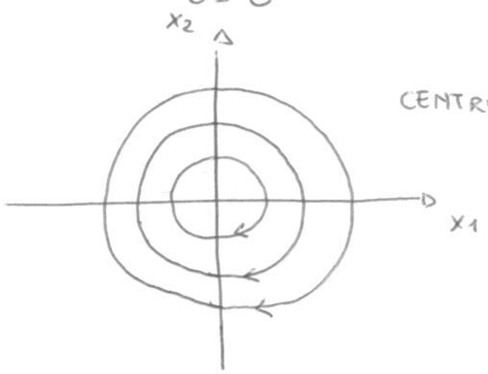
FUOCO

$\sigma < 0$



FUOCO

$\sigma = 0$



CENTRO.

ANALISI DEI SISTEMI LTI A TEMPO DISCRETO

RAPPR. I/O

$y(k) + a_1 y(k-1) + \ldots + a_m y(k-m) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \ldots + b_m u(k-m)$

Conoscendo l'ingresso $u(k)$, e le condizioni iniziali $y(-1)$, $y(-2), \ldots, y(-m)$ determinare $y(k)$, $\forall k \geq 0$.

RAPPR. I/S/O

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

Conoscendo l'ingresso $u(k)$, $\forall k \geq 0$ e le condizioni iniziali $x(0)$, determinare $x(k)$ e $y(k)$, $\forall k \geq 0$.

SEGNALI TIPICI NEI SISTEMI A TEMPO DISCRETO

1) IMPULSO UNITARIO

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$

Ogni segnale può essere scritto nella forma:
$u(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} u(i)\,\delta(k-i)$

2) GRADINO UNITARIO

$$1(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \geq 0 \\ 0 & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

3) SEGNALI CANONICI

$$r_m(k) = \binom{k}{m} 1(k) = \frac{k!}{m!\,(k-m)!} \cdot 1(k)$$

$m = 0 \Rightarrow r_0(k) = 1(k)$

$m = 1 \Rightarrow r_1(k) = k \cdot 1(k)$

$m = 2 \Rightarrow r_2(k) = \frac{k(k-1)}{2} \cdot 1(k)$

4) SEGNALI ESPONENZIALI

$f(k) = \rho^k \cdot 1(k)$

- $|\rho| > 1$ -> Diverge (modi)
- $|\rho| < 1$ -> Converge (modi)
- $|\rho| = 1$ -> Limitata non convergenti (modi)

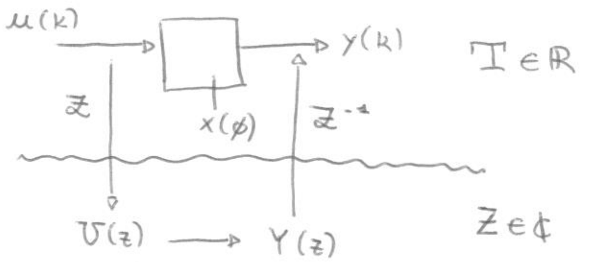
⑤ SEGNALI A RAMPA ESPONENZIALE

$$f(k) = \rho^k \binom{k}{m} \cdot 1\!\!1(k)$$

⑥ SEGNALI SINUSOIDALI

$$f(k) = \cos(\omega k) = \frac{e^{j\omega k} + e^{-j\omega k}}{2}$$

TRASFORMATA Z



Sia $f(k)$ un segnale a tempo discreto tale che $f(k) = \emptyset$, $\forall k < \emptyset$ ed $\exists M > \emptyset$, $\rho_0 \in \mathbb{R}$, $\rho_0 > \emptyset$, $k_0 \in \mathbb{N}$: $|f(k)| < M \rho_0^k$, $\forall k \geq k_0$.

Si definisce Trasformata Zeta di $f(k)$ la funzione $F(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)] = \sum_{k=\emptyset}^{+\infty} f(k) z^{-k} = f(\emptyset) + f(1) z^{-1} + f(2) z^{-2} + \dots$$

- La Serie $F(z)$ converge?

Converge $\forall z \in \mathbb{C} : |z| > \rho_0$ (ρ_0 raggio di convergenza)

PROPRIETA'

① LINEARITA'

$$f(k) = \alpha_1 u_1(k) + \alpha_2 u_2(k) \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

$$F(z) = \alpha_1 U_1(z) + \alpha_2 U_2(z)$$

② TRASFORMATA DI SEGNALI CON RITARDO

$$g(k) = f(k-k_0) \cdot 1\!\!1(k-k_0), \quad k_0 \in \mathbb{N},\ k_0 > \emptyset.$$

$$G(z) = z^{-k_0} F(z)$$

DIM: $\mathcal{Z}[g(k)] = \sum_{k=\emptyset}^{+\infty} f(k-k_0) \cdot 1\!\!1(k-k_0) z^{-k} z^{k_0} z^{-k_0} = z^{-k_0} \sum_{k=\emptyset}^{+\infty} f(k-k_0) z^{-(k-k_0)} \cdot 1\!\!1(k-k_0)$

con $m = k - k_0$

$$\Rightarrow z^{-k_0} \sum_{m=-k_0}^{+\infty} f(m) z^{-m} \cdot 1\!\!1(m) = z^{-k_0} \sum_{m=\emptyset}^{+\infty} f(m) z^{-m} = z^{-k_0} F(z).$$

③ MOLTIPLICAZIONE PER UN ESPONENZIALE

$g(k) = \rho^k \cdot f(k)$

$G(z) = F\left(\frac{z}{\rho}\right)$

DIM: $\mathcal{Z}[g(k)] = \mathcal{Z}[\rho^k f(k)] = \sum_{k=\emptyset}^{+\infty} \rho^k f(k) z^{-k} = \sum_{k=\emptyset}^{+\infty} f(k) \cdot \left(\frac{z}{\rho}\right)^{-k} = F\left(\frac{z}{\rho}\right)$

④ MOLTIPLICAZIONE PER K

$g(k) = k \cdot f(k)$

$G(z) = -z \cdot \frac{d}{dz} F(z)$

⑤ TRASFORMATA DEL PRODOTTO DI CONVOLUZIONE

PRODOTTO DI CONVOLUZIONE FRA $f(k)$ E $g(k)$: $P(k) = f(k) * g(k) = \sum_{h=\emptyset}^{k} f(h) g(k-h)$

$P(z) = \mathcal{Z}[f(k) * g(k)] = F(z) \cdot G(z)$

⑥ T. VALORE FINALE

Se $\lim_{k \to +\infty} f(k)$ $\exists$ finito $\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} f(k) = \lim_{z \to 1} (z-1) F(z)$

sse $F(z)$ ha $|p_i| < 1$ tranne $p_1 = 1$.

TRASFORMATE DI SEGNALI NOTEVOLI

① $\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = \emptyset \\ \emptyset & \text{se } k \neq \emptyset \end{cases}$

$F(k) = 1 \cdot z^{-0} + \emptyset \cdot z^{-1} + \emptyset \cdot z^{-2} + \ldots = 1$

$\mathcal{Z}[\delta(k)] = 1$.

② $1\!\!1(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \geq \emptyset \\ \emptyset & \text{se } k < \emptyset \end{cases}$

$F(k) = 1 \cdot z^{-0} + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + \ldots = \sum_{k=\emptyset}^{+\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$

$\mathcal{Z}[1\!\!1(k)] = \frac{z}{z-1}$

③ $u(k) = \rho^k \cdot 1\!\!1(k)$

$U(z) = \left[\frac{z}{z-1}\right]_{z \leftarrow \frac{z}{\rho}} = \frac{z/\rho}{z/\rho - 1} = \frac{z}{z-\rho}$

$\mathcal{Z}[\rho^k \cdot 1\!\!1(k)] = \frac{z}{z-\rho}$.

(4) $r_m(k) = \binom{k}{m} 1(k)$

$r_1(k) = k \cdot 1(k)$

$$\mathcal{Z}[r_1(k)] = -z \cdot \frac{d}{dz}\frac{z}{z-1} = -z \cdot \frac{z-1-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$r_2(k) = \frac{k(k-1)}{2} \cdot 1(k) = \frac{1}{2}k^2 \cdot 1(k) - \frac{1}{2}k \cdot 1(k)$$

$$\mathcal{Z}[k^2 \cdot 1(k)] = -z \cdot \frac{d}{dz}\frac{z}{(z-1)^2} = -z \cdot \frac{(z-1)^2 - 2(z-1)z}{(z-1)^4} = -z \cdot \frac{z-1-2z}{(z-1)^3} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$\mathcal{Z}[r_2(k)] = \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{(z+1)}{(z-1)^3} - \frac{1}{2}\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{z(z+1) - z(z-1)}{(z-1)^3} = \frac{z}{(z-1)^3}.$$

$$\mathcal{Z}[r_m(k)] = \frac{z}{(z-1)^{m+1}}.$$

(5) $u(k) = \cos(\omega k) = \dfrac{e^{j\omega k} + e^{-j\omega k}}{2}$

$$U(z) = \frac{1}{2}\mathcal{Z}[(e^{j\omega})^k] + \frac{1}{2}\mathcal{Z}[(e^{-j\omega})^k] = \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-e^{j\omega}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{z(z-e^{-j\omega}) + z(z-e^{j\omega})}{2(z-e^{j\omega})(z-e^{-j\omega})} = \frac{z^2 - ze^{-j\omega} + z^2 - ze^{j\omega}}{2(z^2 - e^{j\omega}z - e^{-j\omega}z + 1)} = \frac{2z^2 - z(e^{j\omega} + e^{-j\omega})}{2(z^2 - z(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + 1)}$$

$$= \frac{z^2 - \cos\omega \cdot z}{z^2 - 2\cos\omega \cdot z + 1}$$

$$\mathcal{Z}[\cos(\omega k)] = \frac{z^2 - \cos\omega \cdot z}{z^2 - 2\cos\omega \cdot z + 1}$$

$$\mathcal{Z}[\mathrm{sen}(\omega k)] = \frac{z \cdot \mathrm{sen}\,\omega}{z^2 - 2\cos\omega \cdot z + 1}$$

(6) $f(k) = \rho^k \binom{k}{m} \cdot 1(k)$

$$\mathcal{Z}\left[\rho^k \binom{k}{m} \cdot 1(k)\right] = \frac{\rho^m z}{(z-\rho)^{m+1}}.$$

USO DELLA TRASFORMATA Z PER LA SOLUZIONE DI SISTEMI LTI

TRASFORMATA DELLA RAPPR. I/S/O

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \qquad \text{noti } u(k),\ x(0)$$

$$\mathcal{Z}[x(k+1)] = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k+1) z^{-k} \underset{\underset{R=k+1}{\uparrow}}{=} \sum_{R=1}^{+\infty} x(R)\, z^{-(R-1)} = \sum_{R=1}^{+\infty} x(R)\, z^{-R} \cdot z$$

$$= z \cdot \sum_{R=1}^{+\infty} x(R)\, z^{-R} = z \left\{ \sum_{R=0}^{+\infty} x(R)\, z^{-R} - x(0) \cdot z^{-0} \right\} = z \cdot X(z) - x(0) \cdot z$$

$$\begin{cases} z \cdot X(z) - x(0) \cdot z = AX(z) + BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases}$$

- $z \cdot X(z) - AX(z) = z \cdot x(0) + BU(z)$

  $(zI - A)\, X(z) = z \cdot x(0) + BU(z)$

  $$X(z) = \underbrace{(zI-A)^{-1} \cdot z \cdot x(0)}_{X_l(z)} + \underbrace{(zI-A)^{-1} B \cdot U(z)}_{X_f(z)}$$

- $Y(z) = C\,(zI-A)^{-1} \cdot z \cdot x(0) + C\,(zI-A)^{-1} B \cdot U(z) + DU(z)$

  $$= \underbrace{C(zI-A)^{-1} \cdot z \cdot x(0)}_{Y_l(z)} + \underbrace{\left\{ C(zI-A)^{-1} \cdot B + D \right\} U(z)}_{Y_f(z)}$$

$Y_f(z) = G(z) \cdot U(z) \Rightarrow G(z) = C(zI-A)^{-1} \cdot B + D.$

TRASFORMATA DELLA RAPPR. I/O

Supponiamo di avere un segnale $y(k)$, per cui in generale $y(-1), y(-2), \dots, y(-n)$ sono diversi tra loro.

$$\mathcal{Z}[y(k-l)] = \sum_{k=0}^{+\infty} y(k-l)\, z^{-k} = y(-l) + y(-l+1) z^{-1} + y(-l+2) z^{-2} + \dots + y(0) z^{-l} +$$

$$+ y(1) z^{-l-1} + y(2) z^{-l-2} + \dots = y(-l) + y(-l+1) z^{-1} + \dots + y(-1) z^{-l+1} + z^{-l} \{ y(0) +$$

$$+ y(1) z^{-1} + y(2) z^{-2} + \dots \} = y(-l) + y(-l+1) z^{-1} + \dots + y(-1) z^{-l+1} + z^{-l} Y(z).$$

$y(k) + a_1 y(k-1) + \ldots + a_m y(k-m) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \ldots + b_m u(k-m)$

$Y(z) + a_1\{y(-1) + z^{-1} Y(z)\} + a_2\{y(-2) + y(-1)z^{-1} + z^{-2} Y(z)\} + \ldots$

$\ldots + a_m\{y(-m) + y(-m+1)z^{-1} + \ldots + y(-1) z^{-m+1} - z^{-m} Y(z)\} = b_0 U(z) +$

$+ b_1 z^{-1} U(z) + \ldots + b_m z^{-m} U(z)$

$\{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_m z^{-m}\} Y(z) = -\{a_1 y(-1) + a_2 y(-2) + a_2 y(-1) z^{-1} + \ldots$

$\ldots + a_m y(-m) + a_m y(-m+1) z^{-1} + \ldots + a_m y(-1) z^{-m}\} + \{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots b_m z^{-m}\} U(z).$

$$Y(z) = \frac{\{\text{TERMINI CHE DIPENDONO DALLE COND. INIZIALI}\}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_m z^{-m}} + \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_m z^{-m}} \cdot U(z).$$

Ipotesi : $n \geq m$ (se $n < m$, moltiplico per z^m).

$$Y(z) = \underbrace{\frac{c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \ldots + c_1 z}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n}}_{Y_l(z)} +$$

$$+ \underbrace{\frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_m z^{n-m}}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n} \cdot U(z)}_{Y_f(z)}$$

C_j , $j = 1 \ldots n$ dipendono dalle condizioni iniziali $y(-1) \ldots y(-m)$

$$Y_f(z) = G(z) \cdot U(z) \Rightarrow G(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_m z^{n-m}}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n}$$

ANTITRASFORMATA Z

DEF: $f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma F(z) \cdot z^{k-1} dz$

dove Γ è un qualunque percorso chiuso nel piano complesso che contenga i poli di $F(z)$.

ANALISI MODALE DEI SISTEMI LTI A TEMPO DISCRETO

POLI DI $Y_e(z)$	MODI
$p \in \mathbb{R}$, $\mu = 1$ Polo Reale semplice	$p^k \cdot 1\!\!1(k)$
$p = \rho e^{\pm j\phi}$, $\mu = 1$ Coppia di poli complessi coniugati semplici	$\rho^k \cos(\phi k)$, $\rho^k \mathrm{sen}(\phi k)$
$p \in \mathbb{R}$, $\mu > 1$ Polo Reale multiplo	$p^k \cdot 1\!\!1(k), k p^k \cdot 1\!\!1(k), \dots, k^{\mu-1} p^k \cdot 1\!\!1(k)$
$p = \rho e^{\pm j\phi}$, $\mu > 1$ Coppia di poli complessi coniugati multipli	$\rho^k \cos(\phi k)$, $\rho^k \mathrm{sen}(\phi k)$ $k\rho^k \cos(\phi k)$, $k\rho^k \mathrm{sen}(\phi k)$ $\vdots$ $k^{\mu-1}\rho^k \cos(\phi k)$, $k^{\mu-1}\rho^k \mathrm{sen}(\phi k)$
$p = \emptyset$	$\delta(k)$ modi impulsivi

CARATTERE DI CONVERGENZA DEI MODI:

RIS:

1) modi convergenti sse $|p_i| < 1$

2) modi limitati non convergenti sse $|p_i| = 1$, $\mu_i = 1$.

3) In tutti gli altri casi modi divergenti.

ANALOGIE CON I SISTEMI A TEMPO CONTINUO

① RISPOSTA IMPULSIVA E FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$u(k) = \delta(k)$

$U(z) = 1$

$Y_f(z) = G(z) \cdot U(z) = G(z) \Rightarrow Y_f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[G(z)] = g(k)$

La risposta impulsiva è l'antitrasformata della funzione di Trasferimento.

Per un generico ingresso $u(k)$, la risposta forzata $y_f(k)$ è il prodotto di convoluzione tra $u(k)$ e la risposta impulsiva $g(k)$.

$$y_f(k) = \sum_{i=\emptyset}^{k} g(i)\, u(k-i)$$

② INTERCONNESSIONE DI SISTEMI LTI

Esattamente come nel caso tempo-continuo

③ TEOREMA DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA

Si consideri un sistema la cui funzione di trasferimento $G(z)$ ha tutti poli a modulo minore di 1.

$u(k) = M \cdot \cos(\omega k + \phi) \Rightarrow y_F(k) = y_T(k) + y_{PERM}(k)$

dove $\lim_{k \to +\infty} y_T(k) = \emptyset$

e $y_{PERM}(k) = M \cdot |G(e^{j\omega})| \cdot \cos(\omega k + \phi + \measuredangle G(e^{j\omega}))$

ANALISI MODALE NELLO SPAZIO DEGLI STATI NEI SISTEMI LTI TEMPO DISCRETO

$X(z) = (zI - A)^{-1} z \cdot x(\emptyset) + (zI - A)^{-1} B \cdot U(z)$

$k=0 \rightarrow x(1) = Ax(\emptyset) + Bu(\emptyset)$

$k=1 \rightarrow x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A^2 x(\emptyset) + ABu(\emptyset) + Bu(1)$

$k=2 \rightarrow x(3) = Ax(2) + Bu(2) = A^3 x(\emptyset) + A^2 Bu(\emptyset) + ABu(1) + Bu(2)$.

k gen $\rightarrow x(k) = A^k x(\emptyset) + A^{k-1} Bu(\emptyset) + A^{k-2} Bu(1) + \ldots + ABu(k-2) + Bu(k-1)$

$$x(k) = \underbrace{A^k x(\emptyset)}_{x_l(k)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i)}_{x_f(k)}$$

$A^k = \mathcal{Z}^{-1}\left[(zI - A)^{-1} \cdot z\right]$

$x_l(k) = A^k x(\emptyset)$

PROPRIETA' DI A^k

① Se $Av = \lambda v$, $v \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow A^k v = \lambda^k \cdot v$

② Se $\exists T$, $\det(T) \neq \emptyset$: $A = T \cdot \bar{A} \cdot T^{-1} \Rightarrow A^k = T \cdot \bar{A}^k \cdot T^{-1}$

ANALISI MODALE:

1) A diagonalizzabile

$\exists T : A = T \cdot \Lambda \cdot T^{-1}$, con $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \emptyset & \cdots & \emptyset \\ \emptyset & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \emptyset \\ \emptyset & \cdots & \emptyset & \lambda_m \end{bmatrix}$

$T = [v_1 \vdots v_2 \vdots \dots \vdots v_m]$, v_i autovettore di A.

$$A^k = T \Lambda^k T^{-1} = T \begin{bmatrix} \lambda_1^k & \emptyset & \cdots & \emptyset \\ \emptyset & \lambda_2^k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \emptyset \\ \emptyset & \cdots & \emptyset & \lambda_m^k \end{bmatrix} T^{-1}$$

$$x_\ell(k) = A^k \cdot x(\emptyset) = T \begin{bmatrix} \lambda_1^k & \emptyset & \cdots & \emptyset \\ \emptyset & \lambda_2^k & & \emptyset \\ \vdots & & \ddots & \emptyset \\ \emptyset & \cdots & \emptyset & \lambda_m^k \end{bmatrix} T^{-1} \cdot x(\emptyset) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k v_i \cdot \alpha_i$$

dove $\alpha = T^{-1} x(\emptyset)$

Caso particolare: $x(\emptyset) = v_i \Rightarrow x_\ell(k) = \lambda_i^k v_i$

2) A non diagonalizzabile

$\exists T : \det T \neq \emptyset$ e $A = T \cdot J \cdot T^{-1}$

$J = \begin{bmatrix} J_1 & \emptyset & \cdots & \emptyset \\ \emptyset & J_2 & & \emptyset \\ \vdots & & \ddots & \emptyset \\ \emptyset & \cdots & \emptyset & J_m \end{bmatrix}$ $\quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \emptyset & \cdots & \emptyset \\ \emptyset & \lambda_i & \ddots & & \emptyset \\ \vdots & & \ddots & 1 & \emptyset \\ \emptyset & \cdots & & \emptyset & \lambda_i \end{bmatrix}$

$$A^k = T J^k T^{-1} = T \begin{bmatrix} J_1^k & \emptyset & \cdots & \emptyset \\ \emptyset & J_2^k & & \emptyset \\ \vdots & & \ddots & \emptyset \\ \emptyset & \cdots & \emptyset & J_m^k \end{bmatrix} T^{-1}$$

dove $J_i^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k, & \binom{k}{1}\lambda_i^k, & \cdots & , \binom{k}{i-1}\lambda_i^{k-i+1} \\ \emptyset & \lambda_i^k, & \binom{k}{1}\lambda_i^k & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \emptyset & \cdots & \emptyset & \lambda_i^k \end{bmatrix}$

autovalore λ: $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$

$\rightarrow$ modo λ^k

: $m_a(\lambda) > m_g(\lambda)$

$\rightarrow$ modi $\lambda^k, k\lambda^k, k^2\lambda^k, \dots$

Carattere di convergenza:

- $|\lambda_i| < 1 \rightarrow$ modi convergenti
- $|\lambda_i| = 1$, $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) \rightarrow$ modi limitati non convergenti
- altri casi $\rightarrow$ modi divergenti

ANALISI DEI SISTEMI NON LINEARI : TECNICA DI LINEARIZZAZIONE

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = h(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

noti $\bar{x}(\phi)$, $\bar{u}(t)$ $\rightarrow$ $\bar{x}(t), \bar{y}(t)$ sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) \\ \bar{y}(t) = h(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) \end{cases}$$

Definiamo:

$$\Delta x(t) = x(t) - \bar{x}(t)$$
$$\Delta y(t) = y(t) - \bar{y}(t)$$
$$\Delta u(t) = u(t) - \bar{u}(t)$$

$$\Delta \dot{x}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t) = \frac{d}{dt}\Delta x(t) = f(x(t), u(t), t) - f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)$$

$$= \cancel{f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t) \\ u=\bar{u}(t)}} (x(t) - \bar{x}(t)) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t) \\ u=\bar{u}(t)}} (u(t) - \bar{u}(t))$$

$$+ o\left(\left\| \begin{matrix} x(t) - \bar{x}(t) \\ u(t) - \bar{u}(t) \end{matrix} \right\|^2\right) - \cancel{f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)}$$

Se $\Delta x(t), \Delta u(t)$ sono "piccoli":

$$\Delta \dot{x}(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t) \\ u=\bar{u}(t)}} \cdot \Delta x(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t) \\ u=\bar{u}(t)}} \cdot \Delta u(t)$$

$$A(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t) \\ u=\bar{u}(t)}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t) \\ u=\bar{u}(t)}} \qquad B(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t) \\ u=\bar{u}(t)}}$$

$$\Delta y(t) = C(t) \cdot \Delta x(t) + D(t)\,\Delta u(t)$$

$$C(t) = \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t) \\ u=\bar{u}(t)}} \qquad D(t) = \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t) \\ u=\bar{u}(t)}}$$

Sistema linearizzato:

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}(t) = A(t) \cdot \Delta x(t) + B(t)\,\Delta u(t) \\ \Delta y(t) = C(t) \cdot \Delta x(t) + D(t)\,\Delta u(t) \end{cases}$$

$\rightarrow$ Fornisce una buona approssimazione del comportamento del sistema nell'intorno di $\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{y}(t)$, a patto che $\Delta x(t), \Delta y(t), \Delta u(t) \ll 1$.

STABILITA'

STATI DI EQUILIBRIO

$\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ si dice S.D.E per un sistema dinamico se:

$$x(\phi) = \bar{x} \Rightarrow x(t) = \bar{x} \quad , \forall t \geq \phi$$

CALCOLO DEGLI S.D.E.

Sistema Tempo Invariante a Tempo Continuo:

$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$

$u(t) = \bar{u}, \forall t \qquad \Rightarrow \dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}) = \phi$

Sistema Tempo Invariante a Tempo Discreto:

$x(k+1) = f(x(k), u(k))$

$u(k) = \bar{u}, \forall k \qquad \Rightarrow \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u})$

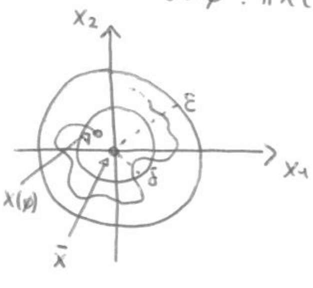
STABILITA'

Sia $\bar{x}$ uno S.D.E. del sistema:

$$\left.\begin{matrix} \dot{x}(t) \\ x(t+1) \end{matrix}\right\} = f(x(t), u(t))$$

DEF: Lo stato di equilibrio $\bar{x}$ si dice stabile se:

$\forall \varepsilon > \phi, \exists \delta > \phi : \|x(\phi) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon, \forall t \geq \phi$



DEF: Lo Stato di equilibrio $\bar{x}$ si dice **CONVERGENTE** se:

$\exists \delta > \phi : \|x(\phi) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \|x(t) - \bar{x}\| = \phi$.

DEF: Lo stato di equilibrio si dice **ASINTOTICAMENTE STABILE** se è sia stabile che convergente.

DEF: Lo stato di equilibrio si dice **GAS** se:

$\forall x(\phi) \in \mathbb{R}^m \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \|x(t) - \bar{x}\| = \phi$.

CRITERIO RIDOTTO DI LYAPUNOV

$\bar{x}$ s.d.e. del sistema:

$\dot{x}(t) = f(x(t))$

Sia $J = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=\bar{x}}$

1) $\forall \lambda_i : Re[\lambda_i] < \phi \rightarrow \bar{x}$ S.D.E. ASINTOTICAMENTE STABILE

2) $\exists \lambda_i : Re[\lambda_i] > \phi \rightarrow \bar{x}$ S.D.E. INSTABILE

VERSIONE TD DEL CRITERIO RIDOTTO DI LYAPUNOV

$\bar{x}$ s.d.e. del sistema:

$x(k+1) = f(x(k))$

Sia $J = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=\bar{x}}$

1) $\forall \lambda_i : |\lambda_i| < 1 \rightarrow \bar{x}$ S.D.E. ASINTOTICAMENTE STABILE

2) $\exists \lambda_i : |\lambda_i| > 1 \rightarrow \bar{x}$ S.D.E. INSTABILE

STABILITÀ NEI SISTEMI LINEARI

SISTEMI AUTONOMI

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) & (TC) \\ x(k+1) = Ax(k) & (TD) \end{cases}$$

Calcolo degli S.D.E:

TC: $\bar{x} : A\bar{x} = \phi \rightarrow x \in Ker(A)$

se $\det A \neq \phi \rightarrow \bar{x} = \phi$ unico S.D.E.

se $\det A = \phi \rightarrow \exists$ infiniti S.D.E.

TD: $\bar{x} : \bar{x} = A\bar{x}$

$(I - A)\bar{x} = \phi \rightarrow x \in Ker(I - A)$

$\bar{x} = \phi \rightarrow$ Sempre S.D.E ed è unico se $\det(I - A) \neq \phi$.

Stabilità:

TC: $x(t) = e^{At} \cdot x(\phi)$

TD: $x(t) = A^k \cdot x(\phi)$

Tutti i modi convergenti -> AS. STABILE

Modi convergenti + Modi Limitati -> MARG. STABILE

Almeno un modo divergente -> INSTABILE

TC: λ_i, autovalori di A.

- $Re[\lambda_i] < \emptyset, \forall i$ => Sistema AS. STABILE
- $Re[\lambda_i] \leq \emptyset, \forall i$ e se $Re[\lambda_J] = \emptyset$ => $ma(\lambda_J) = mg(\lambda_J)$ => Sistema MARG. STABILE
- Altri casi => Sistema INSTABILE

TD: λ_i, autovalori di A.

- $|\lambda_i| < 1, \forall i$ => Sistema AS. STABILE
- $|\lambda_i| \leq 1, \forall i$ e se $|\lambda_J| = 1$ => $ma(\lambda_J) = mg(\lambda_J)$ => Sistema MARG. STABILE
- Altri casi => Sistema INSTABILE

Osservazioni:

1) $\bar{x} = \emptyset$ sempre S.D.E.
2) Sistema AS. STABILE sse $\bar{x} = \emptyset$ unico S.D.E.
3) $\bar{x} = \emptyset$ convergente => $\bar{x} = \emptyset$ stabile.
4) $\bar{x} = \emptyset$ AS. STABILE => $\bar{x} = \emptyset$ GAS.

CASO NON AUTONOMO

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $u(t) = \bar{u}, \forall t$

$\bar{x}$ è S.D.E se : $A\bar{x} + B\bar{u} = \emptyset$

$A\bar{x} = -B\bar{u}$

Se $\det A \neq \emptyset$ -> $\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$ unico S.D.E.

Se $\det A = \emptyset$ -> ∞ S.D.E. se $B\bar{u} \in Im(A)$

-> $\emptyset$ S.D.E. se $B\bar{u} \notin Im(A)$

STABILITÀ ILUL

DEF: Un sistema si dice stabile in senso ILUL se:
$\forall Y > \emptyset, \exists U > \emptyset$: se $\|u(t)\| < U, \forall t$ => $\|y(t)\| < Y, \forall t$.

TC: Sistema ILUL sse $Re[p_i] < \emptyset$ di $G(s)$.

TD: Sistema ILUL sse $|p_i| < 1$ di $G(z)$.

RAGGIUNGIBILITÀ E PROBLEMA DEL CONTROLLO

$x(k+1) = A x(k) + B u(k)$

$x(\emptyset) = x_{in}$, $x(T) = x_{fin}$

$\exists$ una sequenza di ingressi $u(\emptyset), u(1), \ldots, u(T-1)$ in grado di portare lo stato del sistema da x_{in} a $t=\emptyset$ a x_{fin} a $t=T$?

Supponiamo che:

$$x(k) = A^k x(\emptyset) + \sum_{i=\emptyset}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i)$$

$$x(T) = A^T x(\emptyset) + \sum_{i=\emptyset}^{T-1} A^{T-1-i} B u(i)$$

$$\underbrace{x_{fin} - A^T x_{in}}_{n \times 1} = \underbrace{\left[B \mid AB \mid A^2 B \mid \ldots \mid A^{T-1} B \right]}_{R_T \in \mathbb{R}^{n \times T \cdot m}} \underbrace{\begin{bmatrix} u(T-1) \\ u(T-2) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(\emptyset) \end{bmatrix}}_{mT \times 1}$$

Il problema ammette soluzione sse: $x_{fin} - A^T x_{in} \in \mathrm{Im}\, R_T$

DEF: Uno stato si dice **RAGGIUNGIBILE** (dallo stato zero) in k passi se esiste una sequenza di ingressi $u(\emptyset), \ldots, u(k-1)$: $x(k) = \bar{x}$ con $x(\emptyset) = \emptyset$.

$\Rightarrow$ L'insieme degli stati raggiungibili in k passi è dato dall'immagine della matrice $R_k = [B \mid AB \mid \ldots \mid A^{k-1} B]$.

$\chi_k^R = \mathrm{Im}\, R_k$

$\chi_1^R = \mathrm{Im}\, R_1 = \mathrm{Im}[B]$

$\chi_2^R = \mathrm{Im}\, R_2 = \mathrm{Im}\,[B \mid AB] \supseteq \chi_1^R$

$\chi_3^R = \mathrm{Im}\, R_3 = \mathrm{Im}\,[B \mid AB \mid A^2 B] \supseteq \chi_2^R$

$\Rightarrow \chi_1^R \subseteq \chi_2^R \subseteq \ldots \subseteq \chi_k^R \subseteq \chi_{k+1}^R \ldots$

Se $\exists \bar{k}$: $\chi_{\bar{k}}^R = \mathbb{R}^n$, il sistema è **COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE**.

TEOREMA DI CALLEY-HAMILTON

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$.

$\Rightarrow A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = \emptyset$

A è radice del suo polinomio caratteristico.

Conseguenza:

$A^n = -\alpha_{n-1} A^{n-1} - \alpha_{n-2} A^{n-2} - \dots - \alpha_1 A - \alpha_0 I$

$A^n B = -\alpha_{n-1} A^{n-1} B - \alpha_{n-2} A^{n-2} B - \dots - \alpha_1 AB - \alpha_0 B$

$\Rightarrow Im\, R_{n+1} = Im\, [A^n B \mid A^{n-1} B \mid \dots \mid AB \mid B]$

Coincide con $Im\, R_n = Im\, [A^{n-1} B \mid \dots \mid AB \mid B]$

$\Rightarrow X_1^R \subseteq X_2^R \subseteq \dots \subseteq X_n^R = X_{n+1}^R = X_{n+2}^R = \dots = X_k^R$

L'insieme degli stati raggiungibili coincide con il sottospazio raggiungibile in n passi, che quindi prende il nome di sottospazio raggiungibile del sistema X^R.

$X^R = Im\, R$, dove $R = [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1} B]$ è la MATRICE DI RAGGIUNGIBILITA'.

Se $x(\emptyset) \neq \emptyset$, devo verificare se $v = x_{fin} - A^T x_{in} \in Im\, R_T$ che equivale a $x_{fin} \in A^T x_{in} + Im\, R_T$

Calcolo della sequenza di ingresso $u(\emptyset), u(1), \dots, u(T-1)$:

$$x_{fin} - A^T x_{in} = v = R_T \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u(T-1) \\ u(T-2) \\ \vdots \\ u(\emptyset) \end{bmatrix}}_{U} \qquad \Rightarrow \underbrace{R_T}_{n \times Tm} \cdot \underbrace{U}_{Tm \times 1} = \underbrace{v}_{n \times 1}$$

$m = 1$, $T = n$ e il sistema è completamente raggiungibile, si ha l'unica soluzione $R^{-1} v$.

In generale, se $T \cdot m > n$, ci sono infinite soluzioni

$U = \bar{U} + U_{om}$, dove $R_T \cdot U_{om} = \emptyset$

e $\bar{U}$ è una soluzione particolare di $R_T U = v$.

Sia $Im\, \mathcal{R}_T = \mathbb{R}^n$, e poniamo $\bar{u} = \mathcal{R}_T^T \eta$, $\eta \in \mathbb{R}^n$

$\mathcal{R}_T \cdot (\mathcal{R}_T^T \eta) = v \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(\mathcal{R}_T \mathcal{R}_T^T)}_{n \times n} \eta = v$

$\eta = (\mathcal{R}_T \mathcal{R}_T^T)^{-1} \cdot v$

$\bar{u} = \mathcal{R}_T^T (\mathcal{R}_T \mathcal{R}_T^T)^{-1} v$

$u = \mathcal{R}_T^T (\mathcal{R}_T \mathcal{R}_T^T)^{-1} v + u_{orn}$, $u_{orn} \in Ker\, \mathcal{R}_T$.

PROBLEMA:

Dato $x(\emptyset) = x_{in}$, $x(T) = x_{fin}$, determinare la sequenza di ingresso in grado di portare lo stato da x_{in} a x_{fin} in K passi, in modo che $\sum_{t=\emptyset}^{T-1} \|u(t)\|^2$ sia minima.

$\Rightarrow$ Soluzione: $\bar{u} = \mathcal{R}_T^T (\mathcal{R}_T \mathcal{R}_T^T)^{-1} v$

$$\begin{cases} \min \sum \|u(t)\|^2 = u^T u \\ u = \bar{u} + u_{orn} \end{cases}$$

$\bar{u} = \mathcal{R}_T^T (\mathcal{R}_T \mathcal{R}_T^T)^{-1} v$

$u_{orn} \in Ker\, \mathcal{R}_T \quad \Rightarrow \quad \bar{u}^T \cdot u_{orn} = \emptyset$.

$u^T u = (\bar{u} + u_{orn})^T (\bar{u} + u_{orn}) = \bar{u}^T \bar{u} + \cancelto{\emptyset}{u_{orn}^T \bar{u}} + \cancelto{\emptyset}{\bar{u}^T u_{orn}} + u_{orn}^T u_{orn}$

$= \bar{u}^T \bar{u} + u_{orn}^T u_{orn}$

Il minimo di $u^T u$ si ha scegliendo $u_{orn} = \emptyset \Rightarrow u = \bar{u}$

$$\begin{cases} \min \bar{u}^T \bar{u} + u_{orn}^T u_{orn} \\ u_{orn} \in Ker\, \mathcal{R}_T \end{cases} \Rightarrow u_{orn} \neq \emptyset .$$

DECOMPOSIZIONE DI RAGGIUNGIBILITA'

Supponiamo che il sistema non sia completamente raggiungibile e $\text{Rank}\,\mathcal{R} = \text{Rank}\left[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \dots \,\vdots\, A^{n-1}B\right] = r < n$

Sia T_r una matrice $n \times r$, le cui colonne siano una base del sottospazio $X^R = \text{Im}\,\mathcal{R}$.

r : indice di raggiungibilità.

$$T = [\underbrace{T_r}_{n\times r} \,\vdots\, \underbrace{T_{\bar r}}_{n\times(n-r)}] \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} U_r \\ U_{\bar r}\end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, r\times n \\ \}\,(n-r)\times n\end{matrix} \quad : U_{\bar r} T_r = \emptyset$$

Faccio una trasformazione di similitudine.

$\bar{x}(k) = T^{-1}x(k)$

$\bar{x}(k+1) = T^{-1}x(k+1) = T^{-1}\left\{Ax(k) + Bu(k)\right\}$

$= T^{-1}Ax(k) + T^{-1}Bu(k) = T^{-1}AT\bar{x}(k) + T^{-1}Bu(k)$

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} U_r \\ U_{\bar r}\end{bmatrix} A \left[T_r \,\vdots\, T_{\bar r}\right] = \begin{bmatrix} U_r A T_r & U_r A T_{\bar r} \\ U_{\bar r} A T_r & U_{\bar r} A T_{\bar r}\end{bmatrix}$$

Per Caley-Hamilton, $AT_r \in \text{Im}\,\mathcal{R} \Rightarrow U_{\bar r}AT_r = \emptyset$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_r & A_{r\bar r} \\ \emptyset & A_{\bar r}\end{bmatrix} \qquad \bar{B} = \begin{bmatrix} U_r B \\ U_{\bar r} B\end{bmatrix} \underset{\uparrow}{=} \begin{bmatrix} B_r \\ \emptyset\end{bmatrix}$$

$B \in \text{Im}\,\mathcal{R},\ U_{\bar r}B = \emptyset.$

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_r(k) \\ x_{\bar r}(k)\end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, r \\ \}\, n-r\end{matrix}$$

$$\begin{cases} x_r(k+1) = A_r x_r(k) + A_{r\bar r} x_{\bar r}(k) + B_r u(k) \\ x_{\bar r}(k+1) = A_{\bar r} x_{\bar r}(k). \end{cases}$$

$y(k) = Cx(k) + Du(k) = CT\bar{x}(k) + Du(k)$

$\bar{A} = T^{-1}AT$

$\bar{B} = T^{-1}B$

$\bar{C} = CT$

$\bar{D} = D$

$\Rightarrow$ I poli di $G(z)$ sono gli autovalori raggiungibili, quelli non raggiungibili si cancellano.

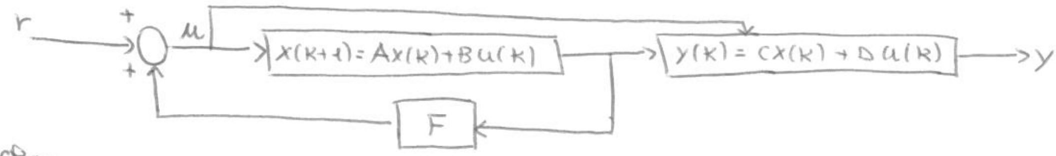
CONTROLLO IN RETROAZIONE DELLO STATO

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

Supponendo di conoscere lo stato $x(k)$ all'istante k, scegliamo l'ingresso:

$u(k) = Fx(k) + r(k)$.

dove $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $r(k)$ è un opportuno segnale esterno di riferimento.



Schema di controllo ad anello chiuso:

$x(k+1) = Ax(k) + B[Fx(k) + r(k)]$

$x(k+1) = Ax(k) + BFx(k) + Br(k)$

$x(k+1) = (A+BF)x(k) + Br(k)$.

$$\underbrace{A}_{n\times n} + \underbrace{B}_{n\times m} \cdot \underbrace{F}_{m\times n}$$

Ris: Se la coppia (A, B) è completamente raggiungibile $\forall$ insieme di autovalori $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n$ dati, $\exists$ una matrice F:

$\det(\lambda I - A - BF) = (\lambda - \bar{\lambda}_1)(\lambda - \bar{\lambda}_2)\dots(\lambda - \bar{\lambda}_n)$.

Se (A, B) non è completamente raggiungibile:

$$\begin{cases} x_r(k+1) = A_r x_r(k) + A_{r\bar{r}} x_{\bar{r}}(k) + B_r u(k) \\ x_{\bar{r}}(k+1) = A_{\bar{r}} x_{\bar{r}}(k) \end{cases}$$

$u(k) = Fx(k) = FT\tilde{x}(k) = [\bar{F}_r \mid \bar{F}_{\bar{r}}] \begin{bmatrix} x_r(k) \\ x_{\bar{r}}(k) \end{bmatrix} = \bar{F}_r x_r(k) + \bar{F}_{\bar{r}} x_{\bar{r}}(k)$

Sostituisco:

$x_r(k+1) = A_r x_r(k) + A_{r\bar{r}} x_{\bar{r}}(k) + B_r(\bar{F}_r x_r(k) + \bar{F}_{\bar{r}} x_{\bar{r}}(k))$

$= (A_r + B_r \bar{F}_r) x_r(k) + (A_{r\bar{r}} + B_r \bar{F}_{\bar{r}}) x_{\bar{r}}(k)$

$x_{\bar{r}}(k+1) = A_{\bar{r}} x_{\bar{r}}(k)$

$$\bar{A} + \bar{B}\bar{F} = \begin{bmatrix} A_r + B_r F_r & A_{r\bar{r}} + B_r F_{\bar{r}} \\ \emptyset & A_{\bar{r}} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Posso modificare gli autovalori della parte raggiungibile.

DEF: Un sistema si dice **STABILIZZABILE** se può essere reso asintoticamente stabile mediante retroazione dello stato.

RIS: Un sistema è stabilizzabile sse gli autovalori non raggiungibili sono asintoticamente stabili.

SISTEMI A TEMPO CONTINUO

Uno stato $\bar{x} \in Im\,[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]$ è raggiungibile $\forall\, T > \emptyset$ se $\exists\, u(t),\ t \in [0, T] : \bar{x} = \int_{\emptyset}^{T} e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, d\tau$.

Tutti i concetti visti valgono anche per il TC.

OSSERVABILITA'

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

DEF: Uno stato $\bar{x}$ si dice **NON OSSERVABILE** in k passi se da $x(\emptyset)=\bar{x}$ si genera l'uscita $y(\emptyset)=y(1)=\ldots=y(k-1)=\emptyset$.

$x_\ell(k) = A^k x(\emptyset)$

$y_\ell(k) = CA^k x(\emptyset)$

$y(\emptyset) = Cx(\emptyset)$

$y(1) = CAx(\emptyset)$

$\vdots$

$y(k-1) = CA^{k-1}x(\emptyset)$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(\emptyset) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(k-1) \end{bmatrix}}_{kp \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix}}_{kp \times m} \underbrace{x(\emptyset)}_{m \times 1}$$

La matrice $\Theta_k = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix}$ si dice **MATRICE DI OSSERVABILITA'** in k passi.

L'insieme degli stati non osservabili in k passi è dato da:

$\chi_k^{no} = \ker \Theta_k$

$\chi_1^{no} \supseteq \chi_2^{no} \supseteq \ldots \supseteq \chi_k^{no} \supseteq \chi_{k+1}^{no} \supseteq \ldots$

Per il teorema di Caley-Hamilton:

$A^m = \alpha_{m-1}A^{m-1} + \alpha_{m-2}A^{m-2} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I$

$\Rightarrow CA^m = \alpha_{m-1}CA^{m-1} + \alpha_{m-2}CA^{m-2} + \ldots + \alpha_1 CA + \alpha_0 C$

$\Rightarrow \chi_m^{no} = \chi_k^{no}, \forall k \geq m$.

$\Theta = \Theta_m = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{m-1} \end{bmatrix}$ si dice **MATRICE DI OSSERVABILITA'** del sistema.

$\chi^{no} = \ker \Theta$ è lo **SPAZIO DEGLI STATI NON OSSERVABILI**

Se il sistema è completamente osservabile, è possibile risolvere allo stato iniziale $x(0)$, a partire dalle prime n uscite $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix}}_{pn \times 1} = \Theta \cdot \underbrace{x(0)}_{n \times 1}$$

Y

Se il sistema non è completamente osservabile, il sistema lineare $Y = \Theta x(0)$ ammette infinite soluzioni del tipo: $x(0) = \bar{x} + x_{no}$ dove $\bar{x}$ è una soluzione particolare di $Y = \Theta \cdot x(0)$ e $x_{no} \in \ker \Theta$.

Nel caso di sistemi con ingresso $u(k)$ (noto):

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$y_{tot}(k) = CA^k x(0) + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-1-i} Bu(i) + Du(k)}_{y_f(k)}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{TOT}(0) - y_f(0) \\ y_{TOT}(1) - y_f(1) \\ \vdots \\ y_{TOT}(n-1) - y_f(n-1) \end{bmatrix}}_{Y} = \begin{bmatrix} Cx(0) \\ CAx(0) \\ \vdots \\ CA^{n-1} x(0) \end{bmatrix}$$

DECOMPOSIZIONE DI OSSERVABILITA'

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$\dim Ker(\Theta) = \dim Ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \sigma > \emptyset$$

Sia $v_1, v_2, \dots, v_\sigma$ una base di $\chi^{no} = Ker\,\Theta$

$$T = [\underbrace{w_1 \,\vdots\, w_2 \,\vdots\, \dots \,\vdots\, w_{n-\sigma}}_{\substack{\text{Completa la base} \\ \text{di } \mathbb{R}^n}} \,\vdots\, \underbrace{v_1 \,\vdots\, v_2 \,\vdots\, \dots \,\vdots\, v_\sigma}_{\text{Base di } \chi^{no}}]$$

$\bar{A} = T^{-1}AT$

$\bar{B} = T^{-1}B$

$\bar{C} = CT$

$\bar{D} = D$

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c:c} A_\sigma & \emptyset \\ \hdashline A_{\sigma\bar{\sigma}} & A_{\bar{\sigma}} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, n-\sigma \\ \}\, \sigma \end{array} \\ \underbrace{\quad\quad}_{n-\sigma} \quad \underbrace{\quad\quad}_{\sigma} \end{array} \qquad \bar{B} = \left[\begin{array}{c} B_\sigma \\ \hdashline B_{\bar{\sigma}} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, n-\sigma \\ \}\, \sigma \end{array}$$

$$\bar{C} = [\underbrace{C_\sigma}_{n-\sigma} \,\vdots\, \underbrace{\emptyset}_{\sigma}] \}\, p$$

$$\bar{x}(k) = T^{-1}x(k) = \begin{bmatrix} \bar{x}_\sigma(k) \\ \bar{x}_{\bar{\sigma}}(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_\sigma(k+1) = A_\sigma \bar{x}_\sigma(k) + B_\sigma u(k) \\ \bar{x}_{\bar{\sigma}}(k+1) = A_{\sigma\bar{\sigma}} \bar{x}_\sigma(k) + A_{\bar{\sigma}} \bar{x}_{\bar{\sigma}}(k) + B_{\bar{\sigma}} u(k) \\ y(k) = C_\sigma \bar{x}_\sigma(k) + Du(k) \end{cases}$$

Funzione di Trasferimento:

$$G(z) = \bar{C}(zI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D} = [C_o \;\emptyset] \begin{bmatrix} zI - A_o & \emptyset \\ -A_{\sigma\bar{\sigma}} & zI - A_{\bar{\sigma}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_\sigma \\ B_{\bar{\sigma}} \end{bmatrix} + D$$

$$= [C_o \;\emptyset] \begin{bmatrix} (zI - A_o)^{-1} & \emptyset \\ * & (zI - A_{\bar{\sigma}})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_o \\ B_{\bar{o}} \end{bmatrix} + D = [C_o (zI - A)^{-1} \,\vdots\, \emptyset] \begin{bmatrix} B_o \\ B_{\bar{o}} \end{bmatrix} + D$$

$$= C_o (zI - A_o)^{-1} B_o + D$$

RIS: I poli di $G(z)$ sono gli autovalori osservabili della matrice A.

DUALITÀ

Siano A, B, C, D le matrice del sistema Σ.

Il sistema Duale è definito dalle matrici A^T, B^T, C^T, D^T.

$\Rightarrow \Sigma$ competamente raggiungibile sse Σ_d competamente osservabile.

$\Rightarrow \Sigma$ competamente osservabile sse Σ_d competamente raggiungibile.

$\Sigma \Rightarrow Q = [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]$

$\Sigma_d \Rightarrow Q_d = [C^T \mid A^T C^T \mid \dots \mid (A^T)^{n-1} C^T] = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^T$

OSSERVATORE ASINTOTICO DELLO STATO

Determinare ad ogni istante k, una stima $\hat{x}(k)$ di $x(k)$, basata sulle uscite $y(\emptyset), y(1), \dots, y(k-1), y(k)$: $\lim_{k \to +\infty} \|x(k) - \hat{x}(k)\| = \emptyset$

$\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$: Errore di stima.

① ANELLO APERTO

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

$\Rightarrow \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k)$

$\tilde{x}(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) = Ax(k) + \cancel{Bu(k)} - A\hat{x}(k) - \cancel{Bu(k)} = A(x(k) - \hat{x}(k)) = A\tilde{x}(k)$

$\tilde{x}(k+1) = A\tilde{x}(k) \qquad , \tilde{x}(\emptyset) = x(\emptyset) - \hat{x}(\emptyset).$

È un osservatore asintotico sse il sistema è asintoticamente stabile.

$\Rightarrow$ Metodo concettualmente sbagliato perché non usa le uscite.

② ANELLO CHIUSO

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(\underbrace{y(k) - C\hat{x}(k)}_{\text{Errore di stima dell'uscita.}})$$

$$\tilde{x}(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) = Ax(k) + B\cancel{u(k)} - A\hat{x}(k) - B\cancel{u(k)} - L(y(k) - C\hat{x}(k))$$

$$= Ax(k) - A\hat{x}(k) - L(y(k) - C\hat{x}(k))$$

$$= A(x(k) - \hat{x}(k)) - L(Cx(k) - C\hat{x}(k)) = (A - LC)(x(k) - \hat{x}(k)) = (A - LC)\tilde{x}(k)$$

$$\Rightarrow \tilde{x}(k+1) = (\underset{n\times n}{A} - \underset{n\times p}{L}\underset{p\times n}{C})\tilde{x}(k)$$

RIS: Se la coppia (A, C) è completamente osservabile, $\forall$ insieme di autovalori $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, $\exists$ una matrice L:
$\det(\lambda I - A + LC) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n)$.

Se il sistema non è completamente osservabile:

$$\begin{cases} x_o(k+1) = A_o x_o(k) + B_o u(k) \\ x_{\bar{o}}(k+1) = A_{o\bar{o}} x_o(k) + A_{\bar{o}} x_{\bar{o}}(k) + B_{\bar{o}} u(k) \\ y(k) = C_o x_o(k) \end{cases}$$

$$L = \begin{bmatrix} L_o \\ L_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, n-\sigma \\ \}\, \sigma \end{matrix} \qquad \bar{A} - \bar{L}\bar{C} = \begin{bmatrix} A_o & \emptyset \\ A_{o\bar{o}} & A_{\bar{o}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_o \\ L_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_o & \emptyset \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_o - L_o C_o & \emptyset \\ A_{o\bar{o}} - L_{\bar{o}} C_o & A_{\bar{o}} \end{bmatrix}$$

L non è in grado di modificare gli autovalori della parte non osservabile.

RIS: Se la coppia (A, C) non è completamente osservabile, è possibile costruire un osservatore asintotico sse gli autovalori non osservabili sono asintoticamente stabili. In tal caso il sistema si dice **RIVELABILE**.

N.B: La coppia (A, B) è stabilizzabile se la coppia (A^T, B^T) è rivelabile.
La coppia (A, C) è rivelabile se la coppia (A^T, C^T) è stabilizzabile.

CASO TEMPO CONTINUO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Tutti i concetti visti valgono analogamente a parte il concetto di osservabilità in K passi.

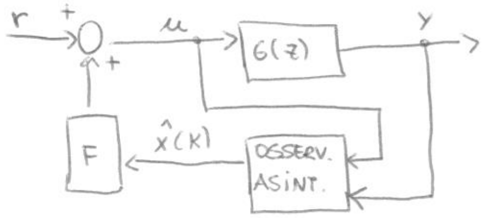
Uno stato $\bar{x}$ è non osservabile se:

$$\bar{x} \in Ker\,\theta = Ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

L'osservatore asintotico sarà:

$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t))$ e il sistema è rivelabile se gli autovalori non osservabili di A hanno parte reale < 0.

COMPENSATORE DINAMICO



Retroazione dello stato fornito dall'osservatore asintotico.

Sistema: $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$

Osservatore: $\left\{ \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - C\hat{x}(k)) \right.$

Retrazione: $\left\{ u(k) = r(k) + F\hat{x}(k) \right.$

=> Determinare una Rappr. I/S/O.

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \tilde{x}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k) - \hat{x}(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \xi(k+1) = \bar{A}\,\xi(k) + \bar{B}\,r(k) \\ y(k) = \bar{C}\,\xi(k) \end{cases}$$

$$\xi(k+1) = \begin{bmatrix} x(k+1) \\ \tilde{x}(k+1) \end{bmatrix} \quad , \tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$$

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) = Ax(k) + Br(k) + BF\hat{x}(k) = Ax(k) + Br(k) + BF(x(k) - \tilde{x}(k))$
$= (A+BF)x(k) - BF\tilde{x}(k) + Br(k)$

$\tilde{x}(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) = Ax(k) + B\cancel{u}(k) - A\hat{x}(k) - B\cancel{u}(k) + LC\hat{x}(k) - Ly(k)$

$= Ax(k) - A\hat{x}(k) - LCx(k) + LC\hat{x}(k) = A\tilde{x}(k) - LC\tilde{x}(k) = (A-LC)\tilde{x}(k).$

$y(k) = Cx(k) = [C \;\; \emptyset] \begin{bmatrix} x(k) \\ \tilde{x}(k) \end{bmatrix}$

$$\dot{\mathcal{E}}(k+1) = \begin{bmatrix} A+BF & -BF \\ \emptyset & A-LC \end{bmatrix} \dot{\mathcal{E}}(k) + \begin{bmatrix} B \\ \emptyset \end{bmatrix} r(k)$$

$y(k) = [C \;\; \emptyset]\, \dot{\mathcal{E}}(k)$

=> Principio di Separazione: Dinamica dell'osservatore separata da quella della retroazione.

Sistema già in decomposizione di raggiungibilità: autovalori di A-LC sono non raggiungibili.

$W(z): r(k) \to y(k)$

$W(z) = C(zI - (A+BF))^{-1}B$

Poli W(z) coincidono con gli autovalori di A+BF.

La dinamica dell'osservatore non entra nella funzione di Trasferimento.

$$\dot{\mathcal{E}}_\ell(k) = \begin{bmatrix} A+BF & -BF \\ \emptyset & A-LC \end{bmatrix}^k \dot{\mathcal{E}}_\ell(\emptyset)$$

$x(k+1) = (A+BF)x(k) - BF\tilde{x}(k)$

$\tilde{x}(k+1) = (A-LC)\tilde{x}(k)$

Si tende a fare in modo che i modi di A-LC convergono a $\emptyset$ più velocemente di quelli di A+BF.