

SISTEMI DI CONTROLLO

[Fotocopie di Appunti]

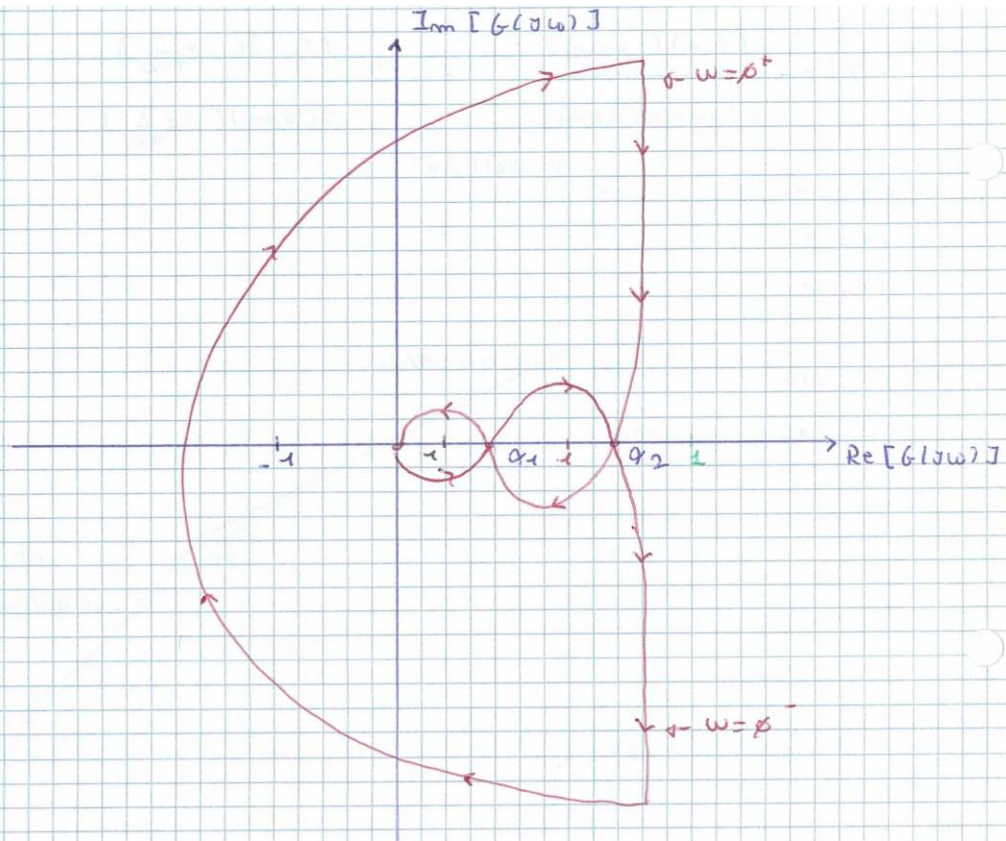
A CURA DI ALESSANDRO PAGHI

PROFESSORE: Marco Casini (<http://www3.diism.unisi.it/people/person.php?id=158&aa=2015>)

LINK AL CORSO ANNO 2015/2016:

<http://www3.diism.unisi.it/FAC/index.php?bodyinc=didattica/inc.insegnamento.php&id=55078&aa=2015>

FREQUENTAZIONE: Consigliata.



$$K > 0$$

Ho um polo com $\text{Re} > 0$

1 zero no + 1 Polo $\text{Re} > 0$ = 2 Pol instáveis

$$K < 0:$$

$$|K| < \frac{1}{\alpha_2}$$

instável 1 Pol $\rightarrow K > -\frac{1}{\alpha_2}$

$$\frac{1}{\alpha_2} < |K| < \frac{1}{\alpha_1}$$

instável 3 Pol $\rightarrow -\frac{1}{\alpha_1} < K < -\frac{1}{\alpha_2}$

$$|K| > \frac{1}{\alpha_1}$$

instável 1 pol $\rightarrow K < -\frac{1}{\alpha_2}$

$$\alpha_2 \approx 10$$

$$\alpha_1 \approx 0,1$$

04/11/2015

Lugaro degli Radici



K: guadagno

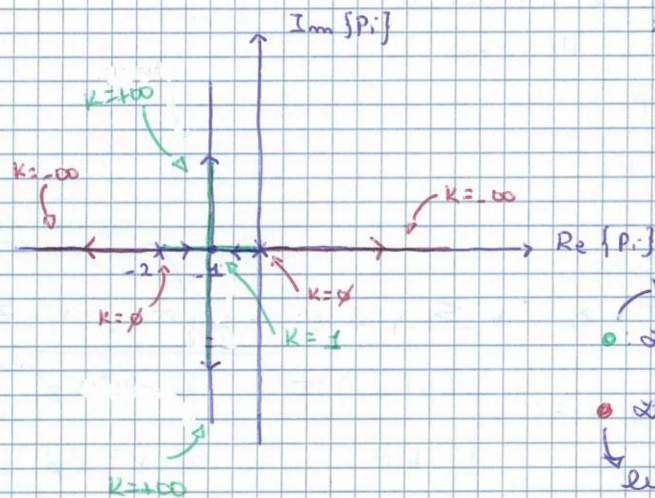
Stabilità ad AC al variare di K.

Es: $G(s) = \frac{1}{s(s+2)} \Rightarrow L(s) = K \cdot G(s) = \frac{K}{s(s+2)}$
 ↑
 funzione in catena diretta

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)+K} = \frac{K^2}{s^2+2s+K}$$

$$p_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4K}}{2} = -1 \pm \sqrt{1-K}$$

Per $K = 0$, $p_{1,2} = \begin{matrix} 0 \\ -2 \end{matrix}$ (Poli funzione AA)



x: poli AA

→ Lugaro diretto
 • Lugaro degli radici: $K > 0$
 • Lugaro degli radici: $K < 0$
 ↓
 Lugaro inverso

$0 < K < 1 \Rightarrow K \rightarrow 1$ i poli si avvicinano a -1 .

$$K = 1, p_{1,2} = -1$$

-1: Punto di ampiezione

$$G(s) = K_G \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}, \quad n > m \text{ (strettamente propria)}$$

$$L(s) = K \cdot G(s) = \underbrace{K \cdot K_G}_{K^*} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

$$L(s, K^*) = K^* \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}, \quad \bar{G} = \frac{L}{1+L}$$

$$1 + L(s, K^*) = 1 + K^* \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = 0$$

$$\Rightarrow \prod_{j=1}^n (s - p_j) = -K^* \cdot \prod_{i=1}^m (s - z_i)$$

Condizione di modulo:

$$|\prod_{j=1}^n (s - p_j)| = |-K^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)|$$

$$\rightarrow |\prod_{j=1}^n (s - p_j)| = |K^*| \cdot |\prod_{i=1}^m (s - z_i)|$$

$$\rightarrow |K^*| = \frac{|\prod_{j=1}^n (s - p_j)|}{|\prod_{i=1}^m (s - z_i)|}$$

Condizione di Fase:

$$\sum \angle s - p_j = \pi + \angle K^* + \sum \angle s - z_i + 2h\pi, \quad h \in \mathbb{Z}$$

$$\sum \angle s - p_j - \sum \angle s - z_i = \begin{cases} (2h+1)\pi, & \text{se } K^* > 0 \\ 2h\pi, & \text{se } K^* < 0 \end{cases}$$

norma bene tutti i multipli di π .

LUGO DIRETTO
LUGO COMPLEMENTARE O INVERSO

lugaro diretto: $K^* > 0$ e sottrazione neg.
 $K^* < 0$ e sottrazione pos.

N.B.: $K^* \neq K$ in generale.

Condizione di fase: cosa è disegno geometrico

Condizione di modulo: indica il valore di K .

Regole per il Tracciamento LdR

- LdR possiede n rami ($n = \# \text{poli in AA}$)

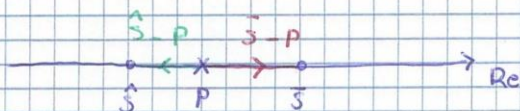
$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad \bar{G}(s) = \frac{KN(s)}{KN(s) + D(s)} \quad n > m$$

↳ grado n

- Tutti i rami partono dai poli in AA ($K^* = \infty$)
- Per $|K^*| \rightarrow \infty$, m rami tendono agli zeri, mentre $n-m$ tendono a ∞ .
- Un punto dell'asse reale appartiene al luogo diretto se ha un numero dispari di angolarità alla sua destra, altrimenti appartiene al luogo complementare.

singularità: poli e/o zeri

DIR:



$$\angle \bar{S} - p = \pi$$

$$\angle \hat{S} - p = 0$$

$$\Rightarrow \sum \angle \bar{S} - p_j = h_p^d \cdot \pi - h_z^d \cdot \pi = (2h+1)\pi$$

luogo diretto

$$\rightarrow h_p^d - h_z^d = 2h+1$$

$$\rightarrow h_p^d + h_z^d = \text{dispari!}$$

- Gli $(n-m)$ rami che tendono a ∞ per $|K^*| \rightarrow \infty$ seguono degli asintoti centrati in:

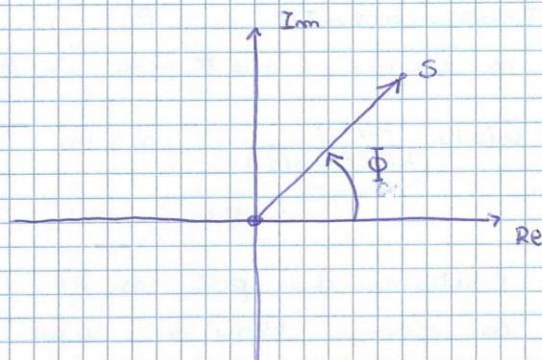
$$S_0 = \frac{\sum_{j=1}^m p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}$$

gli asintoti formano una stella regolare.

Fase asintoti:

$$\begin{cases} \frac{(2h+1)\pi}{n-m} & \text{L.D.} & h \in \mathbb{Z} \\ \frac{2h\pi}{n-m} & \text{L.C.} & h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dih:



Prendendo un s molto grande in modo che convergano tutti i poli e zeri in (ϕ, ϕ)

$$\chi_{s, p_j} = \chi_{s, z_i} = \phi(p_i)$$

$$m\phi - m\phi = \begin{cases} (2h+1)\pi & \text{L.D.} \\ 2h\pi & \text{L.C.} \end{cases}$$

$$\phi = \begin{cases} \frac{(2h+1)\pi}{n-m} & \text{L.D.} \\ \frac{2h\pi}{n-m} & \text{L.C.} \end{cases}$$

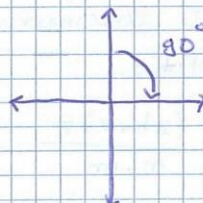
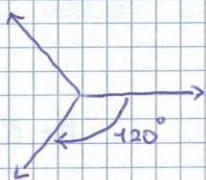
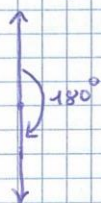
- LdR è sempre simmetrico rispetto all'asse Re.

Dih: Esistono solo radici reali e complesse coniugate.

- Le intersezioni tra i rami avvengono sempre a stella regolare e tali punti devono soddisfare le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} F(s, k^*) = 1 + L(s, k^*) = 0 & \text{affinché sia un punto di LdR} \\ \frac{\partial F}{\partial s} = 0 & \text{affinché sia un punto di emissione o un punto di immersione} \end{cases}$$

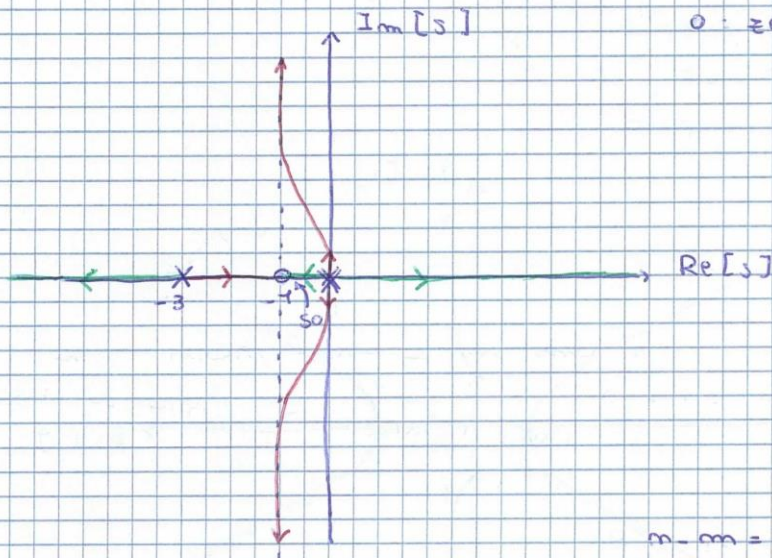
Stelle regolari:



$$L(s) = K^* \frac{(s+1)}{s^2(s+3)}$$

x : poli

o : zeri



$$n - m = 2$$

• lungo diretto

$$s_0 = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m} = \frac{-3 + 0 + 0 - (-1)}{2 - 1} = -1$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{(2h+1)\pi}{n-m} = \frac{(2h+1)\pi}{2} = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} & LD \\ \frac{2h\pi}{n-m} = \frac{2h\pi}{2} = h\pi = \{ \varnothing, \pi \} & LC \end{cases}$$

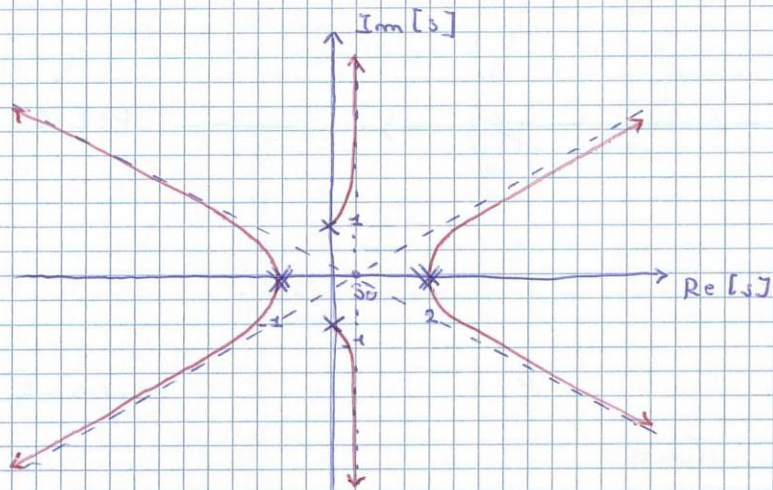
I poli in $(\varnothing, \varnothing)$ non possono andare lungo asse Re, violerei regole, nemmeno in maniera debole perché deve essere una stessa regola.
 $\Rightarrow$ unico modo è questo proposto

$$L(s) = K^* \cdot \frac{1}{(s-2)^2 (s^2+1) (s+1)^2}$$

Polo in $+2$ doppio

Polo in $+j$ e $-j$

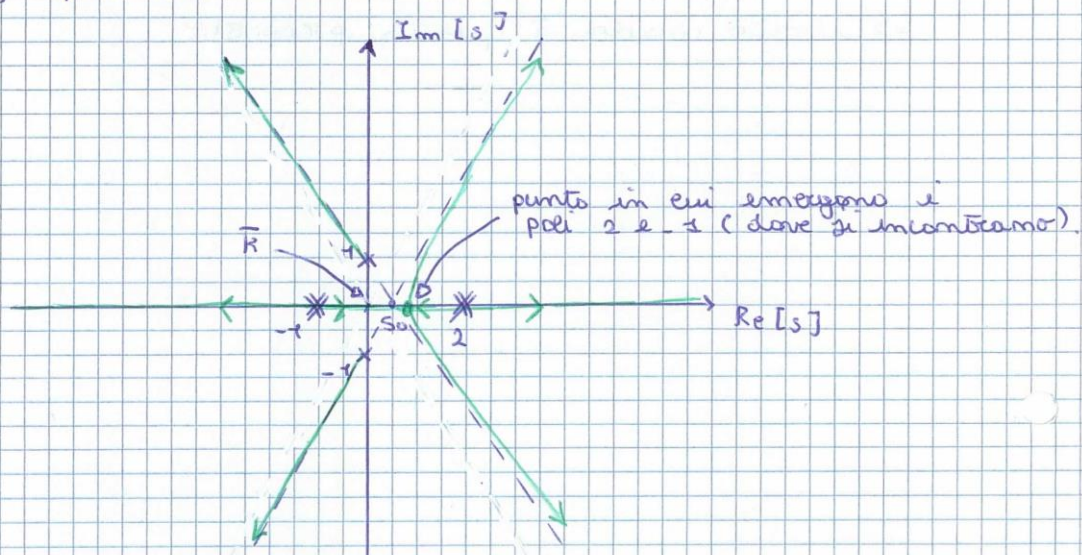
Polo in -1 doppio



$$\sigma_0 = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m} = \frac{+2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} \frac{(2h+1)\pi}{n-m} = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\} \\ \frac{2h\pi}{n-m} = \left\{ 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\} \end{cases}$$

$K^* > 0$, 4 Pd INST.



$$K^* < \phi$$

$$|K^*| < \bar{K} \rightarrow 2 \text{ Pd INST.}$$

$$|K^*| > \bar{K} \rightarrow 2 \text{ Pd INST.}$$

Condizione di modulo

$$|K^*| = \frac{\prod |s - p_j|}{\prod |s - z_i|} = \frac{\prod |s - p_j|}{\prod |s - z_i|} = \frac{\prod |p_j|}{\prod |z_i|} = \frac{(2)(2)(-1)(-1)(-1)(-1)}{1} = 4$$

↑
non abbiamo zeri

↑
siamo in (ϕ, ϕ)

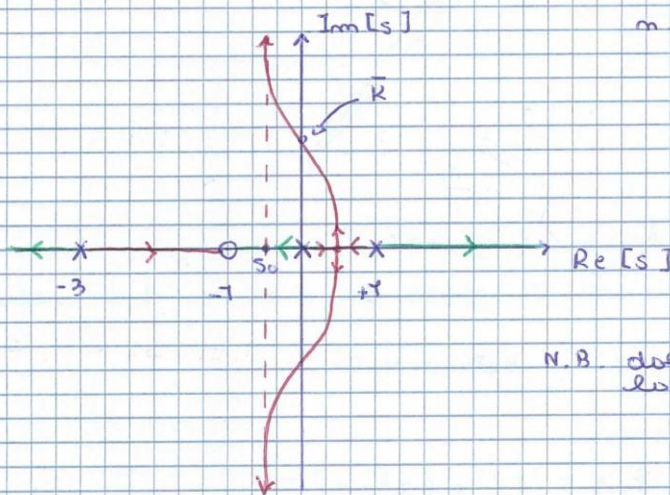
$$\Rightarrow \bar{K} = 4$$

$$L(s) = K^* \frac{(s+1)}{s(s-1)(s+3)}$$

polo in ϕ
polo in 1
polo in -3

zero in -1

$n - m = 2$ asintoti



N.B. due poli verso lo zero!

$$S_0 = \frac{1 \cdot 3 - (-1)}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Nyquist: } \bar{K} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\begin{cases} \left\{ \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right\} & \text{LD} \\ \left\{ \phi, \pi \right\} & \text{LC} \end{cases}$$

$$K^* > \phi$$

$$K^* < \phi \text{ INST. } \neq \text{Pd}$$

$$K^* < \bar{K} \text{ INST. } 2 \text{ Pd}$$

$$K^* > \bar{K} \text{ STAB.}$$

$$G(s) = \frac{s}{(s+2)^2(s^2+1)}$$



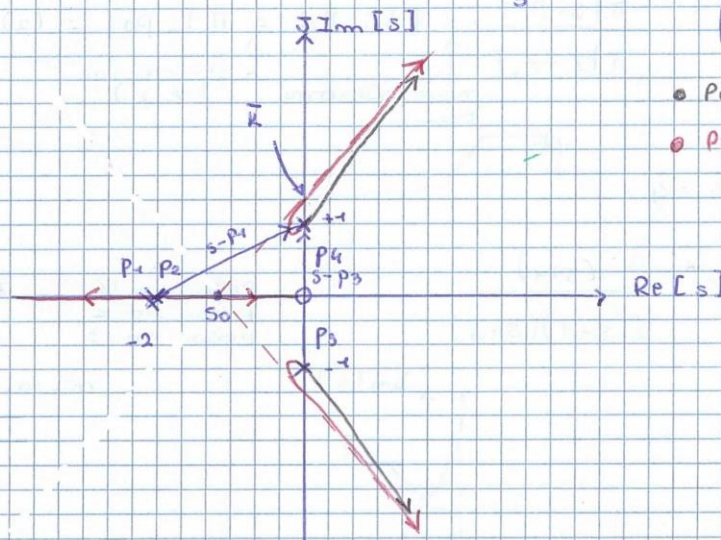
Stabilità per $K > 0$?

$$\begin{aligned} z &= \emptyset \\ p &= -2 \text{ doppio} \\ p &= +j, -j \end{aligned}$$

$$m - m = 3$$

$$s_0 = -\frac{4}{3}$$

$$\angle_{ASINT} = \begin{cases} \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\} \\ \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \emptyset \right\} \end{cases}$$



- POSSIBILITA' 2
- POSSIBILITA' 1

Quale delle possibilità è giusta?

Bisogna guardare la fase di uscita del polo

$$\frac{\pi}{2} < \varphi < -\frac{\pi}{2} \quad \bullet \quad \text{settimanti} \quad \bullet$$

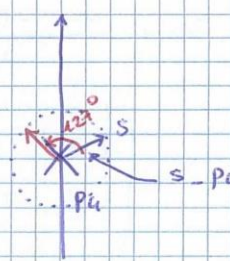
Condizione di fase:

$$\sum \angle s - p_i - \sum \angle s - z_i = (2h+1)\pi$$

$$\angle s - p_1 + \angle s - p_2 + \angle s - p_3 + \angle s - p_4 - \angle s - z_1 = \pi$$

$$\text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + \angle s - p_4 - \frac{\pi}{2} = \pi$$

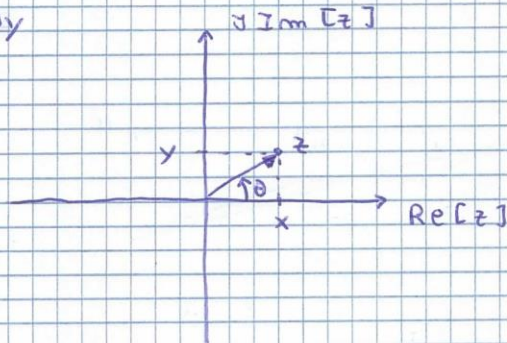
$$\angle s - p_4 = \pi - 2 \text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 2,21 \approx 127^\circ$$



La curva giusta è

Fase di un numero complesso:

$$z = x + jy$$



$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = 1 + j \quad \theta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$z = -1 - j \quad \theta = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) + 180^\circ = 225^\circ$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right) & \text{se } \text{Re} > 0 \\ \arctan\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right) + \pi & \text{se } \text{Re} < 0 \end{cases}$$

in MATLAB: `atan2(y, x)` da qui quassa è parte Im e parte Re.



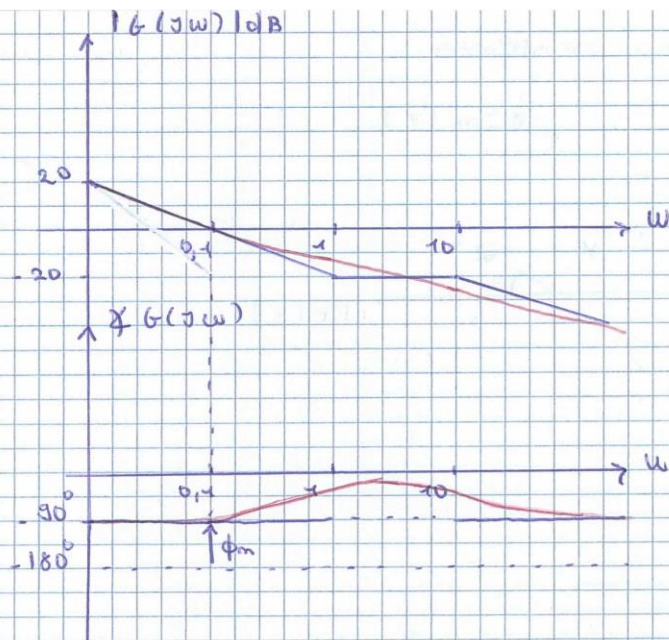
$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+10)} \quad \frac{1}{10} \cdot \frac{1+s}{s(1+\frac{s}{10})}$$

$$K_b = \frac{1}{10} = -20 \text{ dB}$$

$$p = \emptyset$$

$$p = -10$$

$$z = -1$$



Routh

$$P(s) = s^2 + 10s + Ks + K$$

2	1	K
1	K+10	
0	K	

$$\Rightarrow K > 0$$

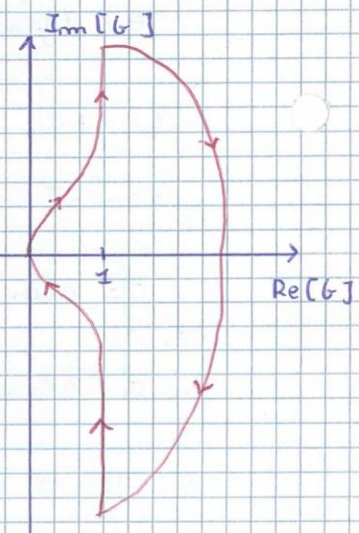
Teste di Bode : $\phi_m \approx 90^\circ$

Per $K=1$, $G(s)$ stabile

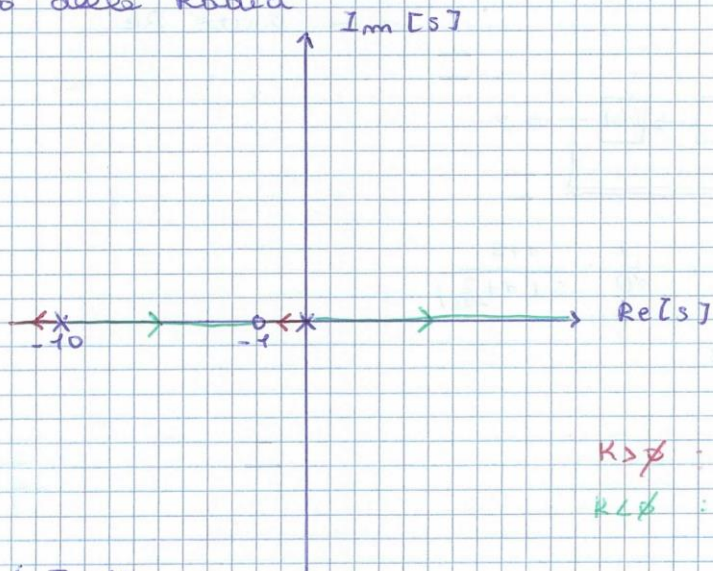
Per $K > 0$, $G(s)$ stabile

Nyquist : $K > 0$ STABILE

$K < 0$ INST. 1 Pd



Luogo delle Radici



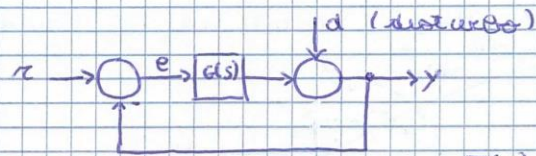
$K > 0$: SIST. STAB.

$K < 0$: SIST. INST. 1 Pd

$$ASIN: \begin{cases} \pi & LD \\ 0 & LC \end{cases}$$

03/11/2015

Prestazioni dei sistemi in retroazione



NB: disturbo dopo uscita

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

Sensibilità e sensibilità complementare

Ricorda che $G(s)$ è un moltiplicatore del sistema, non è il sistema!

? $T(s)$ quanto è sensibile a variazioni di $G(s)$

$$\frac{\frac{\partial T}{\partial G}}{\frac{T}{G}} = \frac{\frac{1+G-G}{(1+G)^2}}{\frac{1}{1+G}} = \frac{1}{1+G(s)} := S(s) \quad \text{funzione di sensibilità}$$

$S(s)$ deve essere la più piccola possibile

$\Rightarrow$ minimo errore commesso

$S(s)$ è anche f.d.t. fra d e y . ($x=\phi$)

$\Rightarrow$ mi dice quanto il disturbo influenza l'uscita

$S(s)$ è anche f.d.t. fra x e e

$T(s)$ è f.d.t. tra x e y e si chiama funzione di sensibilità complementare.

$$T(s) + S(s) = 1 \Rightarrow T(s) = 1 - S(s)$$

$T(s)$ dovrebbe essere ≈ 1

$\Rightarrow$ Voglio 20° in una stanza.

Ruota la manopola e istantaneamente accade.

$$\begin{cases} T(j\omega) \approx 1 & \forall \omega \\ S(j\omega) \approx 0 & \forall \omega \end{cases} \quad \text{f. questo non può accadere!}$$

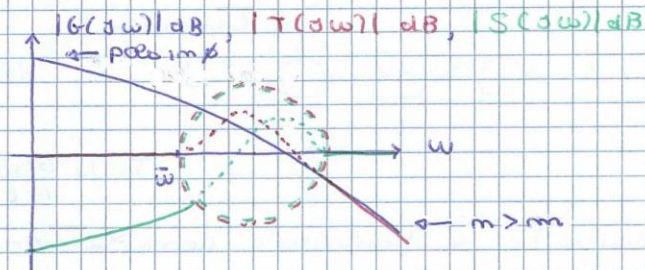
$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}, \quad S(s) = \frac{1}{1+G(s)}$$

Supponiamo $G(s)$ esattamente propria ($m > n$)

Supponiamo che $G(s)$ abbia almeno un polo in ϕ

$|T(j\omega)|$?

$$|T(j\omega)| = \frac{|G(j\omega)|}{|1+G(j\omega)|}$$



$$|T(j\omega)| = \begin{cases} 0 \text{ dB} & \text{se } |G(j\omega)| \gg 1 \\ |G(j\omega)| & \text{se } |G(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1+G(j\omega)|} = \begin{cases} -|G(j\omega)| \text{ dB} & \text{se } |G(j\omega)| \gg 1 \\ 0 \text{ dB} & \text{se } |G(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$

anello chiuso risente poco di errori commessi su $G(s)$ a ω piccolo.

Inserendo come ingresso una sinusoida ottengo una buona uscita solo quando $|T(j\omega)| \text{ dB} = 0$, per $\omega < \bar{\omega}$.
 $\Rightarrow$ la sinusoida viene riprodotta fedelmente.

Un disturbo a ω piccolo il sistema non ne risente.

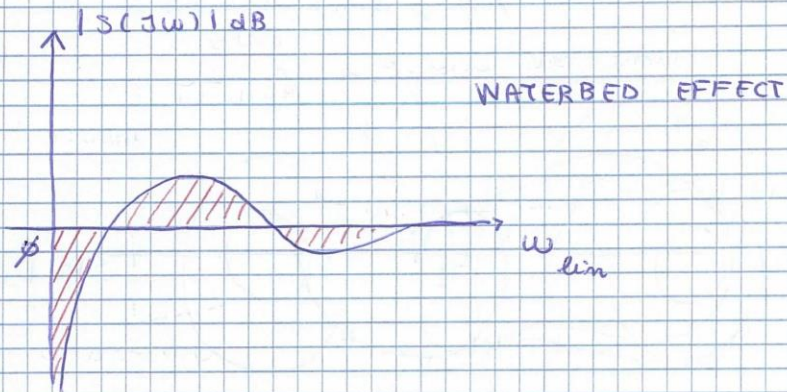
Formula Integrata di Bode.

- P_k i poli instabili di $G(s)$ ($\text{Re}[P_k] > 0$);
- il grado relativo ($m - n$) $\neq 2$;

Posso quindi dire:

$$\int_{\phi}^{+\infty} \ln |S(j\omega)| d\omega = \pi \sum \text{Re}[P_k]$$

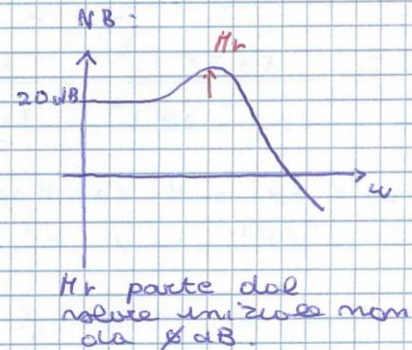
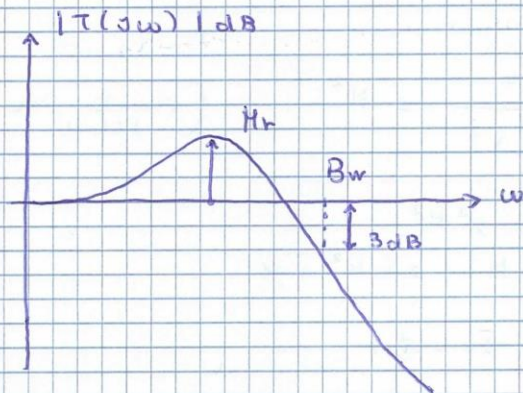
Diagrammando $|S(j\omega)|$ dB in scala lineare



L'area rossa deve essere in totale ϕ .

Però studiando in basso frequenza deve cercare di ridurre il più possibile l'area.

Picco di Risonanza (M_r) e Banda Passante (B_w)



M_r parte dal valore iniziale non da 0 dB.

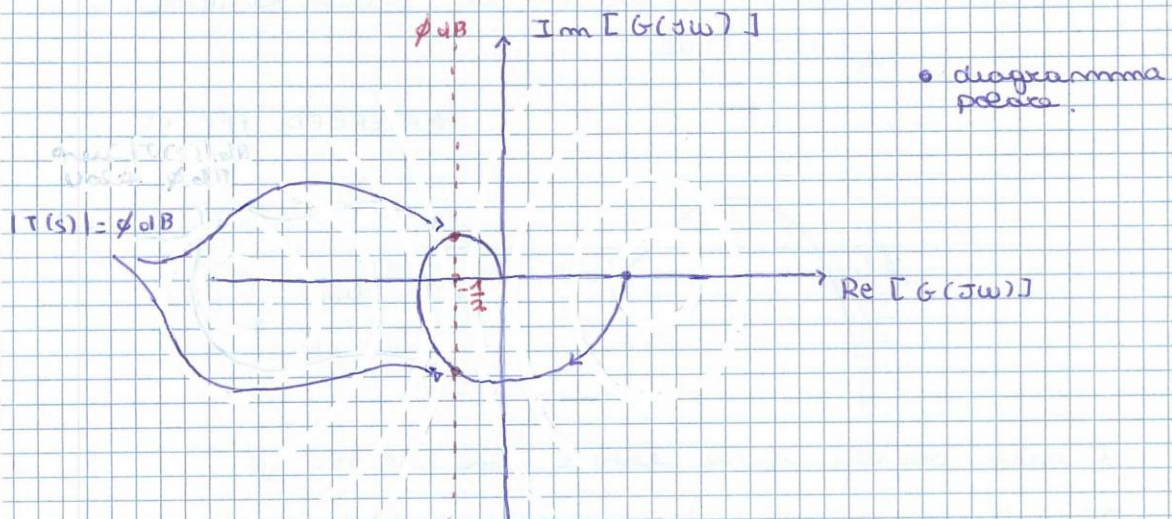
$$-3 \text{ dB} \approx 0,707$$

B_w : frequenza per cui $|T(j\omega)|$ dB è ± 3 dB al di sotto del valore di $|T(j\omega)|$ dB in bassa frequenza.

M_r deve essere il più piccolo possibile.

B_w deve essere il più grande possibile.

Cercare M



$$G(s) = X(s) + jY(s)$$

$$G(j\omega) = X(j\omega) + jY(j\omega)$$

Omediamo $j\omega$

$$|T|^2 = \frac{|X + jY|^2}{|1 + X + jY|^2} = \frac{X^2 + Y^2}{(1+X)^2 + Y^2} = M^2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{punti per cui} \\ |T| = M \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow X^2 + Y^2 = M^2 + 2XM^2 + X^2M^2 + Y^2M^2$$

$$X^2(M^2 - 1) + Y^2(M^2 - 1) + M^2 + 2XM^2 = 0$$

$$M = 1 \Rightarrow 1 + 2X = 0 \rightarrow X = -\frac{1}{2}$$

$$M \neq 1 \Rightarrow X^2 + Y^2 + \frac{M^2}{M^2 - 1} + \frac{2XM^2}{M^2 - 1} = 0$$

$$X^2 + Y^2 + \frac{M^2}{M^2 - 1} + \frac{2XM^2}{M^2 - 1} + \frac{M^4}{(M^2 - 1)^2} - \frac{M^4}{(M^2 - 1)^2} = 0$$

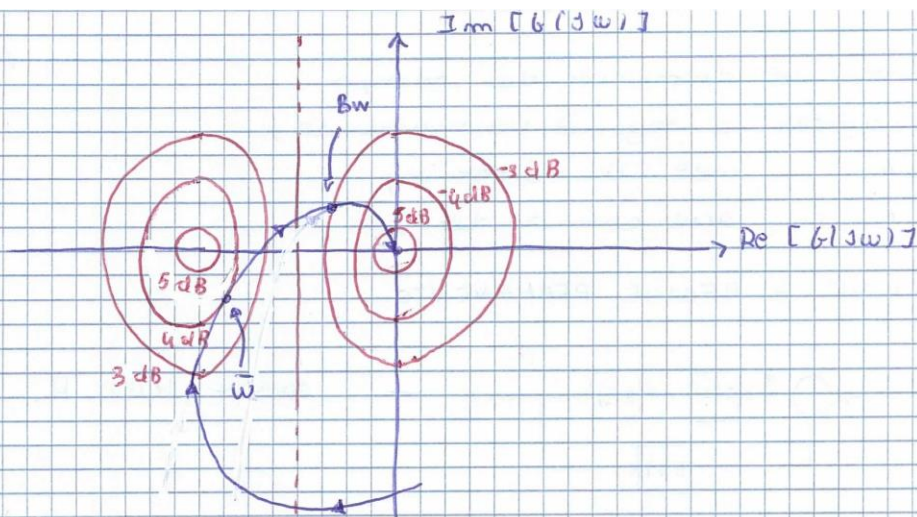
$$\left(X + \frac{M^2}{1 - M^2} \right)^2 + Y^2 = \frac{M^4}{(M^2 - 1)^2} - \frac{M^2}{M^2 - 1} = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2}$$

$$\frac{M^4 - M^4 + M^2}{(M^2 - 1)^2} = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2}$$

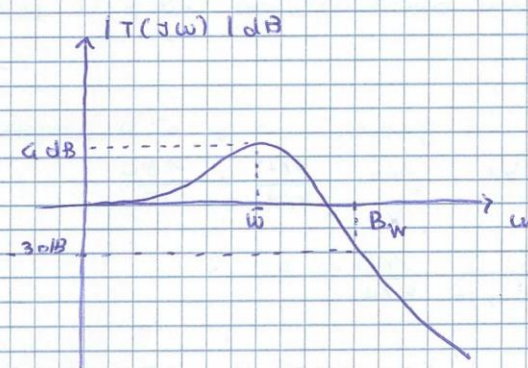
Espressione circonferenza: $(X - x_c)^2 + (Y - y_c)^2 = r^2$

$$\text{Centro: } \left[\frac{M^2}{1 - M^2}, 0 \right] \quad \text{Raggio: } \frac{M}{|M^2 - 1|}$$

Quindi la modulo è costante lungo queste circonferenze.



Max modulo 4 dB



Michael Ra creato un metodo di analisi simile.

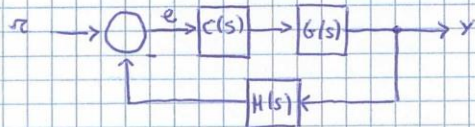
$$S(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{G^{-1}(s)}{G^{-1}(s)+1} \quad \text{simile a} \quad T(s) = \frac{G(s)}{G(s)+1}$$

11/11/2015

Specifiche nel dominio del tempo

- specifica a regime permanente;
- " nel transitorio;
- " sul comando;

SPECIFICHE A REGIME PERMANENTE



spesso $H(s) = H$.

• Rapporto ingresso / uscita.

→ l'uscita deve somigliare il più possibile all'ingresso

Se x è espresso in gradi e y è espresso in radianti

$$y(t) \neq x(t) \quad \forall t \quad \text{ma} \quad \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{180}{\pi}$$

In generale: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = K_d$

$\Rightarrow H = \frac{1}{K_d}$: converte la grandezza di uscita nel formato di quella di riferimento.

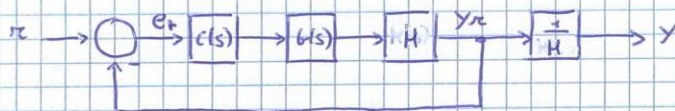
$$\frac{y}{R} = 10 \Rightarrow y = 10R \Rightarrow H = \frac{1}{10}$$

Immette quando $y = 10R \Rightarrow e = 0$ (e: errore)

nel caso in cui H dipende da s :

$$H(s) \Big|_{s=p} = \frac{1}{K_d}$$

Se mi voglio ricondurre alla retroazione unitaria: *



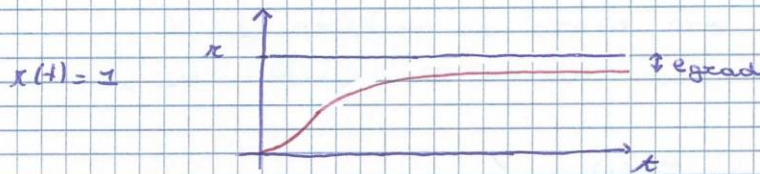
$$y(t) = \frac{y_r(t)}{H}$$

y_r : uscita ridotta

e_r : R.e. unita di misura di r .

- Errori di inseguimento a segnali tipici
(gradino, rampa lineare, rampa parabolica)

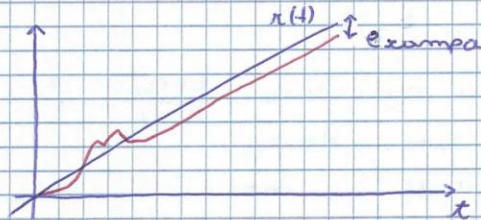
Sia $K=1$, e_{grad}



$$e_{grad} = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - y(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - y(t))$$

$e_{rampa\ linear}$ (unitaria)

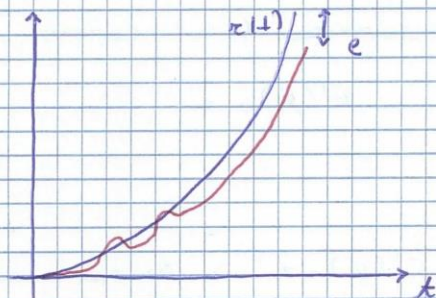
$$x(t) = t$$



$$e_{rampa} = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - y(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (t - y(t))$$

$e_{rampa\ parabolica}$

$$x(t) = \frac{t^2}{2}$$



$$e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - y(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^2}{2} - y(t) \right)$$

Rappresentazione dei segnali

$$R_k(s) = \frac{A}{s^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2$$

$$x(t) = A \rightarrow R(s) = \frac{A}{s}, \quad k=0 \text{ grad}$$

$$x(t) = A \cdot t \rightarrow R(s) = \frac{A}{s^2}, \quad k=1 \text{ rampa}$$

$$r(t) = A \cdot \frac{t^2}{2} \rightarrow R(s) = \frac{A}{s^3}, \quad K=2, \text{ rampa parabolica}$$

Riprendiamo lo schema a blocchi $\oplus$

$$e_x = r - y_r \quad : \text{ con unità di misura di } r$$

$$e_y = \frac{e_x}{H} = \frac{r}{H} - y \quad : \text{ con unità di misura di } y.$$

$$\text{Quanto vale } \lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t) = ?$$

Va applicato il Teorema del Valore finale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s), \quad \text{se stabile!}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E_r(s), \quad \text{con il sistema stabile}$$

Siamo in grado di calcolare $\frac{E_r(s)}{R(s)}$? Sì!

$$\frac{E_r(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + (c(s) \cdot b(s) \cdot H)} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{catena diretta} \\ \leftarrow \text{catena inversa} \end{array}$$

$$E_r(s) = \frac{1}{1 + c(s) \cdot b(s) \cdot H} \cdot R(s)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E_r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + c(s) \cdot b(s) \cdot H} \cdot \frac{A}{s^{k+1}}$$

Supponiamo possa scrivere $b(s)$ come:

$$b(s) = \frac{k_b}{s^h} \cdot b'(s), \quad b'(0) = 1$$

forma di Bode

$$c(s) = K_c \cdot c'(s), \quad c'(0) = 1 \quad \text{e supponendo nessun polo in } 0.$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + c(s) \cdot b(s) \cdot H} \cdot \frac{A}{s^{k+1}} \stackrel{\lim_{s \rightarrow 0}}{=} \frac{1}{1 + K_c \cdot \frac{K_b}{s^h} \cdot H} \cdot \frac{A}{s^k}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^h}{s^h + K_c K_b H} \cdot \frac{A}{s^k}$$

Supponiamo $h \neq 0$: s^h al denominatore: $0^h = 0$.

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^{h-k} \cdot A}{K_c K_G H}$$

$$\text{Se } h > k \rightarrow e_{\infty} = \emptyset$$

$$\text{Se } h < k \rightarrow e_{\infty} = \infty$$

$$\text{Se } h = k \rightarrow e_{\infty} = \text{FINITO}$$

$$h \neq \emptyset : e_{\infty} = \frac{A}{K_c K_G H}$$

$$h = \emptyset : e_{\infty} = \frac{A}{1 + K_c K_G H}$$

Esempio:



	$h = \emptyset$	1	2	3	tipo di $G(s) \cdot C(s)$
$K = \emptyset$	F	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	gradiente
1	∞	F	$\emptyset$	$\emptyset$	rampa
2	∞	∞	F	$\emptyset$	rampa par.
3	∞	∞	∞	F	...

$$G(s) = \frac{K_G}{s^h} G'(s)$$

Def: una f.d.t. avente h poli nell'origine si dice di tipo h

Principio del modello interno:

Sia la trasformata di $x \approx \frac{1}{s}, \frac{1}{s^2}, \dots$.
 Ho un errore nullo solo se $G(s)$ contiene
 rispettivamente $\frac{1}{s}, \frac{1}{s^2}, \dots$

$$\text{NB: } e_y = \frac{e_r}{H} : \text{ se } h=k \rightarrow h \neq \emptyset : e_{\infty} = \frac{A}{K_c K_G H} \\ \rightarrow h = \emptyset : e_{\infty} = \frac{A}{(1 + K_c K_G H) H}$$

Se volessi un errore nullo, io non posso toccare $G(s)$, quindi modifico $C(s)$.

$$C(s) = \frac{K_c}{s^m} C'(s)$$

Aggiungo m poli nell'origine.

Vorrei vedere che: e_y sia finito, $|e_y(\infty)| \leq \varepsilon$

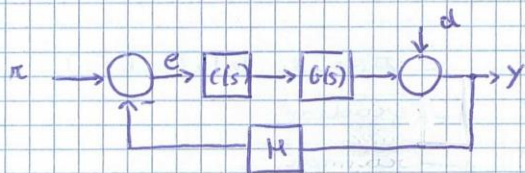
Supponiamo subito un errore $\frac{A}{K_c K_G H^2}$

$$\frac{A}{K_c K_G H^2} \leq \varepsilon \rightarrow K_c \geq \frac{A}{K_G H^2 \cdot \varepsilon}$$

Perché per semplicità non prendo $c(s) = \frac{1}{s^{10}} \cdot c'(s)$?

Non posso! La f.d.t. diventa instabile!

Ritorno dei disturbi



Studiare la f.d.t. fra d e y

$$\frac{y(s)}{d(s)} = \frac{1}{1 + c(s) b(s) H}$$

segno le stesse considerazioni fatte prima!

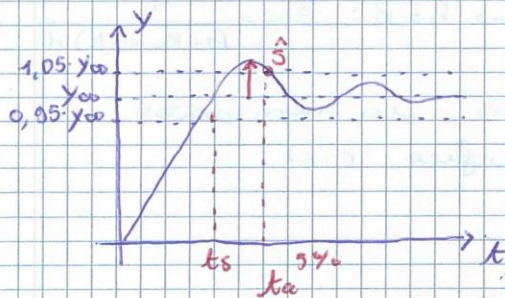
Aperto una funzione, il sistema si accorge dell'errore ma riesce a recuperare e ci sono certi peccati in ϕ in $c(s)$.

$\Rightarrow$ Vale la tabella Δ

SPECIFICHE NEL TRANSITORIO



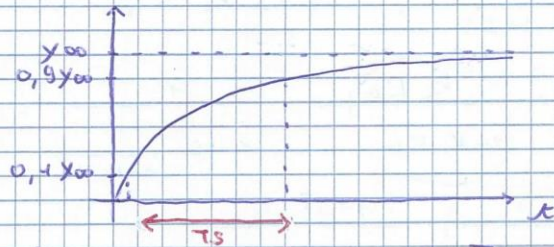
Riferimento a gradino



Tempo di Salita (t_s)

- tempo necessario affinché l'uscita raggiunga per la prima volta il valore di regime.

Se l'uscita risponde così:



non ha senso parlare di Tempo di Salita col significato precedente.

Si chiama significato:

- tempo necessario affinché l'uscita passi dal 10% al 90% del valore di regime

Sovraelongazione Massima ($\hat{\sigma}$) [Overshoot]

È il valore massimo dell'uscita meno il valore di regime.

Soltanto è espresso in % rispetto al valore di regime.

Tempo di assestamento al 5% ($T_a^{5\%}$)

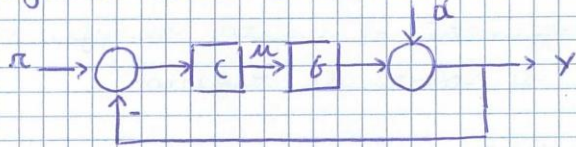
Tempo necessario per l'uscita per entrare in una banda del 5% del valore di regime e non uscirne più

Tempo Salita: Piccolo

Sovraelongamento max: Piccolo

Tempo di Assestamento: Piccolo

- Specifiche due comandi



u : comando

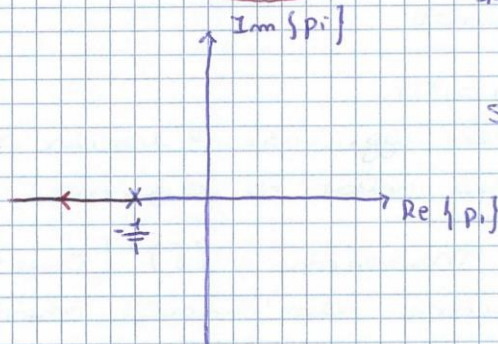
Supponiamo: $g(s) = \frac{k_b}{1+sT}$, $c(s) = K_c > 0$

$$T(s) = \frac{c(s) \cdot g(s)}{1 + c(s) \cdot g(s)} = \frac{K_c K_b}{1 + K_c K_b} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \frac{T}{1 + K_c K_b}}$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + c(s) g(s)} = \frac{1}{1 + K_c K_b} \cdot \frac{1 + sT}{1 + s \cdot \frac{T}{1 + K_c K_b}}$$

$\bullet$: guadagni

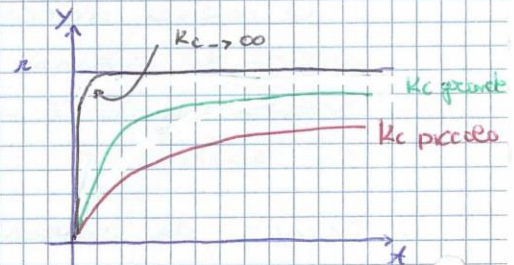
Stabile per $\forall K_c > 0$



K_c molto grande:

Guadagno di $T(s) \approx 1$

Guadagno di $S(s) \approx 0$



OTTIMO: $K_c \rightarrow \infty$

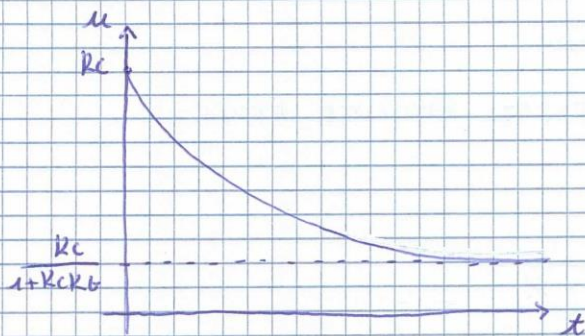
Facciamo la f.d.t. fra x ed u .

$$T_{x,u}(s) = \frac{c(s)}{1 + c(s)g(s)} = \frac{U(s)}{R(s)}$$

$$U(s) = T_{x,u}(s) \cdot R(s)$$

Supponiamo $x(t) = \text{grad}(t) \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s}$

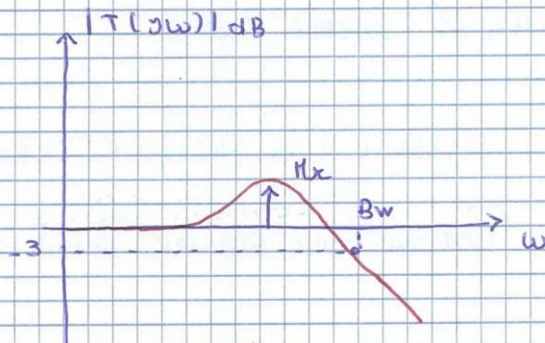
$$U(s) = T_{x,u}(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{K_c}{1 + K_c K_b} \cdot \frac{1 + sT}{1 + s \cdot \frac{T}{1 + K_c K_b}}$$



Risulta quindi inizialmente K_c molto grande.
 $\Rightarrow$ Fisicamente non è applicabile anche se
 ampievolmente è tutto corretto.

Specifiche in Frequenza

- Picco di Risonanza (M_x) **PICCOLO**
- Banda Passante (B_w) **GRANDE**



(ANELLO APERTO)

Maxime di Fase (ϕ_m)

GRANDE $> \phi$
MA NON TROPPO $40^\circ \div 60^\circ$

$$\phi_m \approx \frac{2,3 - M_x}{1,25} \cdot \frac{180}{\pi} \quad \text{maxime di fase in gradi}$$

$$\phi_{max} \approx \frac{2,3 - M_x}{1,25}$$

Quando $\phi_{max} = \gamma$, ho un M_r di circa $x \text{ dB}$.

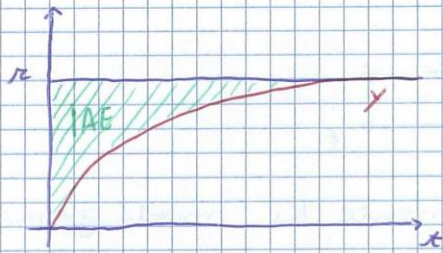
$\omega_c \approx [0,5 \div 0,8] \cdot B_w$ **(ANELLO APERTO)**

$$M_x \approx \frac{1 + \hat{s}^2}{[0,85 \div 1]} \quad \text{normalizzata ad 1} \Rightarrow 15\% = 0,15$$

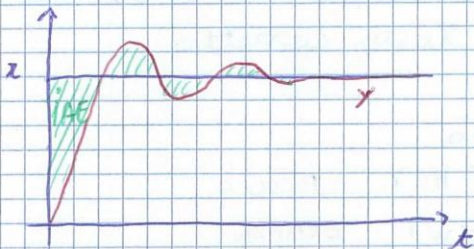
$$T_s \cdot B_w \approx 3$$

Critere di merito Integrali

$$IAE = \int_0^{+\infty} |e(t)| dt \quad : \quad \text{INTEGRAL ABSOLUTE ERROR}$$



IAE più piccolo è migliore.

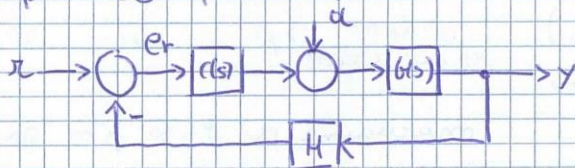


$$ISE = \int_0^{+\infty} e^2(t) dt \quad : \quad \text{INTEGRAL SQUARE ERROR}$$

$$ITAE = \int_0^{+\infty} t \cdot |e(t)| dt \quad : \quad \text{INTEGRAL TIME ABSOLUTE ERROR}$$

$$ITSE = \int_0^{+\infty} t \cdot e^2(t) dt \quad : \quad \text{INTEGRAL TIME SQUARE ERROR}$$

Esempio Compitimo:



$G(s)$ tipo 0
guadagno K_G

$C(s)$ tipo 1
guadagno K_C

$H > 0$

A.c. stazionaria

Sia $d=5$; Sia $n=2$

1) Quanto vale e_y in assenza di disturbo a regime?

2) Quanto vale e_y in presenza di disturbo a regime?

$$\frac{A}{s^{n+1}} \quad \leftarrow \quad R(s), \quad \frac{2}{s}$$

$$e_y = \frac{e_x}{H} ; \text{ Facciamo i conti su } e_x.$$

grazie alle tabelline:

$$1) K \neq \emptyset, h=1 \rightarrow e_r = \emptyset \Rightarrow e_y = \emptyset.$$

2) In presenza di disturbi l'errore è solo quello dato da d perché l'altro è $\emptyset$.

1. Studiare $e_x(\infty)$ tramite T. reale finale;

oppure:

2. Studiare $y(\infty)$

$$\frac{E_x(s)}{D(s)} = \frac{-G(s)H}{1+C(s)G(s)H}$$

$$E_x(s) = \frac{-G(s)H}{1+C(s)G(s)H} \cdot D(s)$$

$$E_y(s) = \frac{E_x(s)}{H} = \frac{-G(s)}{1+C(s)G(s)H} \cdot D(s)$$

È comunque sufficiente studiare la y

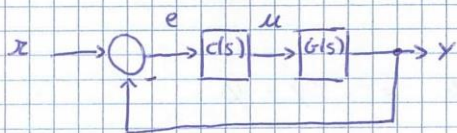
$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G(s)}{1+C(s)G(s)H}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{G(s)D(s)}{1+C(s)G(s)H}$$

• ora posso studiare l'errore: non c'è differenza

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_y(t) = \lim_{s \rightarrow \emptyset} s \cdot \frac{-G(s)}{1+C(s)G(s)H} \cdot \frac{s}{s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow \emptyset} \frac{-K_G \cdot s}{1 + \frac{K_C}{s} \cdot K_G \cdot H} = \emptyset.$$



e: errore

u: comando

x: ingresso

y: uscita

Per ora noi utilizzeremo un
blocco di controllo costante

$\Rightarrow K$

adesso usiamo un controllo
dinamico

$\Rightarrow c(s)$

$$c(s) = \frac{K_c}{s^h} \cdot c'(s), \quad c'(0) = 1$$

Per soddisfare le specifiche a Regime Permanente:

$\rightarrow$ TIPO sistema $c(s) \cdot G(s)$

$\rightarrow K_c$

Spesso lavorerò solo su $c'(s)$

alcuni parametri da controllare:

$t_s, \hat{s}, Bw, M_r, \dots$ (AA)

$\rightarrow$ Converto queste specifiche in funzione di ω_m, ϕ_m

$$\phi_m \approx \frac{2,3 - M_{r_{lim}}}{1,25} \quad T_s \cdot Bw \approx 3 \quad M_{r_{lim}} \approx \frac{1 + \hat{s}}{[0,85 \div 1]} \quad \omega_c = [0,5 \div 0,8] Bw$$

Sintesi per Tentative:

Progettare $c'(s)$ affinché ω_m, ϕ_m sia soddisfatte.

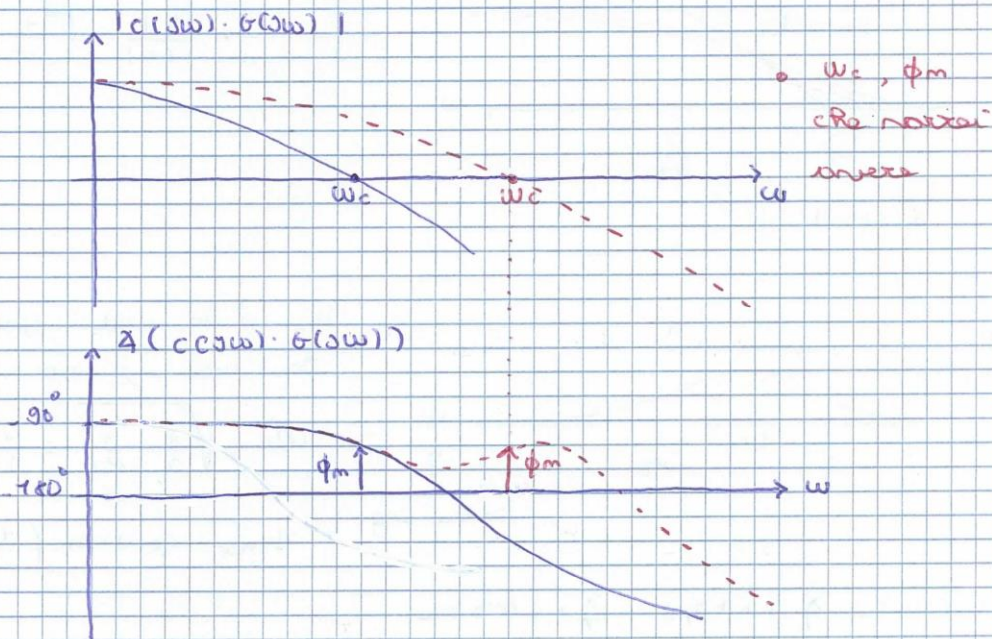
Come Progettare $c'(s)$!?

Usiamo due tipi di reti:

- Reti a onda derivativa
- Reti a onda integrativa

Reti a Banda Derivativa (Anticipatrici)

Si usa per aumentare modulo e fase.



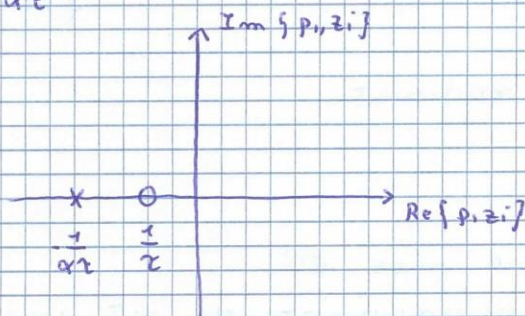
Le Reti anticipatrici sono reti che hanno 1 polo e 1 zero.

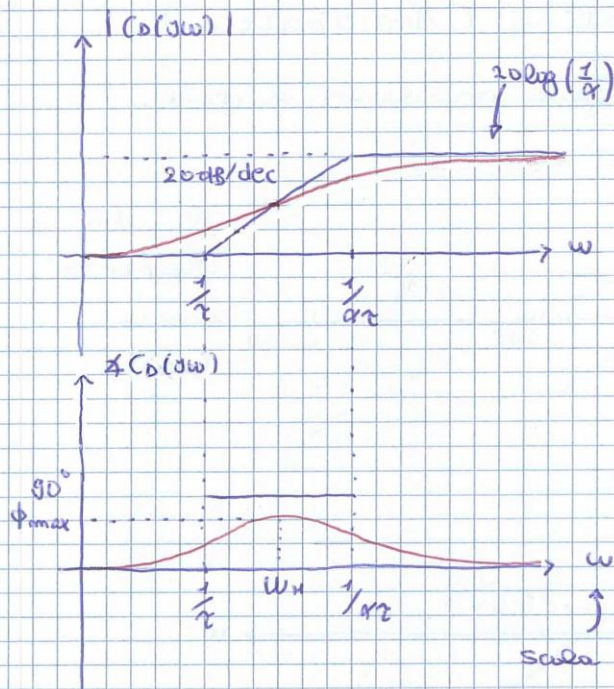
$$C_0(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} = \frac{1 + \tau s}{1 + \frac{\tau}{m} s} \quad \begin{cases} \tau > \phi \\ \phi < \alpha = \frac{1}{m} < 1 \end{cases}$$

zero in $-\frac{1}{\tau}$

polo in $-\frac{1}{\alpha \tau}$

polo a parte $\text{Re} < \phi$. AS





$$|G(jw)| = \frac{|1 + rjw|}{|1 + \alpha rjw|}$$

$$\xrightarrow{w \rightarrow \infty} \frac{|r|}{|\alpha r|} = \frac{1}{\alpha}$$

w_H è la media geometrica tra polo e zero.

$$w_H = \sqrt{\frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\alpha r}} = \frac{1}{r\sqrt{\alpha}}$$

$$\phi_{max} = \arcsin\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)$$

$$\begin{aligned} \angle G(jw) &= \angle 1 + rjw - \angle 1 + \alpha rjw \\ &= +\bar{g}^{-1}(rw) - +\bar{g}^{-1}(\alpha rw) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dw} [+\bar{g}^{-1}(rw) - +\bar{g}^{-1}(\alpha rw)] = 0 \rightarrow w = \frac{1}{r\sqrt{\alpha}}$$

α : fissa la rete

r : fissa la rete nelle frequenze

$$\alpha = \frac{1 - \sin(\phi_{max})}{1 + \sin(\phi_{max})}, \quad r = \frac{1}{w_H \sqrt{\alpha}}$$

NB: MATLAB usa i radianti:

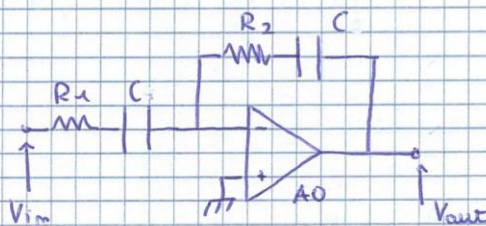
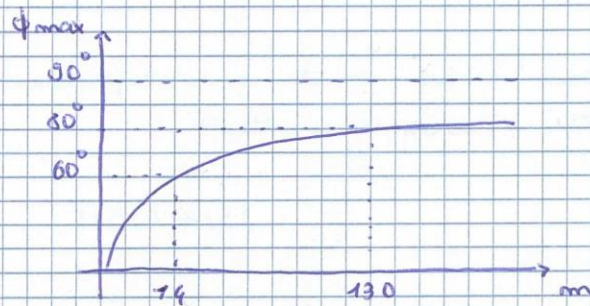
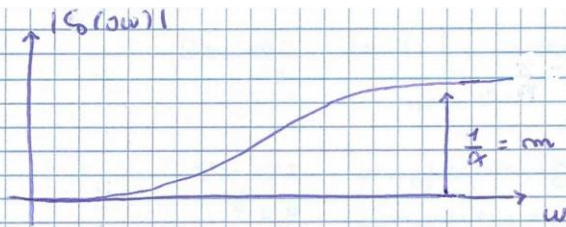
> sin(rad);

> sind(deg);

Una rete guadagna max 90°.

Se ho bisogno di guadagno di più inserisco due reti in cascata.

Buona Regola: Se voglio guadagno più di 60° è conveniente usare più reti, per non aumentare troppo il modulo ad alta frequenza.

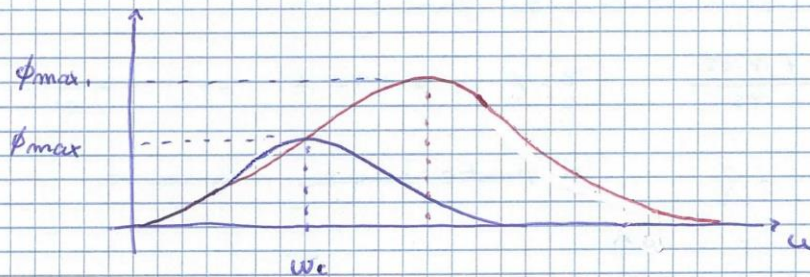


$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = - \frac{1 + sCR_2}{1 + sCR_1}$$

$$R_1 < R_2$$

A.O. INVERTENTE

NB: In questo momento non riesco ad aggiustare sia modulo che fase in quanto sono legati fra loro.



- Rete del tipo precedente
- ~~non quindi questa nuova rete~~

→ Ho le curve normalizzate di modulo e fase.

$$\angle +33^\circ \rightarrow m = 4, \text{ supponiamo } \omega_c = 10 \text{ rad/s}$$

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega \tau}{\omega_c} = \frac{2}{10} = 0,2$$

$$| \cdot | = | \cdot | + 6 \text{ dB} \quad (m=4, \omega \tau = 2)$$

ma io voglio aumentare $| \cdot |$ di 10 dB

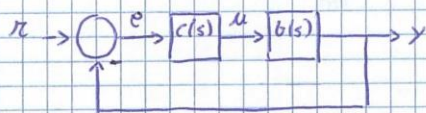
→ prendo $m = 6$, $\omega_r = 4$

modulo guadagno 10 dB

fase guadagno 37°

Quindi abbiamo preso una rete anticipatrice non centrata nel punto di massima fase.

25/11/2015



$$c(s) = \frac{K_c}{s^h} c'(s), \quad c'(0) = 1$$

Per soddisfare le specifiche iniziali:

- $|K_c| \geq 5$
- h dipende dal tipo di $b(s)$ a regime

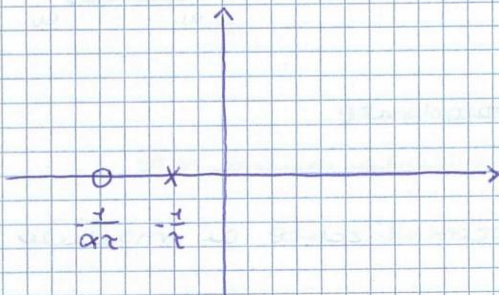
Rete Anticipatrice: produce aumento di modulo e di fase

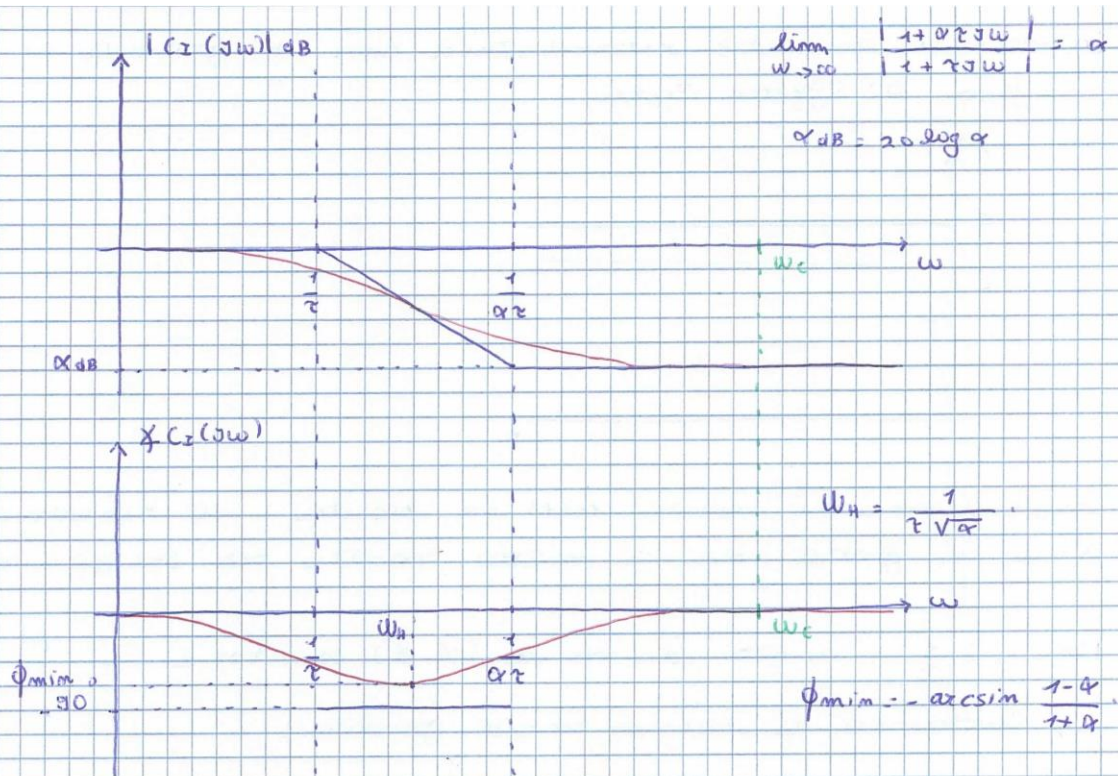
Rete a Banda Integratoria (rete ritardatrice):

- diminuzione di modulo;
- diminuzione di fase;

$$C_I(s) = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s}, \quad \tau > 0, \quad 0 < \alpha < 1 \rightarrow m = \frac{1}{\alpha}$$

$$z = -\frac{1}{\alpha \tau}, \quad p = -\frac{1}{\tau}, \quad \text{a parte reale negativa}$$





Per soddisfare le condizioni desiderate: $w_c, \phi_m > \phi$

Rete anticipatrice $\rightarrow$ si usa per aumentare la fase

Rete integrativa $\rightarrow$ si usa per abbassare il modulo

Ritendiamo che per w_c il modulo deve essere ϕ .

Per abbassare solo il modulo con la rete integrativa bisogna che $w_c \gg w_u$.

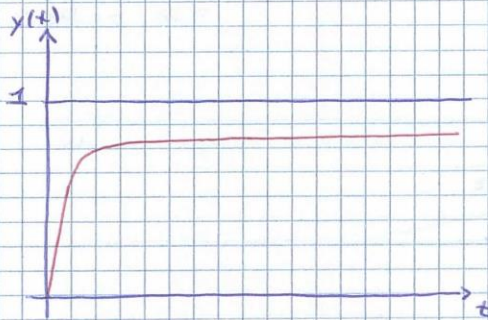
w_c deve stare 2 decadi a destra rispetto al polo della rete anticipatrice

$$w_c = \frac{1}{\tau} \cdot 100 \rightarrow \tau = \frac{100}{w_c}$$

La rete ritardatrice è caratterizzata anche da α .

α dipende da quanto si vuole diminuire il modulo.

Inserendo la rete ritardatrice con τ grande si verifica l'Effetto Coda



Supponiamo di avere $u(t)$ in uscita: il sistema sale in fretta ma ci mette molto per raggiungere 1.

$P_{ds} = -\frac{1}{\tau}$, molto vicino a (ϕ, ϕ) se $\tau \gg 1$

→ Costante di tempo molto grande!

Dal punto di vista circuitale la rete ritardatrice si crea nella stessa maniera della rete anticipatrice, ma:

$$R_1 > R_2.$$

Esempio: Vogliamo aumentare il modulo in corrispondenza di ω_c di 20 dB (di un fattore 10)

- moltiplico la funzione progettata per 0,1;
- aumento tutte le frequenze di 20 dB.

NB: Questo non va bene perché moltiplica K_c !

$$|K_c| = 50, \quad G(s) = \frac{50}{s} \cdot C_A(s) \cdot 0,1$$

$$50 \cdot 0,1 = 5 \rightarrow |K_c| \neq 50!$$

- Ho una rete ritardatrice: aumento il modulo ma non il guadagno.

Es. dato avere il modulo di un fattore 2:

- Rete Antipattiva;
- moltiplicare tutto per 2;

$$C(s) = \frac{50}{s} \cdot 2 = \frac{100}{s}$$

$$|K_c| \geq 50 \text{ va bene}$$

Posso usare entrambe le soluzioni!

Per lavorare sulla fase posso usare per forza reti antipattive o ritardatrici.

Passi da fare per progettare da zero un controllore:

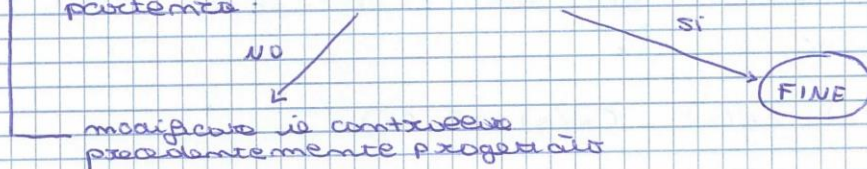
$$C(s) = \frac{K_c}{s^h} \cdot C'(s), \quad C'(0) = 1$$

- Calcolo K_c minimo e il # di poli in ϕ che porta il controllore [dipende dalle specifiche a regime]

Se da τ di vel. finale trascurata $|K_c| \geq x$,
conviene prendere $|K_c| = x$

- Convertire specifiche richieste in specifiche su ω_c e ϕ_m
- Progettiamo reti antic/ritard. in modo da soddisfare le specifiche su ω_c e ϕ_m .

Verificare se sono soddisfatte le specifiche di partenza:



Per una rete ritardatrice, con la costante:

- la fase va presa negativa (fase ≈ -1)
- $\tau = \frac{\omega_r}{\omega_c}$ il modulo aumenta notevolmente

$$|C(j\omega_c) \cdot G(j\omega_c)| = 1 = 0 \text{ dB}$$

↑
non modificabile

Supponiamo che progettato una parte di C , risulti

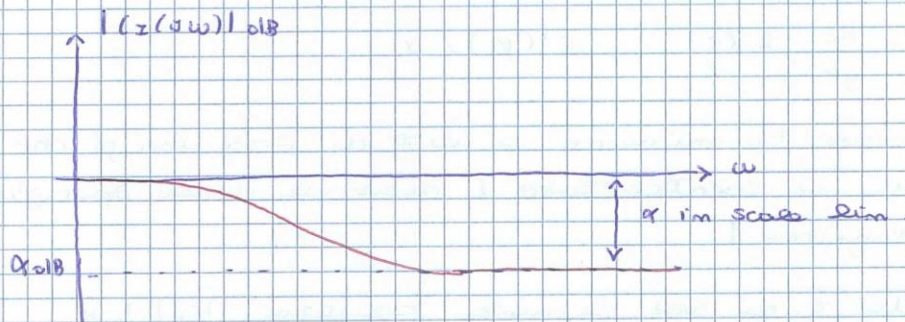
$$|C(j\omega_c) \cdot G(j\omega_c)| = 10 = 20 \text{ dB}$$

Inserisco una rete ritardatrice

$$C_z(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \tau' s}, \quad \tau = \frac{100}{\omega_c}$$

$$= \frac{1 + \frac{\tau}{m} s}{1 + \tau' s}, \quad m = 10 \rightarrow \alpha = 0,1$$

Perché $m \neq 1$?



Siccome $\alpha = 0,1$, risulta

$$|C(j\omega_c) \cdot G(j\omega_c)| = 10 \cdot \alpha = 10 \cdot 0,1 = 1.$$

Progettare la rete ritardatrice è più facile che progettare quella anticipatrice.

Ipotesi: Alzare la fase ed abbassare il modulo.

→ Dobbiamo usare sia reti anticipatrici che ritardatrici

$$C'(s) = C(s) \cdot R(s) = C_R(s) \cdot C_A(s)$$

Progetto prima la rete anticipatrice, ricordando che poi applicherò una ritardatrice, per cui converrà alzare la fase di una quantità maggiore di quella richiesta.

Supponiamo $\phi_m \pm 40^\circ \rightarrow$ Trama $\phi_m = 40^\circ$, la ricordata che ϕ_m si calcola con formule approssimate! Sarebbe meglio Trama $\phi_m \pm 47^\circ$.

Supponiamo: $M_x \pm 3dB \rightarrow \phi_m \pm 41^\circ$

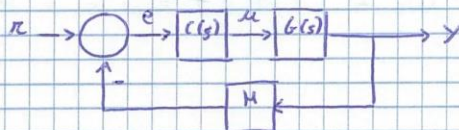
Se dalla progettazione Trama $\phi_m = 40,5^\circ$ non va bene!

Se trama $\phi_m = 41,5^\circ$ va bene!

Conviene fare i conti per Trama $\phi_m = 41^\circ + \epsilon$
con $\epsilon \approx 7^\circ$.

NB: Soddisfare ϕ_m non significa soddisfare M_x .
 ϕ_m è uno strumento per soddisfare M_x ,
ma va comunque controllato tale valore.
Usa diagramma di Nichols con grid.

Es. Sintesi di Controllo:



$$g(s) = \frac{1}{s(1+0,1s)(1+0,2s)}$$

1. Rapporto ingresso/uscita, $y/r = 1$
2. Errore di inseguimento alla rampa lineare unitaria
 $e \leq 1/30$ (a regime)
3. Picco di Risonanza $M_x \pm 3dB \rightarrow \phi_m \pm 41^\circ$
4. Banda Passante $BW \pm 12 \text{ rad/s}$

$$1. \frac{y}{r} = 1 \rightarrow H = 1 \text{ (retroazione unitaria)}$$

$$\text{Progettare } c(s) = \frac{K_c}{s^h} \cdot c'(s), \quad c'(\infty) = 1.$$

2. Specifiche in Regime

$c(s) \cdot G(s)$ TIPO 1 ma $G(s)$ è già di TIPO 1

$\rightarrow c(s)$ TIPO 0 $\Rightarrow h=0$

$$c(s) = K_c \cdot c'(s), \quad c'(0) = 1$$

$$\text{Esempio} = \frac{1}{K_c \cdot K_G \cdot H^2}, \quad K_G = 1$$

$$= \frac{1}{K_c \cdot 1 \cdot 1^2} = \frac{1}{K_c}$$

$$\rightarrow |K_c| \geq \frac{1}{\text{Esempio}} = 30$$

Prendiamo quindi $K_c = 30$, $h=0$.

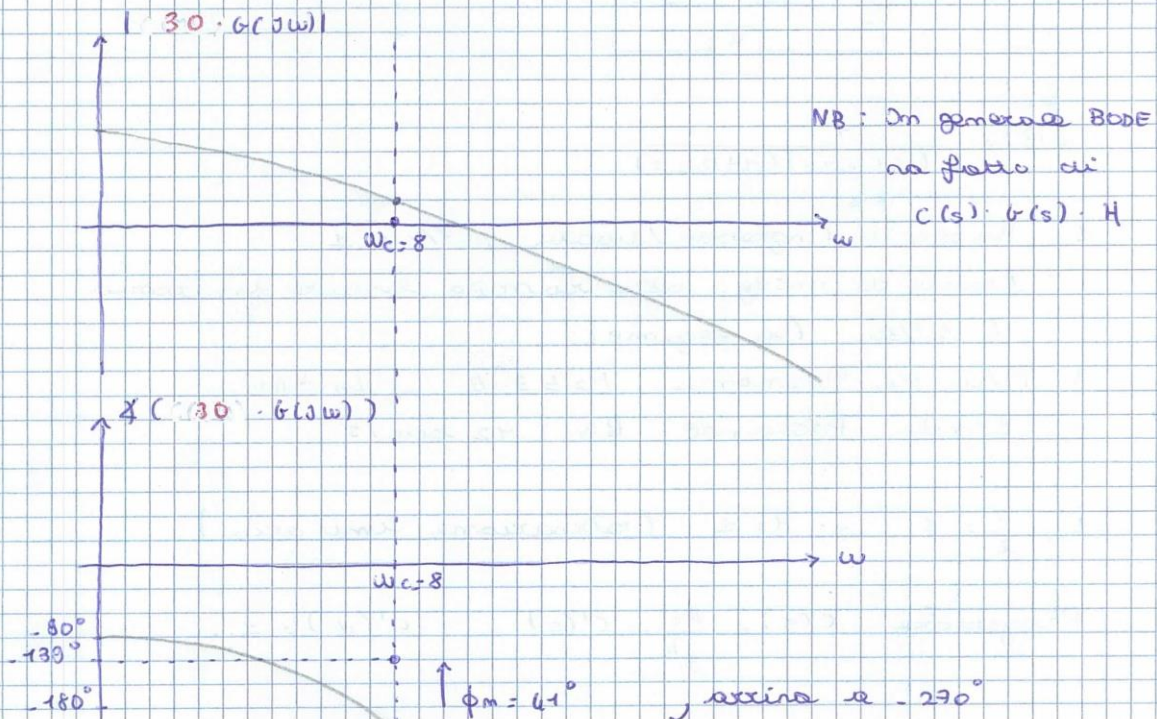
$$c(s) = 30 \cdot c'(s)$$

3.4. Conversione delle Specifiche:

$$\phi_m \approx \frac{2,3 \cdot M_{x, \text{lim}}}{1,25} = 0,71 \text{ rad} \approx 41^\circ$$

$$M_x = 3 \text{ dB} = 1,41$$

$$\omega_c \in [0,5 \div 0,8] \text{ BW} ; \quad \omega_c \in [6 \div 9,6] \text{ rad/s} = 8 \text{ rad/s}$$



Dobbiamo:

- alzare la fase; $\rightarrow$ rete ant.
- abbassare il modulo; $\rightarrow$ rete rit.

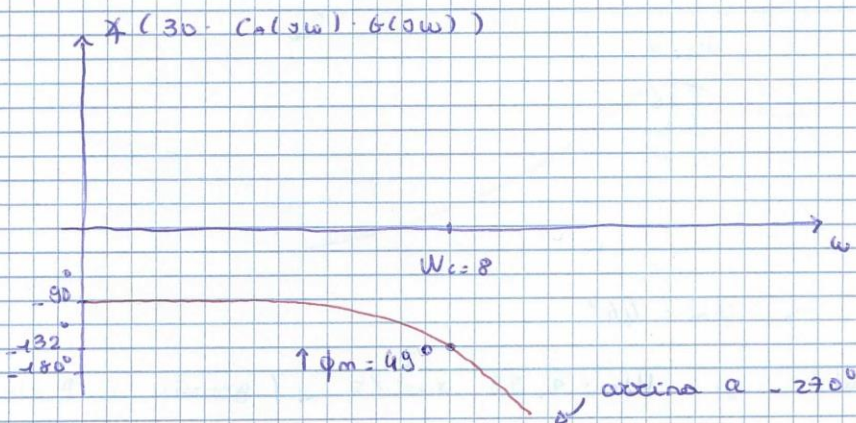
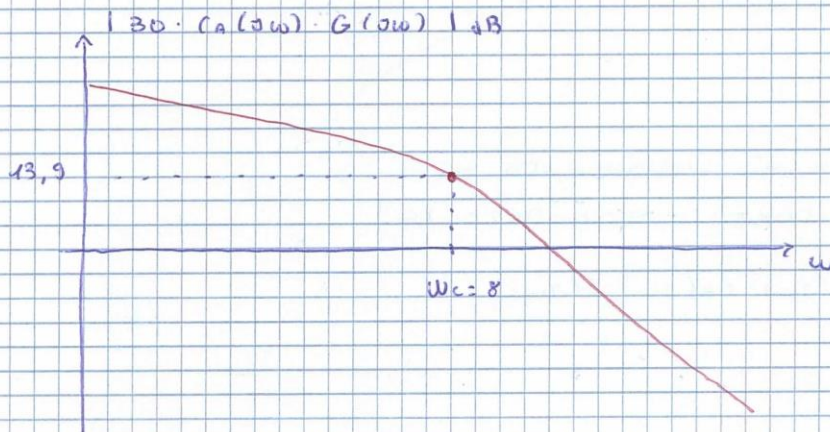
On questo momento $\angle 30 \cdot G(j\omega_c) = -187^\circ$

Dopo alzare la fase di $+7 + 41 + \varepsilon$, con $\varepsilon = 7$
 $\rightarrow 55^\circ$

$$\alpha = \frac{1 - \sin(\phi_{max})}{1 + \sin(\phi_{max})} \approx 0,1 \quad \tau = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\alpha}} = 0,4$$

$$C_A(s) = \frac{1 + 0,4s}{1 + 0,04s}$$

$$C(s) = 30 \cdot C_A(s) \cdot \dots$$

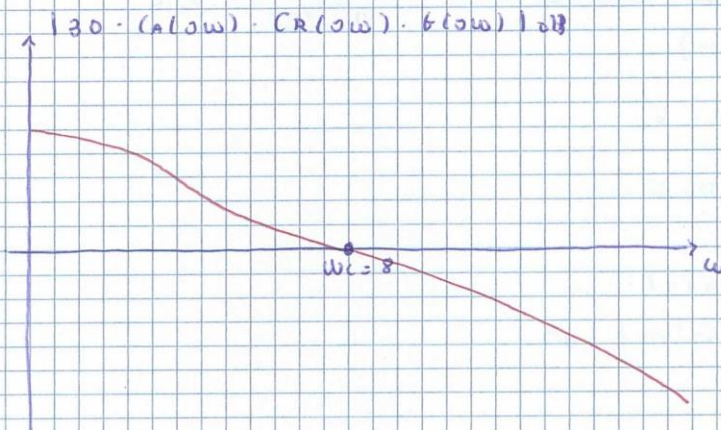


Progetto della retroazione:

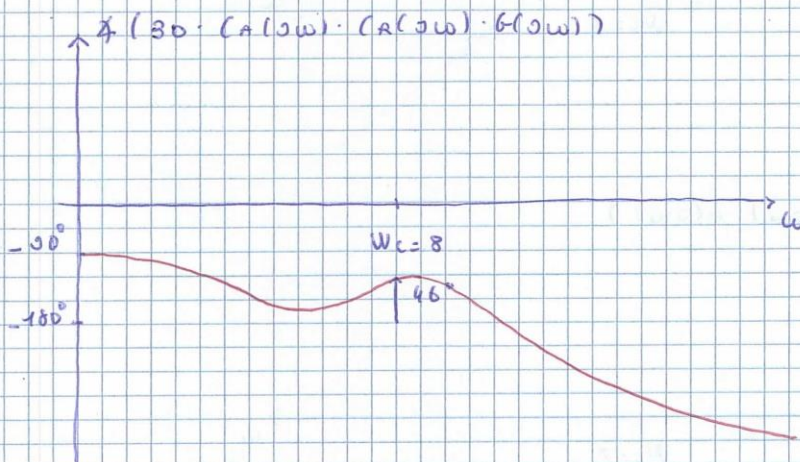
$$\tau = \frac{100}{\omega_c} = \frac{100}{8} = 12,5$$

$$\alpha = \frac{1}{5} \quad \text{in quanto } m=5 \quad \leftarrow 13,9 \text{ dB} = 5$$

$$C(s) = \frac{1 + 2,5 s}{1 + 12,5 s}$$



la fase di giro osservata di: 2°
Grazie alle curve normalizzate!



$$\phi_m \approx 41^\circ \rightarrow \phi_m = 46^\circ$$

$$\omega_c = 8 \text{ rad/s} \rightarrow \omega_c = 4,95 \text{ rad/s} \quad \leftarrow (\text{grazie a Bode})$$

Tramite Nichols e la grid:

$$M_x \leq 3 \text{ dB}$$

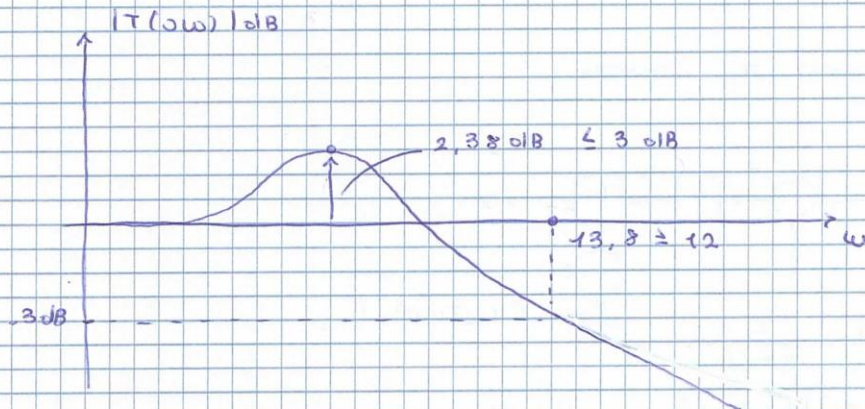
$$BW \geq 12 \text{ rad/s} \quad (\text{freq. attraversamento con curva } -3 \text{ dB})$$

OK!

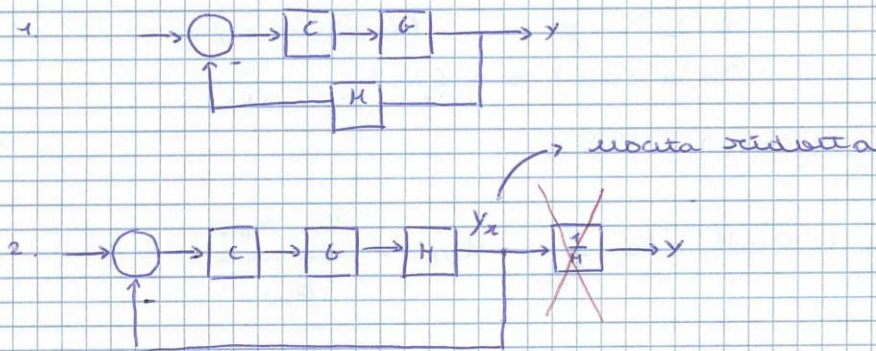
→ curva non ellittica.

altro modo era calcolare $T(s)$

$$T(s) = \frac{C(s) \cdot G(s) \cdot H}{1 + C(s) \cdot G(s) \cdot H} = \text{feedback}(C \cdot G \cdot H, 1)$$



Supponendo lo schema:



Io devo lavorare con lo schema 2!

$\frac{1}{H}$ non influisce sul picco di Risonanza!

$\frac{1}{H}$ non influisce sulla banda passante.

$\frac{1}{H}$ non influisce nemmeno sul tempo di salita e smorzamento, ...

Se non viene soddisfatto la specifiche:

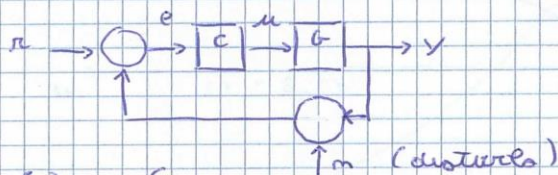
Esempio $M_r = 3,33 \text{ dB} > 3 \text{ dB}$

Ritorniamo ai calcoli con ϕ_m maggiore.

Se $BW \approx 12 \text{ dB}$, ricordando che $\omega_c \approx [0,5 \div 0,8] BW$
mi conviene aumentare ω_c .

Oppure controllo tutto su Nichols

Supponiamo di avere:



$$T_{r,u}(s) = \frac{C}{1+CG}$$

$$|T_{r,u}(j\omega)| \leq \delta, \quad \omega \geq \bar{\omega}$$

↑
risolvere i disturbi del sensore.

Per $\omega \rightarrow \infty$, $G(j\omega) \rightarrow \phi$, $C(j\omega) \cdot G(j\omega) \ll 1$

Per $\omega \rightarrow \infty$, $T_{r,u}(j\omega) \approx C(j\omega)$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |C(j\omega)| \leq \delta$$

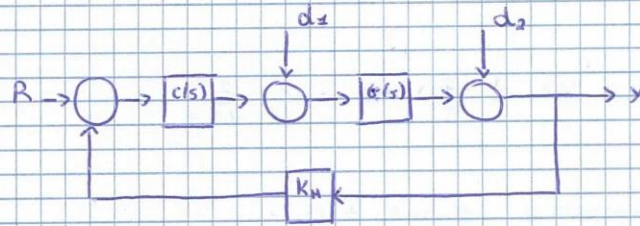
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |C(j\omega)| = K_c \cdot \frac{1}{\alpha_{ANT}} \quad \alpha_{RIT} = \frac{K_c \cdot \alpha_{RIT}}{\alpha_{ANT}} \leq \delta$$

Se non è soddisfatta bisogna variare tali parametri.

$$\alpha_{ANT} > \alpha_{ANT}$$

$$\alpha_{RIT} < \alpha_{RIT} \quad \rightarrow \text{conviene modificare questo!}$$

26/11/2015



d_1, d_2 disturbi a gradino

$$c(s) = \frac{K_c}{s^h} c'(s), \quad c'(\emptyset) = 1$$

CASO 1 :

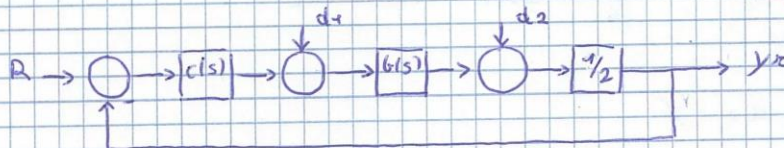
$$b(s) = \frac{s + 0,1}{s(s^2 + s + 1)} = \frac{1}{10} \frac{(1 + \frac{s}{10})}{s(1 + s + s^2)}; \quad |d_1| \leq 0,5$$

$$|d_2| \leq 3$$

1. Guadagno in continua $Y/R = 2$;
2. Errore di inseguimento a rampa lin. $E_{rampa} \leq 0,2$;
3. Errore di inseguimento al grad. in presenza di disturbi $E_{dist} \leq 0,1$;
4. Tempo Scatto $T_s \leq 0,5$ sec;
5. Picco di Risonanza $M_r \leq 3$ dB;

$$\frac{Y}{R} = 2 \rightarrow K_u = \frac{1}{2}$$

modifica lo schema solo per i punti 4 e 5



Errore di inseguimento $E_{rampa} \leq 0,2$

$b(s)$ TIPO 1

$(1/s) \cdot b(s)$ deve essere di tipo 1

$c(s)$ TIPO $\emptyset \rightarrow h = \emptyset$

$$c(s) = K_c \cdot c'(s), \quad c'(\emptyset) = 1$$

$$E_{rampa} = \frac{1}{K_c K_u \cdot H^2} = \frac{1}{K_c \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4}}$$

$$e_{\text{ampa}} = \frac{40}{1} \cdot \frac{1}{K_c} \leq 0,2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{40} K_c \geq \frac{10}{2} \Rightarrow K_c \geq 200$$

Errore di inseguimento $e_{\text{stat}} \leq 0,1$

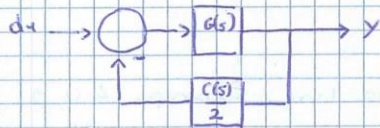
$R \neq \emptyset$, $d_1 = \emptyset$, $d_2 = \emptyset$

$C(s) \cdot G(s)$ TIPO 1 $\rightarrow C(s)$ TIPO $\emptyset \rightarrow h = \emptyset$

$$e_{\text{stat}} = \emptyset \quad \forall K_c$$

$R = \emptyset$, $d_1 \neq \emptyset$, $d_2 = \emptyset$

$$R(s) = \frac{0,5}{s}$$



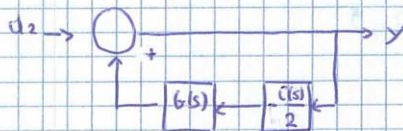
$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + \frac{C(s)G(s)}{2}}$$

$$Y(s) = T(s) \cdot R(s) = \frac{0,5}{s} \cdot \frac{G(s)}{1 + \frac{C(s)G(s)}{2}}$$

$$\lim_{s \rightarrow \emptyset} s \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{\frac{1}{10 \cdot s}}{1 + \frac{1}{2} \left(K_c \cdot \frac{1}{10s} \right)} = \frac{5}{10} \cdot \frac{\frac{1}{10s}}{1 + \frac{K_c}{20s}}$$

$$= \frac{5}{10} \cdot \frac{\frac{1}{10s}}{\frac{20s + K_c}{20s}} = \frac{5}{10} \cdot \frac{21}{20s + K_c} = \frac{1}{K_c}$$

$R = \emptyset$, $d_1 = \emptyset$, $d_2 = \emptyset$



$$T(s) = \frac{1}{1 + \frac{G(s)C(s)}{2}}, \quad R(s) = \frac{3}{s}$$

$$\lim_{s \rightarrow \emptyset} s \cdot \frac{3}{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10s} K_c \right)} = \frac{3}{1 + \frac{K_c}{20s}} = \frac{3}{\frac{20s + K_c}{20s}} = \emptyset$$

$$e_{\text{stat}} = \emptyset + \frac{3}{K_c} + \emptyset \leq 0,1 \rightarrow K_c \geq 10 \rightarrow \begin{cases} K_c \geq 10 \\ K_c \geq 200 \end{cases} \rightarrow K_c \geq 200$$

CASO 2: $|d_1| \leq 1$; $|d_2| \leq 2$

$$G(s) = 10^6 s \cdot \frac{1}{10^6 + 3 \cdot 10^3 s + s^2} = \frac{10^6 s}{10^6} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3 \cdot 10^3 s}{10^6} + \frac{s^2}{10^6}}$$

$$= s \cdot \frac{1}{1 + 3 \cdot 10^{-3} s + 10^{-6} s^2}$$

$$\frac{Y}{R} = 1 \rightarrow K_H = 1$$

$$e_{\text{ramp}} \leq 10^{-2}$$

$C(s) \cdot G(s)$ TIPO 1 $\rightarrow C(s)$ TIPO 1

$$e_{\text{ramp}} = \frac{1}{K_C \cdot K_G \cdot H^2} = \frac{1}{K_C \cdot 1 \cdot 1^2} = \frac{1}{K_C} \leq 10^{-2}$$

$$K_C \geq 10^2$$

e_{grad} in presenza di disturbi: $e_{\text{dist}} \leq 0,1$

$$R \neq \emptyset, d_1 = \emptyset, d_2 = \emptyset$$

$C(s) \cdot G(s)$ TIPO 1 $\rightarrow e_{\text{dist}} = \emptyset \Rightarrow C(s)$ TIPO 2

$$R = \emptyset, d_1 \neq \emptyset, d_2 = \emptyset$$

$$Y(s) = R(s) \cdot T(s) = 1 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{G(s)}{1 + \frac{C(s)G(s)}{s^2}}$$

$$\lim_{s \rightarrow \emptyset} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow \emptyset} \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\frac{1}{s}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{K_C \cdot 1}{s} \cdot 1 \right)}$$

$$= \lim_{s \rightarrow \emptyset} \frac{1}{1 + \frac{K_C}{2s}} = \emptyset$$

$$R = \emptyset, d_1 = \emptyset, d_2 \neq \emptyset$$

$$\lim_{s \rightarrow \emptyset} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow \emptyset} \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{K_C \cdot 1}{s} \cdot 1 \right)} = \emptyset$$

$$e_{\text{tot}} = 10^{-2}, \forall K_C$$

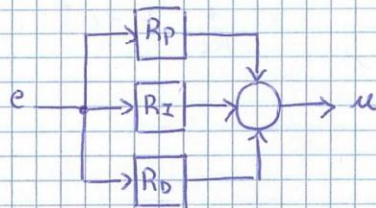
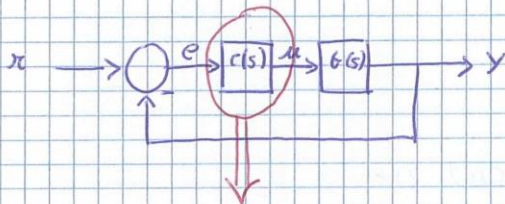
$$\rightarrow K_C \geq 10^2$$

CONTROLLORI PID (Proporzionale, Integrale, Derivativa)

02/12/2015

~ 85% dei controllori industriali è PID

- + Semplicità;
- + Taratura Semplice;
- + Economici;
- non garantiscono prestazioni esatte;



PID Ideali

$$u(t) = \underbrace{K_p \cdot e(t)}_P + \underbrace{K_i \int_0^t e(\tau) d\tau}_I + \underbrace{K_d \cdot \frac{d}{dt} e(t)}_D$$

idea del passato
idea del futuro

$K_p, K_i, K_d > 0$ se il guadagno del sistema è positivo

$$R_{pid}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d \cdot s = \frac{K_p \cdot s + K_i + K_d \cdot s^2}{s}$$

$$R_{pid}(s) = K_p \left[1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right] = K_p + \frac{K_p}{T_i \cdot s} + K_p T_d \cdot s$$

$$\rightarrow K_i = \frac{K_p}{T_i}; \quad K_d = K_p T_d$$

Questa è la struttura ISA PID

T_i : costante di tempo integrale

T_d : " " " derivativa

Posso scegliere dai PID, i controllori:

• P ; $R_P(s) = K_P$

• PI ; $R_{PI}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{sK_P + K_I}{s}$

• PD ; $R_{PD}(s) = K_P + K_D \cdot s$

Consideriamo $R_{PID}(s) = \frac{K_D \cdot s^2 + K_P s + K_I}{s}$

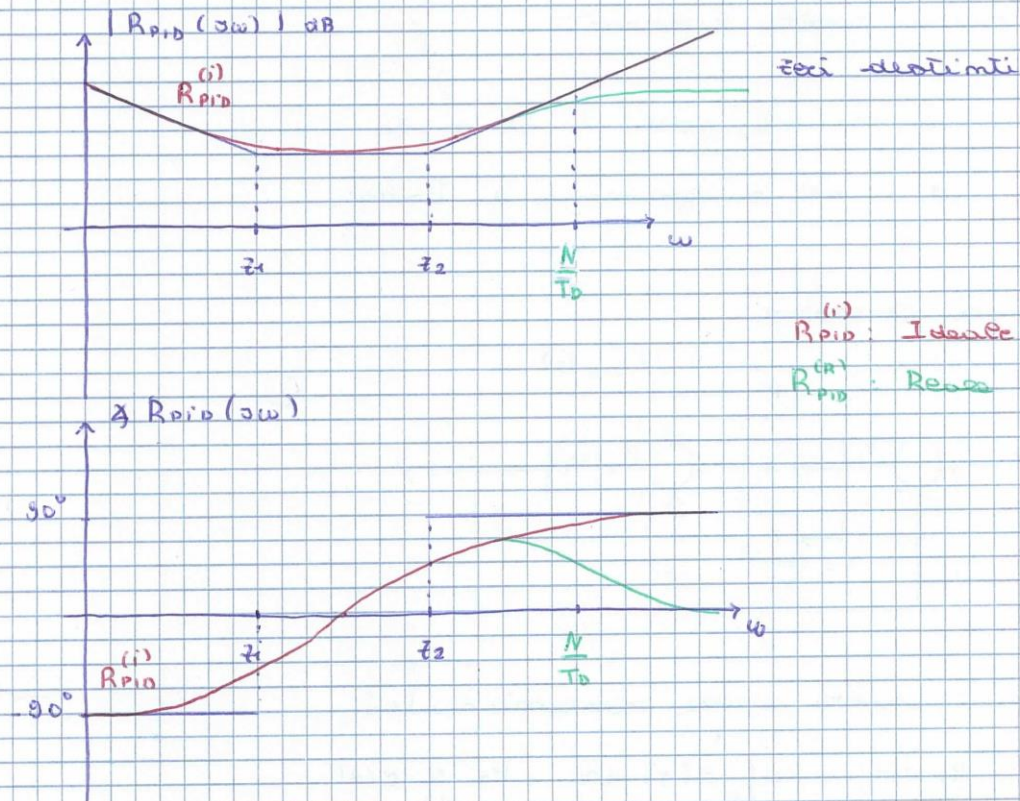
Quadr. di Bode: K_I

per ϕ

$$z_{1/2} = \frac{-K_P \pm \sqrt{K_P^2 - 4K_D K_I}}{2K_D}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{reali} \\ \text{reali coincidenti} \\ \text{complessi} \end{array} \right.$

Spesa vengono assunti reali coincidenti.



Ideale: g. d. t. propria

→ non è fisicamente realizzabile

$$R_{PID}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = K_P \left[1 + \frac{1}{T_I \cdot s} + T_D \cdot s \right]$$

Il termine derivativo crea problemi per la realizzazione fisica

→ aggiungo un polo

$$R_{PID}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D \cdot s}{1 + \frac{K_D}{K_P \cdot N} \cdot s} = K_P \left[1 + \frac{1}{T_I \cdot s} + \frac{T_D \cdot s}{1 + \frac{T_D}{N} \cdot s} \right]$$

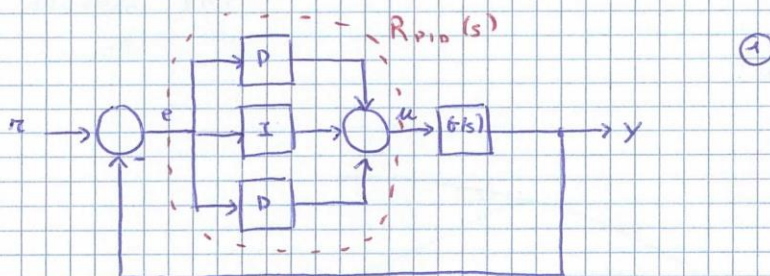
$$\text{Polo: } -\frac{K_P \cdot N}{K_D} = -\frac{N}{T_D} \quad N \in [5 \div 20]$$

Difetto del PID Ideale: a $\omega \rightarrow \infty$ la moltiplica $\rightarrow \infty$
Disturbi ad alta frequenza si sentono molto,
→ sono molto sintonanti!

Piuttosto si muove polo a dx di z_2

• : nel diagramma di Bode

Schema classico



x può avere delle discontinuità

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{d}{dt} e(t)$$

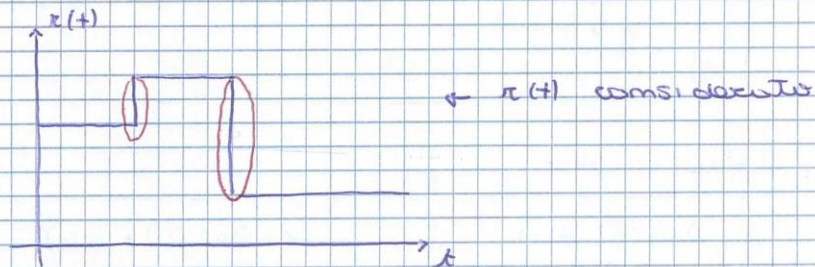
$$e(t) = x(t) - y(t)$$

• Se $x(t)$ ha un salto anche $e(t)$ ha un salto!

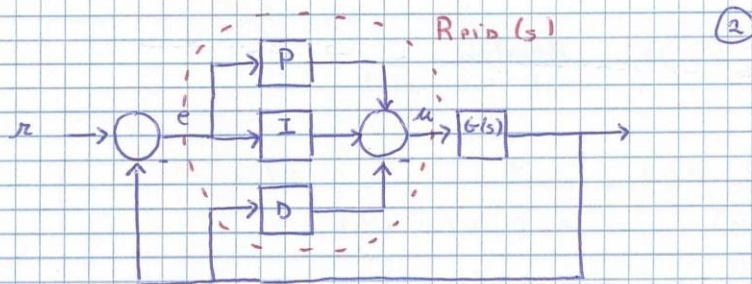
$K_p \cdot e(t)$ fa un salto

$K_z \int_0^t e(\tau) d\tau$ non fa un salto

$K_D \frac{d}{dt} e(t)$ fa un salto a $+\infty$ o a $-\infty$



→ Collego il derivatore all'uscita del sistema



$$u(t) = K_p e(t) + K_z \int_0^t e(\tau) d\tau - K_D \frac{d}{dt} y(t)$$

$y(t)$ la differenza di $u(t)$ non può avere salti:

$$\frac{d}{dt} y(t) \neq \pm \infty$$

Perché lo inserisco con - ?

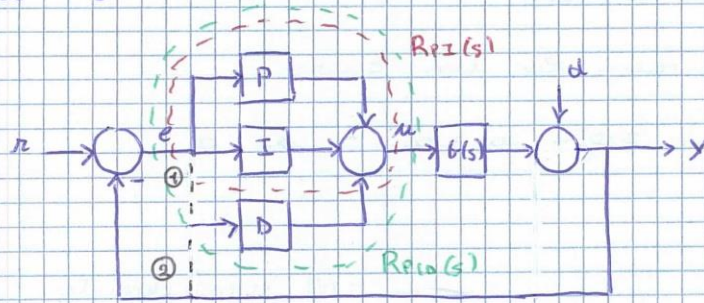
Se $x(t)$ è costante:

$$\frac{d}{dt} e(t) = \frac{d}{dt} x(t) - \frac{d}{dt} y(t)$$

$\swarrow$
 $\neq$

Quindi i due sistemi considerati sono equivalenti: ① equivalente a ②

Aggiungiamo un disturbo:



$$Y(s) = \frac{R_{PID}(s) \cdot G(s)}{1 + R_{PID}(s) \cdot G(s)} \cdot R(s) + \frac{1}{1 + R_{PID}(s) \cdot G(s)} \cdot D(s) \quad (1)$$

$$U(s) = \frac{R_{PID}(s)}{1 + R_{PID}(s) \cdot G(s)} \cdot R(s) - \frac{R_{PID}(s)}{1 + R_{PID}(s) \cdot G(s)} \cdot D(s)$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + R_{PID}(s) \cdot G(s)} ; \quad Q(s) = - \frac{R_{PID}(s)}{1 + R_{PID}(s) \cdot G(s)}$$

$$Y(s) = \frac{R_{PI}(s) \cdot G(s)}{1 + R_{PID}(s) \cdot G(s)} \cdot R(s) + \frac{1}{1 + R_{PID}(s) \cdot G(s)} \cdot D(s) \quad (2)$$

$$U(s) = \frac{R_{PI}(s)}{1 + R_{PID}(s) \cdot G(s)} \cdot R(s) - \frac{R_{PID}(s)}{1 + R_{PID}(s) \cdot G(s)} \cdot D(s)$$

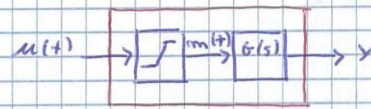
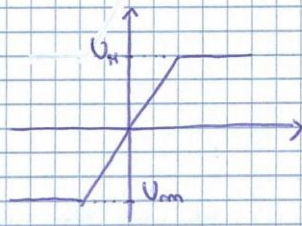
- I poli sono gli stessi;
- l'influenza dei disturbi è la stessa;
 $S(s)$ e $Q(s)$ sono uguali in (1) e (2)

- $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ ha guadagno unitario

- $S(s)$ ha uno zero nell'origine $\rightarrow$ Reiezione dei disturbi costanti

Desaturazione dopo l'azione Integrata (schemi anti wind up)

Saturazione:

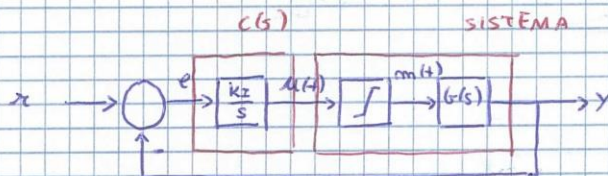


$$m(t) = \begin{cases} U_m & \text{se } u(t) > U_m \\ m(t) & \text{se } U_m \geq u(t) \geq -U_m \\ -U_m & \text{se } u(t) < -U_m \end{cases}$$

nel caso di una Stufe a Segna: $U_m = \phi^\circ C$

Problema: l'effetto di saturazione non è lineare

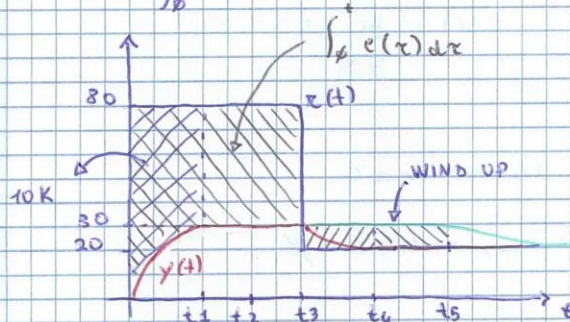
Supponiamo un $C(s)$ puramente integrale:



Se $C(s)$ ha un azione integrale (polo in ϕ)
il sistema può essere soggetto dal problema del
wind up.

Supponiamo di avere $C(s)$ puramente integrale:

$$u(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau$$



- Ideale
- Resero

30° : livello franco max
raggiungibile

Se tutto è causato dal polo in ϕ .

Dopo t_1 il sistema satura:

$$\int_{\emptyset}^{t_2} e(\tau) d\tau = 10K$$

$$\int_{\emptyset}^{t_3} e(\tau) d\tau = 100K$$

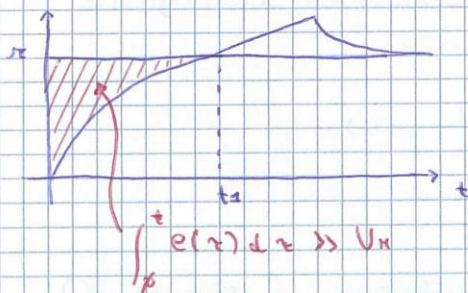
$$\int_{\emptyset}^{t_4} e(\tau) d\tau < 100K = 90K$$

→ Il termoisolante continua a ricevere il massimo

$$\int_{\emptyset}^{t_5} e(\tau) d\tau = 10K$$

→ Il termoisolante inizia a diminuire la potenza con cui sta riscaldando

altro caso:



Un riferimento al caso precedente:

$$U_K = 10K$$

$$C(s) = 1000$$

$$u(t) = 1000 \cdot e(t)$$

Quando raggiunge 30° : $e(t) = 80 - 30 = 50$

$$u(t) = 1000 \cdot 50 = 50.000$$

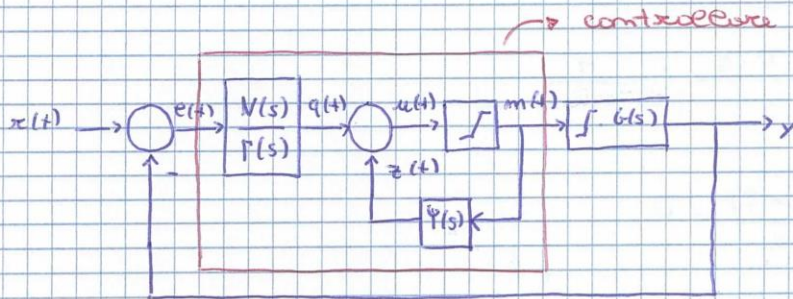
a t_3 : $e(t) < \emptyset$, $e(t) = 20 - 30 = -10$

$$u(t_3) = -10 \cdot 1000 = -10.000 \rightarrow m(t_3) = \emptyset$$

in quanto $U_m = \emptyset^\circ$.

Schemi Anti WindUp:

1. Se non saturiamo il sistema si deve comportare come in assenza di saturazione;
2. Se saturato deve garantire una corretta desaturazione;



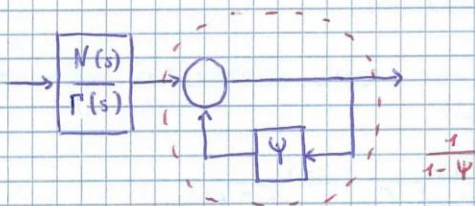
Trascurando la saturazione:

$$C(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad D(\varphi) = \varphi.$$

$$\text{Definiamo } \Gamma(s) : \Psi(s) = \frac{\Gamma(s) - D(s)}{\Gamma(s)} \begin{cases} \text{asint. stabile} \\ \text{strutt. propria} \\ \text{guad. unitario} \end{cases}$$

$\Psi(\varphi) = 1$

Se non siamo in saturazione:



$$C(s) = \frac{N}{F} \cdot \frac{1}{1-\Psi} = \frac{N}{F} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\Gamma-D}{\Gamma}} = \frac{N}{F} \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma-D} = \frac{N}{D}$$

Rispettato 1.

$$\text{Se } u(t) > U_H \rightarrow m(t) = U_H \rightarrow e(t) > \varphi$$

Supponiamo quindi la saturazione.

Dopo un po' di tempo $z(t) = U_H$.

Ad un certo punto $e(t) < \varphi$

$\rightarrow q(t) < \varphi \rightarrow u(t) = U_H, q(t) < U_H \rightarrow$ sono in desaturazione!

Supponiamo di avere un controller PID:

$$C_{pi}(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} \right) \quad , \quad \text{studio solo PI}$$

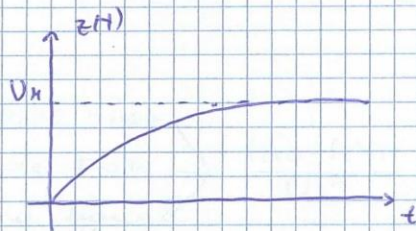
$$= K + \frac{K}{T_i \cdot s} = \frac{K(1 + T_i \cdot s)}{s \cdot T_i}$$

$$T(s) = 1 + T_i \cdot s$$

$$\Psi(s) = \frac{1 + T_i \cdot s - T_i \cdot s}{1 + T_i \cdot s} = \frac{1}{1 + T_i \cdot s}$$

$$\frac{N(s)}{P(s)} = \frac{K(1 + T_i \cdot s)}{1 + T_i \cdot s} = K$$

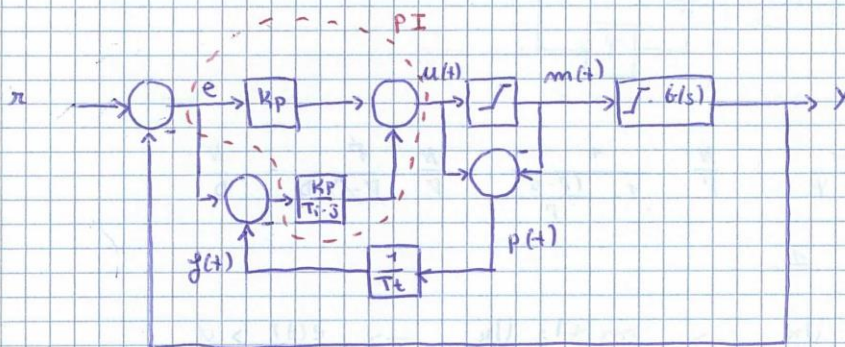
$$e(t) > \phi \rightarrow q(t) > \phi \rightarrow u(t) > U_H \rightarrow m(t) = U_H$$



$$e(t) < \phi \rightarrow q(t) < \phi \rightarrow u(t) = U_H, \quad q(t) < U_H$$

→ Sono in desaturazione.

NB: Non posso decidere con che velocità desaturare!

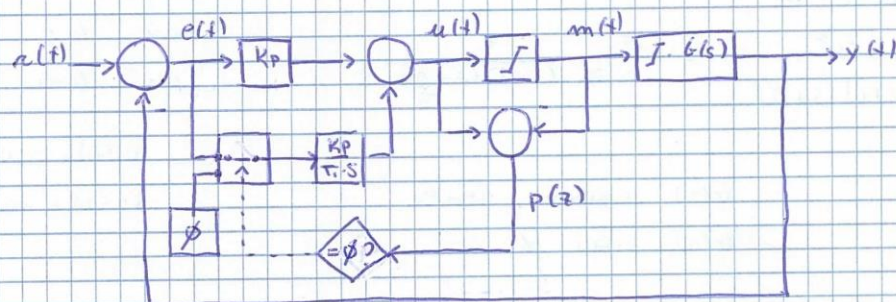


Se non saturo $m(t) = u(t)$

$T_i > \phi$ parameter x anti-windup

$$\begin{aligned} \text{Se } u(t) > U_H &\rightarrow m(t) = U_H \rightarrow p(t) > \phi \rightarrow g(t) > \phi \\ &\rightarrow e(t) - g(t) \neq \phi !? \end{aligned}$$

Se $T_t = K_p$ questo sistema si riconduce al precedente!



Se sono in saturazione switcho a ϕ e integro ϕ .
 → l'idea rimane quindi costante.
 → la desaturazione sarà istantanea!

Domanda fuori luogo:



$C(s)$ TIPO 1

Se $e(t) = \phi$, quanto vale $u(t)$?

$u(t) = \phi$? No!

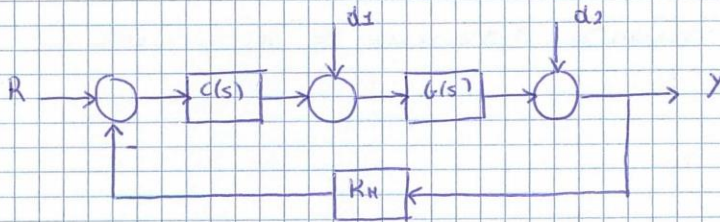
Se $C(s)$ è inst. stabile:



⇒ $C(s)$ tipo 1 non è inst. stabile.

$e(t) = \phi \rightarrow u(t) \neq \phi$.

03/12/2015



$$G(s) = \frac{2,5}{(s+1)(s+5)} = \frac{5}{2 \cdot 8} \cdot \frac{1}{(1+s)(1+\frac{s}{5})}$$

$$K_G = \frac{1}{2}$$

$$p_1 = -1$$

$$p_2 = -5$$

$G(s)$ asint. stab.

$G(s)$ TIPO ϕ

$$|d_1| \leq 2$$

$$|d_2| \leq 10$$

$$\rightarrow d_1(t) = 2u(t)$$

$$\rightarrow d_2(t) = 10u(t)$$

$$C(s) = \frac{K_c}{s^h} \cdot C'(s), \quad C'(0) = 1$$

$$1. \quad \frac{Y}{R} = 8 \quad \rightarrow \quad K_H = \frac{1}{8}$$

2. $e_{step} \leq 0,1$ (errore al gradino unitario)

$$G(s) \cdot C(s) \text{ TIPO } \phi \rightarrow C(s) \text{ TIPO } \phi \quad G(s) = \frac{1}{s}$$

formula da

$$\text{errore} : \frac{A}{1 + K_c K_G K_H} \cdot \frac{1}{h}$$

$$e_{step} = \frac{1}{1 + K_c \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}} \leq \frac{1}{10}$$

$$\rightarrow \frac{1}{1 + \frac{K_c}{16}} \leq \frac{1}{80} \rightarrow \frac{1}{16(16 + K_c)} \leq \frac{1}{80}$$

$$\rightarrow \frac{16}{16 + K_c} \leq \frac{1}{80} \rightarrow \frac{1}{16 + K_c} \leq \frac{1}{1280}$$

$$\rightarrow 16 + K_c \geq 1280 \rightarrow K_c \geq 1264$$

HA CONSIDERANDO IL PUNTO 3 ALLORA IL RISULTATO PER IL PUNTO 2 RISULTA $\forall K_c$.

3. $e_{\text{amp}} \leq 0,1$ (errore alla rampa unitaria)

$$G(s) \cdot C(s) \text{ TIPO 1} \rightarrow C(s) \text{ TIPO 1} \quad V(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\text{formula da usare: } \frac{A}{K_c K_G H} = \frac{1}{H}$$

$$\text{Examp: } \frac{1}{K_c \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}} \cdot 8 \leq \frac{4}{10}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\frac{K_c}{16}} \leq \frac{4}{80} \rightarrow \frac{16}{K_c} \leq \frac{4}{80} \rightarrow \frac{1}{K_c} \leq \frac{4}{1280}$$

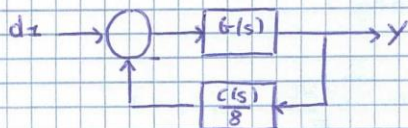
$$K_c \geq 320$$

4. $e_{\text{dist}} \leq 0,2$ (errore ad gradino in presenza di disturbi)

$$R \neq \emptyset, d_1 = \emptyset, d_2 = \emptyset$$

$$C(s) \cdot G(s) \text{ TIPO 1} \rightarrow e_{\text{dist}} = \emptyset$$

$$R = \emptyset, d_1 \neq \emptyset, d_2 = \emptyset$$



$$D_1(s) = \frac{2}{s}$$

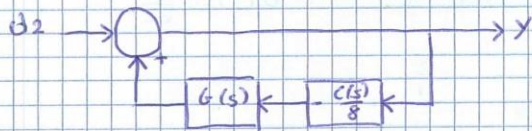
$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot \frac{C(s)}{8}}$$

$$Y(s) = T(s) \cdot D_1(s)$$

$$\lim_{s \rightarrow \emptyset} \cancel{s} \cdot \frac{2}{\cancel{s}} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \frac{K_c}{8 \cdot s}} = \lim_{s \rightarrow \emptyset} \frac{1}{1 + \frac{K_c}{16 \cdot s}}$$

$$= \lim_{s \rightarrow \emptyset} \frac{1}{\frac{1}{16 \cdot s} (16 \cdot s + K_c)} = \lim_{s \rightarrow \emptyset} \frac{16 \cdot s}{16 \cdot s + K_c} = \emptyset$$

$$R = \emptyset, d_1 = \emptyset, d_2 \neq \emptyset$$



$$T(s) = \frac{1}{1 + G(s) \cdot \frac{C(s)}{s}}$$

$$D_2(s) = \frac{10}{s}$$

$$Y(s) = T(s) \cdot D_2(s)$$

$$\lim_{s \rightarrow \emptyset} s \cdot \frac{10}{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{K_c}{8 \cdot s}} = \lim_{s \rightarrow \emptyset} \frac{10}{1 + \frac{K_c}{16 \cdot s}}$$

$$= \lim_{s \rightarrow \emptyset} \frac{10}{\frac{1}{16 \cdot s} (16 \cdot s + K_c)} = \lim_{s \rightarrow \emptyset} \frac{160 \cdot s}{16 \cdot s + K_c} = \emptyset$$

$$e_{stat} = \emptyset + \emptyset + \emptyset = \emptyset \leq 0,2 \quad \forall K_c$$

Om definizione:

$$C(s) \text{ TIPO } 1 \rightarrow h = 1$$

$$K_c \geq 320$$

$$5. T_r \leq 0,7 \text{ sec} \quad (\text{Tempo di salita})$$

$$6. M_r \leq 2,8 \text{ dB} \quad (\text{Picco di risonanza})$$

$$\phi_{m_{grad}} \approx \frac{2,3 \cdot M_{r \text{ lim}}}{1,25} \cdot \frac{180}{\pi} = 0,736 \cdot \frac{180}{\pi} = 42,17^\circ$$

$$M_{r \text{ lim}} = 10^{\frac{M_r}{20}} = 1,38$$

$$T_r \cdot B_w \geq 3 \rightarrow 0,7 \cdot B_w \geq 3 \rightarrow B_w \geq 4,29 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_c \approx [0,5 \div 0,8] B_w \Rightarrow \omega_c \approx [2,15 \div 3,43] \text{ rad/sec}$$

$$\omega_c = 3 \text{ rad/sec}$$

$$\text{Banda di } \bar{T}(s) = \frac{K_c}{s^h} \cdot G(s) \cdot K_H = \frac{320}{s} \cdot \frac{1}{8} \cdot G(s) = \frac{40}{s} \cdot G(s)$$

PASSO 1: $\omega_c = 3 \text{ dB}$, $| \cdot | = 5,12 \text{ dB}$
 $\omega_c = 3 \text{ dB}$, $\angle \cdot = -132^\circ$
 $\rightarrow \phi_m = -12^\circ$

Deno alzare la fase:

$\angle \frac{40}{s} \cdot G(s) = -192^\circ$ dove ~~esattamente uguale a~~ -138°

deno alzare la fase di $-12 + 42 + E = 50 + E$
 con $E = 7$
 $\rightarrow 61^\circ$

Usa una rete anticipatrice

$$C_A(s) = \frac{1 + \alpha s}{1 + \alpha \alpha s}$$

$$\alpha = \frac{1 - \sin(\phi_{\max})}{1 + \sin(\phi_{\max})} = \frac{1 - \sin(61)}{1 + \sin(61)} \approx 0,07$$

$$\alpha = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\alpha}} = 1,26$$

$$C_A(s) = \frac{1 + 1,26 \cdot s}{1 + 0,09 \cdot s}$$

Basta di $T(s) = \frac{K_c}{s^h} \cdot C_A(s) \cdot G(s) \cdot K_H$

$$= \frac{320}{s} \cdot \frac{1 + 1,26 \cdot s}{1 + 0,09 \cdot s} \cdot G(s) \cdot \frac{1}{8}$$

PASSO 2: $\omega_c = 3 \text{ dB} \rightarrow \angle \cdot = -132^\circ \rightarrow \phi_m = 48^\circ$
 $\omega_c = 3 \text{ dB} \rightarrow | \cdot | = 16,7 \text{ dB}$

Deno abbassare il modulo

Usa una rete ritardatrice:

$$C_R(s) = \frac{1 + \alpha s}{1 + \tau s}$$

$$\tau = \frac{100}{\omega_c} = \frac{100}{3} = 33,3$$

$$1 \text{ dB} = 20 \log(x)$$

$$x = 10^{\frac{1 \text{ dB}}{20}}$$

$$\alpha = \frac{1}{m_{\text{lim}}} = \frac{1}{6,84} = 0,15$$

$$m_{\text{lim}} = 10^{\frac{16,7}{20}} = 6,84$$

$$C_R(s) = \frac{1 + 5 \cdot s}{1 + 33,3 \cdot s}$$

$$\text{Bode di } T(s) = \frac{K_c}{s} \cdot C_A(s) \cdot C_R(s) \cdot G(s) \cdot K_H$$

$$\omega_c = 3 \text{ rad/s} \rightarrow 1 \text{ dB} = 0,216$$

$$\omega_c = 3 \text{ rad/s} \rightarrow \Delta = -136^\circ \rightarrow \phi_m = 44^\circ$$

$$\text{MATLAB: } [m, p] = (C * G * H, 3)$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 margine fase ω_c

$$C(s) = \frac{K_c}{s} \cdot C_A(s) \cdot C_R(s)$$

MATLAB: margin(b)

Margine di Fase di G

step(T) e gestore Ts, T: anello chiuso

Metodi di Taratura Automatica per PID

Determinazione dei parametri (K, T_i, T_d)

Si usano quando non abbiamo un modello del sistema e siamo disposti ad accettare prestazioni sufficienti.

Dopo che variare i parametri finati sul computer.

Metodi ad Anello Aperto:

- effettuare un esperimento in AA in modo da ricavare un modello del sistema.
- determinare K, T_i, T_d in base ad opportune tabelle.

Supponiamo un modello del primo ordine con ritardo stabile:

$$G(s) = \frac{\mu}{1+sT} e^{-sL}$$

μ : guadagno statico
 L : ritardo del sistema
 $T > 0$

Risposta al gradino unitario:



Effettuiamo un esperimento:

$1 \rightarrow \boxed{S} \rightarrow y$ ottenendo una risposta al gradino.

→ ho usato un gradino di ampiezza max o di ampiezza tale per cui il Rapporto Segnale / Rumore sia alto.

→ Ho usato opportuni gradini diversi (di ampiezza diversa) per verificare la linearità.

→ rta normalizzata l'uscita dividendo per l'ampiezza del gradino in ingresso.

Tempo di ritardo normalizzato:

$$\tau = \frac{L}{L+T} \quad ; \quad T: \text{costante di tempo.}$$

$$0 < \tau < 1$$

Rapporto di controllabilità: τ

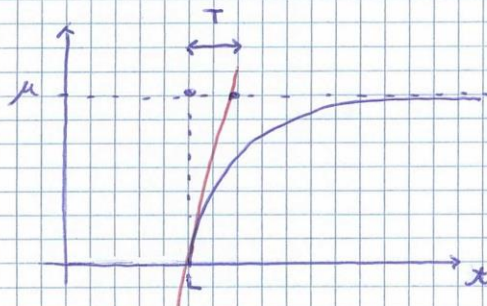
τ molto piccolo → sistema "facile" da controllare

$\tau \approx 1$ → sistema "difficile" da controllare

Si raggiunge il valore di regime dopo circa 5τ .

Metodo della tangente

- μ è il valore di regime dopo la normalizzazione;
- 1. T è la differenza tra il tempo in cui la tangente raggiunge μ e L ;



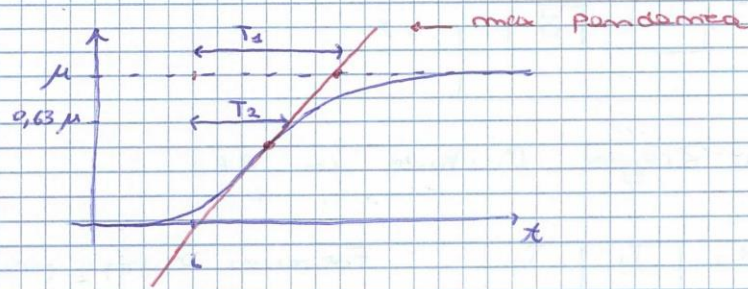
nel punto di massima pendenza

- 2. T è la differenza tra il tempo in cui l'uscita vale $0,63 \mu$ e il ritardo L ;

Posso applicare questo metodo anche a sistemi con più di un polo reale

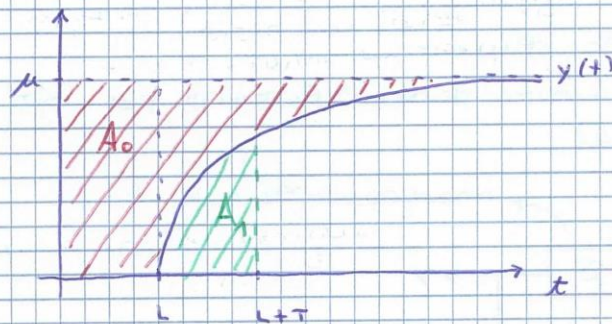
Esempio:

sistema con 2/3 poli reali



metodo della area

$$y(t) = \begin{cases} \mu(1 - e^{-\frac{t-L}{T}}) & ; t \geq L \\ 0 & ; t < L \end{cases}$$



$$\begin{aligned} A_0 &= \mu L + \int_L^{+\infty} \mu \cdot y(t) dt = \mu L + \int_L^{+\infty} \mu e^{-\frac{t-L}{T}} dt \\ &= \mu L - \mu T e^{-\frac{t-L}{T}} \Big|_L^{+\infty} = \mu L + \mu T = \mu(L+T) \end{aligned}$$

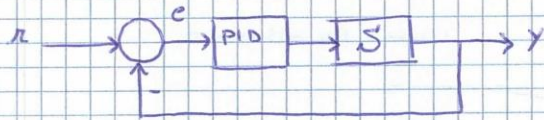
$$\rightarrow L+T = \frac{A_0}{\mu}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_L^{L+T} y(t) dt = \int_0^T \mu(1 - e^{-\frac{t}{T}}) dt \quad \text{con } L=0 \\ &= \mu T - \int_0^T \mu e^{-\frac{t}{T}} dt = \mu T + \mu T e^{-\frac{t}{T}} \Big|_0^T \\ &= \mu T + \mu T e^{-1} - \mu T = \frac{\mu T}{e} \end{aligned}$$

$$\rightarrow T = \frac{A_1 \cdot e}{\mu}$$

Questo metodo è molto meno sensibile ai disturbi

Consideriamo questo sistema:



Metodo di Ziegler - Nichols in AA:

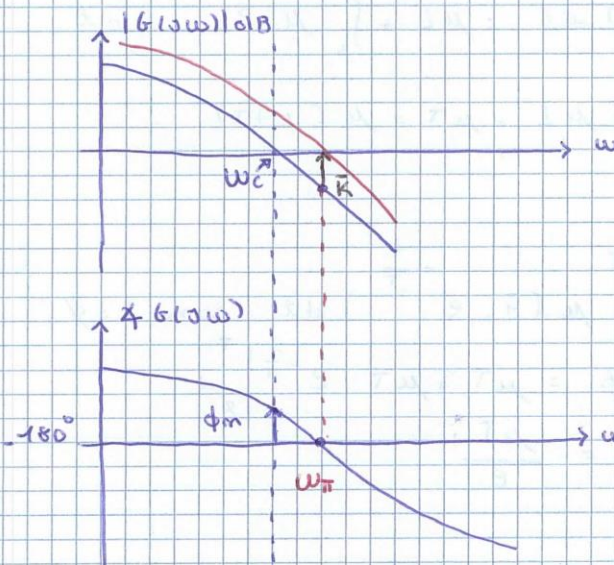
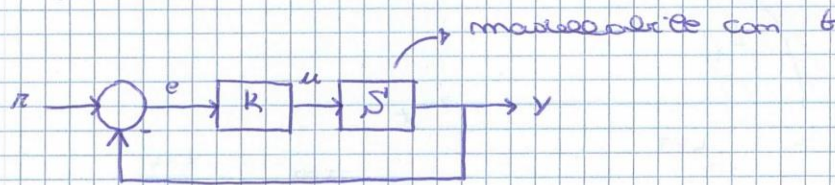
	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{\mu L}$		
PI	$\frac{0,8 T}{\mu L}$	$3L$	
PID	$\frac{1,2 T}{\mu L}$	$2L$	$0,5L$

Formule buone per sistemi in presenza di disturbi.

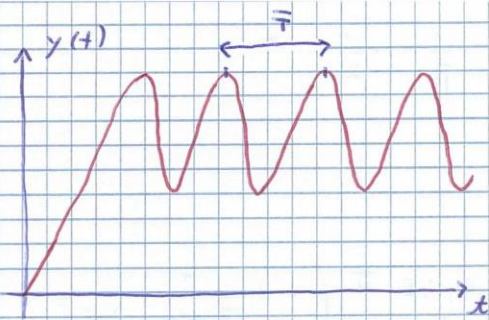
Gli zeri del PID sono coincidenti ($T_i = 4T_o$)

metodi ad anello chiuso:

Il sistema può essere destabilizzato per alti valori di guadagno in AA



$\phi_m > 0 \Rightarrow$ sistema stabile.



$\bar{K}$ guadagno critico

Metodo di Z-N in AC

	K_p	T_i	T_d
P	$0,5 \bar{K}$		
PI	$0,45 \bar{K}$	$0,8 \bar{T}$	
PID	$0,6 \bar{K}$	$0,5 \bar{T}$	$0,125 \bar{T}$

$T_i = 4 T_d \rightarrow$ zeri coincidenti

Marg. stab. = 2

- Il sistema viene poter essere portato al limite della stabilità.
- Le costanti di tempo non siano troppo grandi.

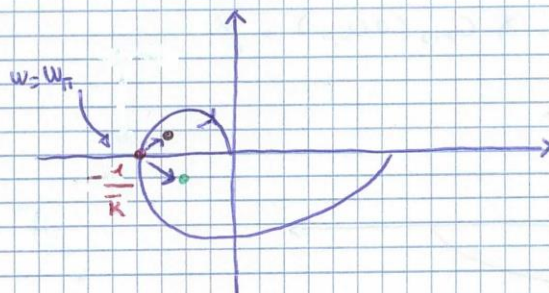
$$\bar{T} = \frac{2\pi}{\omega_\pi} \rightarrow \omega_\pi = \frac{2\pi}{\bar{T}}$$

$$|G(j\omega_\pi)| = \frac{1}{\bar{K}}$$

$$\rightarrow G(j\omega_\pi) = -\frac{1}{\bar{K}}$$

$$\angle G(j\omega_\pi) = -\pi$$

Quindi io conosco di Bode solo un punto!



Nyquist

Con un controllore P, $\frac{1}{K} = -\frac{1}{2}$

Con un C_{pi}

$$C_{pi}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

$$C_{pi}(j\omega) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot j\omega} \right) = 0,45 \cdot \bar{K} \left(1 + \frac{1}{j\omega_n \cdot 0,8\bar{T}} \right) \\ = 0,45 \bar{K} \left(1 + \frac{1}{j2\pi \cdot 0,8} \right)$$

$$G(j\omega_n) \cdot C_{pi}(j\omega_n) \approx 0,457 \cdot e^{-j(180^\circ + 11^\circ)}$$

Con un C_{pid}

$$C_{pid}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

$$C_{pid}(j\omega_n) = K_p \left(1 + \frac{1}{j\omega_n \cdot T_i} + j\omega_n \cdot 0,125 \cdot \bar{T} \right) \\ = 0,6\bar{K} \left(1 + \frac{1}{j2\pi \cdot 0,5} + j \cdot 2\pi \cdot 0,125 \right)$$

$$C_{pid}(j\omega_n) \cdot G(j\omega_n) = 0,66 \cdot e^{-j(180^\circ - 25^\circ)}$$

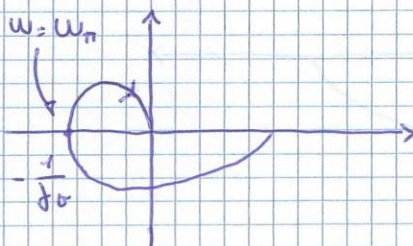
pid: Si vuole assegnare un certo margine di guadagno γ_0

$$G(j\omega_n) = -\frac{1}{\bar{K}}$$

$$K_p = \frac{\bar{K}}{\gamma_0} \text{ per un controllore P.}$$

$$K_p \cdot G(j\omega_n) = -\frac{1}{\gamma_0}$$

$$|C_{pid}(j\omega_n)| = \frac{\bar{K}}{\gamma_0}; \quad \angle C_{pid}(j\omega_n) = \phi$$



$$C_{p10}(j\omega_\pi) = \frac{\bar{K}}{\delta_G} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{T_i \cdot j\omega_\pi} + T_d \cdot j\omega_\pi \right)}_{\cancel{\phi} = \phi}$$

$$\rightarrow T_i T_d = \frac{1}{\omega_\pi^2}$$

Sotto questa condizione si costruisce una
 linea in corrispondenza di ω_π .

Zeri coincidenti: $T_i = 4 T_d$

$$\rightarrow T_i = \frac{\bar{T}}{\pi} ; T_d = \frac{\bar{T}}{4\pi}$$

$$\begin{cases} |C_{p10}(j\omega_\pi)| = \bar{K} \\ \cancel{\phi} C_{p10}(j\omega_\pi) = \phi_m \end{cases}$$

$$K_p = \bar{K} \cos(\phi_m)$$

$$T_i = \frac{\bar{T}}{\pi} \cdot \frac{1 + \sin(\phi_m)}{\cos(\phi_m)}$$

$$T_d = \frac{\bar{T}}{4\pi} \cdot \frac{1 + \sin(\phi_m)}{\cos(\phi_m)}$$

com Zeri coincidenti

