

SISTEMI DI CONTROLLO

[Fotocopie di Appunti]

A CURA DI ALESSANDRO PAGHI

PROFESSORE: Marco Casini (<http://www3.diism.unisi.it/people/person.php?id=158&aa=2015>)

LINK AL CORSO ANNO 2015/2016:

<http://www3.diism.unisi.it/FAC/index.php?bodyinc=didattica/inc.insegnamento.php&id=55078&aa=2015>

FREQUENTAZIONE: Consigliata.

Orario Ricevimento: Mercoledì 16-18, Stanza 227

Prove in itinere:

01/10/2015

- 18/11/15 (Coita e Penma)
- 17/12/15 (MATLAB)

Coloquio sul sito:

- Username: utente
- Password: SDC

07/10/2015

Sistema: qualsiasi oggetto di qualunque natura a cui vogliamo imporre un certo comportamento.

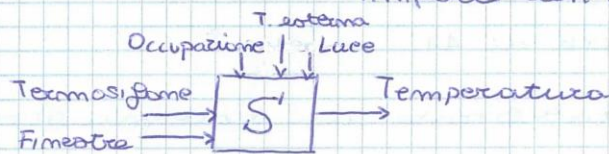
Esso interagisce con l'esterno tramite dei segnali di ingresso (CAUSE) e uscite (EFFETTI).



Ingressi $\left\{ \begin{array}{l} \text{controllabili} \\ \text{non controllabili (disturbi)} \end{array} \right.$

Uscite $\left\{ \begin{array}{l} \text{misurate} \\ \text{controllate} \end{array} \right. \text{ } \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{ spesso coincidono!}$

uscita controllata: uscita alla quale si vuole imporre un comportamento.



Comfort: temperatura + umidità.

Modello Matematico: Rappresentazione approssimata del sistema.

Modelli possono essere:

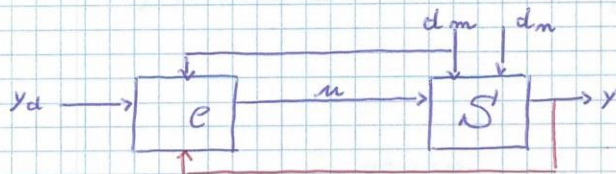
- Semplici: semplicità di calcolo;
- Complessi: migliore approssimazione;

Problema del Controllo: Data un segnale y_d (variabile di riferimento) e un sistema S , vogliamo che l'uscita y sia uguale a y_d ($y \approx y_d$) per ogni possibile disturbo.

Sistemi in anello aperto [AA]

Sistemi in anello chiuso (Retroazione) [AC]

Anello Aperto / Anello Chiuso



d_m : non misurati
 \hat{d}_m : misurati

PRO AA: semplicità, economicità.

CONTRO AA: impossibilità di far fronte a disturbi non misurati.

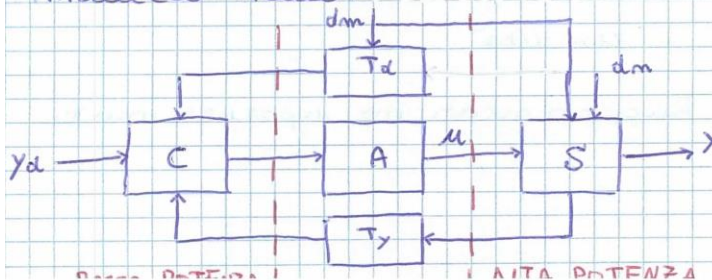
- Impossibilità di far fronte a errori di modello o variazioni di sistema.
- Impossibilità di controllare sistema instabile.

CONTRO AC: complessità, costo, *

PRO AC: sono i contro di AA

* Possibilità di destabilizzare un sistema stabile.

Modello Reale:



A: Amplificatore
 C: Controllore
 S: Sistema
 T: Trasduttori (Sensori)

Rappresentazione dei Sistemi (Modelli)

modelli possono essere:

• Statici: $y(t) = f(u(t))$

Dynamici: $y(t) = f(u(\tau))$, $\tau \leq t$

• Lineari: $u_1 \rightarrow y_1$, $u_2 \rightarrow y_2$, $K_1 u_1 + K_2 u_2 \rightarrow K_1 y_1 + K_2 y_2$

Non Lineari

• Stazionari non cambiano le caratteristiche nel tempo.
non stazionari

• Causali: $y(t) = f(u(\tau))$, $\tau \leq t$

non Causali: $y(t) = f(u(\tau))$, $\tau > t$

• Scalari (SISO)

Multivariable (MIMO)

• Tempo Continuo

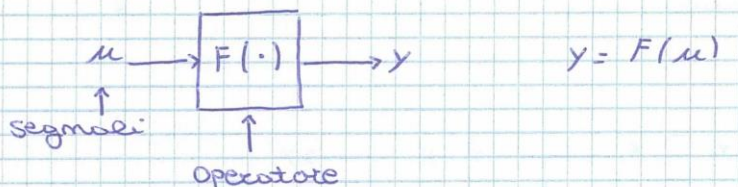
Tempo Discreto

Dati Campionati

• Parametri Concentrati

Parametri Distribuiti: va studiata la distribuzione
spettrale delle grandezze

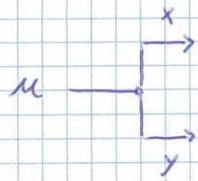
Schema a Blocchi



• Blocco Lineare

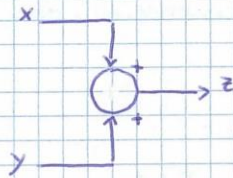


o Punto di Diramazione



$$u = x = y$$

o Blocco Sommatore



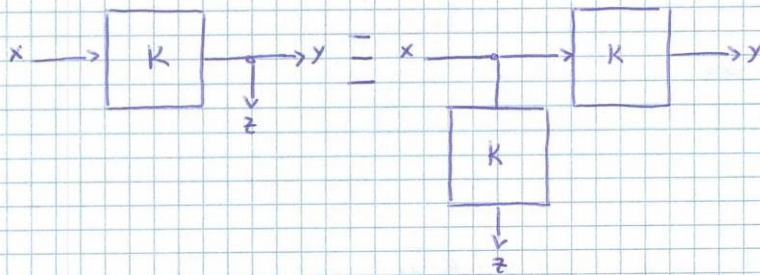
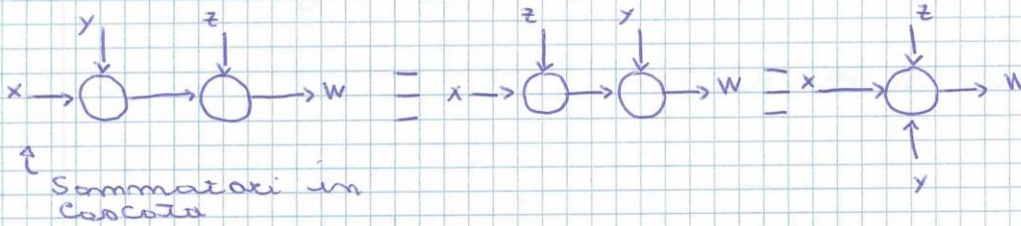
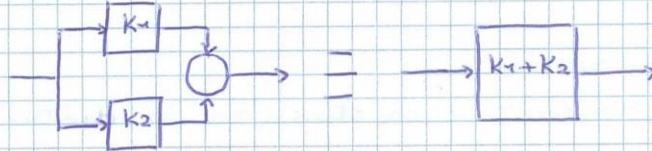
$$z = x + y$$

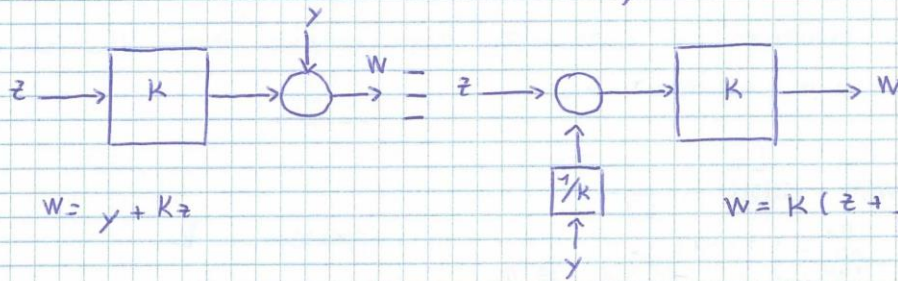
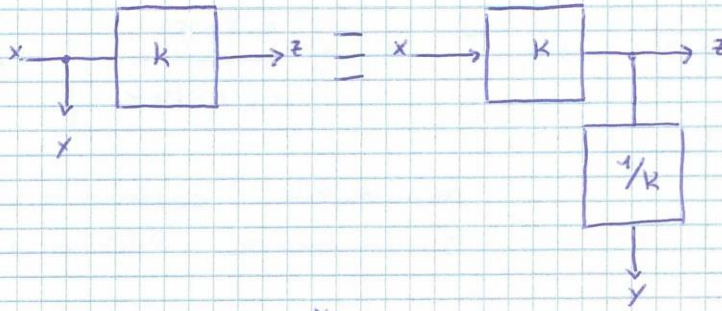
Regole di Riduzione di Sistemi a Blocchi.

Blocchi in Cascata



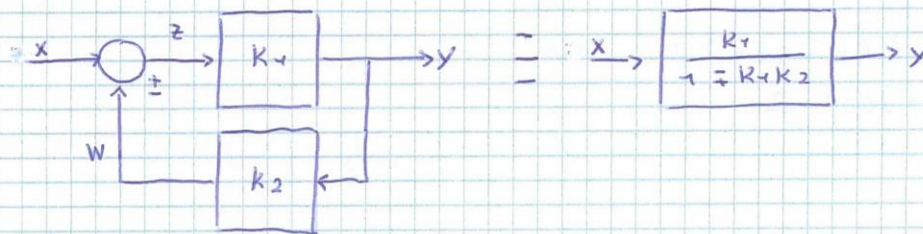
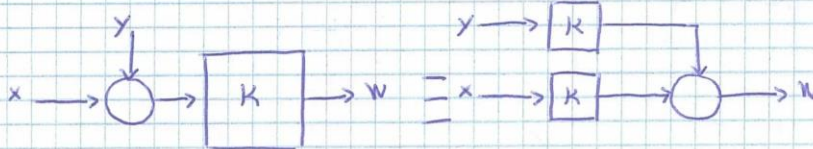
Blocchi in Parallelo





$$W = y + Kz$$

$$W = K \left(z + \frac{y}{K} \right) = Kz + y$$

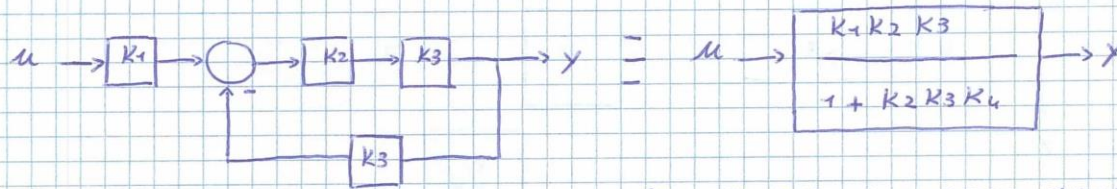


dim:

$$\begin{cases} y = K_1 z & y = K_1 (x \pm K_2 y) \\ z = x \pm W & z = x \pm K_2 y \\ W = K_2 y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &= K_1 x \pm K_1 K_2 y \\ y \mp K_1 K_2 y &= K_1 x \\ y (1 \mp K_1 K_2) &= K_1 x \end{aligned}$$

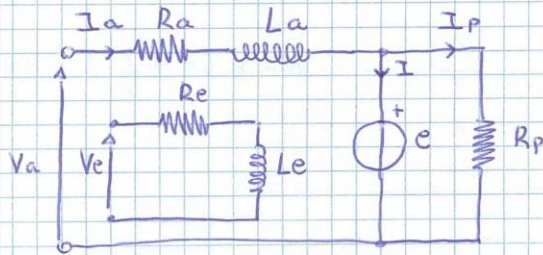
$$y = \frac{K_1}{1 \mp K_1 K_2} x$$



numeratore : catena diretta

Denominatore : Retroazione

Esempio : motore in corrente continua con comando in armatura.



ingresso : V_a

uscita : ω

$$E = k\phi\omega \quad \checkmark$$

$$E = k\phi I \quad \checkmark$$

$$I_a = I + I_p \quad \checkmark$$

$$V_a = E + (R_a + sL_a) I_a \quad \checkmark$$

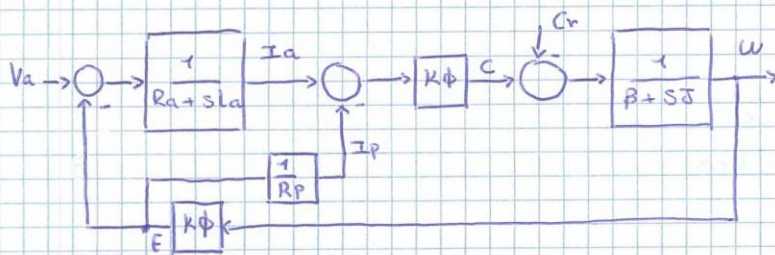
$$V_e = (R_e + sL_e) I_e$$

$$I_p = \frac{E}{R_p} \quad \checkmark$$

$$\phi \approx k_e I_e$$

$$C = (r + \omega(\beta + sT)) \quad \checkmark$$

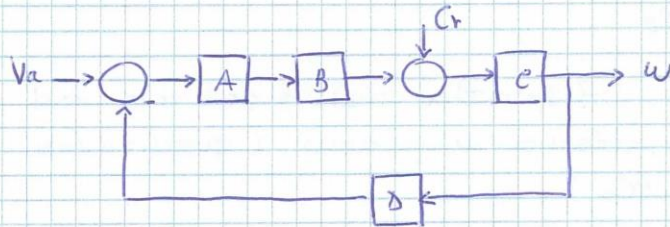
Schema a blocchi :



Ci sono due anelli di retroazione !

La velocità ω tende a rimanere stabile !

$$r \uparrow \Rightarrow E \downarrow$$



$$\frac{w}{V_a} = \frac{ABC}{1+ABCD}, \text{ considero } C_r = \emptyset$$

$$\frac{w}{C_r} = \frac{C}{1+ABCD}, \text{ considero } V_a = \emptyset.$$

Considero solo un ingresso attivo, tutti gli altri nulli.

Esempio:



$$\begin{cases} F - k_1(y_2 - y_1) - \beta(y_2 - y_1) = m_1 \ddot{y}_1 \\ k_1(y_2 - y_1) + \beta(y_2 - y_1) - k_2 y_2 = m_2 \ddot{y}_2 \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{y_2(s)}{F(s)}$$

Opero Laplace

$$\begin{cases} F(s) - k_1(y_2(s) - y_1(s)) - \beta s(y_2(s) - y_1(s)) = m_1 s^2 y_1(s) \\ k_1(y_2(s) - y_1(s)) + \beta s(y_2(s) - y_1(s)) - k_2 y_2(s) = m_2 s^2 y_2(s) \end{cases}$$

trovo $y_1(s)$ dalla seconda e sostituisco nella prima, poi trovo $G(s)$.

Variabili di Stato

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases}$$

N.B. Fino a pag. 14 della dispensa.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D.$$

Analisi Frequenziale

Risposta Impulsiva: Risposta del sistema ad un ingresso impulsivo unitario (condizione iniziale nulla).

$$u \rightarrow \boxed{g(\cdot)} \rightarrow y \quad y(t) = \int_0^t g(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

Funzioni di Trasferimento di Sistemi Lineari

Sono espresse dal rapporto di due polinomi in s .

$$G(s) = \frac{m(s)}{d(s)}$$

Rappresentazione zeri-poli:

$$G(s) = K \frac{\prod_i (s - z_i)}{\prod_j (s - p_j)} \frac{\prod_k (s^2 + 2\zeta_k \alpha_k s + \alpha_k^2)}{\prod_l (s^2 + 2\zeta_l \omega_l s + \omega_l^2)}$$

Zeri di $G(s)$ sono le radici di $m(s)$.

Poli di $G(s)$ sono le radici di $d(s)$.

ζ : coefficiente di smorzamento, $-1 < \zeta < 1$

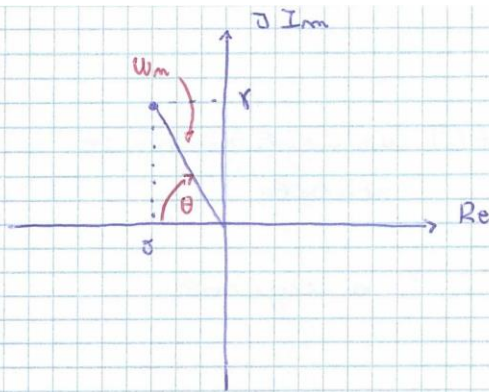
ω_n : pulsazione naturale, $\omega_n > 0$

$$(s^2 + 2s + 1)$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1 \text{ doppio}, \quad \alpha_n = 1, \quad \zeta = 1$$

$$z_{1/2} = \frac{-2 \zeta \alpha_n \pm \sqrt{4 \zeta^2 \alpha_n^2 - 4 \alpha_n^2}}{2} = -\zeta \alpha_n \pm \alpha_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\text{se } -1 < \zeta < 1 \Rightarrow z_{1/2} = -\zeta \alpha_n \pm j \alpha_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$



Rappresentazione non
conveniente.

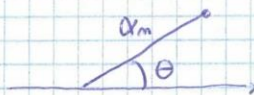
$$p = \sigma + j\gamma$$

$$\xi = \cos \theta$$

$$W_m = \sqrt{\sigma^2 + \gamma^2}$$

Proprietà usate modulo e fase:

$$\begin{cases} \text{modulo} = \alpha_m \\ \xi = \cos \theta \end{cases}$$



Forma di Bode.

$$G(s) = \frac{K_B \cdot \prod_i \left(1 - \frac{s}{z_i}\right)}{s^v \cdot \prod_j \left(1 - \frac{s}{p_j}\right) \cdot \prod_k \left(1 + \frac{2\xi_k s}{\omega_{m_k}} + \frac{s^2}{\omega_{m_k}^2}\right)}$$

\swarrow $z_i \in \mathbb{R}$ \swarrow $z_i \in \phi$
 \nwarrow $p_j \in \mathbb{R}$ \nwarrow $p_j \in \phi$

Eventuali poli in ϕ .

$$G(s) = \frac{K \cdot (s+2)}{(s^2 + 0,1s + 4)}$$

K_B : guadagno di Bode.

$$s \rightarrow \phi, \quad G(s) \rightarrow \frac{K_B}{s^v}$$

$$\begin{cases} W_m = 2 \\ 2 \cdot \xi \cdot W_m = 0,1 \Rightarrow \xi = \frac{0,1}{4} = 0,025 \end{cases}$$

$G(s)$ in forma di Bode

$$G(s) = 4 \frac{\left(1 + \frac{s}{2}\right) \cdot 2}{4 \left(1 + \frac{0,1}{4}s + \frac{1}{4}s^2\right)} = \frac{2 \cdot \left(1 + \frac{s}{2}\right)}{K_B \left(1 + \frac{2 \cdot 0,025}{2} \cdot s + \frac{s^2}{4}\right)}$$

Risposta in Frequenza



$G(s)$ asintoticamente stabile.

$$u(t) = A \cdot \sin(\omega t) \quad , \quad y(t) = ? \text{ a regime}$$

$$U(s) = A \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$G(s) = \frac{m(s)}{\prod_i (s + p_i)}$$

p_i possono anche $\in \mathbb{C}$.

$$Y(s) = A \omega \cdot m(s) \cdot \frac{1}{\prod_i (s + p_i) (s^2 + \omega^2)} = G(s) \frac{A \omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} [Y(s)] = \underbrace{\frac{k_1}{s+p_1} + \frac{k_2}{s+p_2} + \dots + \frac{k_m}{s+p_m}}_{Y_b} + \underbrace{\frac{K}{s-j\omega} + \frac{K^*}{s+j\omega}}_{Y_u}$$

$t \rightarrow \infty$

Per $t \rightarrow +\infty$, $Y_b \rightarrow \phi$ per la stabilità

$$K = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) \cdot G(s) \cdot \frac{A \omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$= \lim_{s \rightarrow j\omega} \frac{1}{s + j\omega} \cdot G(s) \cdot A \omega = G(j\omega) \cdot A \cdot \cancel{\omega} \cdot \frac{1}{2j\omega} \cdot \frac{j}{j}$$

$$= -\frac{jA}{2} \cdot G(j\omega)$$

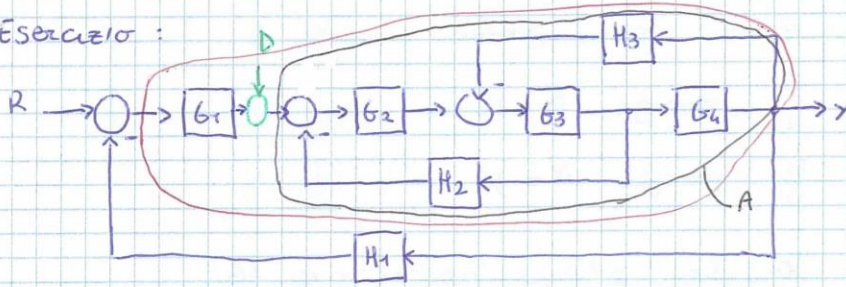
$$K^* = \frac{jA}{2} \cdot G(-j\omega)$$

$$\begin{aligned} y_b(t) &= -\frac{jA}{2} G(j\omega) \cdot e^{+j\omega t} + \frac{jA}{2} G(-j\omega) e^{-j\omega t} \\ &= \frac{A}{2j} \left[|G(j\omega)| \cdot e^{j\phi} G(j\omega) \cdot e^{+j\omega t} - |G(j\omega)| \cdot e^{-j\phi} G(j\omega) \cdot e^{-j\omega t} \right] \\ &= A |G(j\omega)| \cdot \left[\frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \right] \\ &= A |G(j\omega)| \cdot \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Da $G(s)$ devo sapere: $|G(j\omega)|$, $\forall \omega$
 $\phi G(j\omega)$, $\forall \omega$

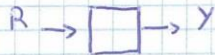
Esercizio:

08/10/2015

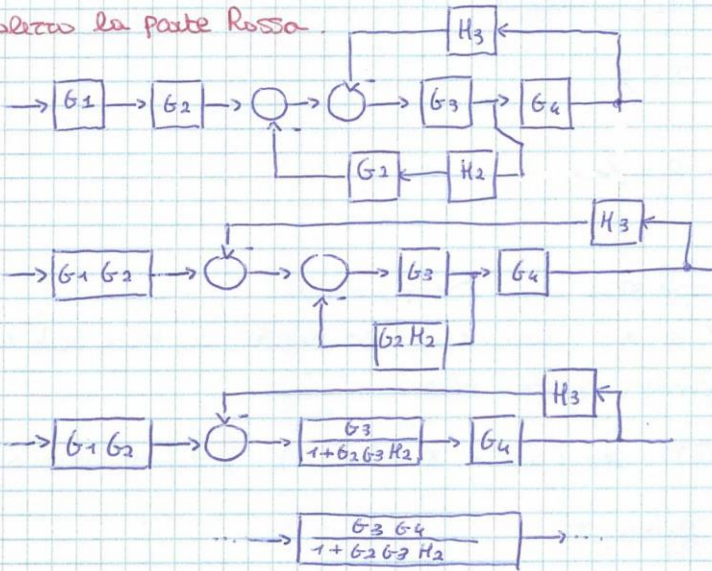


Risultato:

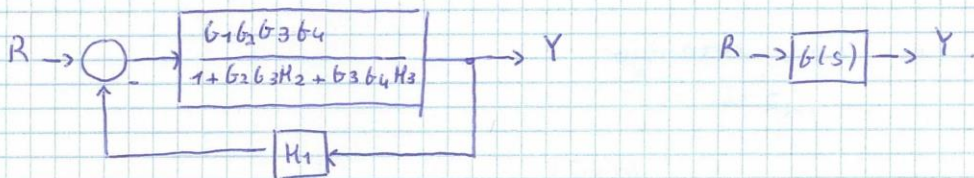
D annullata



Analizziamo la parte Rossa



$$\frac{G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 H_2} = \frac{G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 H_2} = \frac{G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 H_2 + G_3 G_4 H_3} \cdot \frac{1 + G_3 G_4 H_3}{1 + G_3 G_4 H_3}$$



$$\frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 H_2 + G_3 G_4 H_3} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 H_2 + G_3 G_4 H_3 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_1}$$

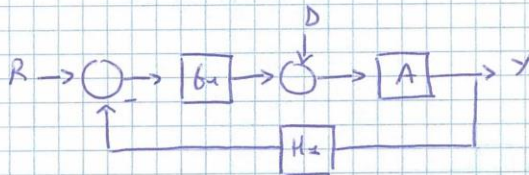
$$= G(s)$$

Metodo di procedura se si conosce anche D

Per calcolare $\frac{Y}{R}$ pongo $D = \emptyset$

Per calcolare $\frac{Y}{D}$ pongo $R = \emptyset$

Oppure posso trovare l'equivalente di \textcircled{A} .



$$\frac{Y}{R} = \frac{G_1 A}{1 + G_1 A H_1} \quad \text{con } D = \emptyset$$

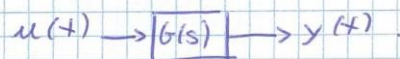
$$\frac{Y}{D} = \frac{A}{1 + G_1 A H_1} \quad \text{con } R = \emptyset$$

Teorema della Risposta in Frequenza

Sia $G(s)$ una f. d. t. stabilita e sia $u(t) = A \sin(\omega t)$
allora, a regime, vale che:

$$y(t) = A \cdot |G(j\bar{\omega})| \cdot \sin(\bar{\omega}t + \angle G(j\bar{\omega})) \quad \forall \text{ cond. iniziali}$$

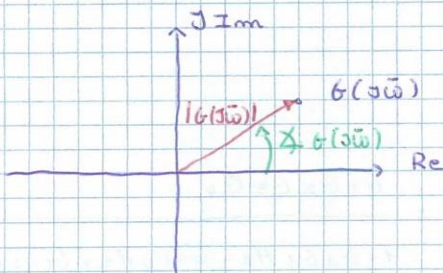
con $\bar{\omega} \in \mathbb{R}^+$, $\bar{\omega}$ fissato.



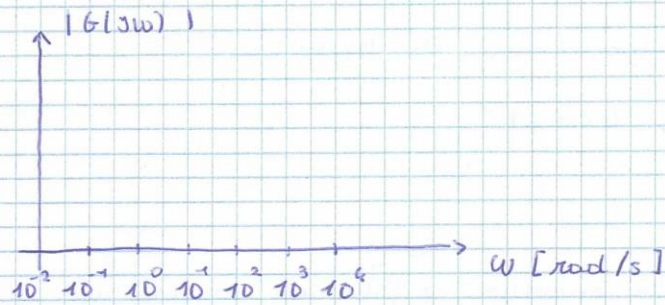
Sarebbe interessante dato $G(s)$, trovare:

$$|G(j\omega)| \quad \text{e} \quad \angle G(j\omega), \quad \forall \omega > \emptyset.$$

Fissato un $\bar{\omega}$, ottengo:



Secondo Bode :



Sono interessato solo alle $w \geq \phi$, e stessa cosa per il modulo.

Problema : voglio studiare per w piccoli e grandi, non di medie dimensioni.

\Rightarrow uso una scala logaritmica

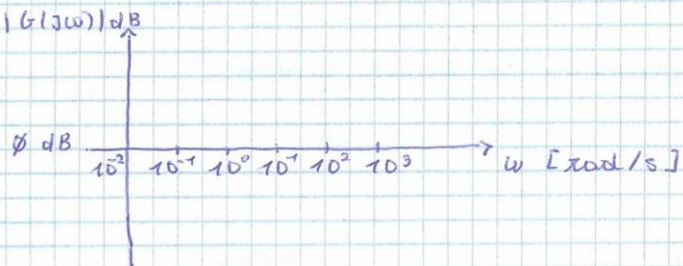
Sull'asse w , non posso mettere ϕ !

Stesso problema esiste per l'asse $|G(jw)|$, posso avere valori piccoli e grandi.

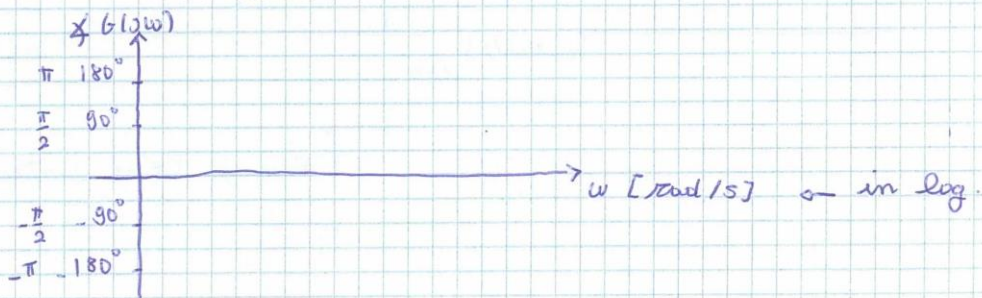
\Rightarrow uso una scala in dB.

$$M_{dB} = 20 \log_{10} M.$$

A questo punto però $|G(jw)|_{dB}$ può anche essere < 0 .



Per quanto riguarda la fase :



$$G(s) = 10$$

Fare i diagrammi di Bode:

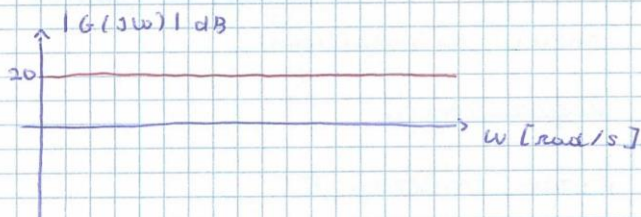
$$G(s) \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega)$$

$$G(j\omega) = 10$$

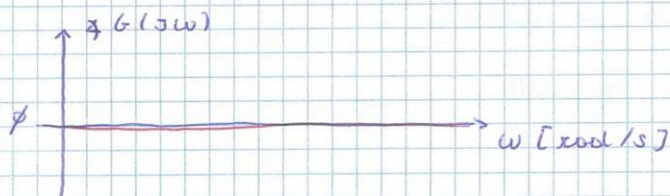
Quanto vale modulo e fase se variano di ω ?

$$|G(j\omega)| = 10$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20$$



$$\angle G(j\omega) = 0^\circ$$

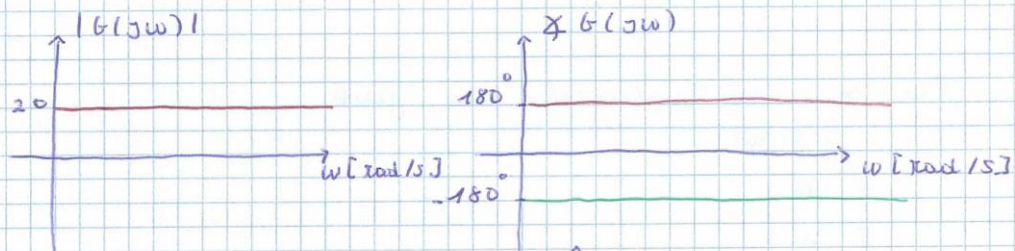


$$G(s) = -10$$

$G(s)$ diverse, diagrammi di Bode diversi!

$$|G(j\omega)| = 10$$

$$\angle G(j\omega) = 180^\circ$$



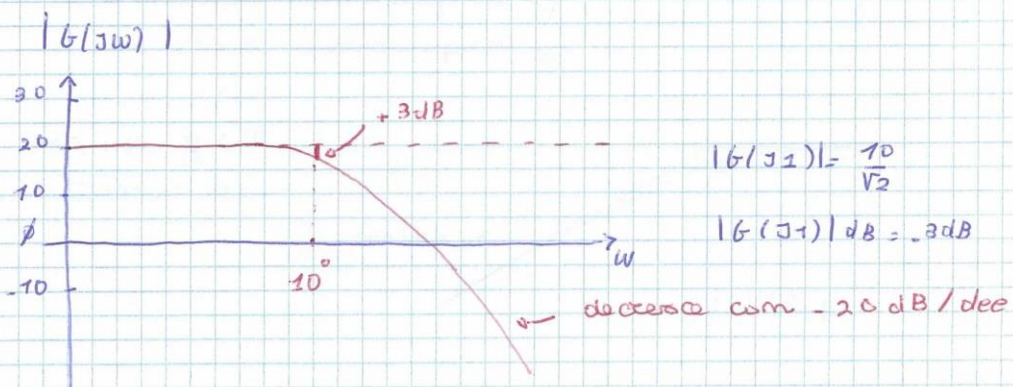
$$G(s) = \frac{10}{s+1}$$

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega+1} = \frac{10}{1+j\omega} \cdot \frac{1-j\omega}{1-j\omega} = \frac{10-j10\omega}{1+\omega^2}$$

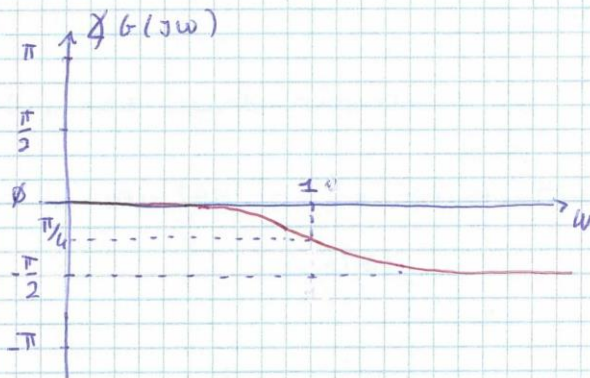
$$= \frac{10}{1+\omega^2} + j \cdot \frac{-10\omega}{1+\omega^2}$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{10}{1+\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{-10\omega}{1+\omega^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{100}{(1+\omega^2)^2} + \frac{100\omega^2}{(1+\omega^2)^2}}$$

$$= \frac{1}{1+\omega^2} \sqrt{100+100\omega^2} = \frac{10}{1+\omega^2} \sqrt{1+\omega^2} = \frac{10}{\sqrt{1+\omega^2}}$$



$$\angle G(j\omega) = \arctg\left(\frac{-10\omega}{10}\right) = \arctg(-\omega)$$



$$u(t) = 3 \sin(87t)$$

$$y(t) = 3 \cdot |G(j87)| \sin(87t + \angle G(j87))$$

$$G(s) = \frac{10}{s+10} = \frac{1}{1 + \frac{s}{10}}$$

Regole per tracciare grafici di Bode.

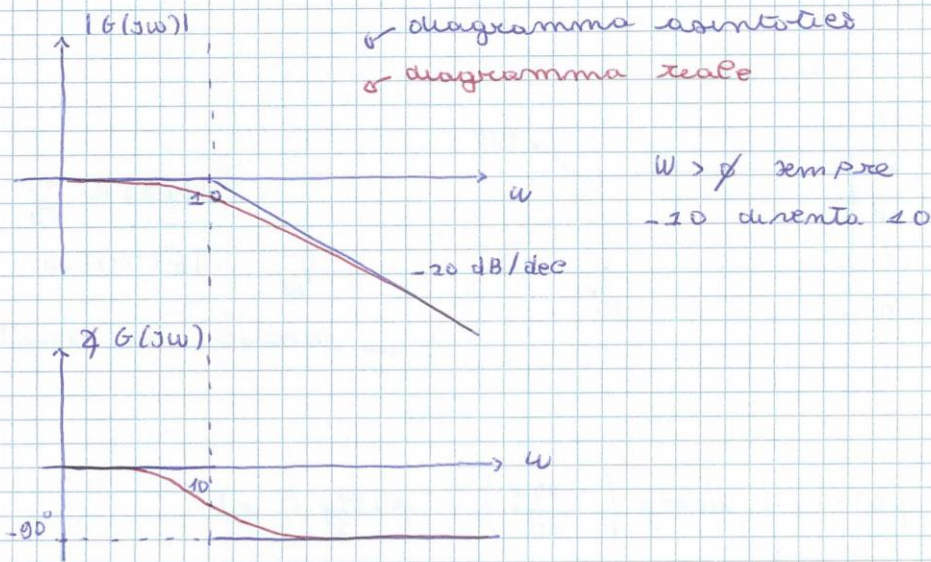
m zeri reali

n poli reali

• Metto la funzione in forma di Bode e traccio il diagramma asintotico.

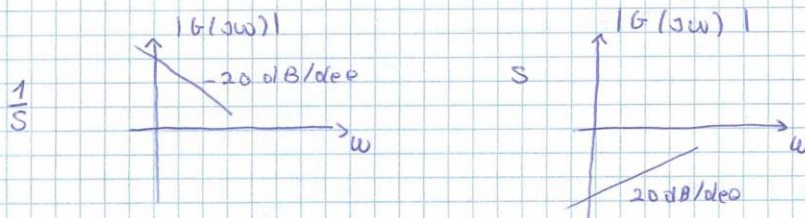
$K_B = 1$

Polo in -10 .



1. I poli "funzionano" al contrario degli zeri, più nel modulo che nella fase.

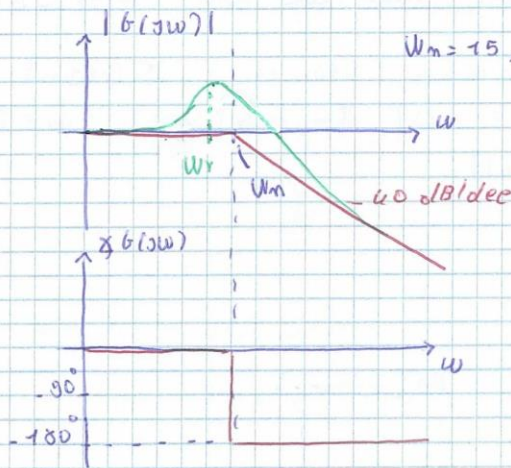
2. Ogni polo dà un contributo di -20 dB/dec al modulo.



3. Ogni polo $\text{Re}[p_i] < 0 \rightarrow -90^\circ$
Ogni polo $\text{Re}[p_i] > 0 \rightarrow +90^\circ$

Pole complessi coniugati

$$1 + \frac{2}{\omega_n} \zeta s + \frac{s^2}{\omega_n^2}, \quad \begin{cases} -1 < \zeta < 1 \\ \omega_n > \phi \end{cases}$$



$$\zeta = \cos \theta.$$

- Se $\zeta > \phi \rightarrow \text{Re}[p_i] < \phi$
- Se $\zeta < \phi \rightarrow \text{Re}[p_i] > \phi$
- Se $\zeta = \phi \rightarrow \text{Re}[p_i] = \phi$

Viene raddoppiato rispetto ai poli semplici in quanto i poli sono doppi.

- DIAGRAMMA ASINTOTICO
- DIAGRAMMA REALE

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$|\zeta| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ si ha un picco!

$$|G(j\omega_r)| = \frac{1}{2|\zeta| \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$|\zeta| \approx 1$ allora passo asintotico!

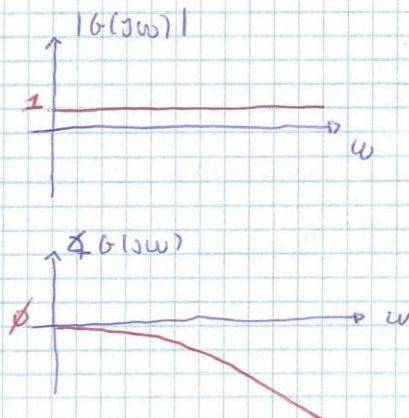
$$1 + \frac{s^2}{\omega_n^2} \xrightarrow{s=j\omega} 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$$

$$G(s) = e^{-st}$$

$$G(j\omega) = e^{-j\omega t}$$

$$|G(j\omega)| = 1$$

$$\phi_G(j\omega) = -\omega t$$



14/10/2015

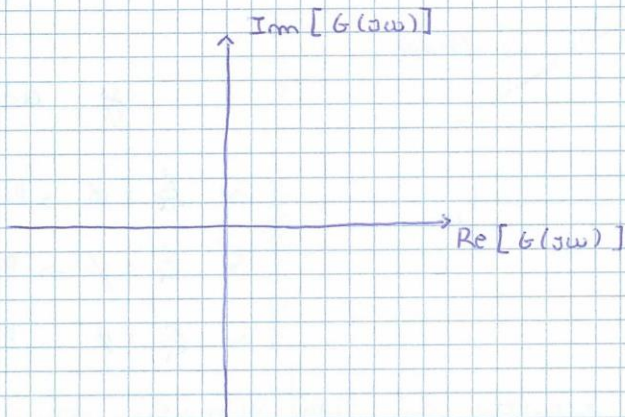
Diagrammi di Nyquist

Otteniamo da un sistema una f.d.t. $G(s)$

Dal teorema della Risposta in Frequenza so che: $G(s) \rightarrow G(j\omega), \forall \omega$

Con Bode, in un grafico traccio $|G(j\omega)|$ e $\angle G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}$.

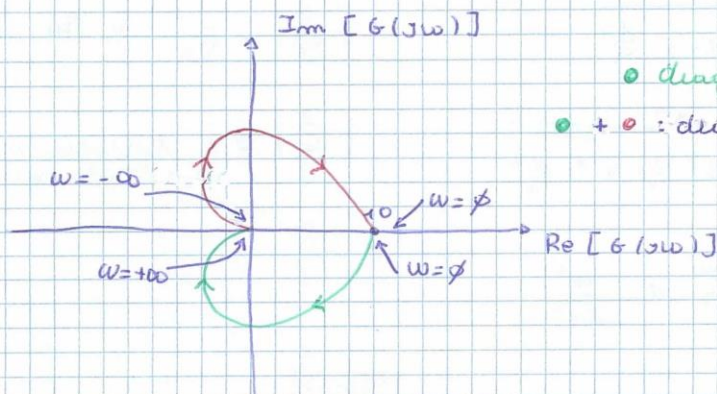
Con Nyquist traccio $\text{Re}[G(j\omega)], \text{Im}[G(j\omega)], \omega \in \mathbb{R}$.



Prima parliamo dei diagrammi Polari:

traccio $\text{Re}[G(j\omega)], \text{Im}[G(j\omega)], \omega \in \mathbb{R}$

Supponiamo $G(s) = \frac{100}{(s+1)(s+10)}$



$$G(j\omega) = \frac{100}{(j\omega+1)(j\omega+10)}$$

Per Nyquist, specchio -e Polare rispetto a $\text{Re}[G(j\omega)]$

Diagramma di Nyquist:

- ORIENTATO
- CHIUSO

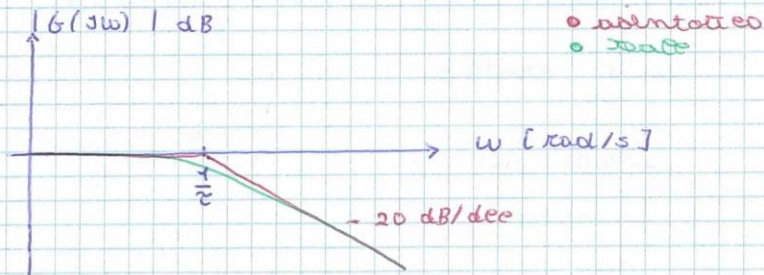
non è facile passare da $G(s)$ a Nyquist.

Quindi: $G(s) \Rightarrow$ Bode \Rightarrow Nyquist!

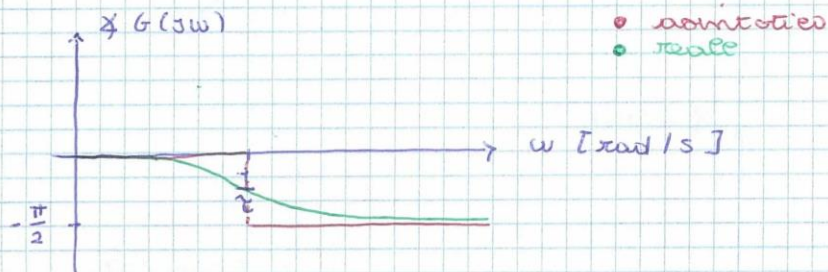
Esempi:

$$G(s) = \frac{1}{1+s\tau}, \quad \tau > 0 \quad \text{sistema del 1° ordine}$$

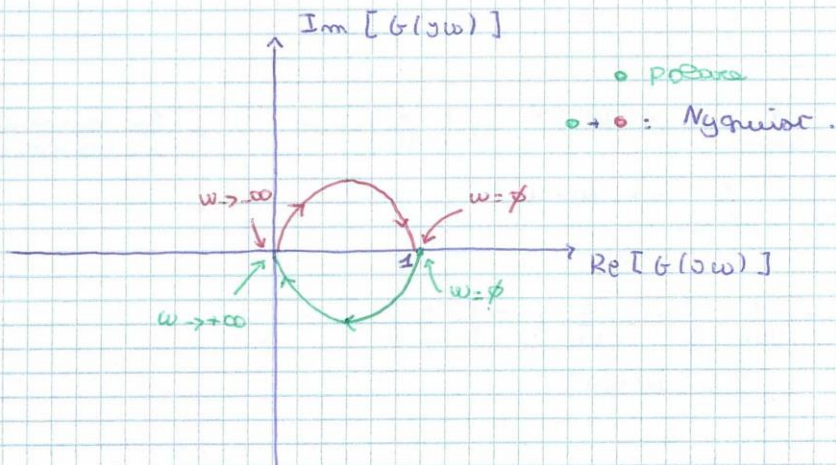
$$\begin{cases} K_B = 1 \\ p = -\frac{1}{\tau} \end{cases} \Rightarrow 1+s\tau \Big|_{s=-\frac{1}{\tau}} = 0 \quad \text{ok è un polo!}$$



Parto dal valore di K_B : $K_B = 1 \Rightarrow K_B \text{ dB} = 0$



Nyquist:



$w \rightarrow 0 \Rightarrow$ Nyquist parte da K_B .

Nyquist è una traduzione di Bode.

$|G(j\omega)| < 1$ quindi polo verso sinistra, solo se $|G(j\omega)| > 1$ allora polo verso destra (da K_B).

$\angle G(j\omega) < \phi$ quindi mi muovo verso il basso.

Se modulo diminuisce sempre, quindi caduta in (ϕ, ϕ) .

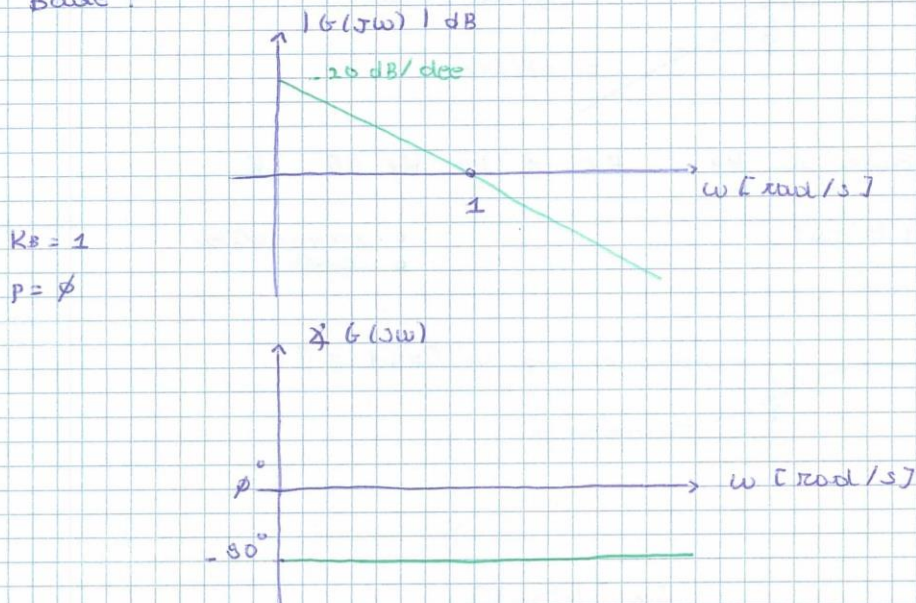
Fase tutta negativa, quindi sta tutto nel II° quadrante.

INTEGRATORE

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad u(s) \rightarrow \left[\frac{1}{s} \right] \rightarrow y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$$

$G(s)$ non è punto stabile.

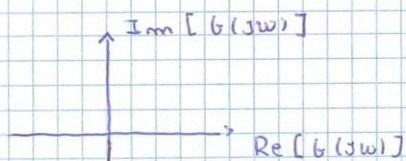
Bode:



$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \Rightarrow \omega = ? \rightarrow \left| \frac{1}{j\omega} \right| = 1 \quad \leftarrow \text{Per determinare l'intersezione con } \omega$$

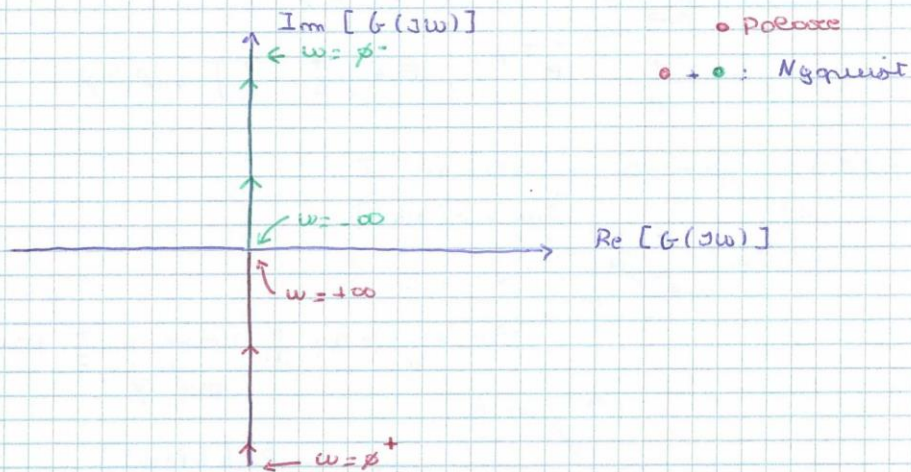
$$\left| \frac{1}{j\omega} \right| = \frac{1}{\omega} \Rightarrow \omega = 1!$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{j}{j} = -\frac{j}{\omega} = \left(-\frac{1}{\omega} \right)$$



ω sta su questo punto $\Rightarrow \angle G(j\omega) = -90^\circ!$

Nyquist:



$w = \phi$ non lo posso prendere

$w = \phi^+$ il modulo tende a $\infty \Rightarrow$ sono infinitamente distante da (ϕ, ϕ)

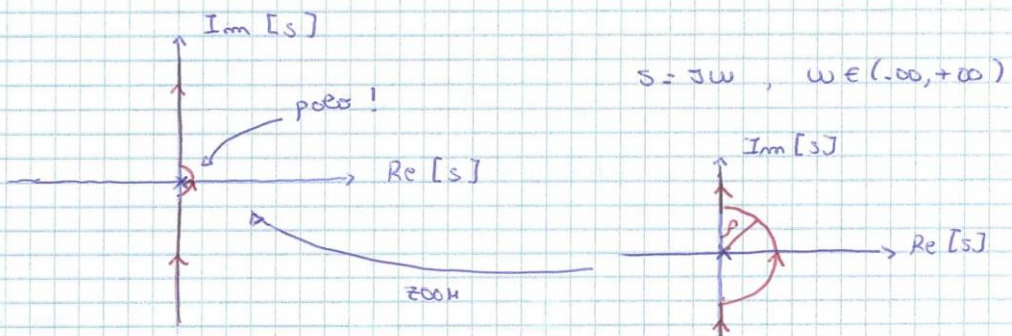
la fase però deve essere -90° quindi sta in fondo a zero $\text{Im}[G(jw)]$.

$w = +\infty$ cade in (ϕ, ϕ)

Vedono subito se risulterà perché $\text{Re}[G(jw)] = \phi \forall w!$

Nyquist: $w \in (-\infty, +\infty) \Rightarrow$ problema in $w = \phi!$

Supponiamo il piano complesso [s]



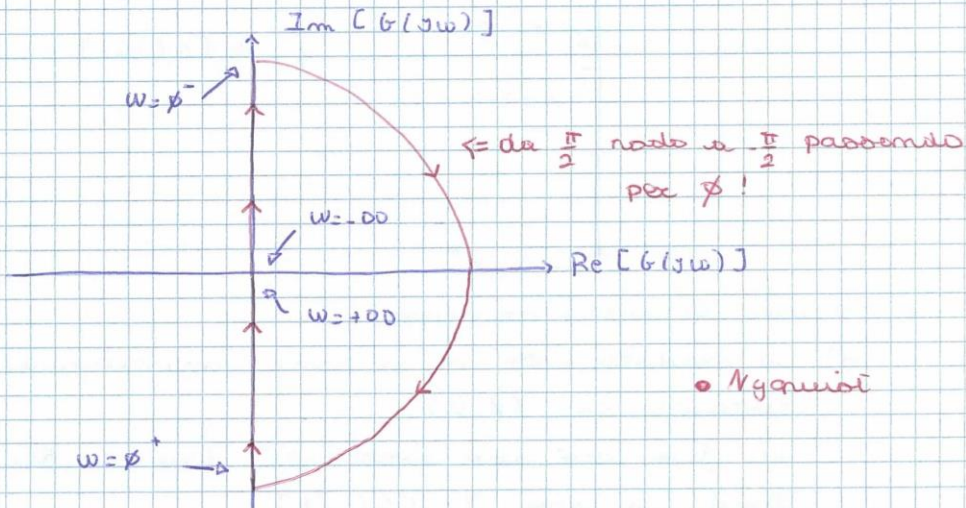
non posso passare in (ϕ, ϕ) quindi gli giro intorno

$$s = \rho \cdot e^{j\theta}, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \rho \rightarrow \phi$$

Ma questa traccia ogni volta che ho un polo su $\text{Im}[G(jw)]$

quindi: $G(s) = \frac{1}{p \cdot e^{-s\theta}}$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $p \rightarrow \phi$
 $= \frac{1}{p} \cdot e^{s\theta}$, $\theta \in [\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$, $p \rightarrow \phi$

il risultato finale quindi è:



Ripetere un giro orario, sempre!

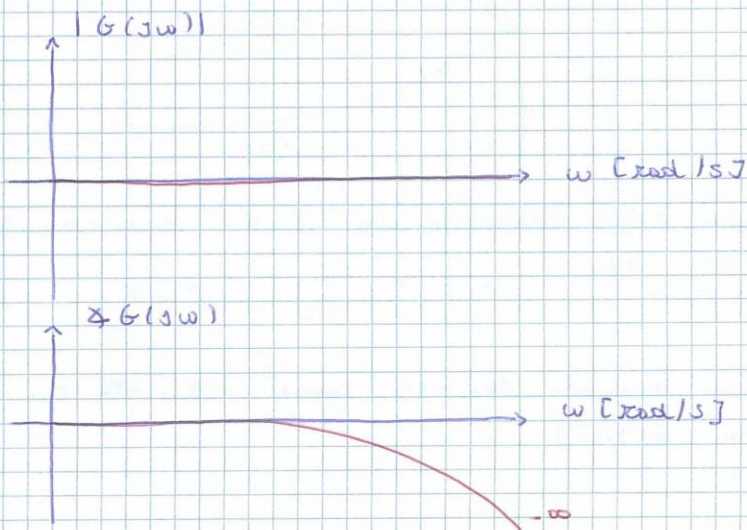
Ripetere di π , \forall polo su parte Im.

LINEA DI RITARDO

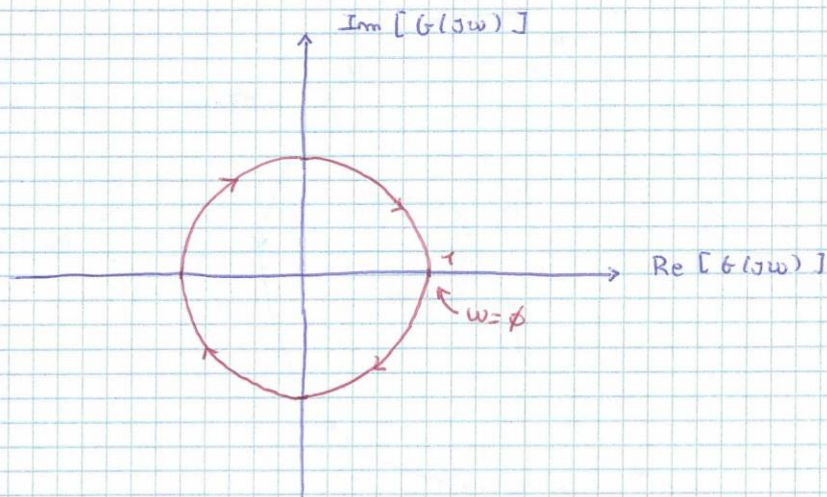
$G(s) = e^{-sT}$, ritardo di T secondi.

$G(jw) = e^{-jwT}$ $|G(jw)| = 1$
 $\angle G(jw) = -wT$

Bande:



Nyquist



$$w=0 : \begin{cases} |G(jw)| = 1 \\ \angle G(jw) = 0 \end{cases}$$

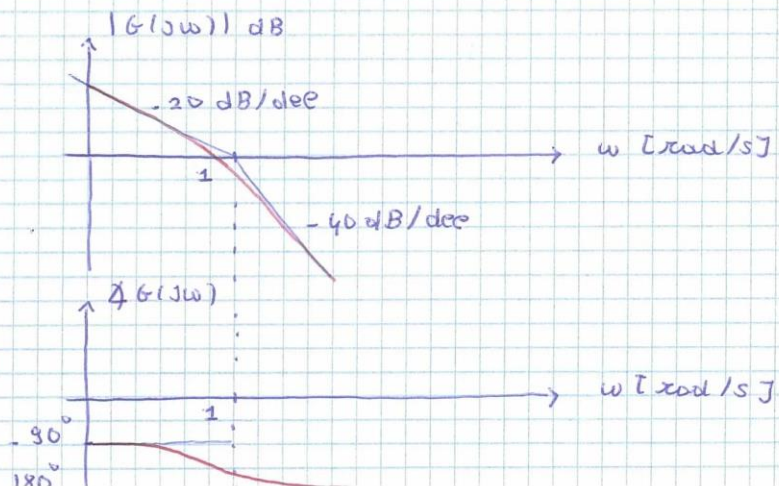
modulo costante e fase 1, non posso uscire da una circonferenza di raggio 1.

$w = \infty$: non lo posso vedere perché la fase non è determinata. Si gira infinite volte sulla circonferenza.

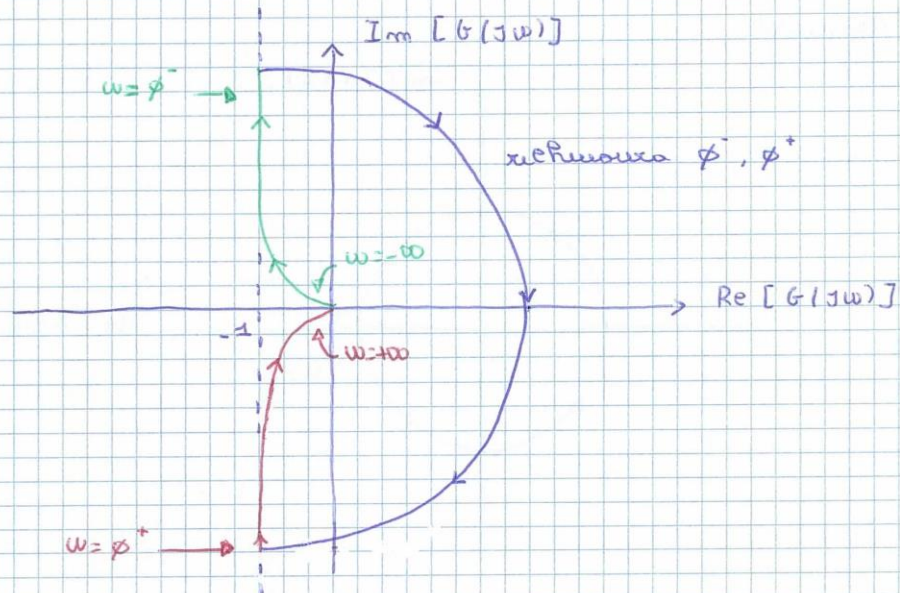
$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$\begin{cases} K_B = 1 \\ p = 0 \\ p = -1 \end{cases}$$

Bode:



Nyquist:



Cominciamo a tracciare il polo

$$\omega = \phi^-: |G(j\omega)| = +\infty$$

$\angle G(j\omega) = -90^\circ$ \leftarrow in realtà tende a -90° non è esattamente 90° .

Quindi posto un polo a sinistra perché:

$$-90^\circ < \angle G(j\omega) < -180^\circ$$

N.B. meglio la scala per motivi grafici!

Il modulo decresce sempre quindi cade in (ϕ^-, ϕ^+) .

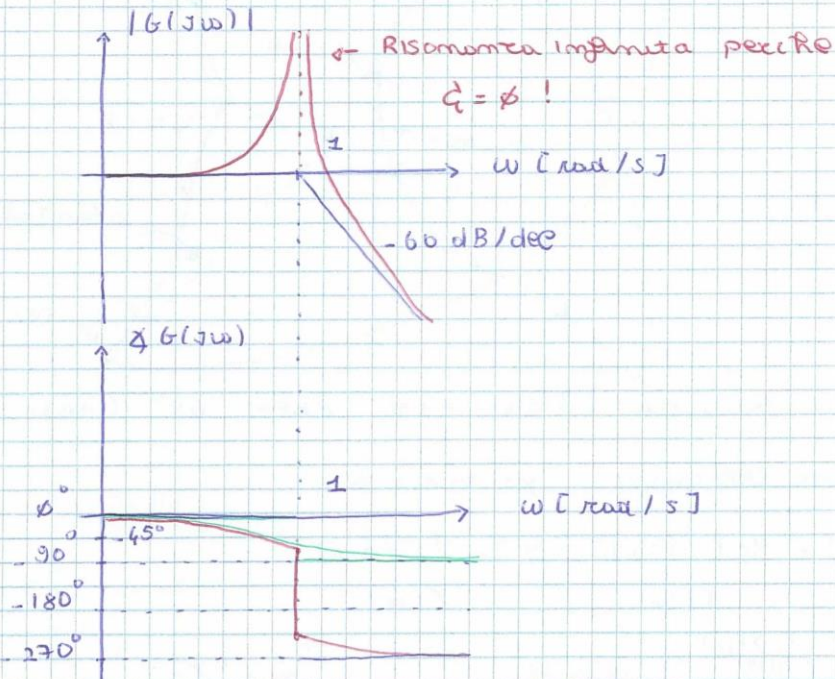
Voglio calcolare l'asintota:

$$\lim_{\omega \rightarrow \phi^+} \text{Re}[G(j\omega)] = -1$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$$

$$\begin{cases} k_B = 1 \\ p = -1 \\ p \rightarrow \begin{cases} \omega_n = 1 \\ \zeta = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Bode:



Come se mi avesse non si cura dei diag. bode. anche la fase fa la stessa cosa!

Facciamo finta non ci sia $\frac{1}{(s^2+1)}$ in $G(s)$ •

Agg. $\frac{1}{(s^2+1)}$, la fase prima di $\omega_n = 1$ è la stessa.

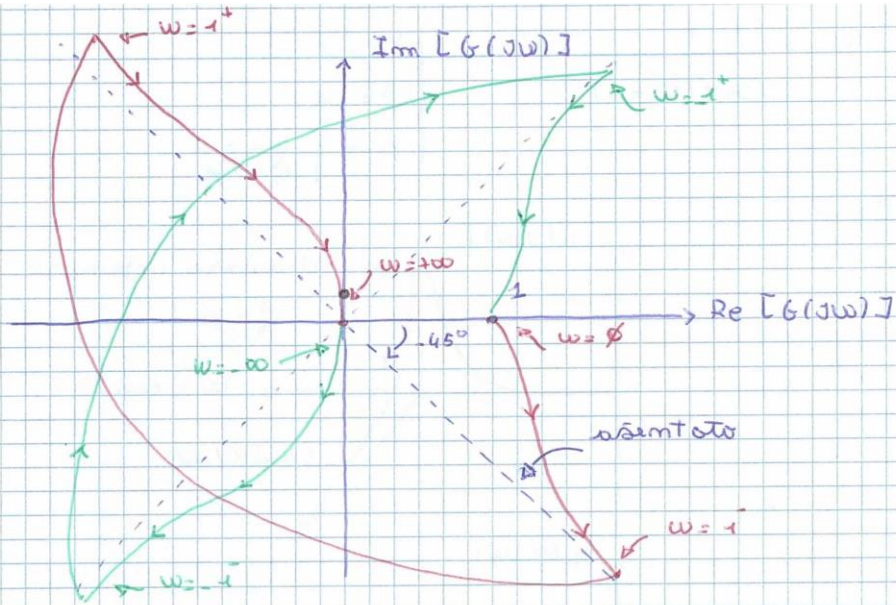
Passato $\omega_n = 1$, la fase si abbassa di 180° .

Potemo anche abbassare di 180° , non era un errore.

Ho potuto fare questo perché $\zeta = 0$, se $\zeta \neq 0$ avremmo dovuto un po' scostarci e discontinuità!

Nyquist \Rightarrow

Nyquist:



Da fare quando $|G(jw)| = +\infty$ nasce 45° (vedi Bode).

Asintoto Obliquo: $y = mx + n$

$$G(jw) = \text{Re}[G(jw)] + j \text{Im}[G(jw)]$$

$$X(w) \quad Y(w)$$

$$m = \frac{\frac{d}{dw} Y(w)}{\frac{d}{dw} X(w)}, \quad w \rightarrow w^*$$

$$m = -1$$

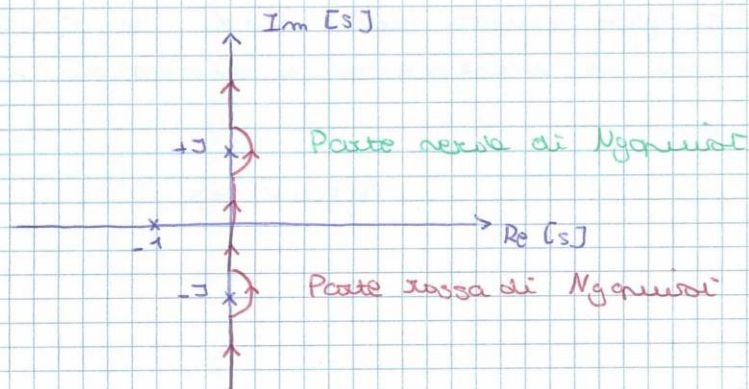
$n = 0,25!$ per cui il diagramma è sfasato. Il

nesso asintoto passa più in alto.

$$n = Y(w) - mX(w).$$

N.B. il piano complesso $[s]$ può essere sempre associato al piano in cui si rappresenta $[G(s)]$ in modulo e fase.

Piano $[s]$ associato al prec. esercizio

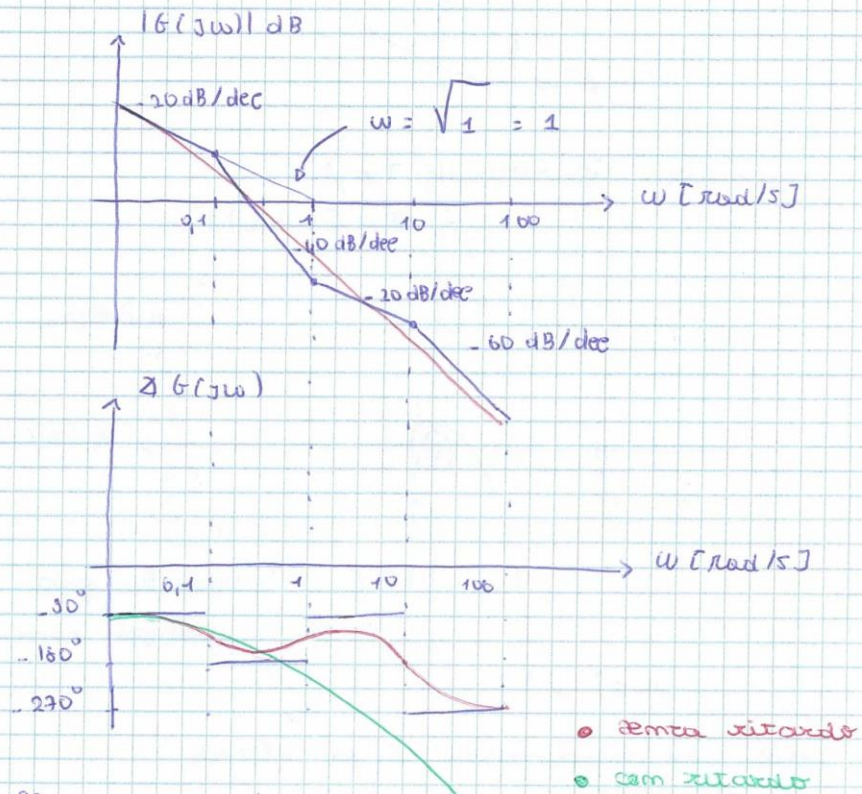


$$G(s) = \frac{e^{-sT}}{s(1+10s)(1+0,1s)^2}$$

$T = \phi$
 ↑
 assumiamo ritardo nullo

$$\left\{ \begin{array}{l} K_B = 1 \\ p = \phi \\ p = -0,1 \\ z = -1 \\ p = -10 \text{ doppio} \end{array} \right.$$

Bode:



In generale:

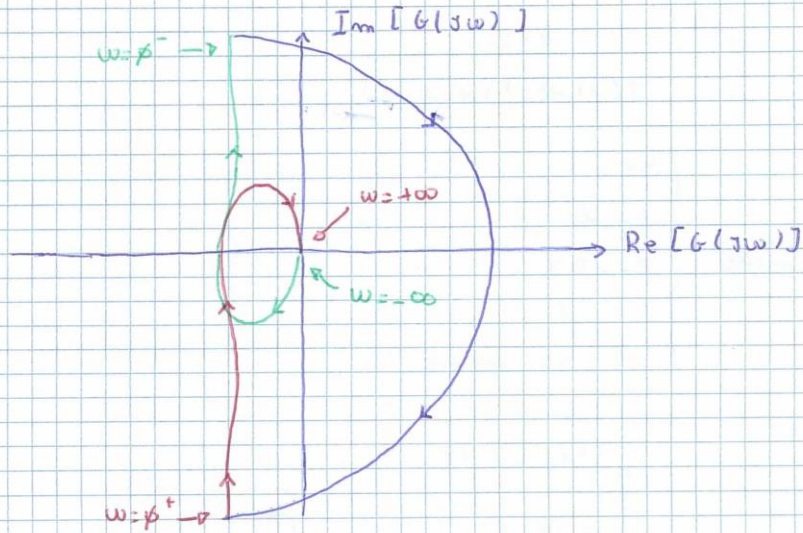
$$G(jw) = \frac{K_B}{(jw)^v} \cdot \frac{\prod (1 \pm jw/\omega_z)}{\prod (1 \pm jw/\omega_p)}$$

per $w \rightarrow \phi$

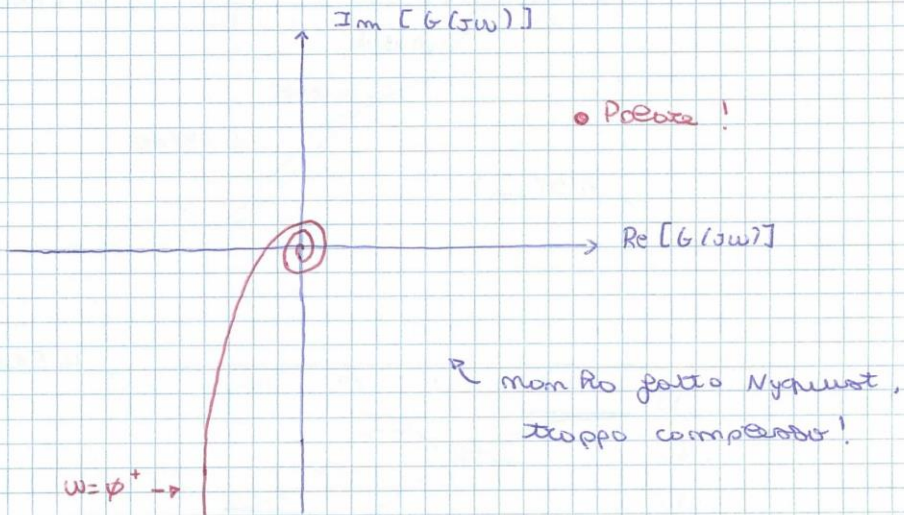
$$|G(jw)| = \frac{|K_B|}{w^v}, \quad w \rightarrow \phi$$

$$\frac{|K_B|}{w} = 1 = \phi \text{ dB} \rightarrow w = \sqrt[v]{|K_B|}$$

Nyquist:



Adesso considero il ritardo $T \neq \phi$



Per w piccolo il diagramma è lo stesso

Diagrammi di Nichols

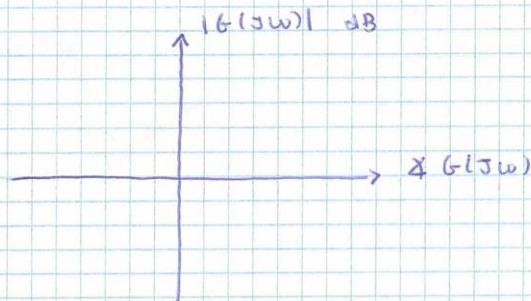
$G(j\omega)$

Bode: $|G(j\omega)|$, $\omega \geq 0$

$\angle G(j\omega)$, $\omega \geq 0$

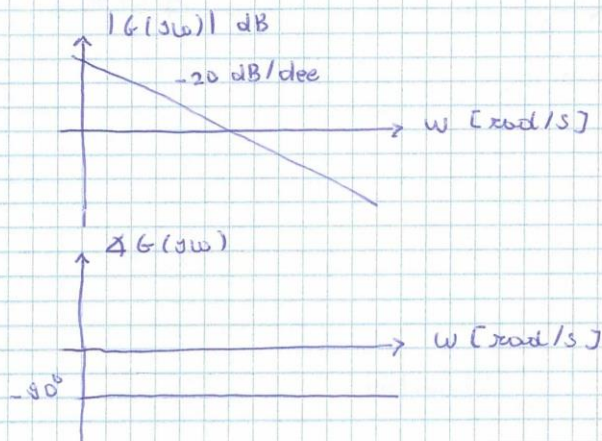
Nyquist: $\text{Re}[G(j\omega)]$, $\text{Im}[G(j\omega)]$, $\omega \in \mathbb{R}$

Nichols: $|G(j\omega)|$, $\angle G(j\omega)$, $\omega \geq 0$

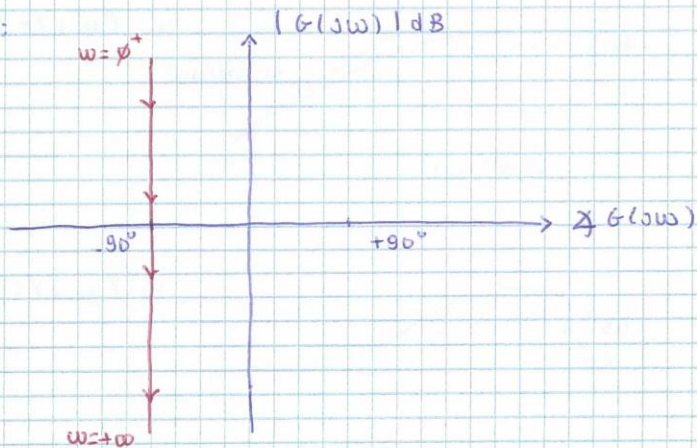


$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Bode:

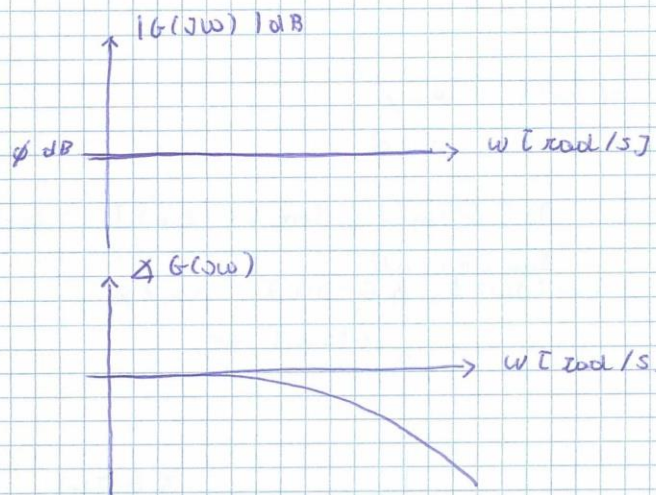


Nichols:

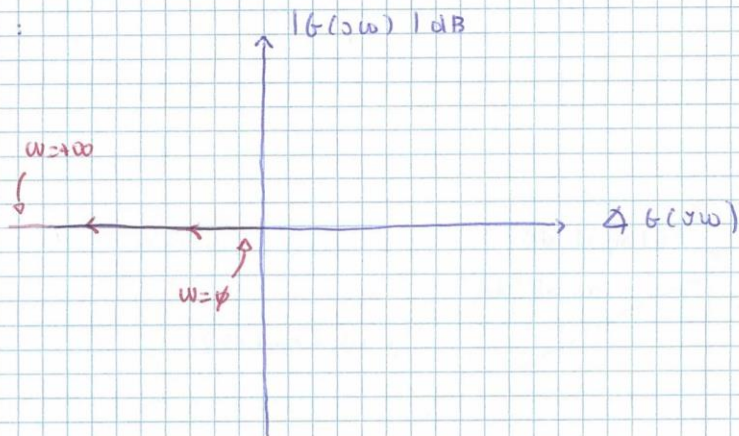


$$G(s) = e^{-sT}$$

Bode:

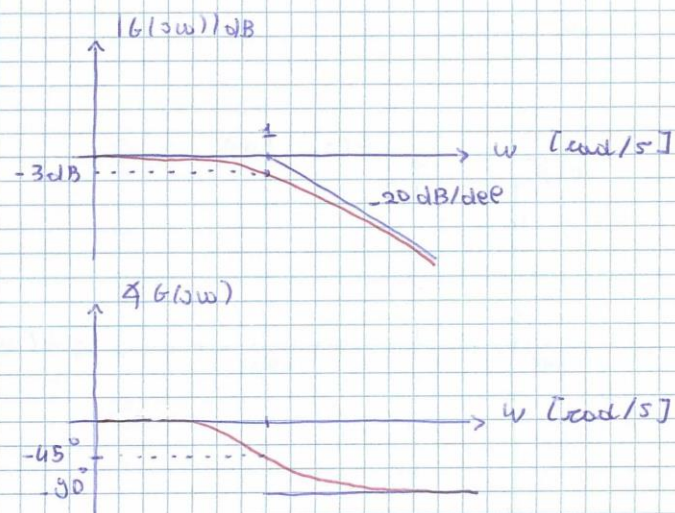


Nyquist:

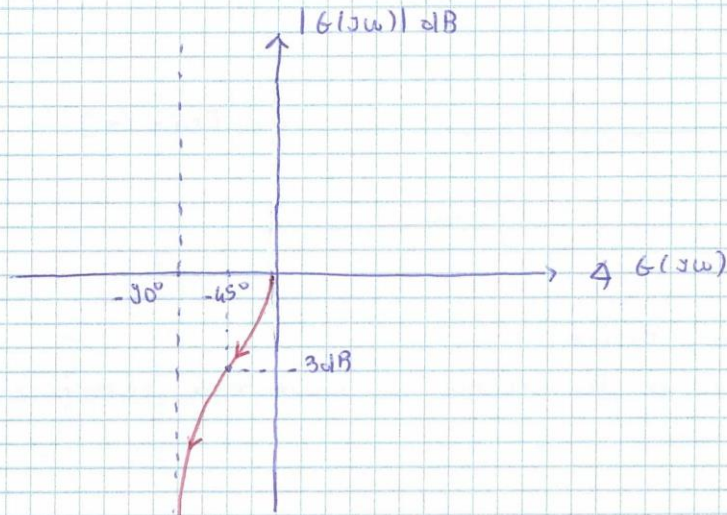


$$G(s) = \frac{1}{1+s}$$

Bode:



Myquist:



Sistemi a minima Rotazione di Fase

Una f. d. t. $G(s)$ si dice a minima rotazione di fase se ha guadagno positivo e tutti i poli e gli zeri hanno parte reale ≤ 0 .

$$G(s) = \frac{1-s}{(1+2s)(1+10s)}$$

$G(s)$ ha uno zero in $+1$

NO MRF!

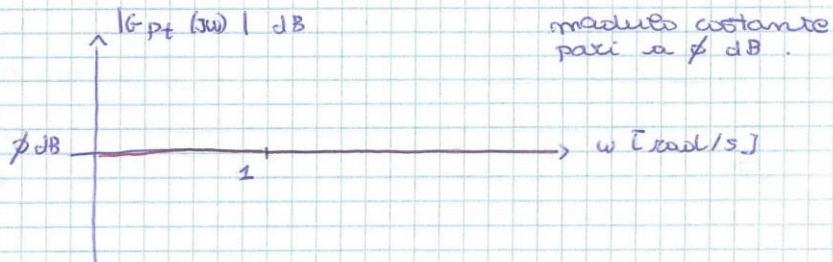
Ogni f. d. t. può essere espressa come una funzione MRF per un filtro passa tutto.

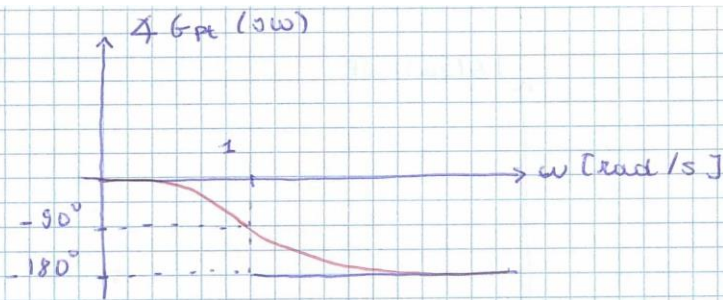
$$G(s) = \frac{1+s}{(1+2s)(1+10s)} \cdot \frac{1-s}{1+s}$$

↑ MRF ↑ filtro passa tutto.

$$G_{pt}(s) = \frac{1-s}{1+s} \quad \begin{cases} K_B = 1 \\ Z = +1 \\ P = -1 \end{cases}$$

Bode:





Formula di Bode

Sia $G(s)$ una funzione a minima rotazione di fase e definiamo:

$$\Omega := \ln(w)$$

$$K(w) := \ln |G(jw)|$$

$$\varphi(w) := \angle G(jw)$$

$$\varphi(\omega_0) = \frac{\pi}{2} \frac{dK}{d\Omega} \Big|_{\Omega=\Omega_0} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{dK}{d\Omega} - \frac{dK}{d\Omega} \Big|_{\Omega=\Omega_0} \right] \cdot \ln \cotgh \left| \frac{\Omega - \Omega_0}{2} \right| d\Omega$$

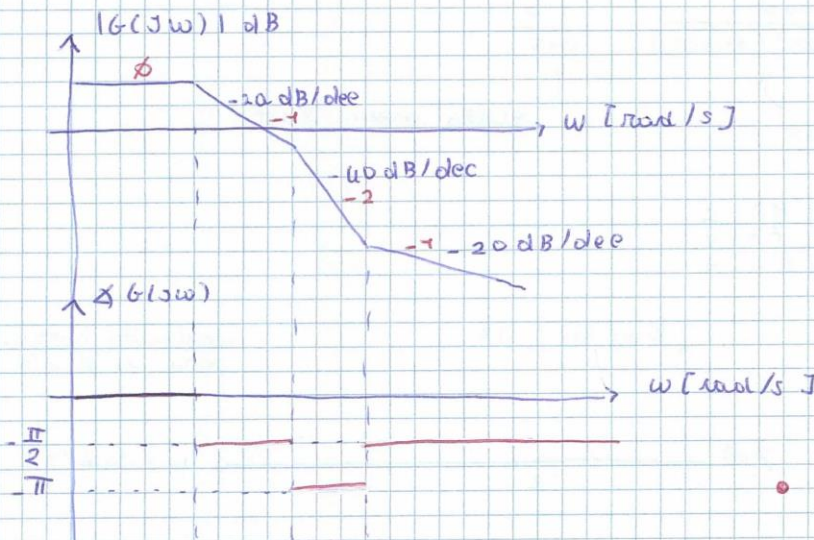
con $\cotgh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

2° contributo

Quindi la fase ad una data frequenza è correlata alla in funzione del modulo.

1° contributo

$\frac{dK}{d\Omega}$ può assumere solo valori interi



• $\frac{dK}{d\Omega}$

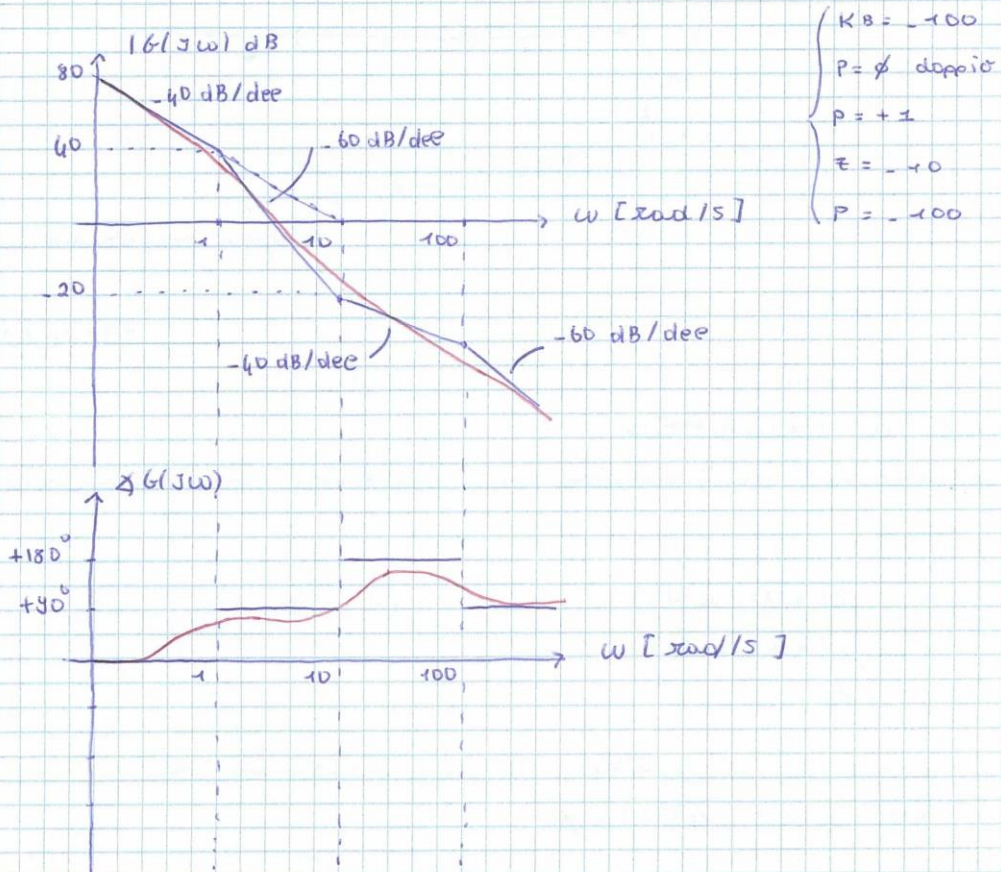
• $\frac{\pi}{2} \frac{dK}{d\Omega}$

2° esempio

mi fornisce le approssimazioni per tracciare il grafico

Esercizio:

$$G(s) = \frac{(s+10) \cdot 1000}{s^2(s-1)(s+100)} = -1000 \cdot \frac{10 \left(1 + \frac{s}{10}\right)}{s^2 \left(1 - \frac{s}{10}\right) \left(1 + \frac{s}{100}\right)} \cdot 1000$$



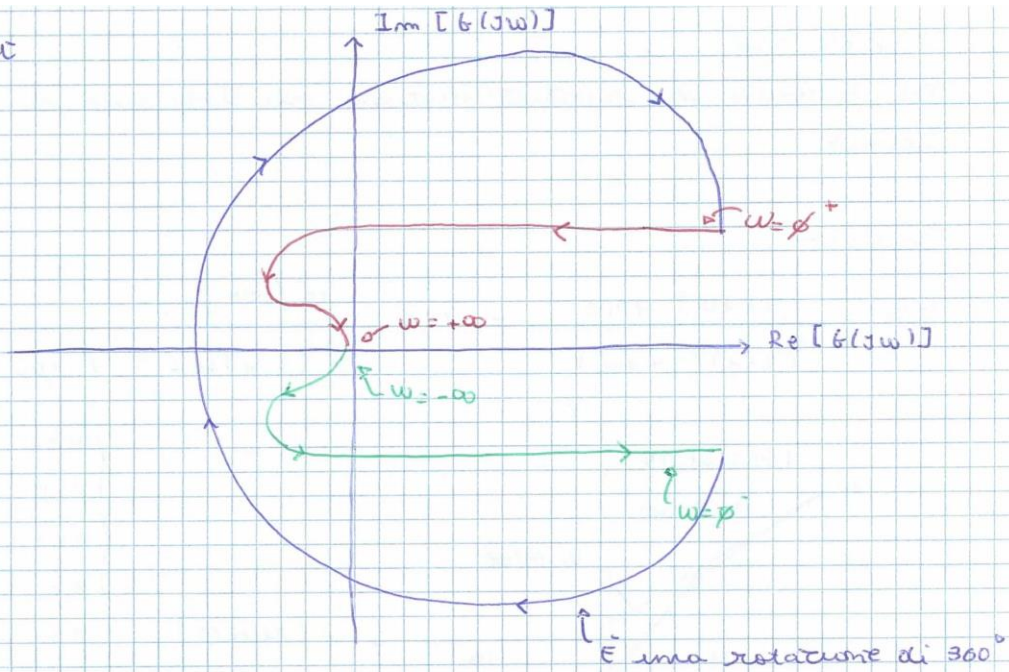
fase parte da:

$$P \text{ doppio: } -90^\circ - 90^\circ = -180^\circ$$

$$K_B < 0: \pm 180^\circ$$

$$-180^\circ + 180^\circ = \emptyset$$

Mgquist



15/10/2015

Stabilità

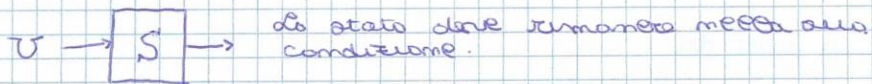
Punto di Equilibrio

Supponiamo di prendere un sistema non necessariamente lineare:

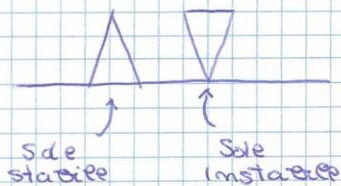
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Un punto di equilibrio è un punto per cui:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u) = 0$$



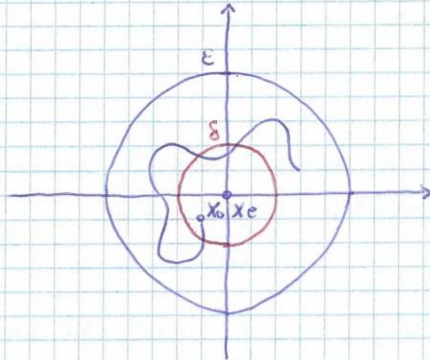
x_e punto di equilibrio: $\dot{x}(t) = f(x_e, u) = 0$



Stabilità Lyapunov

P.to di equilibrio x_e è stabile se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \|x_0 - x_e\| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon, \forall t.$$



Supponiamo \mathbb{R}^2

Il tragitto di $x(t)$ è sempre contenuto dentro ε .

Asintotica Stabilità

P.to di equilibrio x_e è asintoticamente stabile se:

$$\exists \delta : \|x_0 - x_e\| \leq \delta \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$



: Passimo in una conca con attrito.

x_e s.d.e. as. stabile

Stabilità ingresso limitato - uscita limitata (LUL - BIBO)

$$\exists U, Y < +\infty, \forall U : |u(t)| \leq U, \forall t \geq 0 \Rightarrow |y(t)| \leq Y, \forall t \geq 0.$$

Teorema:

Un sistema a tempo invariante (LTI) è stabile in senso LUL sse:

$$\int_0^{+\infty} |g(\tau)| d\tau < +\infty, \quad g(\tau) \text{ sup. imp.}$$

Dim:

$$\int_0^{+\infty} |g(\tau)| d\tau = M < +\infty, \quad |u(t)| \leq U < +\infty, \quad \forall t. \quad (\text{Supposizioni!})$$

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

Supponiamo $u(t) = 0, t < 0$

$$y(t) = \int_0^{+\infty} g(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

$$|y(t)| = \left| \int_0^{+\infty} g(\tau) u(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_0^{+\infty} |g(\tau)| \cdot |u(t-\tau)| d\tau$$

$$|u(t-\tau)| \leq U$$

$$\int_{\phi}^{+\infty} |g(\tau)| \cdot |u(t-\tau)| d\tau \leq U \cdot \int_{\phi}^{+\infty} |g(\tau)| d\tau = U \cdot M < +\infty$$

Dimostrata la sufficienza!

Ora dimostriamo la necessarietà:

Supponiamo: $\int_{\phi}^{+\infty} |g(\tau)| d\tau = +\infty$

$$y(t) = \int_{\phi}^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

Vogliamo trovare $u(t)$ limitato per cui $y(t)$ è illimitato.

Prendiamo $u(\tau) = \begin{cases} \text{sgn}[g(t-\tau)] & , \phi \leq \tau \leq t \\ \phi & , \text{altrimenti} \end{cases}$ limitata

$$y(t) = \int_{\phi}^t g(t-\tau) \cdot \text{sgn}[g(t-\tau)] d\tau \equiv \int_{\phi}^t |g(t-\tau)| d\tau \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

Per i sistemi LTI, la stabilità BIBO coincide con la stabilità asintotica.

$$\text{Re}[p_i] < \phi$$

Stabilità marginale

Se $\exists p_i: \text{Re}[p_i] = \phi$, p_i semplice.

Supponiamo di avere questo $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad \text{INSTABILE BIBO}$$

$$u \rightarrow \boxed{1/s} \rightarrow y \quad \text{integratore}$$

$$u(t) = \sin(t) \Rightarrow y(t) = -\cos(t) \quad \text{limitata}$$

$$u(t) = 1 \Rightarrow y(t) = t \quad \text{illimitata!}$$

Criteri di Stabilità per Polinomi

$$G(s) = \frac{m(s)}{n(s)}$$

Un sistema è asintoticamente stabile se $\text{Re}[p_i] < \phi$.

Criterio di Routh

$$P_m(s) = s^m + a_{m-1} s^{m-1} + a_{m-2} s^{m-2} + \dots + a_1 s + a_0$$

$$Q_m(s) = s^m + a_{m-2} s^{m-2} + a_{m-4} s^{m-4} + \dots$$

$$Q_{m-1}(s) = a_{m-1} s^{m-1} + a_{m-3} s^{m-3} + \dots$$

$$P_m(s) = Q_m(s) + Q_{m-1}(s)$$

$$\frac{Q_m(s)}{Q_{m-1}(s)} = q_{m-1} \cdot s + \frac{Q_{m-2}(s)}{Q_{m-1}(s)}$$

$$\frac{Q_{m-1}(s)}{Q_{m-2}(s)} = q_{m-2} \cdot s + \frac{Q_{m-3}(s)}{Q_{m-2}(s)}$$

⋮

funzioni sempre ad un costante.

$$Q_i(s) = \sum_j \alpha_{i,j} \cdot s^j, \quad j = i, i-2, i-4, \dots$$

Tabella di Routh

m	$\alpha_{m,m}$	$\alpha_{m,m-2}$	$\alpha_{m,m-4}$...
m-1	$\alpha_{m-1,m-1}$	$\alpha_{m-1,m-3}$	$\alpha_{m-1,m-5}$...
⋮				
1	$\alpha_{1,1}$			
∅	$\alpha_{\emptyset,\emptyset}$			

Teorema di Routh

Condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le radici siano a parte reale strettamente negativa è che i segni degli elementi in prima colonna siano concordi.

Ogni variazione di segno corrisponde ad una radice positiva (parte reale positiva)

Prendiamo il polinomio:

$$P_m(s) = 6s^3 + 2s^2 + 4s + 2$$

$$Q_3(s) = 6s^3 + 4s$$

$$Q_2(s) = 2s^2 + 2$$

$$Q_1(s) = \frac{Q_3(s)}{Q_2(s)} = \frac{6s^3 + 4s}{2s^2 + 2} = -2s$$

$6s^3$	$4s$	$2s^2 + 2$
$6s^3$	$6s$	$3s$
1	$-2s$	

$$Q_0(s) = \frac{Q_2(s)}{Q_1(s)} = \frac{2s^2 + 2}{-2s} = 2$$

$$\begin{array}{r|l} 2s^2 + 2 & -2s \\ \hline 2s^2 & -s \\ \hline 1 & \textcircled{2} \end{array}$$

Tabella di Routh

m			
3	6	4	2 variazioni di segno
2	2	2	1 permanenza di segno
1	-2		
0	2		2 Radici instabili e 1 radice stabile.

Scalatore per costruire Tabella di Routh

Supponiamo $a_{i,j}$ generico elemento

$$a_{i,j} = \frac{- \begin{bmatrix} a_{i+2,i+2} & a_{i+2,j} \\ a_{i+1,i+1} & a_{i+1,j-1} \end{bmatrix}}{a_{i+1,i+1}}$$

$$P_m(s) = 6s^3 + 2s^2 + 4s + 2$$

m			
3	6	4	
2	2	$\textcircled{2}$	$(6 \cdot 2 - 2 \cdot 4)$
1	-2		$\frac{2}{-2}$
0	$\textcircled{2}$		$\frac{(2 \cdot 0 - (-2) \cdot 2)}{-2}$

sono sempre uguali!

È possibile moltiplicare o dividere una riga per una costante ~~non~~ che non si trovasse di Routh.
costante > 0 .

Casi Particolari:

- un elemento in prima colonna $\neq \phi$.
 \Rightarrow mi posso fermare e dire: IL SISTEMA NON È STABILE!

Sostituisco lo ϕ con $\epsilon \neq \phi$, con segno arbitrario.

- Tutta una riga di ϕ

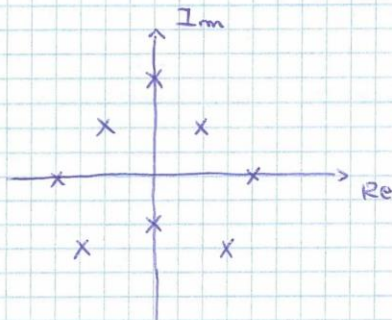
si verifica solo per righe di indice dispari
 Supponiamo indice $2m-1$

Derivata del polinomio della riga $2m$ e sotto
 i coefficienti del polinomio ottenuto nella riga
 $2m-1$.

Poi cominciamo a seguire per la prima parte di
 tavola:

- Ogni variazione di segno coincide con una
 radice $Re > \phi$ e una radice $Re < \phi$.

Tutte le eventuali altre radici sono sulle
 sole immaginarie.



Radici simmetrizzate
 rispetto a Im.

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)(s + 4)}$$

NO ILVU: Polo in ϕ .

Voglio comunque controllare questo sistema:



Impongo una
 retroazione!

$$R \rightarrow \left[\begin{array}{c} K G(s) \\ 1 + K G(s) \end{array} \right] \rightarrow Y$$

$$\frac{K}{s(s^2+s+1)(s+4)} = \frac{K}{s(s^2+s+1)(s+4) + K}$$

$$1 + \frac{K}{s(s^2+s+1)(s+4)}$$

$$P_m(s) = s(s^2+s+1)(s+4) + K$$

$$= s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 4s + K$$

Esistono valori di K per cui il sistema ad anello chiuso è stabile?

n				
4	1	5	K	
3	5	4		
2	$24/5$	$5K/5$		moltiplica tutta la riga $\cdot 5$: 24 $5K$
1	$84-25K$			moltiplica per 24 nel cuculo (lo passo fuori)
\emptyset	K			

$$\begin{cases} 84 - 25K > 0 \\ K > 0 \end{cases} \quad \text{sist. stabile!}$$

$\Rightarrow \emptyset < K < \frac{84}{25}$ rendono il sistema as. stabile.

24/10/2015

metodi per stabilire se un polinomio è stabile o no.

Criterio di Mikhailov

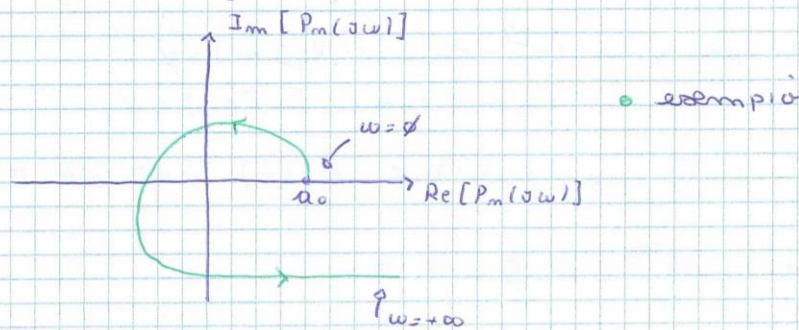
Supponiamo di avere $P_m(s) = s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \dots + a_0$.

$$s = j\omega$$

$$\Rightarrow P_m(j\omega) = (j\omega)^m + a_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + a_0$$

$$= \underbrace{[a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots]}_{\text{Re}[P_m(j\omega)]} + j \underbrace{[a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots]}_{\text{Im}[P_m(j\omega)]}$$

Tracciamo il diagramma polare.



Condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le radici siano a parte reale < 0 :

1. Diagramma polare non deve passare per origine;
2. La variazione di fase di $P_m(j\omega) \Big|_{\phi}^{+\infty}$ deve essere di $m\frac{\pi}{2}$;

N.B. Variazione di fase di \bullet è 360° .

- 2b. Il diagramma polare deve attraversare esattamente n quadranti in senso antiorario;

Dik:

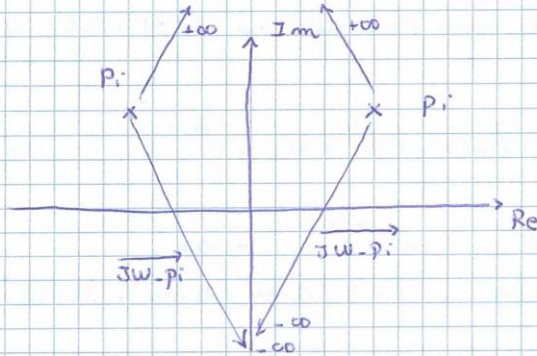
Se $\exists \omega^* : P_m(j\omega^*) = 0 \rightarrow j\omega^*$ è radice di $P_m(s)$

quindi una radice sta su Im. Dik. 1

$$P_m(s) = \prod_{i=1}^m (s - p_i) \Rightarrow P_m(j\omega) = \prod_{i=1}^m (j\omega - p_i)$$

$$\Delta \angle P_m(j\omega) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \sum_{i=1}^m \Delta \angle (j\omega - p_i) \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

Prendiamo una generica p_i



$$\Delta \angle j\omega - p_i \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \begin{cases} \pi & \text{se } \operatorname{Re}[p_i] < 0 \\ -\pi & \text{se } \operatorname{Re}[p_i] > 0 \end{cases}$$

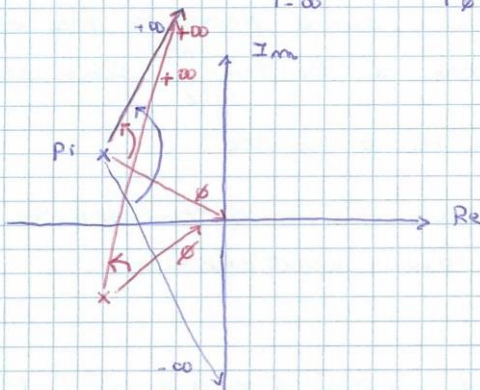
Quindi se osserviamo: m_i radici $\operatorname{Re}[p_i] > 0$ i : instabili
 $(m - m_i)$ radici $\operatorname{Re}[p_i] < 0$

$$\Rightarrow \Delta \angle P_m(j\omega) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = (m - m_i) \cdot \pi - m_i (\pi) = m\pi - 2m_i \pi$$

$$\Rightarrow \Delta \angle P_m(j\omega) \Big|_{\phi}^{+\infty} = m \cdot \frac{\pi}{2} - m_i \pi$$

per dimostrare: $m_i = 0$ e per D.K. 2

Perché posso passare da $\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ a $\Big|_{\phi}^{+\infty}$!?



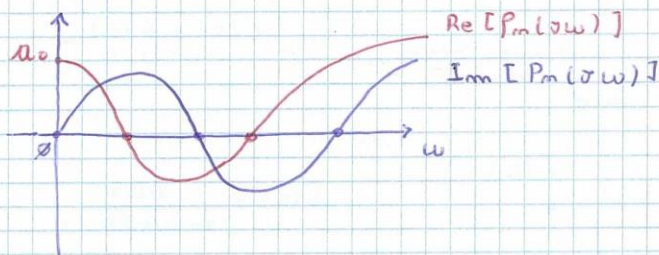
Però per ogni radice complessa io ho anche la sua coniugata!

$$\curvearrowright = \curvearrowright + \curvearrowright$$

Criterio di Hermite - Bie REx

Dato $P_m(s) \xrightarrow{s=j\omega} P_m(j\omega)$

$P_m(j\omega) = \text{Re}[P_m(j\omega)] + j \text{Im}[P_m(j\omega)]$ come Michajlov



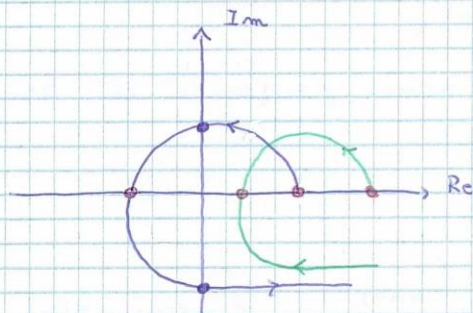
Condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le radici siano a parte reale $< \phi$:

- il diagramma presenti zeri "interlacciati" (alternati) e il numero totale di zeri sia pari a n ($\omega \in [\phi, +\infty]$);

nel grafico sovrastante sono interlacciati.

Se $n=5 \Rightarrow \text{Re}[p_i] < \phi$.

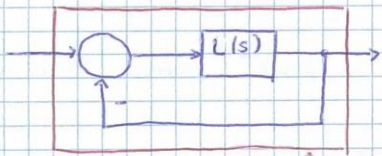
Dim. tramite Michajlov:



- stabile
- non stabile

Questi sono i criteri di stabilità per polinomi.

Criteri di stabilità ad anello chiuso.

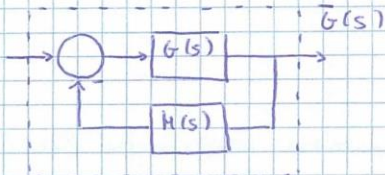


Retroazione unitaria e negativa.

$$(L(s) = G(s))$$

deve essere stabile

Supponiamo di avere:



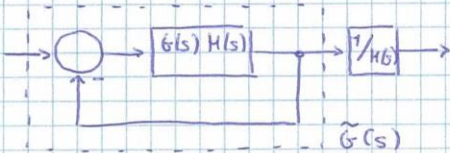
$$\bar{G}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$\bar{G}(s) = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{H(s)}$$

↳ $\tilde{G}(s)$

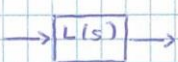
$$\tilde{G}(s) = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Equivalente a:



$\bar{G}(s)$ e $\tilde{G}(s)$ hanno le stesse proprietà di stabilità (stesso denominatore)

Supponiamo:



$$L(s) = \frac{m(s)}{d(s)}, \text{ quando } d(s) \text{ per la stabilità}$$



$$\frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{\frac{m(s)}{d(s)}}{1 + \frac{m(s)}{d(s)}} = \frac{m(s)}{m(s) + d(s)}$$

gli zeri sono gli stessi di prima, ma non i poli.

Criterio di Nyquist

Si basa sul Lemma di Cauchy (Principio dell'argomento)

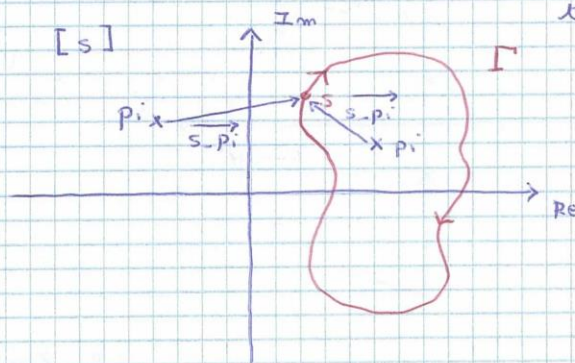
Supponiamo di avere:

$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s-z_i)}{\prod_{i=1}^n (s-p_i)}$$

$$\angle F(s) = \sum_{i=1}^m \angle (s-z_i) - \sum_{i=1}^n \angle (s-p_i)$$

Definisco sul piano complesso una qualunque curva chiusa percorsa in senso orario che non

tocca zeri e poli di $F(s)$.



$$\Delta \angle (s-p_i) \Big|_{\Gamma} = \begin{cases} \phi & \text{se } p_i \text{ \u00e9 esterno a } \Gamma \\ -2\pi & \text{se } p_i \text{ \u00e9 interno a } \Gamma \end{cases}$$

Stesso ragionamento per gli zeri.

$$\begin{aligned} \angle F(s) &= \sum_{i=1}^m \Delta \angle (s-z_i) - \sum_{i=1}^n \Delta \angle (s-p_i) \\ &= -2\pi N_{z\Gamma}^F + 2\pi N_{p\Gamma}^F = -2\pi \left(N_{z\Gamma}^F - N_{p\Gamma}^F \right) \end{aligned}$$

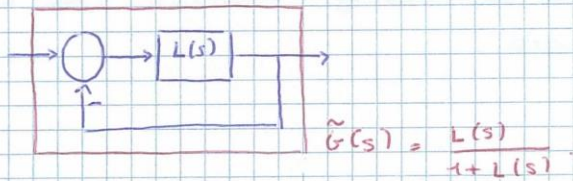
$N_{z\Gamma}^F$: numero di zeri interni a Γ di F

$N_{p\Gamma}^F$: " " poli " " " " "

$$N_{or}^F = N_{z\Gamma}^F - N_{p\Gamma}^F$$

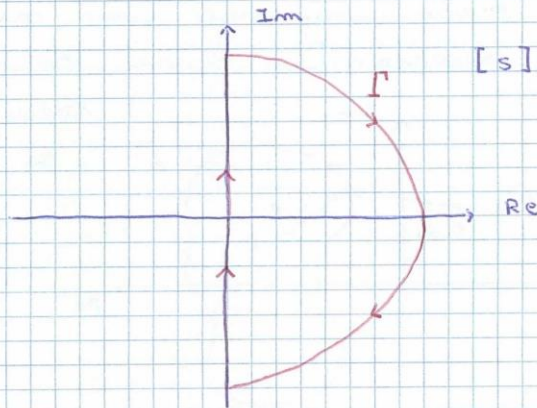
Numero rotazioni orarie di F .

Come tradotto in risultato al nostro obiettivo?



$$F(s) = 1 + L(s)$$

e prendo come curva Γ :



$$N_{OR}^F = N_{Pa}^{AC} - N_{Pa}^{AA}$$

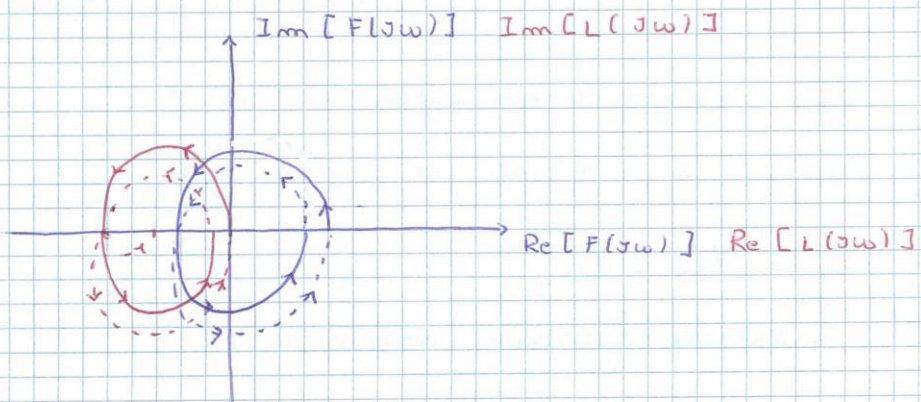
numero poli a dx di anello chiuso

numero poli a dx di anello aperto

N.B. Zeri di $F(s)$ sono i poli di $G(s)$.

di questi devono essere interni a Γ

$$\Rightarrow N_{Pa}^{AC} = N_{Pa}^{AA} + N_{OR}^F$$



Per convenienza traccio il diagramma di $L(s)$ e guardo le rotazioni intorno a -1 .

$$N_{Pd}^{AC} = N_{Pd}^{AA} + N_{DR, -1}^L$$

(numero rotazioni orarie intorno a -1 di L)

$$N_{ANTIOR} = -N_{ORAA}$$

Condizione necessaria e sufficiente per la stabilità ad anello chiuso:

$$N_{ANTIOR, -1}^L = N_{Pd}^{AA}$$

$N_{DR} \Rightarrow$ instabilità

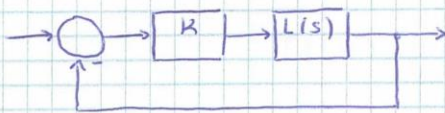
$N_{ANTIOR} \Rightarrow$ stabilità

Supponiamo di avere retroazione Positiva:

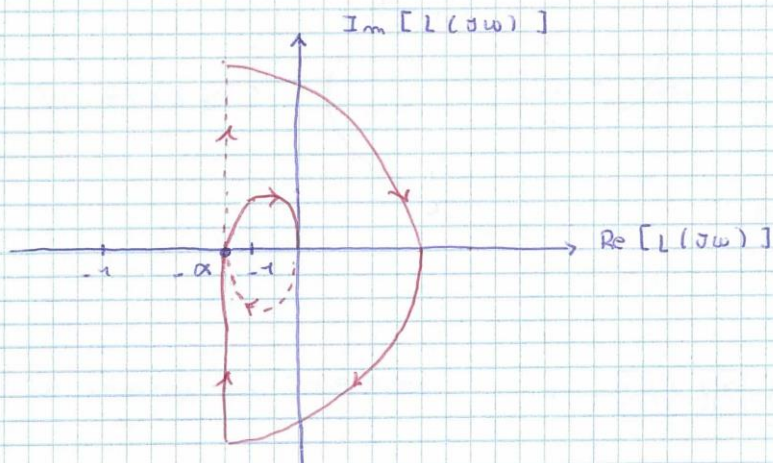
Vado a vedere le rotazioni intorno a $+1$.

Esempio:

$$L(s) = \frac{1}{s(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}, \quad \tau_1, \tau_2 > 0$$



$\exists K$: AC è stabile?



$$N_{pd}^{AC} = N_{pd}^{AA} + N_{OR, -1}$$

Se $-1 < -\alpha \Rightarrow N_{OR, -1} = \emptyset$

Se $-1 > -\alpha \Rightarrow N_{OR, -1} = 2$

Adesso considero $K \cdot L(s)$

Se $K=1$ viene la stessa cosa $1 \cdot L(s)$

Se $K=10 \Rightarrow$ il p.to di intersezione diventa -10α , ma mi interessa poco.

$K = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow$ p.to int. = -1

$K > \frac{1}{\alpha} \Rightarrow -1 > -\alpha$, INST. 2 pd

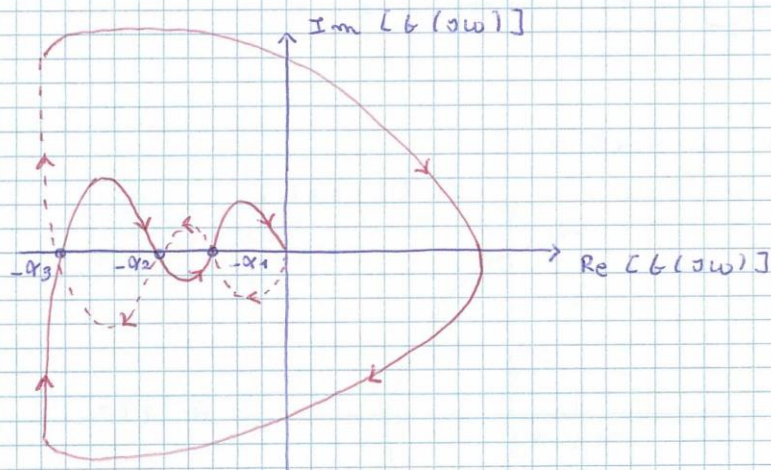
$K < \frac{1}{\alpha} \Rightarrow -1 < -\alpha$, STAB. perché non ci sono rotazioni e io ho zero poli a dx.

Se $K < \frac{1}{\alpha}$ vado a studiare rotazioni intorno a $+1$!

\Rightarrow INST. 1 pd.

N.B. $+1$ è circondato da almeno una rotazione.

Esempio:



stabilità al variare di K

$$N_{Pd}^G = \emptyset$$

$$N_{Pd}^{AC} = \cancel{N_{Pd}^{AA}} + N_{DRA, -1}$$

$K < \emptyset \rightarrow$ INST. 1 pd

$K > \emptyset$

$K < \frac{1}{\alpha_3} \rightarrow$ STAB.

$\frac{1}{\alpha_3} < K < \frac{1}{\alpha_2} \rightarrow$ INSTAB. 2 pd

$\frac{1}{\alpha_2} < K < \frac{1}{\alpha_1} \rightarrow$ STAB. ↻ ↻

$K > \frac{1}{\alpha_1} \rightarrow$ INSTAB. 2 pd

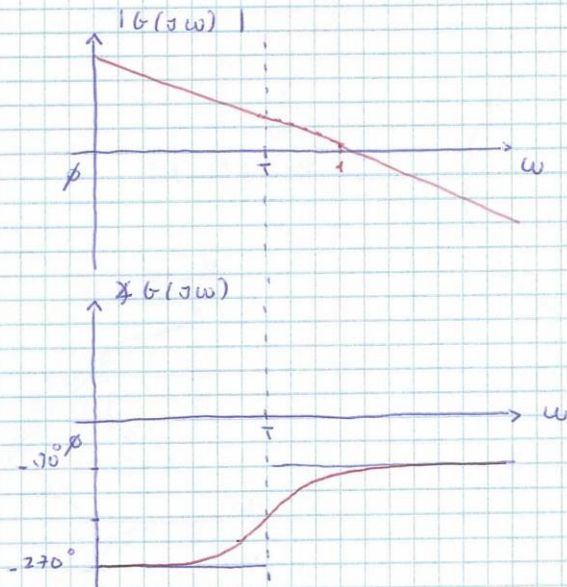
\Rightarrow Questo è un sistema condizionatamente stabile.

$$G(s) = \frac{s+T}{s(s-T)}, \quad T > \emptyset$$



? Stabilità al variare di K

$$\text{Bode: } G(s) = \frac{T}{-T} \frac{(1 + \frac{s}{T})}{s(1 - \frac{s}{T})}, \quad \begin{cases} K_B = -1 \\ p = \emptyset \\ p = T \\ z = -T \end{cases}$$



Suppongo $T < 1$

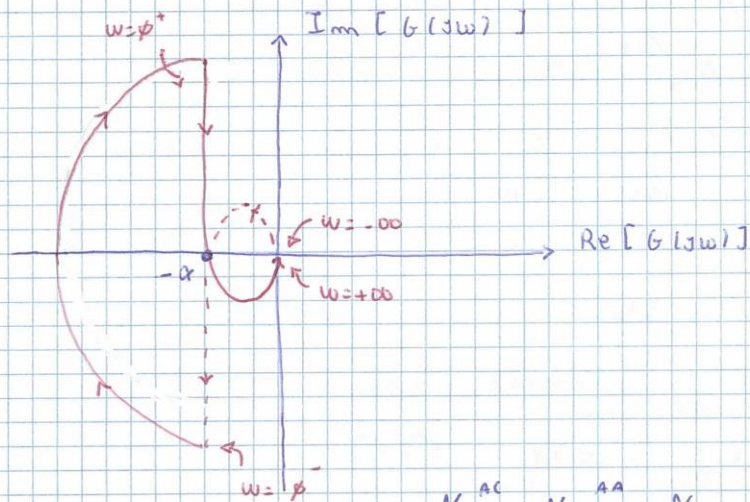
$$\checkmark \frac{(s+T)}{s(s+T)}, \quad T > \emptyset$$

$$\times \frac{(s-T)}{s(s+T)}, \quad T > \emptyset$$

↑ No! non posso!

• Cancella solo se stabile!

Nyquist:



$$N_{Pd}^{AC} = N_{Pd}^{AA} + N_{oe, -1}$$

$K > \beta$:

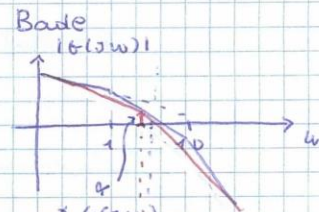
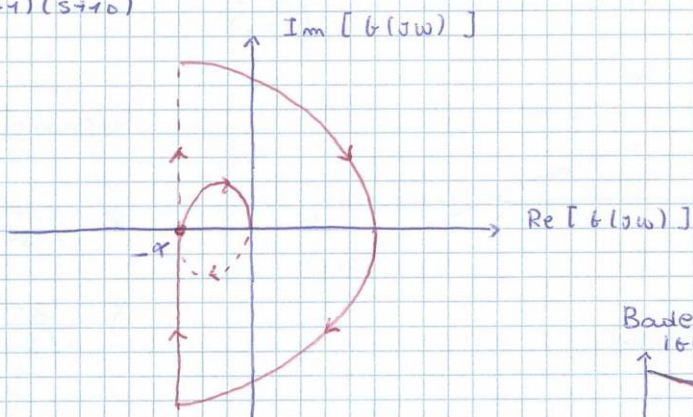
- $K < \frac{1}{\alpha} \rightarrow$ INST. 2 pd
- $K > \frac{1}{\alpha} \rightarrow$ STAB.

$K < \beta$:

\rightarrow INST. 1 pd

Esempio:

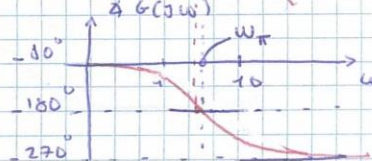
$$G(s) = \frac{100}{s(s+1)(s+10)}$$



Margine di Guadagno: $\gamma_G = \frac{1}{\alpha}$

$$|G(jw_\pi)| = \alpha$$

$$|G(jw_\pi)|_{dB} = 20 \log_{10} \alpha$$



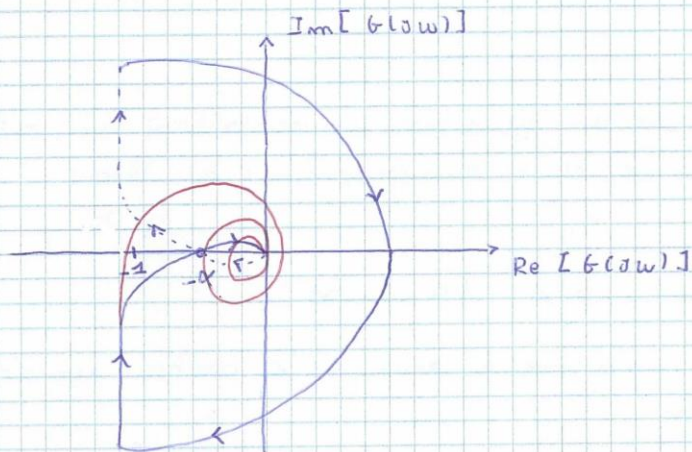
$$\gamma_b = -20 \log_{10} \alpha$$

γ_b dice quanto α sia distante da -1 !

$$\begin{cases} K > \frac{1}{\alpha} \rightarrow \text{INST. 2pd} \\ K < \frac{1}{\alpha} \rightarrow \text{STAB.} \end{cases}$$

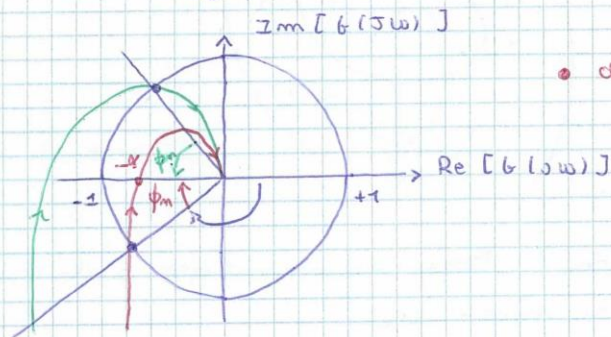
Se $\frac{1}{\alpha} = \gamma_b = 10$ mi dice che posso inserire fino a $K=10$.

Esempio:



Supponendo un certo ritardo potrebbe venire questo grafico.

Imserisco il Margine di Fase:



$$\text{Margine di Fase: } \phi_m = 180^\circ + \angle G(j\omega_c)$$

$$\text{dove } \omega_c : |G(j\omega_c)| = 1$$

Controllo attraverso ϕ dB \rightarrow ce ne deve essere esatto uno.

In questo caso ϕ_m è positivo. •

" " " " " negativo. •

Criterio di Stabilità di Bode

$G(s)$: $\text{Re}[p_i] \leq \phi$, area propria ($p_i, z_i: i \geq 1$)

$\exists! \omega_c : |G(j\omega_c)| = 1$

Condizione nec. e suff. per la stabilità dell'anello chiuso:

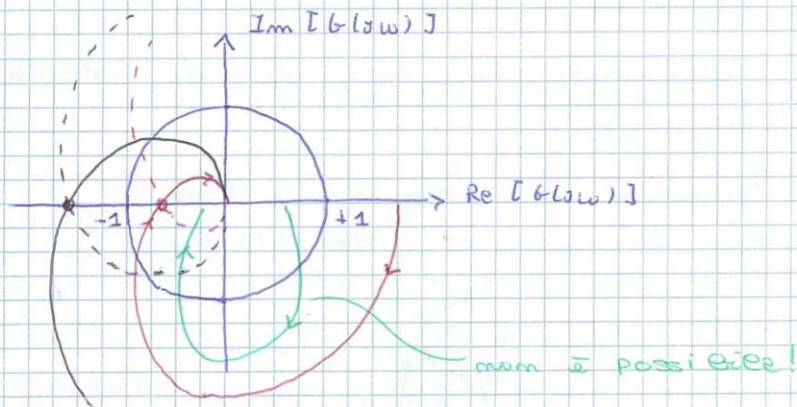
- guadagno di anello positivo (segno del guadagno di $K \cdot G(s)$)
- $\phi_m > \phi$

\Rightarrow mi permette di giudicare la stabilità in retroazione direttamente dai diagrammi di Bode.

DHK:

$$N_{PH}^{AC} = N_{OR, -1} = \phi \quad (\text{Nyquist})$$

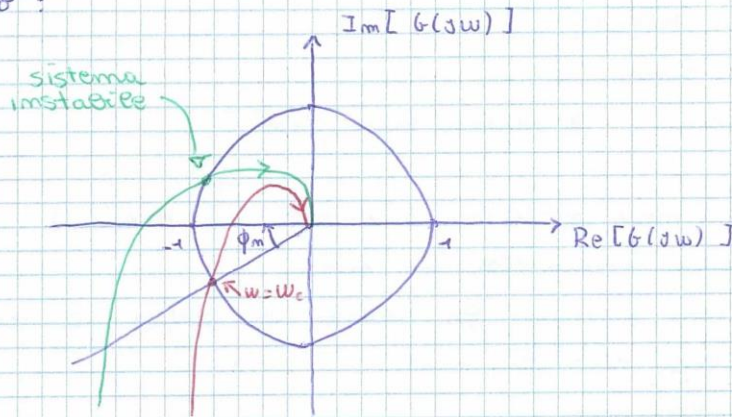
Il diagramma polare taglia il cerchio unitario in un solo punto



$\exists K$ che stabilizza? Deve aumentare o diminuire K per vedere dove si mette ω_c .

$K_{critico}$: $\phi_m = \phi$

Esempio :



introduco un loopo di ritardo:



$T = \phi \rightarrow$ sist. AC stabile (ipotesi: $N_{pd}^{AA} = \phi$)

$$\omega_c: |G(j\omega_c)| = 1 \equiv 0 \text{ dB}$$

$$\omega_c = \omega_{\text{CROSSOVER}} = \omega_{\text{ATTRAVERSAMENTO}}$$

$$\phi_m \rightarrow \phi$$

? Per quali valori di T il sistema ad anello chiuso è instabile.

N.B. Un ritardo peggiora sempre la stabilità!

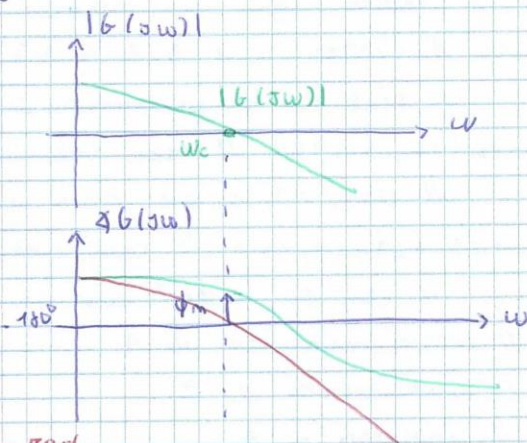
$$\begin{cases} \Delta e^{-j\omega t} = -\omega T \\ |e^{-j\omega t}| = 1 \end{cases}$$

- prima di $e^{-s\omega t}$
- dopo $e^{-s\omega t}$

t_{cr} : ritardo critico!

ad ω_c devo avere un ritardo di fase pari a ϕ_m

$$\omega_c \cdot t_{cr} = \phi_m \Rightarrow t_{cr} = \frac{\phi_m}{\omega_c} \text{ rad}$$



Introduzione a MATLAB

Simulink: per simulazioni

Command Window: finestra con `>>`

Comandi:

`clear` // elimina (non elimina variabili in mem.)`who` // fa vedere variabili in mem.`c = a + 3;` // con ; non fa vedere a video il risultato`whos` // variabili con formati`clear` // cancella var.`help` // aiuto`help whos` // aiuto al comando `whos``format long` // cambia formato var. in long`format short` // formato ingegneristico// $4,2857E-01 \Rightarrow 4,2857 \cdot 10^{-1}$ `log10(x)` // log base 10 di x`log(x)` // log base e di x`pi` // π `a = 45e3` // $a = 45.000$ `v = [1, 3, 5]` // vettore v riga`v = [1 3 5]` // vettore v riga`v = [1 3 5]'` // vettore v colonna

' // trasposizione

`v = [1; 3; 5]` // vettore v colonna`A = [1 2 3; 4 5 6]` // matrice A

// possibilità di fare operazioni con mat e vet

`v = 1:10` // vettore riga con numeri da 1 a 10`v = 1:2:10` // vettore [1 3 5 7 9]

// parte da 1, incremento di 2, fino a 10

`v = linspace(1, 3, 10)` // crea vettore equispaziato

// da 1 a 3 con 10 elem.

`v = logspace(-3, 1, 10)` // crea vettore equispaziato log.// da 10^{-3} a 10^1 con 10 elem.`det(A)` // determinante di A`eig(A)` // autovalori di A`inv(A)` // inversa di A

$$P(s) = 4s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 7s + 3 \quad \text{Polinomio}$$

$$P = [4 \ 2 \ 3 \ 2 \ 7 \ 3] \quad // \text{ vettore dei coefficienti}$$

roots(p) // radici di P

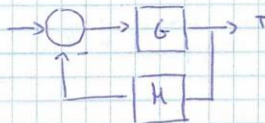
$$G(s) = \frac{s+3}{2s^2+s+5} \quad \text{funzione di trasferimento}$$

$$\left. \begin{aligned} m &= [1 \ 3] \\ d &= [2 \ 1 \ 5] \\ G &= tf(m, d) \end{aligned} \right\} \text{ mado 1}$$

$$\left. \begin{aligned} s &= tf('s') \\ G &= (s+3) / (2*s^2 + s + 5) \end{aligned} \right\} \text{ mado 2}$$

Retroazione

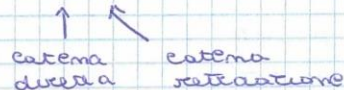
$$K = \frac{1}{s+9}$$



$$Q = G * H \quad // \text{ prodotto fdt non semplificato}$$

$$T = G / (1 + G * H) \quad // \text{ retroazione non semplificata}$$

$$T = \text{feedback}(G, H) \quad // \text{ retroazione negativa}$$



$$T = \text{feedback}(G, H, z) \quad // \text{ retroazione positiva}$$

$$\text{minreal}(T) \quad // \text{ semplifica m fdt T}$$

$$\text{pole}(T) \quad // \text{ poli di T}$$

$$\text{zero}(T) \quad // \text{ zeri di T}$$

$$\text{damp}(pole(T)) \quad // \text{ poli di T come puls. nat e}$$

// coeff. di smorz.

$$\text{dcgain}(T) \quad // \text{ guadagno di } T \text{ per } w \rightarrow \phi$$

$$// \bar{e} \text{ il guadagno di Bode se } T \text{ non ha}$$

$$// \text{ poli in } \phi$$

// Praticamente prendo termine noto di num. fatto
termine moltiplicativo di s al den.

$$\text{bode}(T) \quad // \text{ diagrammi di Bode di T}$$

grid on // griglia sopra a grafici

// se cerco due diagrammi da i dati

figure // apre nuova figura per disegnare nuovo grafico
hold on // mantiene il grafico

Disegnare due grafici uno sopra l'altro

hold (T) // fat 1

hold on

hold (T) // fat 2

clf // cancella la figura

close (n) // chiude la finestra n

close all // chiude tutte le finestre

margin (T) // fa vedere i margini di fase

nyquist (T) // diagramma di Nyquist di T

axis equal // rende gli assi uguali. Per rendere
// diag di Nyquist giusti.

// Per veder solo diag. polar :

tasto dx su grafico e deselezione freq. negative

// Se ho poli su asse Im MATLAB "fa male" diag. nyquist

$$G = \frac{1}{(s^2+1)(s+10)} \quad \begin{cases} p = -10 \\ p = \pm j \end{cases}$$

microes (T) // diagramma di Michael di T.

impz (T) // fa vedere risp. impulsiva di T

step (T) // fa vedere risp. se gradino di T

zplane (G) // luogo delle radici di G

PICCO DI RISONANZA

sul grafico: Characteristics > Peak Response

MODULO e FASE

[m, f] = bode (G, 5) // diagramma di bode di G a $\omega = 5$
// m = modulo max in dB
// f = fase

m dB = $20 \cdot \log_{10}(m)$ // m in dB.

CAMBIARE SCALA

w = logspace (-2, 1, 1000) // vettore da 10^{-2} a 10^1 con 1000 elem.

bode (G, w)

ATTORNIOCAUFIMM A. D. R. : bode (G) : margin (G)

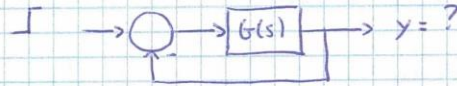
28/10/2015

Prof.
LAB. 124 - 143

Mecc. 4/11 → aula 8

Giov. 5/11 → aula A

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+10)(s+100)}$$



Come è la risposta di questo sistema?

MATLAB

metodo 1:

```
T=feedback(G,1);
```

```
step(T);
```

metodo 2:

Imserisco G(s)

$$G = (s+1) / (s * (s+10) * (s+100))$$

Adesso lancio SIMULINK

```
simulink // avvia SIMULINK
```

File > menu > model

Math Operations > Sum e inserisco due madrasse

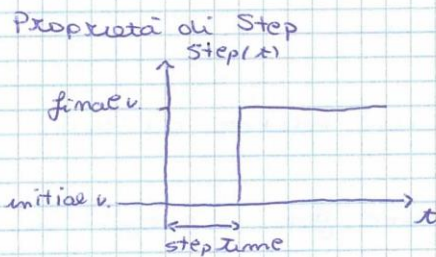
Doppio clic sul blocco per le proprietà.

Control System toolbox > LTI system

Doppio clic e inserisco G

Poi collego i blocchi.

Sources > Step (gradino)



default: step time = 1

⇒ non lo mettiamo

step time = ∅

altrimenti uso Sources > Constant che ha constant value = 1 di default.

Per definire G posso andare anche in
Continuous > Transfer function ①
zero pole ②

- ① in ingresso i due vettori dei polinomi $m(s)/d(s)$.
- ② Indico zeri e poli.


Per il ritardo:

Continuous > Transport delay

Per simulare: ► per 10 secondi (default)

Per vedere i risultati:

Sinks > Scope all'uscita

Clicco sul Scope e premo  (autoscale).

=> aumentare le campionamenti di SIMULINK

Simulation > Config. Param. > max step size = auto (default)
= 0,01.

N.B: Simulink spesso trava a fine del tempo.

Scope > Parameters > Data History > Limit data points to last
da scope di simulazione se ricordo solo gli ultimi
5000 campioni!

va selezionata l'opzione a destra ►

Risposta a 

Sources > Sine Wave

Confrontare sim. di ingresso e sim. di uscita.

Signal Routing > mux

2 ingressi + 1 uscita verso Scope.

Su MATLAB: menu M-file apre un editor su cui
scrivere comandi.

nella linea di comando poi nome_file e esegue il file.

Prima del codice consigliato mettere:

- clear
- clc

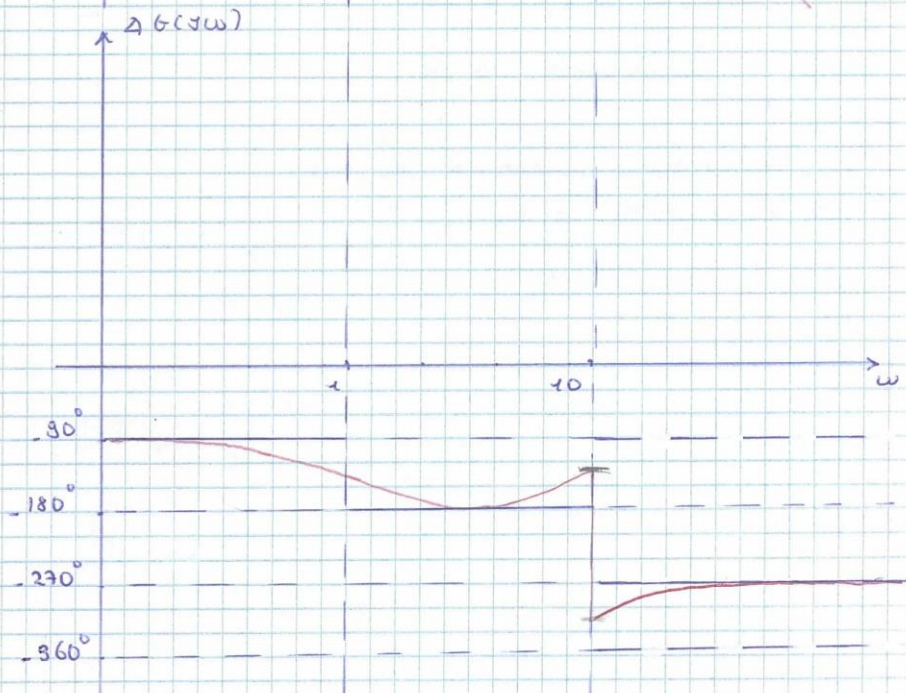
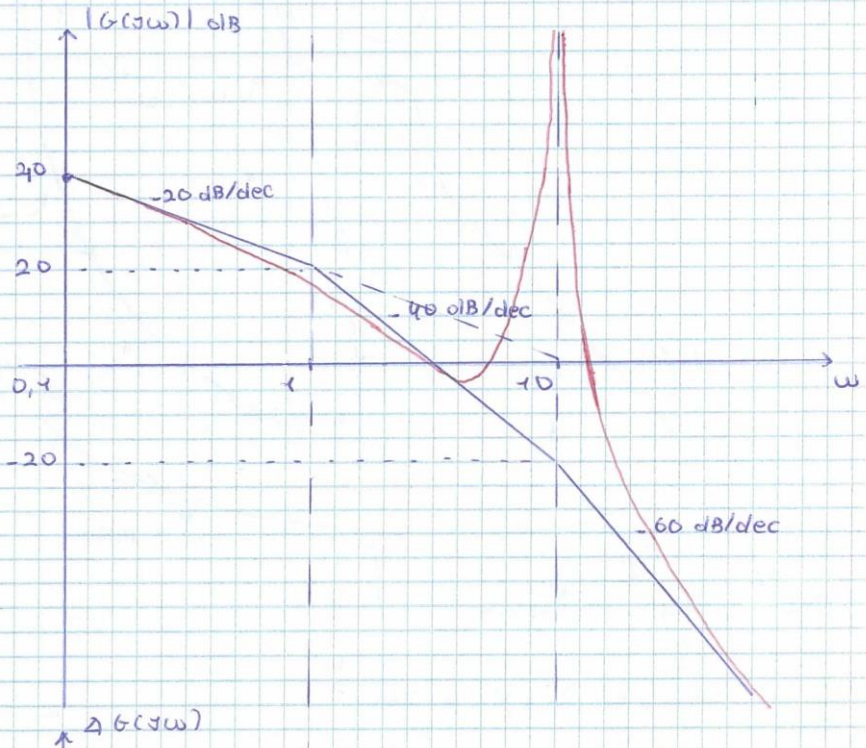
Esercizi:

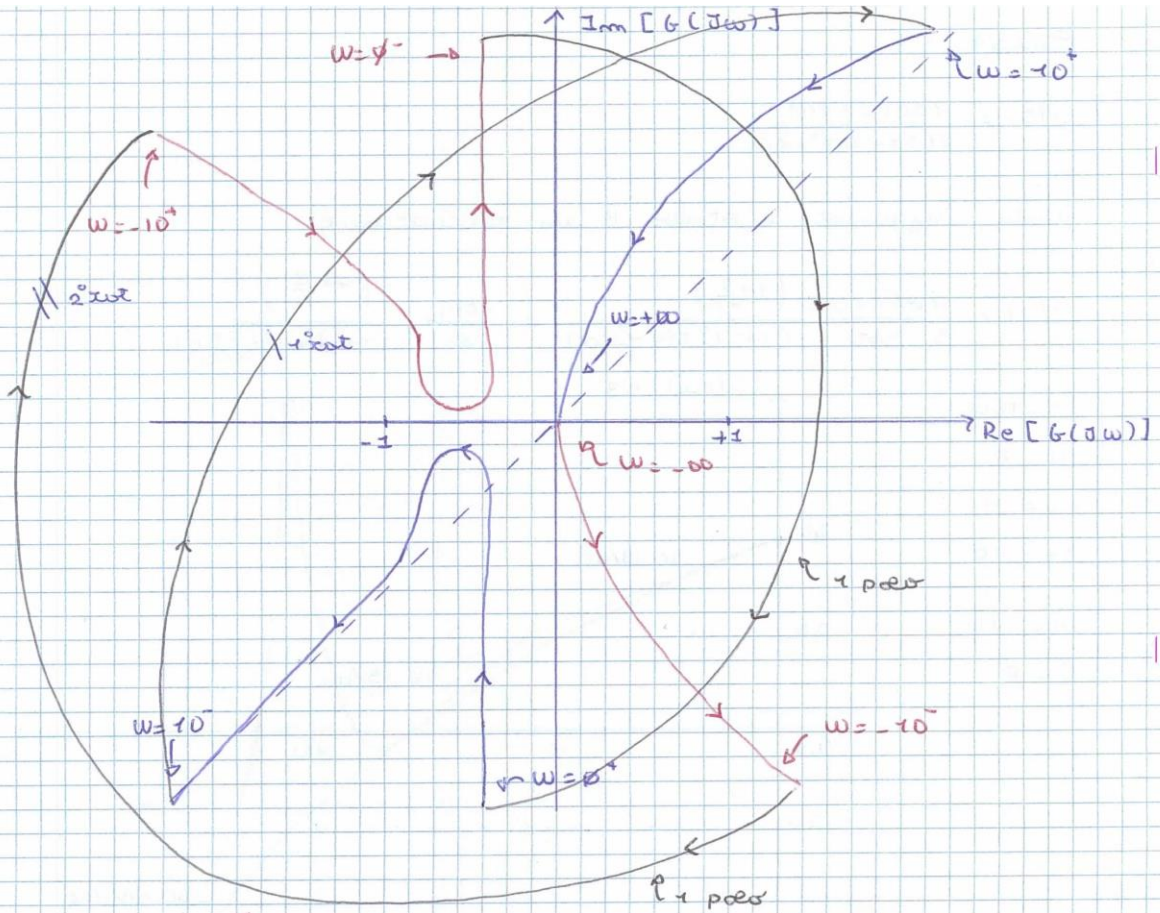
$$G(s) = \frac{100(s+10)}{s(s+1)(s^2+100)}$$

Bode, Nyquist e stato K in retroazione

$$G(s) = \frac{100 \cdot 10}{s \cdot 100} \cdot \frac{(1 + \frac{s}{10})}{(1+s)(1 + \frac{s^2}{100})} = \frac{10}{s} \cdot \frac{(1 + \frac{s}{10})}{(1+s)(1 + \frac{s^2}{100})}$$

- $K_B = 10$
- $P_1 = \emptyset$
- $P_2 = -1$
- $Z_1 = -10$
- $\omega_m = 10$
- $G = \emptyset$

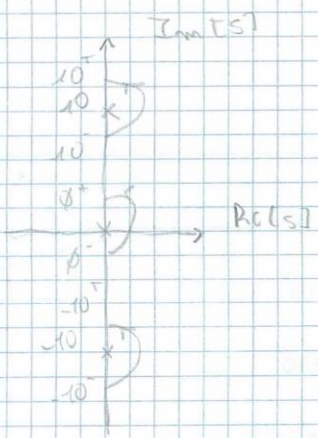




$$N_{pa}^{AC} = N_{pa}^{AA} + N_{pa}^{R, -}$$

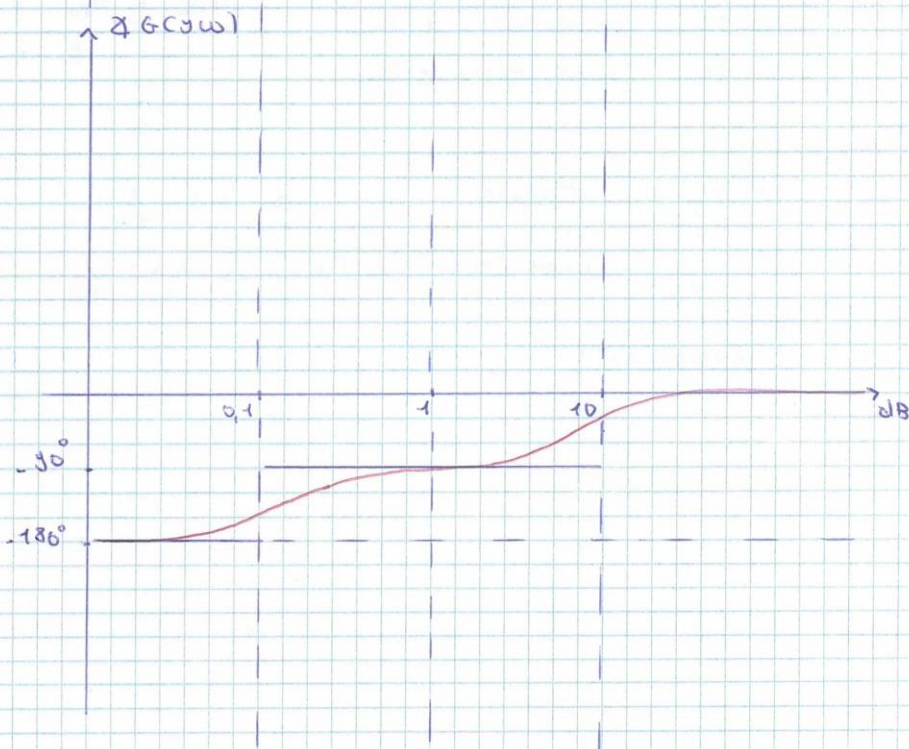
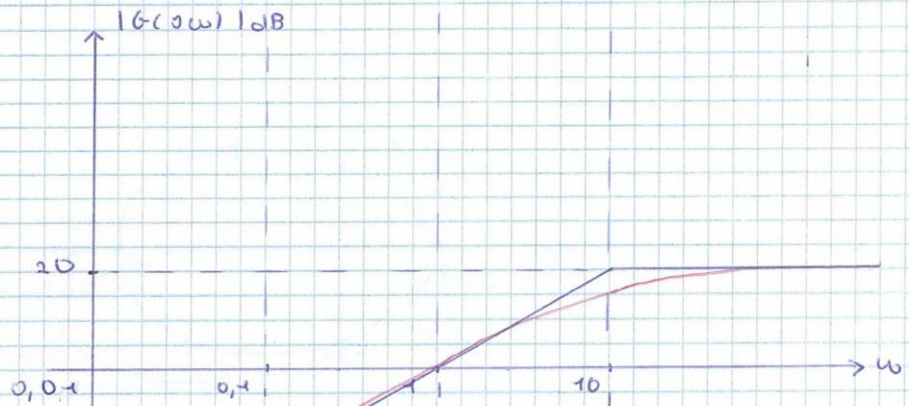
↑
solo poli $Re < 0$ e $Im = 0$

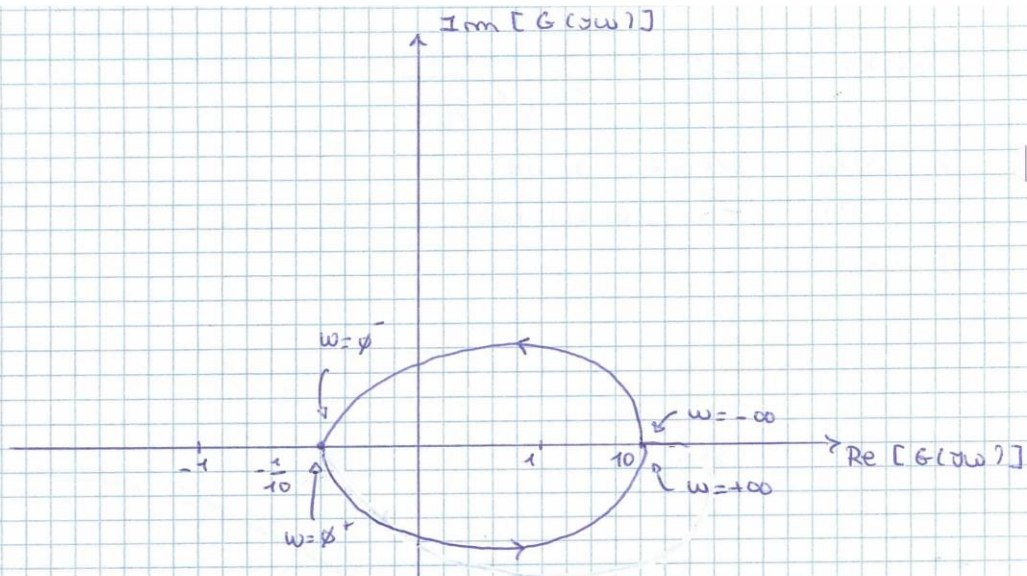
$k > \phi$, instabile 2 pa
 $k < \phi$
 ↳ Rotazione intorno a +1
 ⇒ instabile 1 pa



$$G(s) = \frac{10s+1}{s-10} = \frac{1}{10} \frac{1+10s}{1-\frac{s}{10}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_B = 1/10 \quad |K_B|_{dB} = -20 \text{ dB} \\ z_1 = -1/10 \\ p_1 = 10 \end{array} \right.$$





$k > 10 \rightarrow$ stabile
 $k < 10 \rightarrow$ instabile \Rightarrow rotazione antioraria: \neq

$k > \phi$:

- $k > 10$ stabile
- $k < 10$ instabile \neq Pd

$$N_{Pd}^{AC} = N_{Pd}^{AA} + N_{OR, -1}$$

$$= 1 + N_{OR, -1}$$

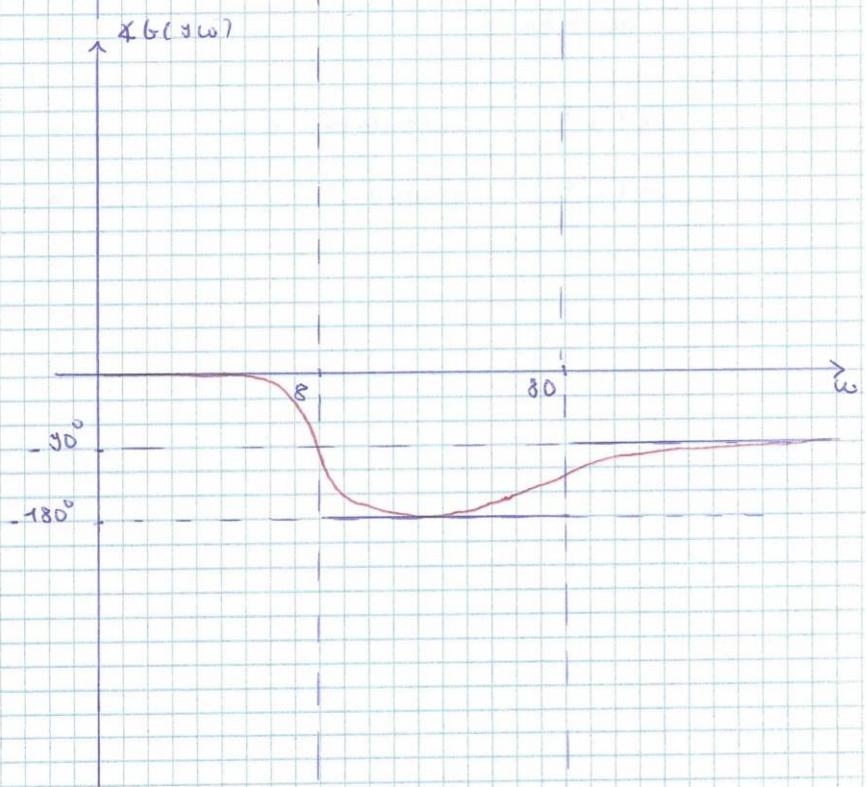
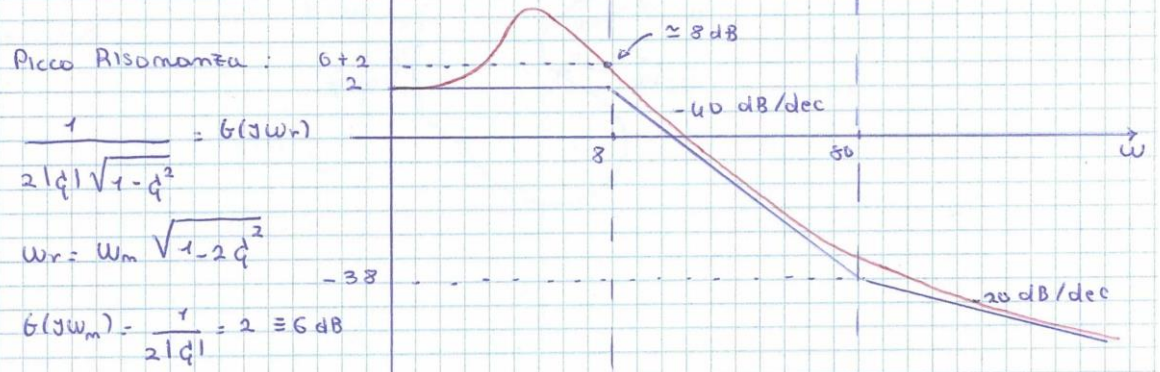
$k < \phi$:

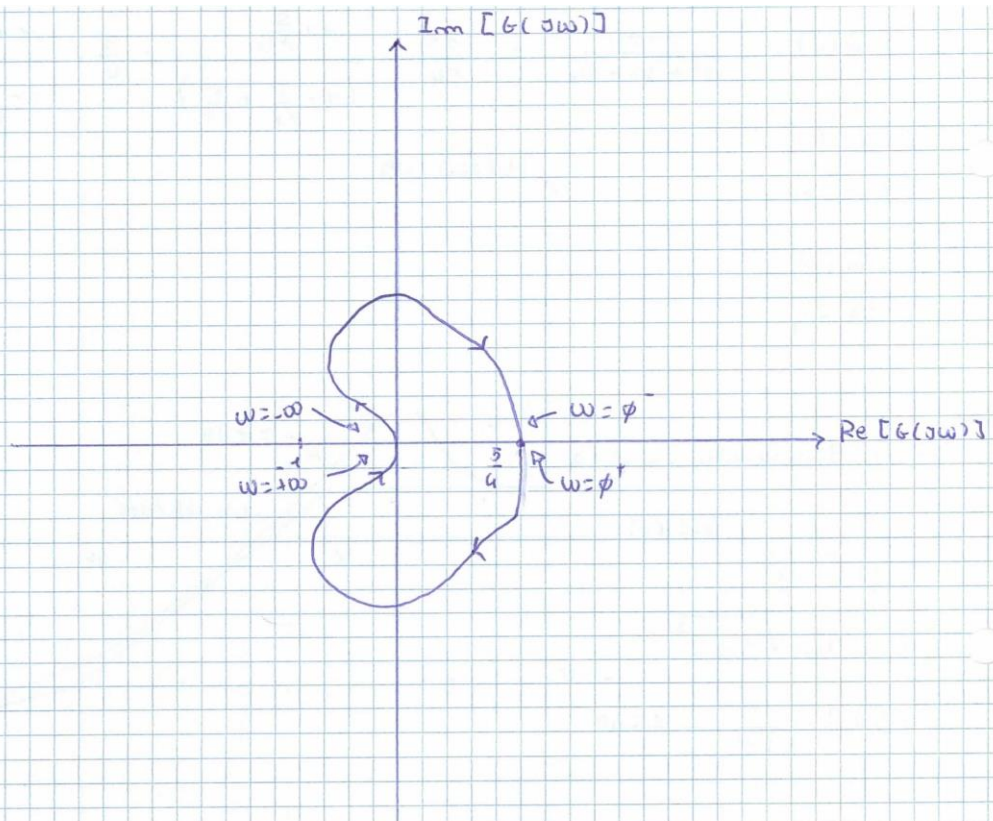
- $|k| > \frac{1}{10}$ stabile $\rightarrow k < -\frac{1}{10}$
- $|k| < \frac{1}{10}$ instabile \neq Pd $\rightarrow k > -\frac{1}{10}$

\uparrow attenzione!

$$G(s) = \frac{s+80}{s^2+4s+64} = \frac{80}{64} \cdot \frac{1+\frac{s}{80}}{\left(1+\frac{s}{16}+\frac{s^2}{64}\right)} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1+\frac{s}{80}}{\left(1+\frac{s}{16}+\frac{s^2}{64}\right)}$$

$$\begin{cases} K_B = 5/4 \\ z_1 = -80 \\ \omega_m = 8 \\ q = 1/4 \end{cases}$$





$k > \phi$: stabile

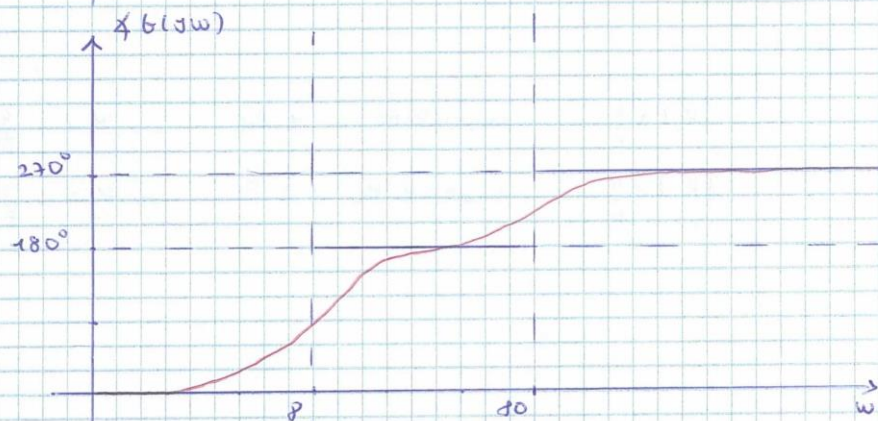
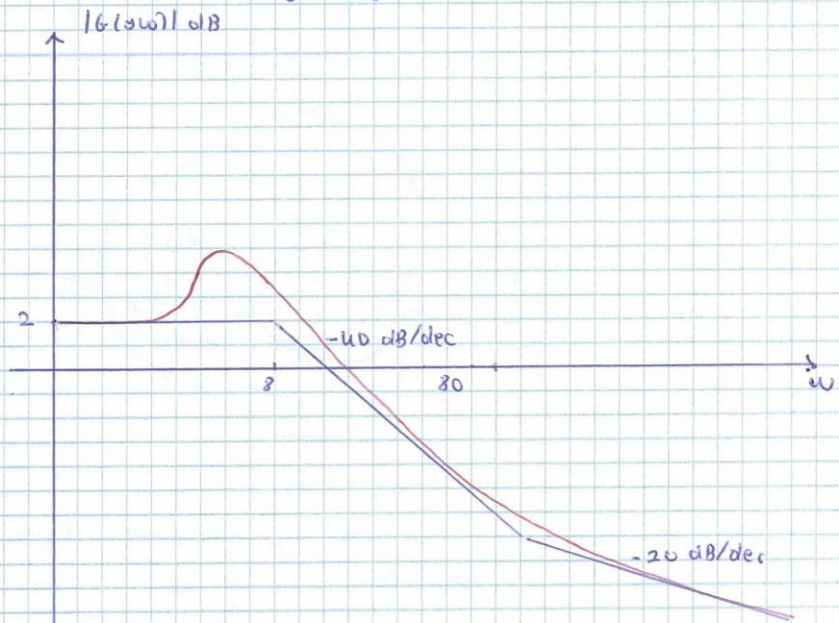
$k < \phi$:

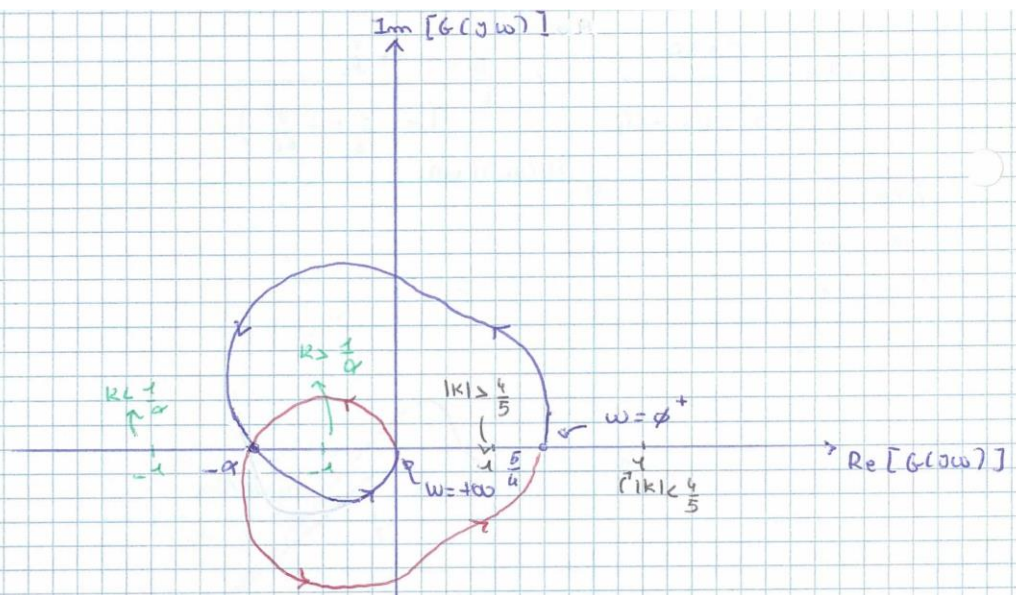
$|k| > \frac{4}{5}$ instabile 1 pd $\rightarrow k < -\frac{4}{5}$

$|k| < \frac{4}{5}$ stabile $\rightarrow k > -\frac{4}{5}$

$$G(s) = \frac{s+80}{s^2 - 4s + 64} = \frac{5}{4} \frac{1 + \frac{s}{80}}{\left(1 - \frac{1}{16}s + \frac{s^2}{64}\right)}$$

$$\begin{cases} K_B = \frac{5}{4} \\ z = -80 \\ \omega_m = 8 \\ d = -1/4 \end{cases}$$





$K > \phi$:
 $K > \frac{1}{\alpha}$ stabile : 2 - 2 = 0! \nearrow poli inst. (poli - dx)
 $K < \frac{1}{\alpha}$ instabile 2 Pd \searrow poli stab. (2 antiinstabili)

$K < \phi$:
 $|K| > \frac{4}{5}$ instabile 1 Pd $\rightarrow K < \frac{4}{5}$
 $|K| < \frac{4}{5}$ instabile 2 Pd $\rightarrow K > \frac{4}{5}$

$$G(s) = \frac{80 \cdot (s+1)}{s^3 (s+10)} = 8 \cdot \frac{s+1}{s^3 (1 + \frac{s}{10})}$$

$$\begin{cases} K_B = 8 \\ z_1 = -1 \\ p_1 = \emptyset \text{ tripla} \\ p_2 = -10 \end{cases}$$

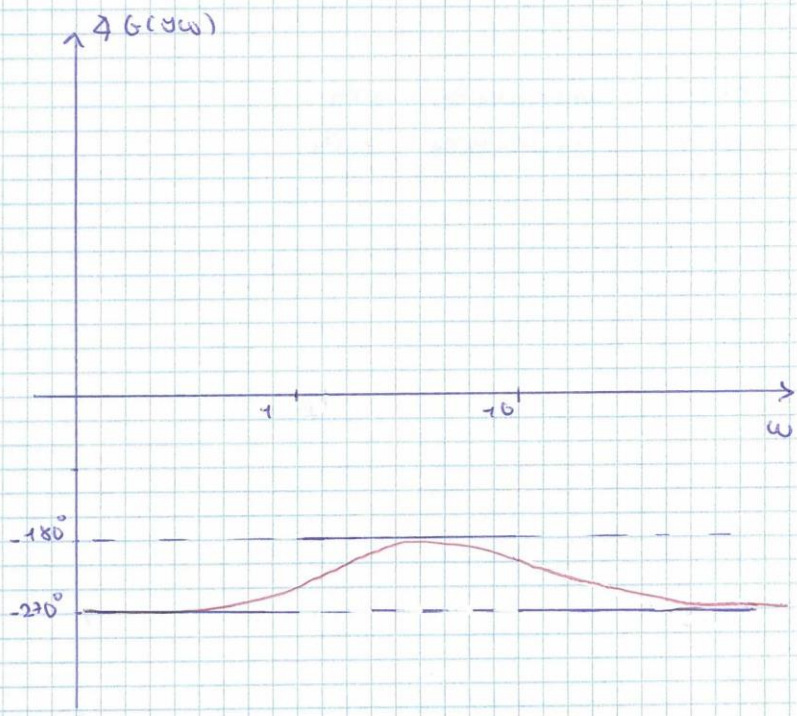
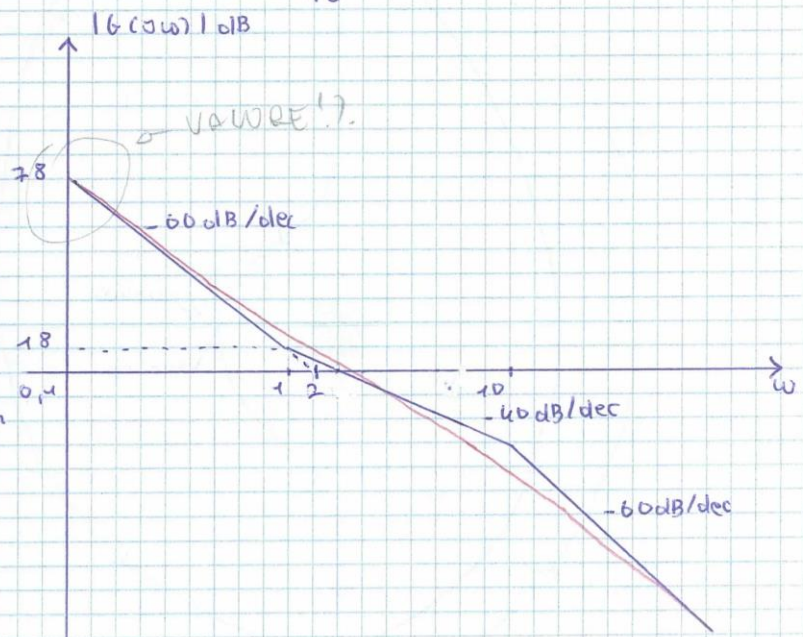
$$\bar{\omega} = \sqrt[3]{8} = 2$$

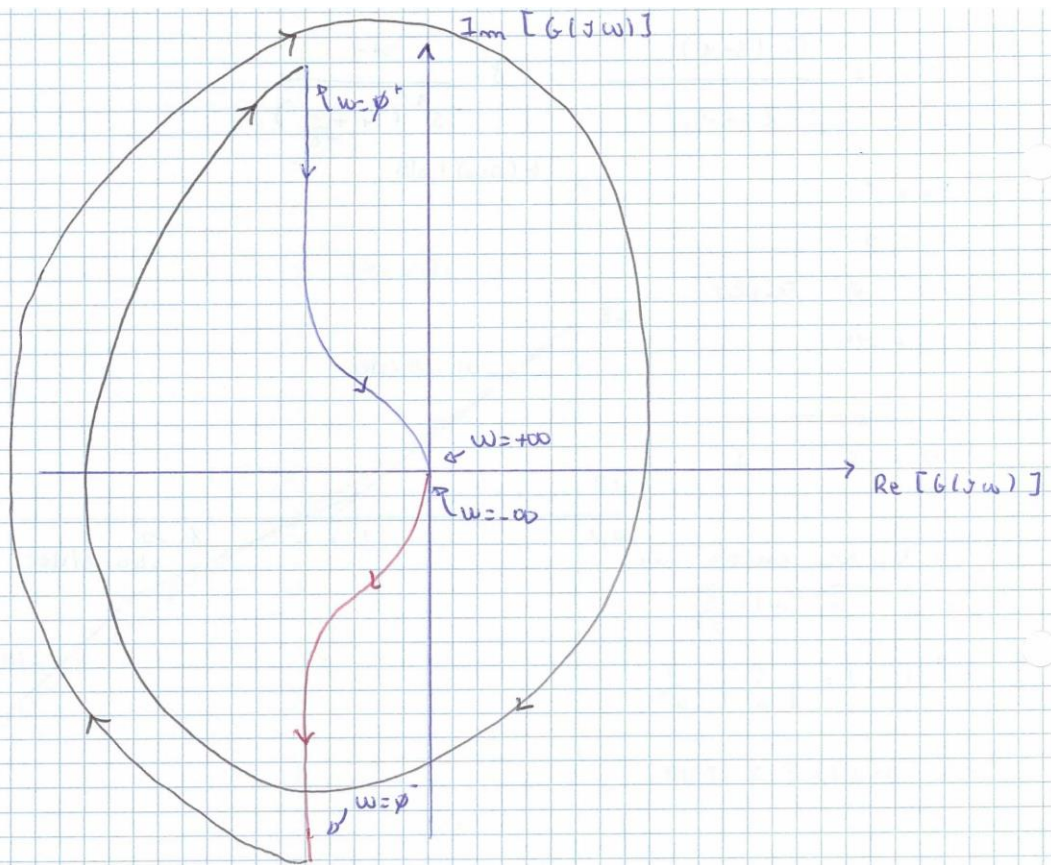
Per trovare antecor. con

$$\omega : G(j\omega) = \frac{8}{j^3}$$

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{8}{\omega^3} \right| = \frac{8}{\omega^3}$$

$$\bar{G}(j-1) = 8 \approx 18 \text{ dB}$$





$K > \phi$: instabile 2 Pd
 $K < \phi$: instabile 1 Pd

$$G(s) = -\frac{(s-1)(s+100)}{s(s+1)(s-10)} = -10 \frac{(1-s)(1+\frac{s}{100})}{s(s+1)(1-\frac{s}{10})}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_B = -10 \\ p_1 = \emptyset \\ z_1 = 1 \\ p_2 = -1 \\ p_3 = +10 \\ z_2 = -100 \end{array} \right.$$

