SISTEMI DI CONTROLLO

[Formulario Esame]

A CURA DI ALESSANDRO PAGHI

PROFESSORE: Marco Casini (http://www3.diism.unisi.it/people/person.php?id=158&aa=2015)

LINK AL CORSO ANNO 2015/2016:
http://www3.diism.unisi.it/FAC/index.php?bodyinc=didattica/inc.insegnamento.php&id=55078&aa=2015

FREQUENTAZIONE: Consigliata.

Risposta in Frequenza

$Re[p_i] < 0$, $u(t) = A \cdot sen(\bar{\omega} t)$

$y(t) = A |G(j\bar{\omega})| sen(\omega t + \angle G(j\bar{\omega}))$

Bode

- Poli funzionano al contrario di zeri;
- ogni polo -20 dB/dec al modulo;
- $Re[p_i] < 0 \rightarrow -90°$
  $Re[p_i] > 0 \rightarrow +90°$

Errore Inseguimento: $\lim_{t \to \infty} |r(t) - y(t)|$

$r(t) = A \rightarrow R(s) = A/s$

$r(t) = At \rightarrow R(s) = A/s^2$

$r(t) = A\frac{t^2}{2} \rightarrow R(s) = A/s^3$

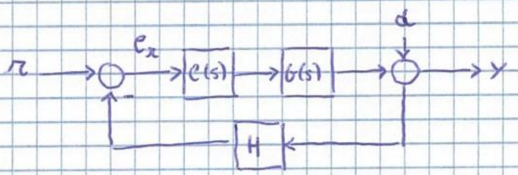
$e_r = r - y_r$; $e_y = \frac{e_r}{H} \rightarrow e_y = \frac{r}{H} - y$

con $H = \frac{1}{K_D}$; $\lim_{t \to \infty} \frac{y(t)}{r(t)} = K_D$

	0	1	2	3 ← h di $G(s) \cdot C(s)$
0	F	0	0	0
1	∞	F	0	0
2	∞	∞	F	0
3	∞	∞	∞	F

↑ K di R(s)

$$h = K \rightarrow e_\infty \begin{cases} = \frac{A}{K_C K_G H} & , h \neq 0 \\ = \frac{A}{1 + K_C K_G H} & , h = 0 \end{cases}$$



Poli Complessi

$1 + \frac{2}{\omega_n} \xi \cdot s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$

$$\begin{cases} -1 < \xi < 1 \\ \omega_n > 0 \end{cases}$$

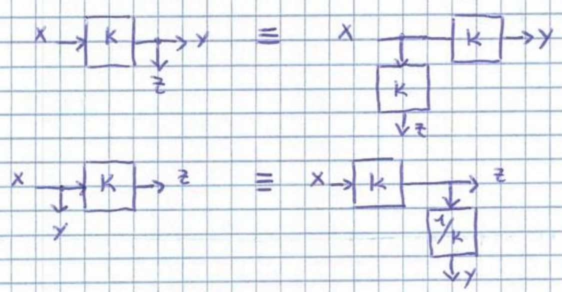
$$\xi \begin{cases} > 0 \rightarrow Re[p_i] < 0 \\ < 0 \rightarrow Re[p_i] > 0 \\ = 0 \rightarrow Re[p_i] = 0 \end{cases}$$

$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$

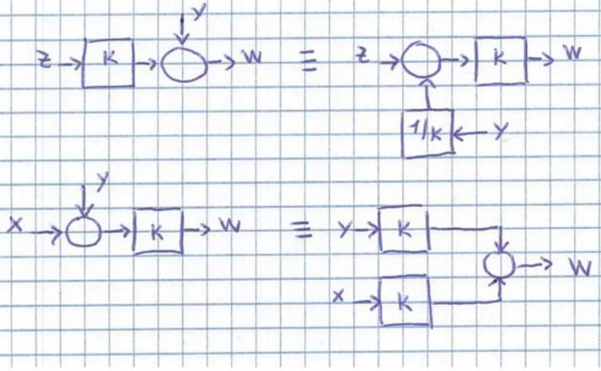
$|G(j\omega_r)| = \frac{1}{2|\xi|\sqrt{1-\xi^2}}$

$|\xi| < \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow$ PICCO

$|\xi| \approx 1 \rightarrow$ ARROTONDO



SPOSTAMENTO P.TO DI PRELIEVO



SPOSTAMENTO SOMMATORE

Tabella di $G(s) \cdot C(s)$

		h			
		0	1	2	3
K	0	F	0	0	0
	1	∞	F	0	0
	2	∞	∞	F	0
	3	∞	∞	∞	F

h Tipo di $G(s) \cdot C(s)$

$K = \emptyset$ gradino

$K = 1$ rampa

$K = 2$ parabola

$$\text{Se } h = \begin{cases} = \emptyset \rightarrow e_\infty = \dfrac{A}{1 + K_C K_G \cdot H} \\ \neq \emptyset \rightarrow e_\infty = \dfrac{A}{K_C \cdot K_G \cdot H} \end{cases}$$

ma se è presente un blocco di retroazione H allora:

$$\text{Se } h: \begin{cases} = \emptyset \rightarrow e_\infty = \dfrac{A}{H + K_C K_G H^2} \\ \neq \emptyset \rightarrow e_\infty = \dfrac{A}{K_C K_G H^2} \end{cases}$$

Se sono presenti disturbi allora:

$$\lim_{s \to \emptyset} s \cdot Y(s) = \lim_{s \to \emptyset} s \cdot T(s) \cdot R(s)$$

Dove: $R(s)$ = gradino $= \dfrac{A}{s}$

$R(s)$ = rampa $= \dfrac{A}{s^2}$

$R(s)$ = parabola $= \dfrac{A}{s^3}$

Se sono presenti disturbi ma ho inserito un polo in $\emptyset$ in $C(s)$ allora $e_{dist} = \emptyset$

→ l'errore è completamente reiettato.

alla fine riesco a ricavare la prima parte di $C(s)$:

$$C(s) = \frac{K_C}{s^m} \cdot C'(s) \quad , \quad C'(\emptyset) = 1.$$

Specifiche nel dominio della frequenza:

$$\phi_m \approx \frac{2,3 - M_{r\,lim}}{1,25} \cdot \frac{180}{\pi} \qquad \text{con } M_{r\,lim} = 10^{\frac{M_{r\,dB}}{20}}$$

$$\omega_c \approx (0,5 \div 0,8)\, B_W$$

$$M_r \approx \frac{1 + \hat{S}}{[0,85 \div 1]}$$

$$T_s \cdot B_W \approx 3$$

Rete Anticipatrice:

$$C_A(s) = \frac{1 + \tau \cdot s}{1 + \alpha \cdot \tau \cdot s} \qquad \alpha = \frac{1 - \mathrm{sen}(\varphi)}{1 + \mathrm{sen}(\varphi)} \quad ; \quad \tau = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\alpha}}$$

Se $\varphi > 60°$ allora uso due $C_A(s)$ da $\varphi/2$

Rete Ritardatrice:

$$C_R(s) = \frac{1 + \alpha \cdot \tau \cdot s}{1 + \tau \cdot s} \qquad \alpha = \frac{1}{m_{lim}} \quad ; \quad \tau = \frac{100}{\omega_c}$$

NOTE:

- Se dopo aver inserito $C_R(s)$ risulta $M_r > M_{r_{IN}}$ allora aumento il guadagno di $C_A(s)$ ovvero riduco α:
  $\rightarrow \alpha \cdot \tau \downarrow$
- Se dopo aver inserito $C_A(s)$ risulta $M_{r\,lim} < 1$, ovvero $M_{r\,dB} < \phi\, dB$ allora posso seguire due strade:
  - aumentare K_c;
  - uso una rete $C_A(s)$ con guadagno in modulo grande e guadagno in fase piccolo ($\omega\tau = 100$);

$$m = x \rightarrow \alpha = \frac{1}{x} \qquad \tau = \frac{\omega\tau}{\omega_c} \qquad \rightarrow C_A(s) = \frac{1 + \tau \cdot s}{1 + \alpha \cdot \tau \cdot s}$$

- Aumento la fase sempre della quantità necessaria più un certo ε supponendo che dopo dovrò usare una rete $C_R(s)$.

- Se la specifica su T_s non è soddisfatta allora devo aumentare la Banda Passante.
- Tramite Nichols in AA riesco anche a vedere se sono soddisfatti M_r e T_s in AC e se è possibile o meno aumentare K_c;
- In riferimento al calcolo di K_c, se non riesco a ricavare K_G (guadagno di $G(s)$) allora:

$$E_y = \frac{E_r}{H} \rightarrow E_r = \frac{1}{1+CGH} \cdot R$$

$\lim_{s \to 0} s \cdot E_r(s) \frac{1}{H}$ da cui ricavo il valore di K_c.

Controllori PID

Controllore P: $C(s) = K_P$

Controllore PI: $C(s) = K_P + K_I/s$

Controllore PID: $C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s$

noi usiamo solo i PI:

$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P \cdot s + K_I}{s} = \frac{K_I\left(1 + \frac{K_P}{K_I} s\right)}{s}$$

Con zero in $-\frac{K_I}{K_P}$

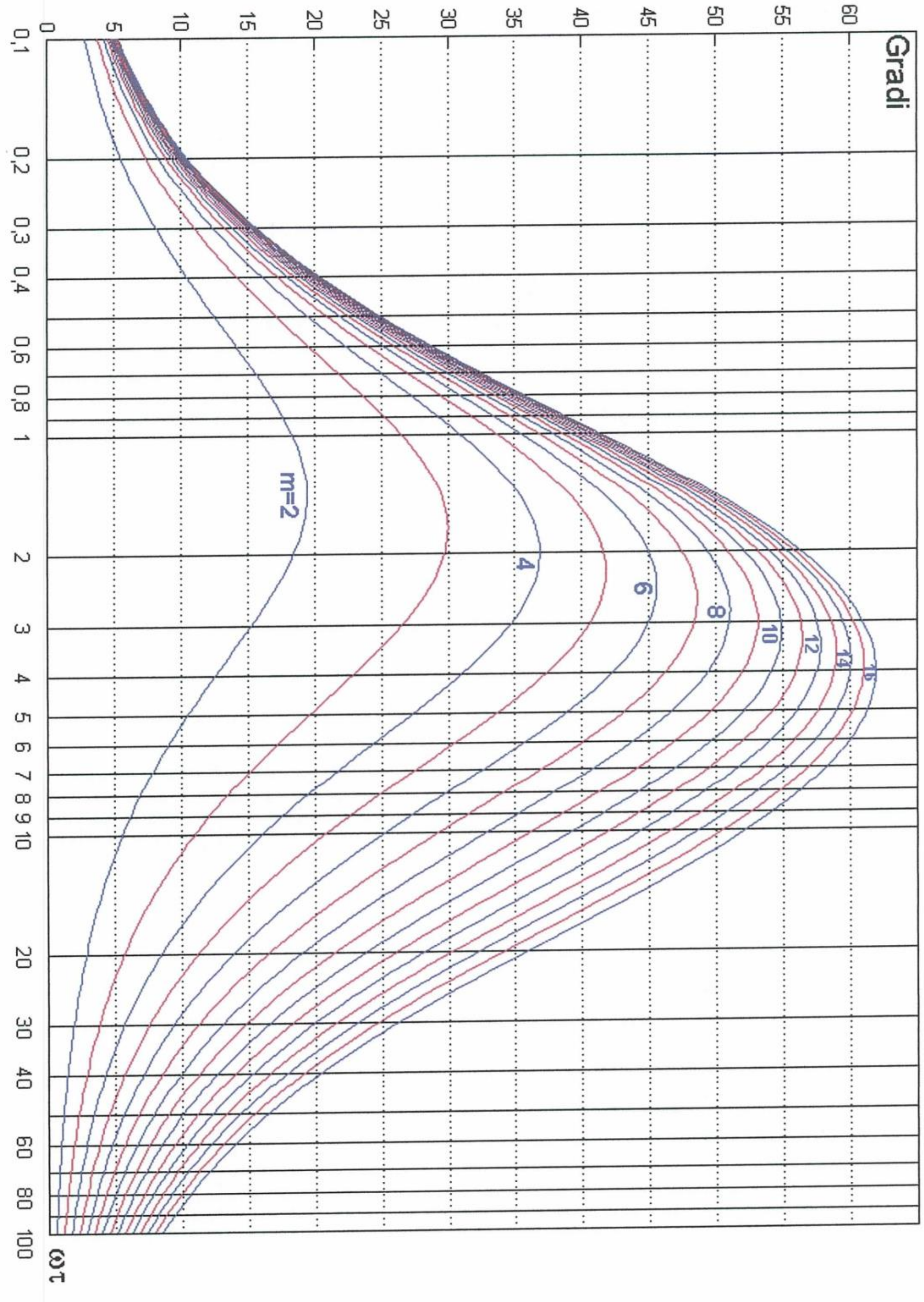
Per prima cosa traccio il grafico di $\frac{G(s)}{s}$

Dopo aggiungo lo zero sulla sx del grafico di Bode e dopodiché modifico K_I per traslare il grafico del modulo in alto ed ottenere ϕ_m corretto.

Quindi controllo con Nichols le specifiche ad AC e noto se è necessario aumentare ancora o meno il valore di K_I.

NOTE:

- Lo zero va posto < 0 in quanto provoca un aumento di fase di $\pi/2$;
- Stabilizzare un sistema significa un $C(s)$ per cui $\phi_m > 0°$;
- Se una volta inserito $C(s)$ risulta $\phi_m < 0$, $\forall \omega$ allora per T. di Bode $\rightarrow$ AC è instabile.


Gradi
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
0,1
0,2
0,3
0,4
0,6
0,8
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
20
30
40
60
80
100
ωτ
m=2
4
6
8
10
12
14
16

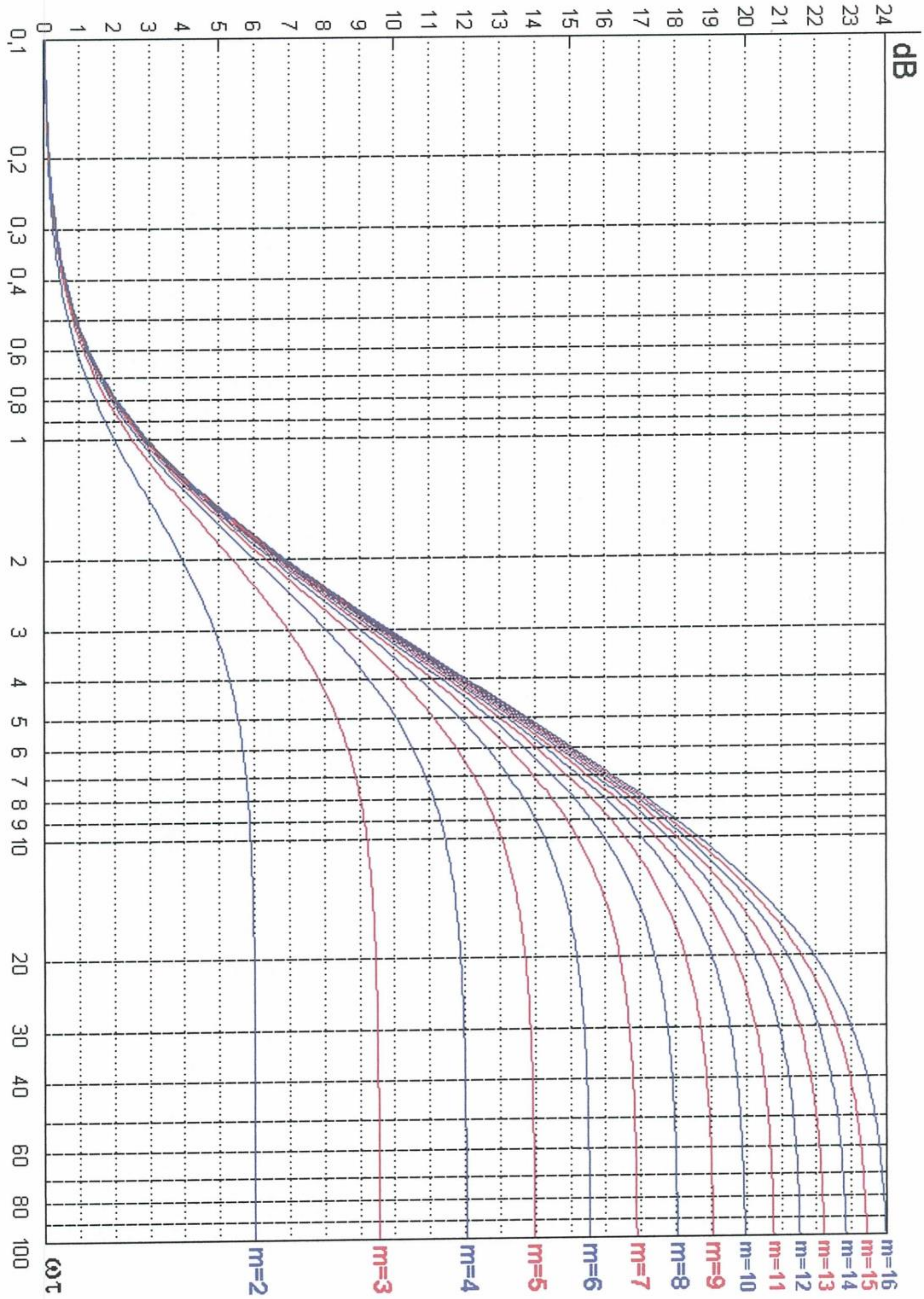

dB
ωτ
m=2
m=3
m=4
m=5
m=6
m=7
m=8
m=9
m=10
m=11
m=12
m=13
m=14
m=15
m=16

Table of Laplace and Z-transforms

	$X(s)$	$x(t)$	$x(kT)$ or $x(k)$	$X(z)$
1.	–	–	Kronecker delta $\delta_0(k)$ 1 $\quad k=0$ 0 $\quad k\neq 0$	1
2.	–	–	$\delta_0(n-k)$ 1 $\quad n=k$ 0 $\quad n\neq k$	z^{-k}
3.	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$1(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
4.	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
5.	$\frac{1}{s^2}$	t	kT	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
6.	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$(kT)^2$	$\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
7.	$\frac{6}{s^4}$	t^3	$(kT)^3$	$\frac{T^3z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}$
8.	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$
9.	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}-e^{-bt}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$	$\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}$
10.	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	kTe^{-akT}	$\frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
11.	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	$(1-akT)e^{-akT}$	$\frac{1-(1+aT)e^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
12.	$\frac{2}{(s+a)^3}$	t^2e^{-at}	$(kT)^2e^{-akT}$	$\frac{T^2e^{-aT}(1+e^{-aT}z^{-1})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^3}$
13.	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$	$at-1+e^{-at}$	$akT-1+e^{-akT}$	$\frac{[(aT-1+e^{-aT})+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})z^{-1}]z^{-1}}{(1-z^{-1})^2(1-e^{-aT}z^{-1})}$
14.	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\sin\omega kT$	$\frac{z^{-1}\sin\omega T}{1-2z^{-1}\cos\omega T+z^{-2}}$
15.	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\cos\omega kT$	$\frac{1-z^{-1}\cos\omega T}{1-2z^{-1}\cos\omega T+z^{-2}}$
16.	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$e^{-akT}\sin\omega kT$	$\frac{e^{-aT}z^{-1}\sin\omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T+e^{-2aT}z^{-2}}$
17.	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$e^{-akT}\cos\omega kT$	$\frac{1-e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T+e^{-2aT}z^{-2}}$
18.	–	–	a^k	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
19.	–	–	a^{k-1} $k=1,2,3,\ldots$	$\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$
20.	–	–	ka^{k-1}	$\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
21.	–	–	k^2a^{k-1}	$\frac{z^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$
22.	–	–	k^3a^{k-1}	$\frac{z^{-1}(1+4az^{-1}+a^2z^{-2})}{(1-az^{-1})^4}$
23.	–	–	k^4a^{k-1}	$\frac{z^{-1}(1+11az^{-1}+11a^2z^{-2}+a^3z^{-3})}{(1-az^{-1})^5}$
24.	–	–	$a^k\cos k\pi$	$\frac{1}{1+az^{-1}}$

$x(t)=0$ for $t<0$

$x(kT)=x(k)=0$ for $k<0$

Unless otherwise noted, $k=0,1,2,3,\ldots$

Definition of the Z-transform

$$\mathscr{Z}\{x(k)\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

Important properties and theorems of the Z-transform

	$x(t)$ or $x(k)$	$Z\{x(t)\}$ or $Z\{x(k)\}$
1.	$ax(t)$	$aX(z)$
2.	$ax_1(t)+bx_2(t)$	$aX_1(z)+bX_2(z)$
3.	$x(t+T)$ or $x(k+1)$	$zX(z)-zx(0)$
4.	$x(t+2T)$	$z^2X(z)-z^2x(0)-zx(T)$
5.	$x(k+2)$	$z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)$
6.	$x(t+kT)$	$z^kX(z)-z^kx(0)-z^{k-1}x(T)-\ldots-zx(kT-T)$
7.	$x(t-kT)$	$z^{-k}X(z)$
8.	$x(n+k)$	$z^kX(z)-z^kx(0)-z^{k-1}x(1)-\ldots-zx(k1-1)$
9.	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$
10.	$tx(t)$	$-Tz\dfrac{d}{dz}X(z)$
11.	$kx(k)$	$-z\dfrac{d}{dz}X(z)$
12.	$e^{-at}x(t)$	$X(ze^{aT})$
13.	$e^{-ak}x(k)$	$X(ze^{a})$
14.	$a^kx(k)$	$X\left(\dfrac{z}{a}\right)$
15.	$ka^kx(k)$	$-z\dfrac{d}{dz}X\left(\dfrac{z}{a}\right)$
16.	$x(0)$	$\lim_{z\to\infty} X(z)$ if the limit exists
17.	$x(\infty)$	$\lim_{z\to 1}\left[\left(1-z^{-1}\right)X(z)\right]$ if $\left(1-z^{-1}\right)X(z)$ is analytic on and outside the unit circle
18.	$\nabla x(k)=x(k)-x(k-1)$	$\left(1-z^{-1}\right)X(z)$
19.	$\Delta x(k)=x(k+1)-x(k)$	$(z-1)X(z)-zx(0)$
20.	$\sum_{k=0}^{n} x(k)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}X(z)$
21.	$\dfrac{\partial}{\partial a}x(t,a)$	$\dfrac{\partial}{\partial a}X(z,a)$
22.	$k^mx(k)$	$\left(-z\dfrac{d}{dz}\right)^m X(z)$
23.	$\sum_{k=0}^{n} x(kT)y(nT-kT)$	$X(z)Y(z)$
24.	$\sum_{k=0}^{\infty} x(k)$	$X(1)$