RICERCA OPERATIVA

[Fotocopie di Appunti Tratti Dal Libro]

A CURA DI ALESSANDRO PAGHI

PROFESSORE: Alessandro Agnetis (http://www3.diism.unisi.it/people/person.php?id=16)

LINK AL CORSO: http://www3.diism.unisi.it/FAC/index.php?bodyinc=didattica/inc.insegnamento.php&id=54903&aa=2014

FREQUENTAZIONE: Consigliata.

P.TO MIN GLOBALE

$x^* \in X$ p.to min globale per f sse $f(x^*) \leq f(x) \ \forall x \in X$

P.TO MIN LOCALE

$x^* \in X$ min local per f se $\exists\ I(x^*, \varepsilon)$ di x^*:

$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in X \cap I(x^*, \varepsilon)$.

DER. DIREZIONALE

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, f definita in x

$\exists \lim\limits_{\lambda \to 0^+} \dfrac{f(x+\lambda d) - f(x)}{\lambda}$ ∂- DER. DIR IN x LUNGO LA DIR D.

DER. PARZIALE

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}^n$, $d = [0\,0\,1\,0 \ldots 0\,0]$, f def in x.

$\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \dfrac{f(x+\lambda d) - f(x)}{\lambda}$ DER. PARZIALE DI F RISPETTO A x_i

$$\parallel$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

GRADIENTE

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$

se $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \Rightarrow \nabla f(x) \in \mathbb{R}^n = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right]^T$

MAT. HESSIANA

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuamente differenziabile 2 volte in $x \in \mathbb{R}^n$

$$\nabla^2 f(x) \in \mathbb{R}^{n \times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \\ & & \\ & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

TAYLOR

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x)^T \cdot h + \beta_1(x,h)$

$h = \lambda d$

$f(x+\lambda d) = f(x) + \nabla f(x)^T \cdot \lambda d + \beta_1(x,\lambda,d)$

$$\frac{f(x+\lambda d) - f(x)}{\lambda} = \nabla f(x)^T \cdot d + \frac{\beta_1(x,\lambda,d)}{\lambda}$$

$$\boxed{\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x+d) - f(x)}{\lambda} = \nabla f(x)^T \cdot d} + \cancel{\frac{\beta_1(x,\lambda,d)}{\lambda}} \to \emptyset$$

CONVESSITA'

COMBINAZIONI

$$\begin{cases} x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)} \in \mathbb{R}^n \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)}$$

LINEARE: $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)}$, λ_i generici

CONICA: $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)}$, $\lambda_i \geq \emptyset$

AFFINE: $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)}$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

CONVESSA: $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)}$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq \emptyset$.

SEGMENTO CHE UNISCE x e y

$x, y \in \mathbb{R}^n \quad , \lambda \in [0, 1] \quad \Rightarrow \underline{\lambda x + (1-\lambda) y}$

INSIEME CONVESSO

$X \subset \mathbb{R}^n$ convesso se presi $x, y \in X \Rightarrow (\lambda x + (1-\lambda) y) \subseteq X$

FUNZIONE CONVESSA

X convesso.

f convessa se presi $x, y \in X \quad , \lambda \in [0, 1]$

$\Rightarrow \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda) y)$.

T

f continuamente ~~differenziabile~~ in $\mathbb{R}^n$ e convessa

$x, y \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T (y - x)$.

ESISTENZA MINIMO

T f continua in X chiuso e limitato

$\Rightarrow f$ ha p.to di minimo ~~globale~~ in X

INSIEME DI LIVELLO : $f(x)$ definita in X, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\mathcal{L}_f(X, \alpha) = \{ x \in X : f(x) \leq \alpha \}$

SUPERFICIE DI LIVELLO : $f(x)$ definita in X, $\alpha \in \mathbb{R}$

$C_f(X, \alpha) = \{ x \in X : f(x) = \alpha \}$

T

f continua in X chiuso , almeno un $\mathcal{L}_f(x, \alpha)$ chiuso e limitato,

$\Rightarrow f$ ha p.to di minimo in X.

ANGOLO FRA VETTORI

$x, y \in \mathbb{R}^n$

θ angolo tra x, y: $\cos\theta = \dfrac{x^T y}{\|x\|\|y\|}$.

DIR. DISCESA

f funzione

$\Rightarrow d$ direzione di discesa se $\exists\ \bar{\lambda} > 0 : f(x+\lambda d) < f(x) \quad \forall\ 0 < \lambda < \bar{\lambda}$.

(T)

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x, d \in \mathbb{R}^n$

d direzione di discesa se $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \dfrac{f(x+\lambda d) - f(x)}{\lambda} = \nabla f(x)^T d < 0$.

$\Rightarrow d$, $\nabla f(x)$ formano angolo ottuso.

OTTIMALITÀ OTTIMIZZAZIONE NON VINCOLATA

CONDIZIONI I ORDINE

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x^* \in \mathbb{R}^n$ p.to min locale se $\nabla f(x^*) = 0$.

CONDIZIONI II ORDINE

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x^* \in \mathbb{R}^n$ p.to min local se

- $\nabla f(x^*) = 0$;
- $\nabla^2 f(x^*)$ semidef positiva. $\Rightarrow$ $x^{*T} \nabla^2 f(x^*) \cdot x^* \geq 0$

(T) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa.

Se x^* p.to min locale $\Rightarrow$ x^* p.to min globale.

P. FORMA GENERALE

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in X \subset \mathbb{R}^n \end{cases} \qquad X = \begin{cases} x: h_i(x) = 0 & i = 1, m \\ g_j(x) \le 0 & j = m+1, \dots, m+p \end{cases}$$

VINCOLI ATTIVI

$$X = \left\{ x : \begin{matrix} h(x) = 0 \\ g(x) \le 0 \end{matrix} \right\}, \quad x \in X$$

vincoli attivi:

$$I_a(x) = \{ i = 1, \dots, m \} \cup \{ j : m+1 \le j \le m+p, \ g_j(x) = 0 \}$$

JACOBIANA

$q = [q_1, q_2, \dots, q_m]$, funzioni di $x \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow J(x) = \frac{\partial q}{\partial x} = \begin{bmatrix} \nabla q_1(x)^T \\ \nabla q_2(x)^T \\ \vdots \\ \nabla q_m(x)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial q_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial q_m}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial q_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

VINCOLO UGUAGLIANZA

$m = 1 \quad p = 0$

$\bar{x} \in X : h_1(\bar{x}) = 0 \quad , \nabla h_1(\bar{x}) \neq 0$

$\bar{x} \Rightarrow \bar{x} + d \ , \ d \in \mathbb{R}^n$

$$h_1(\bar{x} + d) = \underbrace{h_1(\bar{x})}_{=0} + \nabla h_1(\bar{x})^T d + \beta_1(\bar{x}, d)$$

$h_1(\bar{x}+d)$ ammissibile sse $\nabla h_1(\bar{x})^T d = 0$.

Se $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$, $(\bar{x}+d)$ migliore di $(\bar{x})$.

(T) Dato $f(x)$ e $h_1(x)$ se in $\bar{x}$ si ha che $\nabla f(x)$ e $\nabla h_1(x)$ non paralleli, $\exists \ \bar{d}$ come direzione di discesa

$\Rightarrow$ All'ottimo $\nabla f(\overset{*}{x}) \parallel \nabla h_1(\overset{*}{x})$

$\Rightarrow \nabla f(x^*) = \lambda_1^* \nabla h_1(x^*)$

LAGRANGIANA

$L(x, \lambda_1) = f(x) - \lambda_1 h_1(x)$

$\nabla_x L(x, \lambda_1) = \left[\frac{\partial L}{\partial x_1}, \frac{\partial L}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n}\right]^T$

$\Rightarrow \nabla_x L(x^*, \lambda_1^*) = \emptyset$

---

1 DISEQUAZIONE

$m = \emptyset$, $p = 1$

$\bar{x} \in X : g_1(\bar{x}) \geq \emptyset$, $\nabla g_1(\bar{x}) \neq \emptyset$.

$\bar{x} \Rightarrow \bar{x} + d$

$\emptyset \leq g_1(\bar{x} + d) \approx g_1(\bar{x}) + \nabla g_1(\bar{x})^T \cdot d$ $(*)$

1) $\bar{x} \subset X$, $g_1(\bar{x}) > \emptyset$

$(*)$ sempre verificata. $\forall d : (\bar{x} + d) \subset X$.

$\bar{x}$ minimo sse $\nabla f(\bar{x}) = \emptyset$.

2) $\bar{x} \in \partial X$, $g_1(\bar{x}) = \emptyset$

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x})^T \cdot d < \emptyset \\ \nabla g_1(\bar{x})^T \cdot d \geq \emptyset \quad (*) \end{cases}$$ $\Rightarrow \nabla g_1(\bar{x})$ e $\nabla f(\bar{x})$ devono puntare nella stessa dir.

$\Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x})$

LAGRANGIANA

$L(x, \lambda_1) = f(x) - \lambda_1 g_1(x)$

$\Rightarrow \begin{cases} \nabla_x L(x^*, \lambda_1^*) = \emptyset \\ \lambda_1^* g_1(x^*) = \emptyset \end{cases}$ Per qualche $\lambda_1^* \geq \emptyset$

COND. COMPLEMENTARIETÀ

PIÙ DISEQUAZIONI | $p=2$ $g_1(\bar{x}) \geq \phi$, $g_2(\bar{x}) \geq \phi$.

CONO

$x^1, x^2, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$

cono: insieme di tutte le possibili combinazioni

P.TO DI REGOLARITÀ

$X = \{ x : h(x) = \phi, g(x) \geq \phi \}$

x p.to ammissibile

I_a insieme vincoli attivi.

P.to regolare se i gradienti di I_a sono indipendenti.

$\bar{x}$ p.to di regolarità

d direzione di discesa ammissibile se:

$\nabla g_1(\bar{x})^T d \geq \phi$

$\nabla g_2(\bar{x})^T d \geq \phi$

$\nabla f(\bar{x})^T d < \phi$

Se x^* p.to di minimo $\nabla f(x^*)$ deve essere nel cono generato da $\nabla g_1(x^*)$ e $\nabla g_2(x^*)$

$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \lambda_2 g_2(x)$. $\lambda = [\lambda_1 \lambda_2]^T$

Se x^* p.to di minimo: $\exists \lambda^* \geq \phi$:

$$\begin{cases} \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = \phi \\ \lambda_1^* g_1(x^*) = \phi \\ \lambda_2^* g_2(x^*) = \phi \end{cases}$$

$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = \nabla f(x^*) - \lambda_1^* \nabla g_1(x^*) - \lambda_2^* \nabla g_2(x^*) = \phi$.

LE KKT | I ORDINE

FUNZIONE LAGRANGIANA

$$L(x,\lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x) - \sum_{i=m+1}^{m+p} \lambda_j g_j(x)$$

CONDIZIONI KKT

x^* p.to min locale regolare.

$\exists\ \lambda^*$, avente componenti λ^*_i $i = 1, \dots, m+p$:

$$\begin{cases} \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = \emptyset \longrightarrow \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = \nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) - \sum_{i=m+1}^{m+p} \lambda_j^* g_j(x^*) = \emptyset \\ h_i(x^*) = \emptyset \quad i = 1, \dots, m \\ g_j(x^*) \geq \emptyset \\ \lambda_j^* \geq \emptyset \quad j = m+1, \dots, m+p \\ \lambda_j^* g_j(x^*) = \emptyset \quad j = m+1, \dots, m+p \end{cases}$$

SENSIBILITA' ALLA VARIAZIONE DI PARAMETRI

x^* minimo locale regolare.

- g_j non attivo in x^*, $g_j(x^*) > \emptyset$

$\Rightarrow$ perturbando il vincolo esso sarà ancora non attivo

$\Rightarrow$ x^* ancora di minimo locale

- $g_j(x^*) = \emptyset$, lo perturbo di $\varepsilon > \emptyset$ $\Rightarrow$ $g_j(x^*) \geq \emptyset$

$\Downarrow$

il minimo si sposta in $x^*(\varepsilon)$. $\qquad g_j(x) \geq -\varepsilon \|\nabla g_j(x^*)\|$

$\Rightarrow$ valore del minimo passa da $z^* = f(x^*)$ a $z^*(\varepsilon) = f(x^*(\varepsilon))$.

i vincoli attivi sono sempre gli stessi.

$$g_j(x^*(\varepsilon)) - g_j(x^*) = -\varepsilon \|\nabla g_j(x^*)\|$$

TAYLOR: $-\varepsilon \|\nabla g_j(x^*)\| = g_j(x^*(\varepsilon)) - g_j(x^*) \approx \nabla g_j(x^*)^T (x^*(\varepsilon) - x^*)$

mentre per tutti gli altri vincoli attivi $k \neq j$ si ha:

$$\emptyset = g_k(x^*(\varepsilon)) - g_k(x^*) \approx \nabla g_k(x^*)^T (x^*(\varepsilon) - x^*)$$

$$\Rightarrow z^*(\varepsilon) - z^* = f(x^*(\varepsilon)) - f(x^*) \approx \nabla f(x^*)^T (x^*(\varepsilon) - x^*) = \sum_{k=m+1}^{m+p} \lambda_k^* \nabla g_k(x^*)^T (x^*(\varepsilon) - x^*)$$

$$\approx \lambda_j^* \nabla g_j(x^*)^T (x^*(\varepsilon) - x^*) \approx -\varepsilon \|\nabla g_j(x^*)\| \lambda_j^*$$

(K1)

$$\lim_{\varepsilon \to \emptyset} \frac{z^*(\varepsilon) - z^*}{\varepsilon} = \left. \frac{d z^*(\varepsilon)}{d \varepsilon} \right|_{\varepsilon = \emptyset} = - \| \nabla g_J(x^*) \| \lambda^*_J$$

(5)

PROGRAMMAZIONE LINEARE

$$\begin{cases} \min \; c^T x & & A \in \mathbb{R}^{m \times n} & \\ \quad Ax = b & (\mu \in \mathbb{R}^m) & c \in \mathbb{R}^n & m < n. \\ \quad x \geq \emptyset & (s \in \mathbb{R}^n) & b \in \mathbb{R}^m & \end{cases}$$

$$L(x, \mu, s) = c^T x - \mu^T (Ax - b) - s^T x$$

x^* p.to di minimo

$\Downarrow$ tramite le KKT.

$$\begin{cases} \nabla_x L(x^*, \mu^*, s^*)^T = c^T - \mu^{*T} A - s^{*T} = \emptyset \Rightarrow s^* = c^T - \mu^{*T} A \\ Ax^* = b \\ x^* \geq \emptyset \\ s^* \geq \emptyset \\ s^*_j x^*_j = \emptyset \quad \forall j = 1, \dots, n \Rightarrow s^{*T} x^* = \emptyset \end{cases}$$

$\Downarrow$ esplicitando s^*

$$\begin{cases} Ax^* = b \\ x^* \geq \emptyset \\ c^T - \mu^{*T} A \geq \emptyset \\ (c^T - \mu^{*T} A) x^* = \emptyset \end{cases} \qquad (*)$$

7 se x^* e μ^* soddisfano il sistema precedente: $c^T x^* = b^T \mu^*$

DIM:

$$c^T x^* = (\mu^{*T} A + s^{*T}) x^* = \mu^{*T} A x^* \underbrace{+ s^{*T} x^*}_{\emptyset} = \mu^{*T} \underbrace{A x^*}_{b} = b \mu^{*T} = b^T \mu^*$$

PROBLEMA DUALE

$$\begin{cases} \max\ b^T y \\ A^T y \leq c \quad (v \in \mathbb{R}^n) \end{cases} \qquad \begin{matrix} y \in \mathbb{R}^m \\ A^T \in \mathbb{R}^{n \times m} \\ c \in \mathbb{R}^n \end{matrix}$$

$$L(y,v) = -b^T y - v^T (c - A^T y)$$

$\Downarrow$ tramite le KKT

$$\begin{cases} D_y L(y^*, v^*)^T = -b^T + v^{*T} A^T = \emptyset \\ c - A^T y^* \geq \emptyset \\ v^* \geq \emptyset \\ (c - A^T y^*)_j v_j^* = \emptyset \quad \forall j = 1, \dots, n \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} A v^* = b \\ c^T - y^{*T} A \geq \emptyset \qquad (**) \\ v^* \geq \emptyset \\ (c^T - y^{*T} A) v^* = \emptyset \end{cases}$$

(T) Se $\exists\ x^*, u^*$ che soddisfano il sistema $(*)$, allora $\exists\ y^*$ e v^* che soddisfano $(**)$

$$\begin{cases} v^* := x^* \\ y^* := u^* \end{cases} \Rightarrow \text{sistema } (*) = \text{sistema } (**)$$

N.B: i valori dei moltiplicatori di Lagrange u^* associati alla soluzione ottima primale sono i valori delle variabili duali all'ottimo.
i valori dei moltiplicatori di Lagrange v^* associati alla soluzione ottima duale sono i valori delle variabili primali all'ottimo.

(T) Il duale del duale è il primale.

(T) → DUALITÀ DEBOLE
Data una coppia primale-duale con $\bar{x}$ e $\bar{y}$ soluzioni ammissibili
$\Rightarrow c^T\bar{x} \geq b^T\bar{y}$

DIM: $c^T\bar{x} \geq (\bar{y}^T A)\bar{x} = \bar{y}^T b$

(T) → DUALITÀ FORTE
Data una coppia primale-duale con $\bar{x}$ e $\bar{y}$ soluzioni ammissibili.
$\Rightarrow$ Se $c^T\bar{x} = b^T\bar{y} \Rightarrow \bar{x}$ e $\bar{y}$ soluzioni ottime.

$\Rightarrow$ KKT nella programmazione lineare sono condizioni NECESSARIE e SUFFICIENTI.

REGIONE AMMISSIBILE IN UN PPL

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq \emptyset \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} a_i^T x = b_i & \text{IPERPIANO} \\ a_i^T x \geq b_i & \text{SEMISPAZIO (AFFINE)} \end{array}$$

POLIEDRO: Intersezione di un numero finito di iperpiani e semispazi

POLITOPO: Poliedro limitato

$x_1, x_2, \dots, x_K \to K$ vettori di n componenti

$$\sum_{i=1}^{K} \lambda_i x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{K} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq \emptyset \quad \Big\} \text{ COMBINAZIONE CONVESSA}$$

VERTICE: P.to non esprimibile come combinazione convessa di altri punti.

TEOREMA DI MINKOWSKI-WEXL: Dato un poliedro, qualsiasi punto è ottenibile come combinazione convessa dei vertici.

$$\begin{cases} \min c^T x \\ x \in P \end{cases} \qquad \begin{array}{l} c \in \mathbb{R}^n \\ P \text{ politopo} \end{array}$$

$V_1, V_2, \dots, V_K \to K$ vettori

$c^T \bar{V} = \min \{ c^T V_i,\ i = 1, \dots, k \} \Rightarrow \bar{V}$ migliore fra i vertici

$$c^T x = c^T \sum_{i=1}^{k} \lambda_i V_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (c^T V_i) \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (c^T \bar{V}) = c^T \bar{V} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \right)}_{1} = c^T \bar{V}$$

$c^T x \geq c^T \bar{V} \Rightarrow \bar{V}$ soluzione ottima di $\min c^T x$.

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq \emptyset \end{cases} \qquad \begin{array}{l} A \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ b \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

$B \in \mathbb{R}^{m \times m} \to$ insieme delle colonne in base

$F \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)} \to$ insieme delle colonne fuori base.

$$(A) = (B \mid F)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ \hline x_F \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (B \mid F) \begin{pmatrix} x_B \\ \hline x_F \end{pmatrix} = Bx_B + Fx_F = b \\ x_B \geq \emptyset \\ x_F \geq \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_F = \emptyset \\ x_B = B^{-1} b \end{cases} \qquad \begin{cases} x_F = \emptyset \\ x_B = B^{-1} b \geq \emptyset \end{cases}$$

SOLUZIONE DI BASE — SOLUZIONE DI BASE AMMISSIBILE

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq \emptyset \end{cases}$$

$Bx_B + Fx_F = b$

$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Fx_F$

Se $x_F = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} x_B = B^{-1}b \\ x_F = \emptyset \end{cases}$ $\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ \emptyset \end{pmatrix} \to$ Soluzione di Base

Se $B^{-1}b \geq \emptyset \to$ Soluzione di base ammissibile.

Supponiamo che:
Questa soluzione non sia un vertice, cioè che x sia ottenibile come combinazione convessa di due punti del piano.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ \emptyset \\ \vdots \end{pmatrix}$: Soluzione di base ammissibile

Se x non è un vertice $\Rightarrow x = \lambda y + (1-\lambda) z$, con $y, z \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
allora anche y e z devono avere la stessa struttura di x:

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \\ \emptyset \\ \vdots \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \\ \emptyset \\ \vdots \end{pmatrix}$

(1) $A_1y_1 + A_2y_2 + \ldots + A_ry_r = b$

(2) $A_1z_1 + A_2z_2 + \ldots + A_rz_r = b$

A_i : i-esima colonna.

inoltre: $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_rx_r = b$.

Se y e z sono p.ti distinti del piano, posso fare la differenza tra (1) e (2):

$A_1(y_1 - z_1) + A_2(y_2 - z_2) + \ldots + A_r(y_r - z_r) = \emptyset$

Ciò dimostra che le r colonne sono linearmente dipendenti, ma questo contraddice la nostra ipotesi poiché le r colonne si trovano all'interno della matrice di base B.

Conclusione:
una soluzione di base ammissibile è sicuramente un vertice del poliedro.

Supponiamo che:

x è un vertice.

x può essere una soluzione di base ammissibile?

x è ammissibile poichè essendo un vertice appartiene al poliedro.

x è una soluzione di base?

Supponiamo per assurdo che x non sia una soluzione di base:

$$x_r = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ \emptyset \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_r A_r = \emptyset \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Definiamo due punti:

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 + \varepsilon\alpha_1 \\ x_2 + \varepsilon\alpha_2 \\ \vdots \\ x_r + \varepsilon\alpha_r \\ \emptyset \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} x_1 - \varepsilon\alpha_1 \\ x_2 - \varepsilon\alpha_2 \\ \vdots \\ x_r - \varepsilon\alpha_r \\ \emptyset \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \tilde{x}, \tilde{\tilde{x}} \text{ p.ti del poliedro}$$

$$A_1(x_1+\varepsilon\alpha_1) + A_2(x_2+\varepsilon\alpha_2) + \ldots + A_r(x_r+\varepsilon\alpha_r) = \underbrace{A x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_r x_r}_{b} + \varepsilon\underbrace{(A_1\alpha_1 + \ldots + A_r\alpha_r)}_{\emptyset}$$

$$\begin{cases} A\tilde{x} = b \\ \tilde{x} \geq \emptyset \end{cases} \Rightarrow \tilde{x} \text{ p.to del poliedro} \qquad \begin{cases} A\tilde{\tilde{x}} = b \\ \tilde{\tilde{x}} \geq \emptyset \end{cases} \Rightarrow \tilde{\tilde{x}} \text{ p.to del poliedro.}$$

N.B: $\dfrac{\tilde{x} + \tilde{\tilde{x}}}{2} = x$

$\Rightarrow$ x non può essere un vertice perchè dato da una combinazione convessa di due p.ti del poliedro

$\Rightarrow$ Negazione dell'ipotesi

Conclusione:

x soluzione di base ammissibile $\Leftrightarrow$ x vertice

METODO PIÙ EFFICIENTE

$$\begin{cases} \min\ C^T x \\ Ax = b \\ x \geq \emptyset \end{cases} \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ \hdashline x_F \end{pmatrix}, \quad A = \left(B \,\vdots\, F \right), \quad C^T = \left(C_B^T \,\vdots\, C_F^T \right), \quad \begin{matrix} C_B^T \in \mathbb{R}^m \\ C_F^T \in \mathbb{R}^{n-m} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \min\ C_B^T x_B + C_F^T x_F \\ B x_B + F x_F = b \\ x_B \geq \emptyset \\ x_F \geq \emptyset \end{cases} \Rightarrow x_B = B^{-1} b - B^{-1} F x_F \Rightarrow \begin{cases} \min\ C_B^T (B^{-1} b - B^{-1} F x_F) + C_F^T x_F \\ x_B = B^{-1} b - B^{-1} F x_F \\ x_B \geq \emptyset \\ x_F \geq \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min\ C_B^T B^{-1} b + \overbrace{(C_F^T - C_B^T B^{-1} F)}^{\overline{C}_F^T} x_F \\ x_B = \underbrace{B^{-1} b}_{\overline{b}} - \underbrace{B^{-1} F}_{\overline{F}} x_F \\ x_B, x_F \geq \emptyset \end{cases}$$

$\overline{C}_F^T$: vettore dei costi ridotti

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \min\ \overline{z} + \overline{C}_F^T x_F \\ x_B = \overline{b} - \overline{F} x_F \\ x_B, x_F \geq \emptyset \end{cases}$$

CRITERIO DI OTTIMALITÀ

Se $\overline{C}_F^T \geq \emptyset \Rightarrow$ Soluzione ottima

METODO DEL SIMPLESSO

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &B x_B + F x_F = b \\ &x_B = B^{-1} b - B^{-1} F x_F \end{aligned} \qquad \text{con } B = \left[A_{\beta[1]} \; A_{\beta[2]} \; \dots \; A_{\beta[m]} \right]$$

Soluzione di base:

$$\begin{cases} x_B = B^{-1} b \\ x_F = 0 \end{cases} \qquad z = c_B^T x_B + c_F^T x_F = c_B^T B^{-1} b + \underbrace{(c_F^T - c_B^T B^{-1} F)}_{\bar{c}_F^T} \cdot x_F$$

$\bar{b} = B^{-1} b$

$\bar{F} = B^{-1} F$

$\bar{A}_j = B^{-1} A_j = \bar{F}$

$$\begin{aligned} x_{\beta[1]} &= \bar{b}_1 - \sum_{j \in F} \bar{a}_{1j} x_j \\ x_{\beta[2]} &= \bar{b}_2 - \sum_{j \in F} \bar{a}_{2j} x_j \qquad \Leftarrow x_B = B^{-1} b - B^{-1} F x_F \\ &\vdots \\ x_{\beta[m]} &= \bar{b}_m - \sum_{j \in F} \bar{a}_{mj} x_j \end{aligned}$$

attivando la variabile x_R, $\bar{c}_R < 0$

$$\begin{aligned} x_{\beta[1]} &= \bar{b}_1 - \bar{a}_{1R} x_R \geq 0 \\ x_{\beta[2]} &= \bar{b}_2 - \bar{a}_{2R} x_R \geq 0 \\ &\vdots \\ x_{\beta[m]} &= \bar{b}_m - \bar{a}_{mR} x_R \geq 0 \end{aligned}$$

- $\bar{b}_i \geq 0$
- $x_{\beta[i]} = \bar{b}_i - \bar{a}_{iR} x_R \geq 0$

Se $\bar{a}_{iR} > 0$, $x_R \leq \dfrac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{iR}} \Rightarrow \Theta =$ max valore che x_R può assumere $\Rightarrow \dfrac{\bar{b}_t}{\bar{a}_{tR}} = \min \left\{ \dfrac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{iR}}, \bar{a}_{iR} > 0 \right\}$

aumento x_R fin quando una variabile in base si annulla:

$x_{\beta[t]}: \bar{b}_t \to 0$

$x_R: 0 \to \Theta$

Il numero di variabili nulle è rimasto $n-m$, per cui è una soluzione di base ammissibile.

$\Rightarrow$ La funzione obiettivo è migliorata.

```
while (OTT = false) and (ILL = false)
  begin  xᵀ = (x_B ¦ x_F), x_B = B⁻¹b , x_F = ∅
    if (c̄_Fᵀ = c_Fᵀ - c_Bᵀ B⁻¹ F ≥ ∅) then x è ottimo, OTT = true
    else if (∃ x_R : c̄_R < ∅ e Ā_R ≤ ∅) then ottimo non esiste, ILL = true
        else begin
            scegliere una variabile x_R : c_R < ∅
            calcolare b̄_t / ā_tR = min { b̄_i / ā_iR : ā_iR > ∅ } = θ
            effettuare un'operazione di Pivot che scambi x_R e x_β[t]
            aggiornare la base B corrente.
          end
  end
```

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min c_B^T x_B + c_F^T x_F = z \Rightarrow c_B^T x_B + c_F^T x_F - z = \emptyset \\ B x_B + F x_F = b \\ x \geq \emptyset \end{cases}$$

$\emptyset$	c_B^T	c_F^T	-1
b	B	F	$\emptyset \ldots \emptyset$

$$\begin{cases} \min c_B^T B^{-1} b + (c_F^T - c_B^T B^{-1} F) x_F \\ I x_B + B^{-1} F x_F = B^{-1} b \\ \ldots \end{cases}$$

$\overbrace{-c_B^T B^{-1} b}^{\bar z}$	$\emptyset^T$	$\overbrace{c_F^T - c_B^T B^{-1} b F}^{\bar c_F^T}$	-1
$B^{-1} b$	I	$B^{-1} F$	$\emptyset \ldots \emptyset$

x_B

PROBLEMA ARTIFICIALE

$$\begin{cases} Ax + Iy = b \\ x \geq \emptyset \\ y \geq \emptyset \\ \min \sum_{i=1}^{m} y_i = w \end{cases}$$

y_i : variabili artificiali

$\Rightarrow$ minimizzare la somma delle variabili artificiali

All'ottimo

- $w^* > \emptyset$

$\Rightarrow$ non è possibile annullare tutte le variabili artificiali

$Ax \neq b \Rightarrow$ Poliedro vuoto: non esistono soluzioni ammissibili.

- $w^* = \emptyset$

1) Tutte le y_i fuori base

$\Rightarrow$ 1 soluzione di base ammissibile esiste

$\emptyset$	$\emptyset$ (x)	$\emptyset$ (x)	$\emptyset$ (x)	$\emptyset$ (x)	y	y	y
	1	0	0	0	*		*
	0	1	0	0		*	
	0	0	1	0			
	0	0	0	1	*		*

2) non tutte le y_i fuori base

$\Rightarrow y_i$ rimane in base valendo $\emptyset$

$\rightarrow$ Almeno un elemento diverso da $\emptyset$.

$\emptyset$	$\emptyset$		$\emptyset$	$\emptyset$				$\emptyset$	
	1		0	0				0	
	0		0	1				0	
	0		1	0				0	
	0	*	0	0	*	*	*	1	*

$\rightarrow$ Nessun elemento diverso da $\emptyset$

$\emptyset$	$\emptyset$		$\emptyset$	$\emptyset$				$\emptyset$	
	1		0	0				0	
	0		0	1				0	
	0		1	0				0	
	0	0	0	0	0	0	*	1	*

$\Rightarrow$ vincolo linearmente indipendente da un altro e posso eliminarlo.

REGOLA DI BLAND

- Scegliere come variabile x_k da fare entrare in base quella di indice minimo:

$$k := \arg\min \{ j \mid c_j < 0 \}$$

- Scegliere come variabile $x_{\beta[t]}$ da fare uscire dalla base quella con $\beta[t]$ minimo:

$$\beta[t] := \arg\min \left\{ \beta[i] \;\middle|\; \frac{b_i}{a_{ik}} = \theta \right\}$$

RIEPILOGO PRIMALE - DUALE

PRIMALE

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

DUALE

$$\Rightarrow \begin{cases} \max b^T u = \max u^T b \\ u^T A \leq c^T \end{cases}$$

$\bar{x}$: soluzione ottima primale
$\bar{u}$: soluzione ottima duale

AMMISSIBILITÀ PRIMALE: $A\bar{x} = b$, $\bar{x} \geq 0$
AMMISSIBILITÀ DUALE: $\bar{u}^T A \leq c^T$
COMPLEMENTARIETÀ: $(c^T - \bar{u}^T A)\bar{x} = 0$

$$\begin{cases} x_B = B^{-1} b \\ x_F = 0 \end{cases} \Rightarrow u^T := c_B^T B^{-1}$$

$\Downarrow$

AMMISSIBILITÀ DUALE:

$c^T - \bar{u}^T A \geq 0$

$c^T - c_B^T B^{-1} A \geq 0$

$(c_B^T \mid c_F^T) - c_B^T B^{-1} (B \mid F)$

$= (0 \mid \bar{c}_F^T) \geq 0$.

$\Downarrow$

COMPLEMENTARIETÀ

$$\left[(c_B^T \mid c_F^T) - c_B^T B^{-1} (B \mid F) \right] \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ \hline 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\underbrace{c_B^T - c_B^T B^{-1} B}_{0} \mid c_F^T - c_B^T B^{-1} F \right] \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ \hline 0 \end{pmatrix} = 0$$

VARIAZIONI

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq \phi \end{cases}$$

B base ottima

- $c_F^T - c_B^T B^{-1} F \geq \phi$
- $B^{-1} b \geq \phi$

	I	II	III
- Base ottima	✓	✓	✓
- Soluzione ottima	✓	✓	X
- Valore della funzione obiettivo	✓	X	X

I) VARIAZIONI DI COEFFICIENTI DI COSTO DI VARIABILI FUORI BASE ALL'OTTIMO

$c_F^T \Rightarrow c_F^T + \Delta c_F^T$

$c_F^T + \Delta c_F^T - c_B^T B^{-1} F = \bar{c}_F^T + \Delta c_F^T \geq \phi$

II) VARIAZIONI DI COEFFICIENTI DI COSTO DI VARIABILI IN BASE ALL'OTTIMO.

$c_B^T \Rightarrow c_B^T + \Delta c_B^T$

$c_F^T - (c_B^T + \Delta c_B^T) B^{-1} F \geq \phi$

$\Rightarrow (c_B^T + \Delta c_B^T) B^{-1} b = \bar{z} + \Delta c_B^T B^{-1} b = \bar{z} + \sum_{i=1}^{m} \Delta c_{B[i]}^T x^*_{B[i]}$

III) VARIAZIONE TERMINI NOTI

$b \Rightarrow b + \Delta b$

$B^{-1}(b + \Delta b) = \bar{b} + B^{-1} \Delta b \geq \phi$

$\Rightarrow c_B^T B^{-1} (B + \Delta b) = \bar{z} + \underbrace{c_B^T B^{-1}}_{u^*} \Delta b = \bar{z} + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \Delta b_i$