

PROGETTAZIONE DI SENSORI E MICROSISTEMI

[Fotocopie di Appunti PARTE 2]

A CURA DI ALESSANDRO PAGHI

PROFESSORE: Andrea Nannini (<http://www.iet.unipi.it/a.nannini/>)

LINK AL CORSO ANNO 2017/2018: <http://elearn.ing.unipi.it/course/view.php?id=1003>

FREQUENTAZIONE: Consigliata.

MICROSISTEMI PIEZORESISTIVI

PIEZORESISTIVITA'

PIEZORESISTIVITA' NEI MATERIALI CRISTALLINI

Legge di Ohm in termini microscopici

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix}$$

LEGGE DI OHM:

$$E = \rho \cdot J$$

$$V = R \cdot I$$

ρ è simmetrico

$$\begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_6 & \rho_5 \\ \rho_6 & \rho_2 & \rho_4 \\ \rho_5 & \rho_4 & \rho_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \\ \rho_6 \end{bmatrix}$$

Per materiali appartenenti alla classe cubica (Si):

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho & \phi & \phi \\ \phi & \rho & \phi \\ \phi & \phi & \rho \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \\ \phi \end{bmatrix}$$

La piezoresistività può essere descritta formalmente come
come con la notazione:

$$\begin{bmatrix} \rho_1^T \\ \rho_2^T \\ \rho_3^T \\ \rho_4^T \\ \rho_5^T \\ \rho_6^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \\ \rho \\ \phi \\ \phi \\ \phi \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} \delta \rho_1 \\ \delta \rho_2 \\ \delta \rho_3 \\ \delta \rho_4 \\ \delta \rho_5 \\ \delta \rho_6 \end{bmatrix}$$

↑ Resistività totale dovuta ad un campo di stress
 ↑ Resistività in presenza di stress.

↑ Resistività in assenza di stress

$$\begin{bmatrix} \Delta \rho_1^T \\ \Delta \rho_2^T \\ \Delta \rho_3^T \\ \Delta \rho_4^T \\ \Delta \rho_5^T \\ \Delta \rho_6^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1^T \\ \rho_2^T \\ \rho_3^T \\ \rho_4^T \\ \rho_5^T \\ \rho_6^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \\ \rho \\ \phi \\ \phi \\ \phi \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \delta \rho_1 \\ \delta \rho_2 \\ \delta \rho_3 \\ \delta \rho_4 \\ \delta \rho_5 \\ \delta \rho_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta p_1 \\ \delta p_2 \\ \delta p_3 \\ \delta p_4 \\ \delta p_5 \\ \delta p_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{12} & \pi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{11}\gamma_1 + \pi_{12}\gamma_2 + \pi_{12}\gamma_3 \\ \pi_{12}\gamma_1 + \pi_{11}\gamma_2 + \pi_{12}\gamma_3 \\ \pi_{12}\gamma_1 + \pi_{12}\gamma_2 + \pi_{11}\gamma_3 \\ \pi_{44}\gamma_4 \\ \pi_{44}\gamma_5 \\ \pi_{44}\gamma_6 \end{bmatrix}$$

Matrice 6x6 dei coefficienti di pieco-resistività.

↑
Vettore di stress.

In termini matriciali: $\delta p_k = \pi_{kk} \cdot \gamma_k$

Risposta:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} 1 + \pi_{11}\gamma_1 + \pi_{12}\gamma_2 + \pi_{12}\gamma_3 \\ 1 + \pi_{12}\gamma_1 + \pi_{11}\gamma_2 + \pi_{12}\gamma_3 \\ 1 + \pi_{12}\gamma_1 + \pi_{12}\gamma_2 + \pi_{11}\gamma_3 \\ \pi_{44}\gamma_4 \\ \pi_{44}\gamma_5 \\ \pi_{44}\gamma_6 \end{bmatrix}$$

legge di Ohm in presenza di un campo di stress:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho(1 + \pi_{11}\gamma_1 + \pi_{12}\gamma_2 + \pi_{12}\gamma_3) & \rho\pi_{44}\gamma_6 & \rho\pi_{44}\gamma_5 \\ \rho\pi_{44}\gamma_6 & \rho(1 + \pi_{12}\gamma_1 + \pi_{11}\gamma_2 + \pi_{12}\gamma_3) & \rho\pi_{44}\gamma_4 \\ \rho\pi_{44}\gamma_5 & \rho\pi_{44}\gamma_4 & \rho(1 + \pi_{12}\gamma_1 + \pi_{12}\gamma_2 + \pi_{11}\gamma_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix}$$

TRASFORMAZIONE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO

$\delta p_k = \pi_{kk} \gamma_k$ si trova come γ_k , tramite la matrice K di Bond.

$$\delta p' = K \delta p = K \pi T$$

$$T = K^{-1} T'$$

$$\rightarrow \delta p' = K \delta p = K \pi K^{-1} T' = K \pi N^t T' \quad (K^{-1} = N^t)$$

↑
Incremento del tensore delle resistività nel sistema ruotato

↑
Tensore di stress nel sistema ruotato

$$\delta p'_{ik} = \pi'_{ik} \cdot T'_k$$

nel caso di stress piano, ovvero di assenza di stress lungo z:

$$T'_i = \begin{bmatrix} T'_1 \\ T'_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T'_6 \end{bmatrix}$$

Es. una fetta di Si è talmente sottile da presentare stress solo sul piano xy.

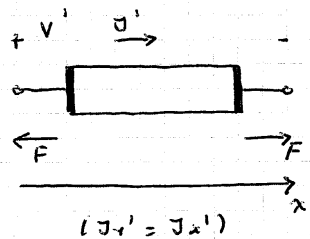
$$\delta p'_i = \pi'_{i1} T'_1 + \pi'_{i2} T'_2 + \pi'_{i6} T'_6 \quad (\pi' = K \pi N^+)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \pi'_{11} T'_1 &= [\pi'_{11} + 2(\pi'_{44} + \pi'_{12} - \pi'_{11}) \cdot (a_{xx}^2 a_{xy}^2 + a_{xx}^2 a_{xy}^2 + a_{xy}^2 a_{xz}^2)] T'_1 \\ \rightarrow \pi'_{12} T'_2 &= [\pi'_{12} - (\pi'_{44} + \pi'_{12} - \pi'_{11}) \cdot (a_{xx}^2 a_{yx}^2 + a_{xx}^2 a_{yy}^2 + a_{xz}^2 a_{yz}^2)] T'_2 \\ \rightarrow \pi'_{16} T'_6 &= [2(\pi'_{44} + \pi'_{12} - \pi'_{11}) \cdot (a_{xx}^3 a_{yx} + a_{xy}^3 a_{yy} + a_{xz}^3 a_{yz})] T'_6 \end{aligned}$$

$$\Delta \delta p'_i{}^T = p \cdot \delta p'_i$$

nel caso di densità di corrente costante allineata con la direzione meccanica uniaassiale F applicata ad una trave di sezione trasversale di area A:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho'_{11} & \rho'_{12} & \rho'_{13} \\ \rho'_{21} & \rho'_{22} & \rho'_{23} \\ \rho'_{31} & \rho'_{32} & \rho'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J'_1 \\ \phi \\ \phi \end{bmatrix}$$



al fine di conoscere ε'_1 è necessario avere informazione solo su p_{11}

ε'_1 è valutabile tramite i due metodi, $\varepsilon'_2, \varepsilon'_3$ non sono valutabili.

$$\varepsilon'_1 = p_{11} \cdot J'_1$$

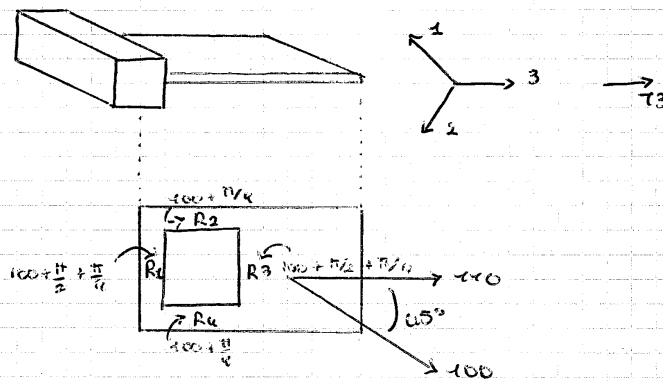
$$\frac{\varepsilon'_1}{J'_1} = p_{11} = p + \Delta p_i{}^T$$

$$\frac{\Delta p_i{}^T}{p} = \frac{\Delta R}{R} \begin{matrix} \rightarrow \text{resistenza compress.} \\ \text{Variazione \% di resistenza.} \\ \rightarrow \text{resistenza a riposo.} \end{matrix}$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \pi'_{11} T'_1 + \pi'_{12} T'_2 + \pi'_{16} T'_6$$

ESERCIZIO SULLA PIEZORESISTIVITA': PONTE DI PIEZORESISTORI SU SILICIO

Consideriamo una struttura a membrana con dimensioni maggiori rispetto alla direzione $x \rightarrow x_0$.
 Nella struttura sono integrati 4 piezoresistori di tipo p connessi a ponte.



Matrice di rotazione a :

$$a = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & \phi \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & \phi \\ \phi & \phi & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{p1} = \pi_{11} T_1 + \pi_{12} T_2 + \pi_{16} T_6$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \pi_{11} T_1 + \pi_{12} T_2 + \pi_{16} T_6 = \pi_{11} T_{11} + \pi_{12} T_{12} + \pi_{16} T_{16}$$

Per ciclio di tipo p: $\pi_{44} \gg \pi_{11}, \pi_{12}$

$$\pi_{11} \approx \frac{1}{2} \pi_{44}$$

$$\pi_{12} \approx -\frac{1}{2} \pi_{44}$$

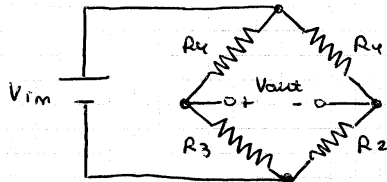
$$\pi_{16} = \phi$$

Per i resistori R_1, R_3 : $T_3 = T_{12}$; $T_4 = T_6 = \phi$

Per i resistori R_2, R_4 : $T_3 = T_4$; $T_2 = T_6 = \phi$

$$R_1 = R_3 = R_0 \left(1 - \frac{1}{2} \overbrace{\pi_{44}}^{\pi_{\perp}} T_3' \right)$$

$$R_2 = R_4 = R_0 \left(1 + \frac{1}{2} \underbrace{\pi_{44}}_{\pi_{\parallel}} T_3' \right)$$



$$\begin{aligned} \frac{V_{out}}{V_{im}} &= \frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ &= \frac{R_0 \left(1 - \frac{1}{2} \pi_{44} T_3' \right)}{2 R_0} + \\ &\quad + - \frac{R_0 \left(1 + \frac{1}{2} \pi_{44} T_3' \right)}{2 R_0} = \\ &= - \frac{1}{2} \pi_{44} T_3' \end{aligned}$$

Trovate V_{out} , applicando V_{im} secondo la misurazione di stress T_3' .

Se la morsa da cui sono integrati i resistori si comporta da membrana lo stress in direzione x e y da considerarsi nullo ($\sigma_x = \sigma_y = 0$).

Per R_1, R_3 : $T_3' = T_1$
 $T_{\parallel} = \sigma T_1$
 $T_t = \phi$

Per R_2, R_4 : $T_3' = T_{\parallel}$
 $T_1 = \sigma T_{\parallel}$
 $T_t = \phi$

$$\pi_{\parallel} = \frac{1}{2} (\pi_{11} + \pi_{22} + \pi_{44})$$

$$\pi_{\perp} = \frac{1}{2} (\pi_{11} + \pi_{22} - \pi_{44})$$

$$R_1 = R_3 = R_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left[(1 + \sigma) (\pi_{11} + \pi_{22}) + \pi_{44} (1 - \sigma) \right] T_3' \right]$$

$$R_2 = R_4 = R_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left[(1 + \sigma) (\pi_{11} + \pi_{22}) - \pi_{44} (1 - \sigma) \right] T_3' \right]$$

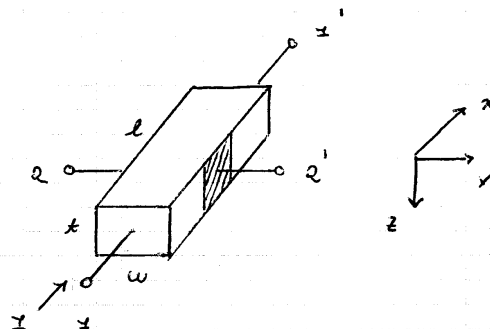
$$R_1 = R_3 \sim R_0 \left[1 + \frac{1}{2} \pi_{44} (1 - \sigma) T_3' \right]$$

$$R_2 = R_4 \sim R_0 \left[1 - \frac{1}{2} \pi_{44} (1 - \sigma) T_3' \right]$$

$$\left(\frac{V_{out}}{V_{im}} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

↑ consente di misurare T_3' .

ESERCIZIO: POTENZIALE DI MISURA PRELEVATO IN QUADRATURA CON LA CORRENTE DI ECCITAZIONE



Il campione misura subisce un campo di tensioni piezoelettriche (ottenute trasduzione lungo z)

Si calcoli $V_{22'}$ quando si inietta $I_{11'}$.

Se la matrice appartiene alla classe cubica:

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{13} & \pi_{13} & \pi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} \end{bmatrix}$$

Resistività in assenza di stress:

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \\ \rho \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

In assenza di stress:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} \quad \text{con } J_1 = \frac{I}{wt} \quad \text{wt: area.}$$

Resistività in presenza di stress totale:

$$\begin{bmatrix} \rho_1^T \\ \rho_2^T \\ \rho_3^T \\ \rho_4^T \\ \rho_5^T \\ \rho_6^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \\ \rho \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta\rho_1 \\ \delta\rho_2 \\ \delta\rho_3 \\ \delta\rho_4 \\ \delta\rho_5 \\ \delta\rho_6 \end{bmatrix}$$

$$\delta p_{\pm} = [\pi] \cdot \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \phi \\ \phi \\ \phi \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{11}\tau_1 + \pi_{12}\tau_2 \\ \pi_{12}\tau_1 + \pi_{11}\tau_2 \\ \pi_{12}\tau_1 + \pi_{11}\tau_2 \\ \phi \\ \phi \\ \pi_{44}\tau_6 \end{bmatrix}$$

↑
Stress piezoelettrico

$$\epsilon_{\pm} = ([\rho] + [\delta\rho]) [\gamma]$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho (\nu + \pi_{11}\tau_1 + \pi_{12}\tau_2) J_{\pm} \\ \rho \pi_{44} \tau_6 J_{\pm} \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho (\nu + \pi_{11}\tau_1 + \pi_{12}\tau_2) \cdot I / \omega t \\ \rho \pi_{44} \tau_6 I / \omega t \\ \phi \end{bmatrix}$$

$$V_{22}' = \int_{\phi}^w \epsilon_2 dy = \rho \pi_{44} \tau_6 \frac{I}{\omega t} \cdot \omega = \rho \pi_{44} \cdot \tau_6 \cdot \frac{I}{t}$$

$$R = \rho \cdot \frac{l}{\omega t} : \text{resistenza in assenza di stress}$$

$$V_{22}' = RI \frac{\omega t}{l} \pi_{44} \tau_6 \frac{I}{t}$$

$$V_{11}' \Big|_{\tau=\phi} = RI : \text{tensione } V_{11}' \text{ in assenza di stress}$$

$$\rightarrow V_{22}' = V_{11}' \Big|_{\tau=\phi} \cdot \frac{\omega}{l} \cdot \pi_{44} \cdot \tau_6 \quad \text{da cui ricavo } \tau_6$$

KOYOROLA X-DUCEA MPX 200

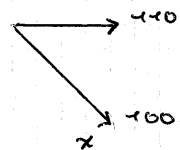
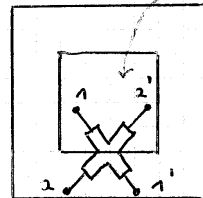
Microsistema piezoresistivo per la misura della pressione con misura di tensione in quadrature rispetto alla corrente di eccitazione.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} (\nu + \pi_{11}\tau_1 + \pi_{12}\tau_2) J_{\pm} \\ \pi_{44} \tau_6 \cdot J_{\pm} \\ \phi \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_1 = \rho J_{\pm} (\nu + \pi_{11}\tau_1 + \pi_{12}\tau_2)$$

$$V_{11}' = \int_{\phi}^l \epsilon_1 dx = \rho l J_{\pm} \left[\nu + \frac{I}{l} \int_{\phi}^l (\pi_{11}\tau_1 + \pi_{12}\tau_2) dx \right]$$

Quantità incognita



Supponiamo piezoresistori di tipo p.

$\pi_{u4} \gg \pi_{u1}, \pi_{u2}$.

Supponiamo che $\rightarrow \frac{1}{l} \int_{\phi}^l (\pi_{u1} \tau_1 + \pi_{u2} \tau_2) dx$

$$V_{u1}' = \rho l J_1 \rightarrow J_1 = \frac{V_{u1}'}{\rho l}$$

$$E_2 = \rho J_1 \pi_{u4} T_6$$

$$V_{u2}' = \int_{\phi}^w E_2 dx = \rho \pi_{u4} T_6 J_1 W = \rho \pi_{u4} T_6 W \cdot \frac{V_{u1}'}{\rho l} = \pi_{u4} T_6 \cdot \frac{W}{l} \cdot V_{u1}'$$

Per una membrana risultata:

$$T_6 = C_x \cdot \left(\frac{L}{H}\right)^2 \cdot P$$

C_x : costante

L : lato membrana

H : spessore membrana

P : pressione applicata

$$\frac{V_{u2}'}{V_{u1}'} = \pi_{u4} \cdot \frac{W}{l} \cdot C_x \left(\frac{L}{H}\right)^2 \cdot P = K_p \cdot P \quad \text{con } K_p = C_x \pi_{u4} \cdot \left(\frac{L}{H}\right)^2 \cdot \frac{W}{l}$$

$$K_p \approx 0,086 \frac{mV}{V} \cdot kPa$$

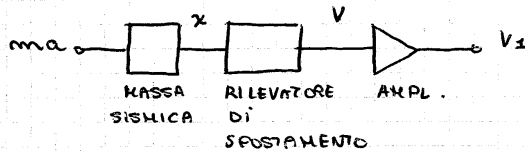
XDCER KPX 200 presenta 3 stadi di guadagno con trim-
ming resistivo al fine di compensare l'effetto della
temperatura.

MICROSISTEMI INERZIALI

Le specifiche di un accelerometro di bordo del
compo di un aereo automatico o navigazione.

ACCELEROMETRI

ACCELEROMETRO QUASI STATICO A LOOP APERTO



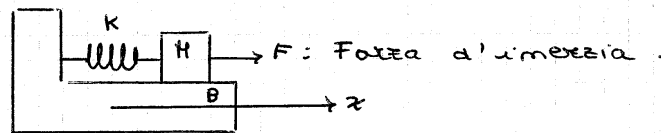
$$F = m \cdot a$$

$$x = m \cdot a / k$$

$$V = p \cdot x$$

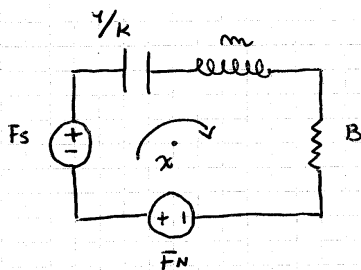
$$V_1 = A p \cdot x$$

Un accelerometro è un sistema massa - molla -
smorzatore



Idea: misurare lo spostamento x della massa
molla e da questo risulta la velocità di \vec{a} .

Circuito equivalente



F_s : forza d'inerzia.

F_N : contributo di rumore.

$$\ddot{x} = U_{ee}$$

$$\frac{U_{ee}}{F_s + F_N} = \frac{\frac{s}{m}}{s^2 + s \frac{B}{m} + \frac{K}{m}} = \frac{s}{ms^2 + sB + K}$$

Pulsazioni naturali di oscillazione libere:

$$\lambda_1 = \omega_0 \left(-\frac{\gamma}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{4Q^2} - 1\right)} \right)$$

$$\lambda_2 = \omega_0 \left(-\frac{\gamma}{2Q} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{4Q^2} - 1\right)} \right)$$

$$\omega_m \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

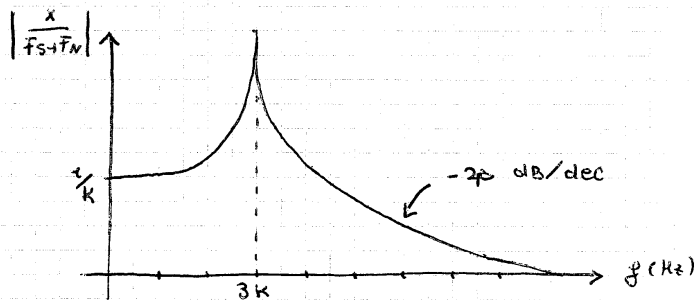
$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{m\omega_0}{B} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{m}{B} = \frac{\sqrt{km}}{B}$$

$$U_{ee} = \dot{x} = s x$$

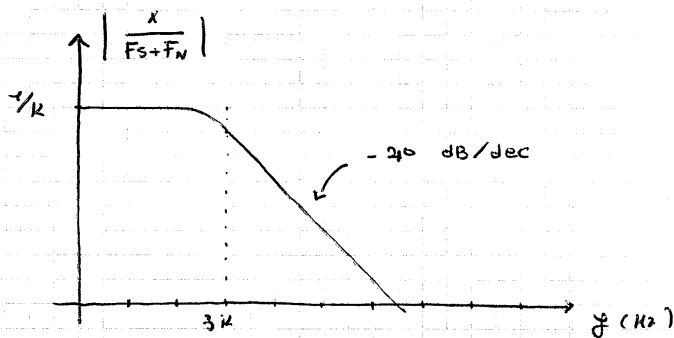
$$\frac{s x}{F_s + F_N} = \frac{\frac{s}{m}}{s^2 + s \frac{B}{m} + \frac{k}{m}} \rightarrow \frac{x}{F_s + F_N} = \frac{\gamma}{ms^2 + sB + k}$$

$$\rightarrow x = (F_s + F_N) \cdot \frac{\gamma}{ms^2 + sB + k} = (m\alpha + F_N) \cdot \frac{\gamma}{ms^2 + sB + k}$$

$$Q = \infty ; f_0 = 3 \text{ kHz}$$



$$Q = 0.0000 ; f_0 = 3 \text{ kHz}$$



$$x = \frac{F_s + F_N}{m s^2 + B s + K}$$

Questo sistema può essere usato come accelerometro, ma se la massa mobile è in grado di seguire $F_s = m \cdot a$ senza ritardo o attenuazione ossia se il segnale è a frequenza f_s sufficientemente minore minima del frequenza di risonanza f_0 .

La entità della :

$$w = \phi$$

$$\rightarrow x = \frac{F_s + F_N}{K} = \frac{m a + F_N}{K} = \frac{a}{\omega_0^2} + \frac{F_N}{K}$$

Trascurando $F_N \approx \phi$:

$$\frac{x}{a} = \frac{m}{K} ; \quad x = \frac{a}{\omega_0^2}$$

Per ottenere un valore ampio di x facilmente misurabile, a parità di \vec{a} si dovrebbe diminuire ω_0 , che contrasta con l'esigenza di avere $f_s \ll f_0$.

Lo smorzamento è la sorgente di rumore di fondo :

$$S_{F_N} = 4 K_B T B \quad K_B : \text{costante di Boltzmann}$$

$$\rightarrow x = \frac{F_N}{K} \rightarrow S_x = 4 K_B T B \cdot \frac{1}{K^2}$$

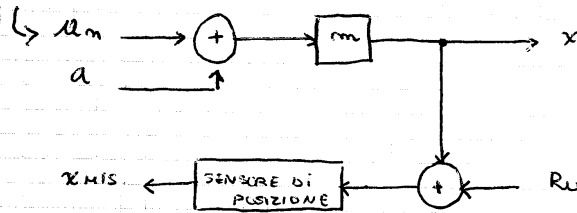
a_m : Riscossione

$$a_m = \sqrt{S_x} \cdot \omega_0^2 = \sqrt{\frac{4 K_B T B}{K}} \sqrt{\frac{K}{m}} \cdot \omega_0 = \sqrt{\frac{4 K_B T B}{K m}} \cdot \omega_0^2$$

$$= \sqrt{\frac{4 K_B T}{Q \cdot \sqrt{K m}}} \cdot \omega_0^2 = \sqrt{\frac{4 K_B T}{m Q}} \cdot \omega_0 \quad \left[\frac{N}{\sqrt{Hz}} \right]$$

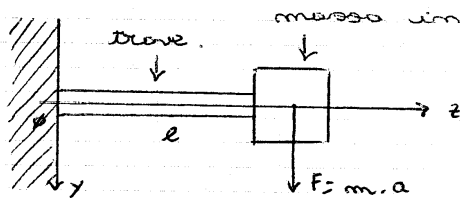
a_m : minima accelerazione che sono in grado di misurare.

Rumore circuito meccanico



Rumore circuito elettronico

SEMPLICE ACCELEROMETRO



t : sezione trave

$$J = \frac{st^3}{12}$$

$$k = \frac{F}{u_{yMAX}} = \frac{3EJ}{l^3}$$

$$k = 14,58 \text{ N/mm}$$

$$f_0 = 3843 \text{ Hz}$$

ACCELEROMETRO PIEZORESISTIVO

Avremo integrato un piezoresistore sulla struttura precedente. In quale posizione lo integriamo?

$$\frac{d^2}{dy^2} u_y = -\frac{M}{EJ} = \frac{F(l-z)}{EJ} = \frac{12ml(l-z)}{Est^3} = -\frac{1}{r}$$

$$\begin{cases} u_y(\phi) = \phi \\ \frac{d}{dz} u_y(\phi) = \phi \end{cases} \quad u_y(z) = \frac{6ml}{Est^3} z^2 \left(1 - \frac{z}{3l}\right)$$

$$T_3 = E \cdot \frac{y}{r} = -\frac{12ma(l-z)}{st^3} \cdot y$$

stress a cui risponde il piezoresistore integrato.

$$\tau_3 = \tau_{3\text{MAX}} \quad \text{se } z = \phi$$

$$y = t/2$$

in funzione di y lo stesso è nulla sull'asse neutro e varia linearmente sulla spessore della trave \rightarrow conviene integrare superficialmente.

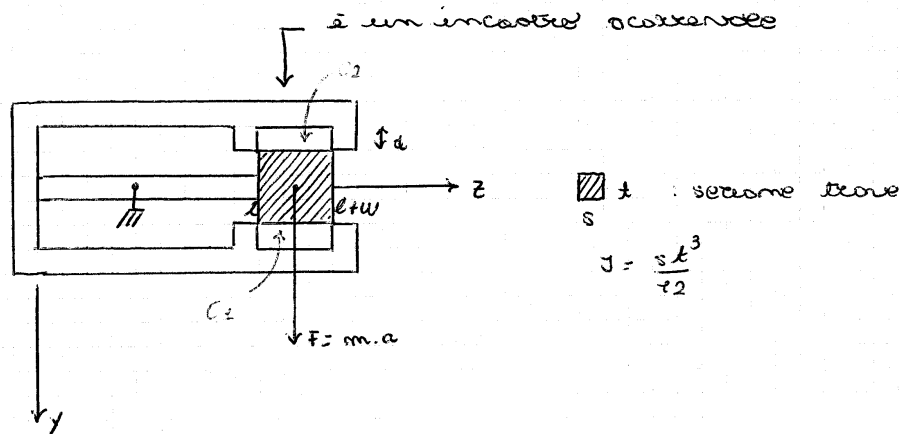
$$\tau_{3\text{MAX}} = - \frac{6ma}{st^2}$$

un punto di piezo resistanzi di tipo P integrato dovrà una risposta:

$$\left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| = \frac{1}{2} \pi_{44} \tau_{3\text{MAX}} = - \frac{3ma \pi_{44}}{st^2} = - \frac{3m \pi_{44}}{st^2}$$

da cui si trova \vec{a} .

ACCELEROMETRO CAPACITIVO



La massa dinamica costituisce l'armatura a comune di due capacità ed è guidata in modo da compiere solo spostamenti verticali.

$$M_{y\text{MAX}} = M_y(z=l) = \frac{Fl^3}{12EI} = \frac{Fl^3}{Est^3}$$

$$d_2 = d + u_y(z=2)$$

$$d_1 = d - u_y(z=2)$$

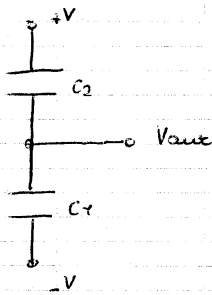
da cui risulta:

$$C_2 = \frac{\epsilon A}{d_2} = \frac{\epsilon A}{d + \frac{Fl^3}{\epsilon st^3}} = c \cdot \frac{d}{d + \frac{Fl^3}{\epsilon st^3}} \quad \left(c = \frac{\epsilon A}{d} \right)$$

$$C_1 = \frac{\epsilon A}{d_1} = \frac{\epsilon A}{d - \frac{Fl^3}{\epsilon st^3}} = c \cdot \frac{d}{d - \frac{Fl^3}{\epsilon st^3}}$$

Alimentazione della capacità per tensione costante

di riferimento:



$$V_{out} = \frac{2V}{1 + \frac{1}{\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}} = V$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} V \cdot \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} C_1 C_2} = V$$

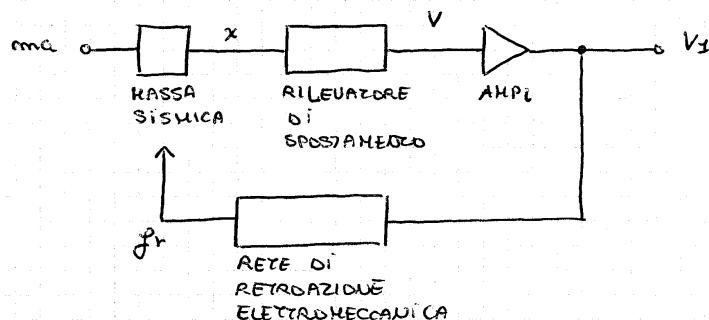
$$= 2V \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2} = V \cdot \frac{C_2 - C_1}{C_1 + C_2} = V \cdot \frac{C_2 - C_1}{C_1 + C_2}$$

$$V_{out} = V \cdot \frac{c \left[\frac{d}{d + \frac{Fl^3}{\epsilon st^3}} - \frac{d}{d - \frac{Fl^3}{\epsilon st^3}} \right]}{c \left[\frac{d}{d + \frac{Fl^3}{\epsilon st^3}} + \frac{d}{d - \frac{Fl^3}{\epsilon st^3}} \right]}$$

$$= V \cdot \frac{-2 \frac{Fl^3}{\epsilon st^3} / d^2 - \left(\frac{Fl^3}{\epsilon st^3} \right)^2}{2d / d^2 - \left(\frac{Fl^3}{\epsilon st^3} \right)^2} = - \frac{V}{d} \cdot \frac{Fl^3}{\epsilon st^3} = - m a \frac{V l^3}{\epsilon st^3 d}$$

$$\frac{V_{out}}{V} = - m \cdot \frac{l^3}{\epsilon st^3 a} \cdot a \quad \text{da cui si trova } \rightarrow a$$

ACCELEROMETRO A LOOP CHIUSO



$$F = m \cdot a$$

$$x = ma / k$$

$$V = p \cdot x$$

$$V_1 = A p \cdot x$$

$$f_r = -A q p x$$

Parte di V_1 è prelevata, convertita in forza e spostata di 180° e applicata alla massa sismica che quindi sperimenta una forza risultante $F_{ris} = ma + f_r$.

$$f_r = -A q p x = -K_e \cdot x \quad , \quad K_e = A p q$$

Lo schema anzidetto della forza di reazione si rende assimilabile alla forza di richiamo di una molla con costante elastica K_e .

$$x = \frac{F_{ris} + F_u}{m s^2 + B s + K}$$

$$F_u \sim \phi \quad \rightarrow \quad x = \frac{ma + f_r}{m s^2 + B s + K}$$

$$(m s^2 + B s + K) x = ma - K_e x$$

$$[m s^2 + B s + (K + K_e)] x = ma$$

Il sistema funziona adesso con una molla di costante $K + K_e$: il sistema si è arricchito di una quantità pari a K_e .

$$x = \frac{ma}{ms^2 + Bs + (K+K_e)} = \frac{ma}{ms^2 + Bs + (1+\gamma)K}$$

$$\text{con } \gamma = \frac{K_e}{K} = \frac{Apq}{K}$$

$$\text{Per } S = \varphi, \text{ prima equazione } \frac{x}{a} = \frac{m}{K}$$

$$\text{seconda equazione } \frac{x}{a} = \frac{m}{(1+\gamma)K} = \frac{m}{K+K_e}$$

Abbiamo ottenuto una relazione assai spostamento di un fattore $\frac{1}{1+\gamma} \ll 1$, nell'ipotesi $\gamma \gg 1$.

$$V_1 = Ap x = \frac{Ap ma}{(1+\gamma)K} = \frac{Apq ma}{(1+\gamma)Kq} = \frac{K_e ma}{(1+\gamma)Kq}$$

$$= \frac{\gamma ma}{(1+\gamma)q} \sim \frac{ma}{q}$$

$\frac{V_1}{a} \sim \frac{m}{q}$ che costituisce una relazione lineare e di buona ampiezza nell'ipotesi in cui q sia costante e piccolo

$$\omega_c = \sqrt{\frac{K+K_e}{m}} = \sqrt{1+\gamma} \cdot \sqrt{\frac{K}{m}} = \omega_c|_{\text{ipem exp}} \sqrt{1+\gamma}$$

con $\omega_c|_{\text{ipem exp}} = \sqrt{\frac{K}{m}}$ la frequenza di risonanza è aumentata di un fattore $\sqrt{1+\gamma}$

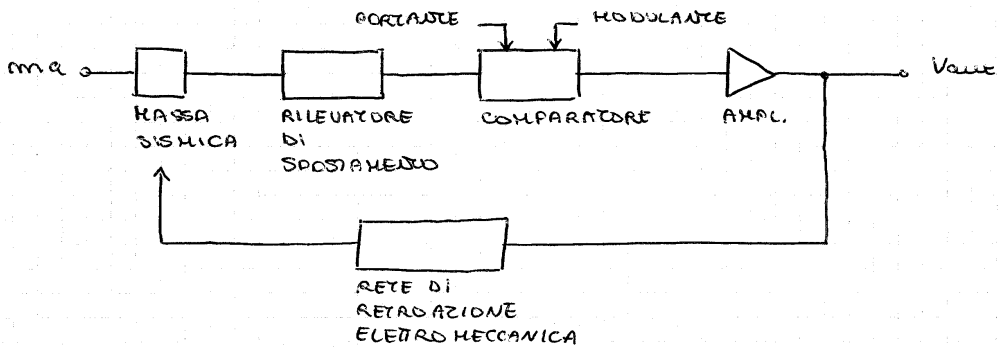
$$Q = \frac{m\omega_c}{B} = \frac{m}{B} \omega_c|_{\text{ipem exp}} \sqrt{1+\gamma} = Q|_{\text{ipem exp}} \sqrt{1+\gamma}$$

Comportamento fisico del sistema con la massa molto ritardatamente ferma e l'elemento elastico irrigidito grazie alla reazione.

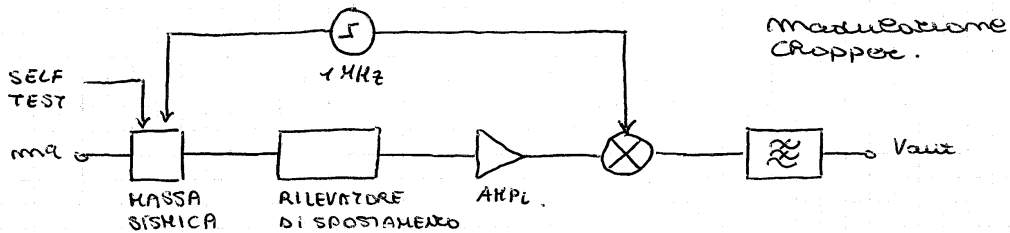
Il risultato prevede che per elementi della catena di azione e reazione abbiamo una banda grande in

Compromesso a quella complessiva del sistema.

ACCELEROMETRO CON USCITA E REAZIONE PWM



FUNZIONI COMPLEMENTARI NELLA CATENA DI AZIONE



CONFRONTO ACCELEROMETRO OPEN-LOOP E CLOSE-LOOP

O.L.

Risoluzione e banda dipendono da:

- Proprietà materiali;
- Variazioni delle dimensioni;
- Ammortamento (interazione sistema secondo con atmosfera);

Amplie variazioni di offset e guadagno

Sensibile a variazioni di temperatura

C.L.

Risposta lineare

Bande dinamica estesa

Sensibilità alla temperatura ridotta

Sensibilità alle variazioni di processo ridotta.

GIROSCOPI

I giroscopi, a seconda della perfezione, possono essere raggruppati in 3 classi:

- grado generale;
- grado tattico;
- grado strategico.

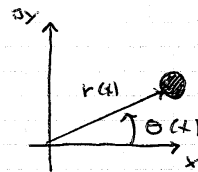
Il compito di un giroscopio è misurare la velocità angolare ω .

Un giroscopio + un accelerometro costituiscono una stanza inerziale.

$s = r(t) e^{j\theta(t)}$ individua un punto nel piano complesso.

$r(t)$: raggio vettore

$\theta(t)$: angolo esteso da $r(t)$ all'asse x
sperimentale



$$v = \frac{d}{dt} s = \frac{d}{dt} (r(t) e^{j\theta(t)}) = \underbrace{\frac{d}{dt} r(t) e^{j\theta(t)}}_{\text{Componente Radiale di } v} + j \underbrace{\frac{d}{dt} \theta(t) r(t) e^{j\theta(t)}}_{\text{Componente Tangenziale di } v}$$

La componente tangenziale di v

$$\rightarrow \omega = \frac{d}{dt} \theta(t)$$

è proporzionale alla velocità

velocità angolare

angolare $\omega = \frac{d}{dt} \theta(t)$ e diretto in

quadratura rispetto ad $r(t)$ in anticipo se $\omega > 0$.

$$\begin{aligned} a &= \frac{d^2}{dt^2} s = \frac{d}{dt} v = \frac{d}{dt} \left[\frac{dr}{dt} e^{j\theta} + j \frac{d\theta}{dt} r e^{j\theta} \right] = \\ &= \frac{d^2 r}{dt^2} e^{j\theta} + \frac{dr}{dt} \frac{d}{dt} (e^{j\theta}) + j \frac{d^2 \theta}{dt^2} r e^{j\theta} + j \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{dt} (r e^{j\theta}) \\ &= \frac{d^2 r}{dt^2} e^{j\theta} + j \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} e^{j\theta} + j \frac{d^2 \theta}{dt^2} r e^{j\theta} + j \frac{d\theta}{dt} \left(\frac{dr}{dt} e^{j\theta} + j \frac{d\theta}{dt} r e^{j\theta} \right) \\ &= \frac{d^2 r}{dt^2} e^{j\theta} + j \frac{d^2 \theta}{dt^2} r e^{j\theta} + 2j \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} e^{j\theta} - \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 r e^{j\theta} \end{aligned}$$

$$= \frac{d^2 r}{dt^2} e^{j\theta} + j \frac{dw}{dt} r e^{j\theta} + 2j \frac{dr}{dt} w e^{j\theta} - w^2 r e^{j\theta}$$

con $r = r(t)$

$\theta = \theta(t)$

$\frac{dr}{dt} = v_{\text{ec}}$ velocità radiale

$w = w(t)$

$\frac{d^2 r}{dt^2} e^{j\theta}$: accelerazione radiale

$\frac{dw}{dt}$: accelerazione angolare

$j \frac{dw}{dt} r e^{j\theta}$: termine tangenziale in quadratura rispetto ad $r(t)$

$-w^2 r e^{j\theta}$: accelerazione centripeta in opposizione ad $r(t)$

$2j \frac{dr}{dt} w e^{j\theta}$: accelerazione di Coriolis in quadratura rispetto ad $r(t)$ → si tratta di un termine tangenziale proporzionale alla velocità radiale $\frac{dr}{dt}$ o alla velocità angolare w .

Da quest'ultimo termine siamo in grado di ricavare il valore di $w = \frac{d\theta}{dt}$.

In condizioni di $w = \text{cost}$:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv_{\text{ec}}}{dt} e^{j\theta} + 2j v_{\text{ec}} w e^{j\theta} - w^2 r e^{j\theta}$$

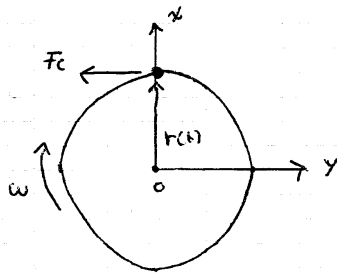
In condizioni anche di $v_{\text{ec}} = \frac{dr}{dt} = \text{cost}$:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = 2j v_{\text{ec}} w e^{j\theta} - w^2 r e^{j\theta} \quad \text{moto circolare uniforme.}$$

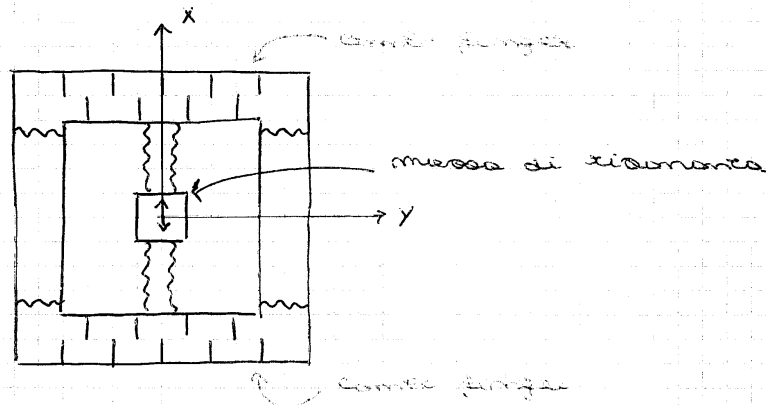
La Forza di Coriolis F_c è in quadratura in anticipo rispetto al vettore di rotazione e vale :

$$|F_c| = 2 m v_{\text{ec}} w$$

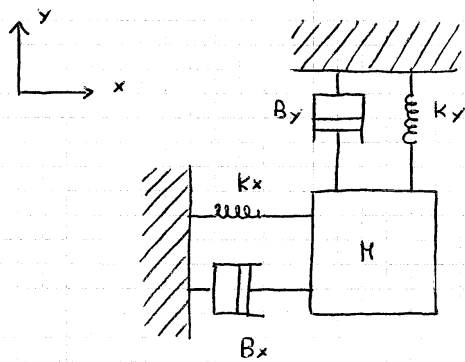
GIROSCOPI MICROELETTRICI VIBRANTI



Si sostituisce il punto materiale con un sistema del tipo :



Che si traduce in uno schema concettuale :



Il sistema è composto da due sistemi meccanici indipendenti che agiscono su due assi caratterizzati rispettivamente dalle pulsazioni di risonanza

ω_x ed ω_y e dai fattori di qualità Q_x e Q_y .

La catena meccanica alimentata ad x è detta Catena di driving, mentre la catena alimentata ad y è detta catena di sensing.

La massa oscilla lungo x a causa di una forza applicata volontariamente e lungo y a causa di ω .

Supponiamo che la massa mobile sia posta in vibrazione lungo x secondo:

$$x = Ad \cdot \sin(\omega_d t)$$

Il sistema resta intorno a z con velocità angolare $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$.

Mostrare una forza di Coriolis: $F_c = 2m v \Omega$.

$$F_c = 2m \frac{dx}{dt} \cdot \Omega = 2m \omega_d \Omega Ad \cos(\omega_d t)$$

che agisce lungo y causando un moto.

Ω è proprio la velocità angolare che regola l'oscillazione.

Un regime stazionario permanente, un aspetto di stazionarietà, il moto lungo y è dato da:

$$y = \frac{F_c/m}{s^2 + s \frac{\omega_y}{Q} + \omega_y^2} = \frac{2 \cdot \omega_d \Omega Ad}{\omega_y^2 - \omega_d^2 + j 2 \omega_d \frac{\omega_y}{Q}} \cdot \cos(\omega_d t)$$

$$\text{con } s = j\omega, \quad \omega = \omega_d$$

$$\bar{y} = \frac{2 \cdot \omega_d \Omega Ad}{\omega_y^2 - \omega_d^2 + j 2 \omega_d \frac{\omega_y}{Q}}$$

$$\Delta\omega = \omega_y - \omega_d$$

$$\Delta y = \frac{\omega_y}{Q_y} \quad \text{indica la banda passante dello sistema di sensing.}$$

$$\Delta\omega \ll \omega_y, \omega_d:$$

$$\omega_y^2 - \omega_d^2 = (\omega_y - \omega_d)(\omega_y + \omega_d) = \Delta\omega (2\omega_d + \Delta\omega) \approx 2\omega_d \Delta\omega$$

$$\rightarrow \bar{y} = \frac{2 \cdot \omega_d \Omega Ad}{2\omega_d \Delta\omega + j 2 \omega_d \Delta y} = \frac{2 \cdot \Omega Ad}{2\Delta\omega + j 2 \Delta y}$$

\bar{y} mi consente di conoscere informazioni su Ω .

Se il sistema viene pilotato lungo x solo farà di risonanza lungo y :

$$\omega_x = \omega_y \rightarrow \Delta\omega = \neq$$

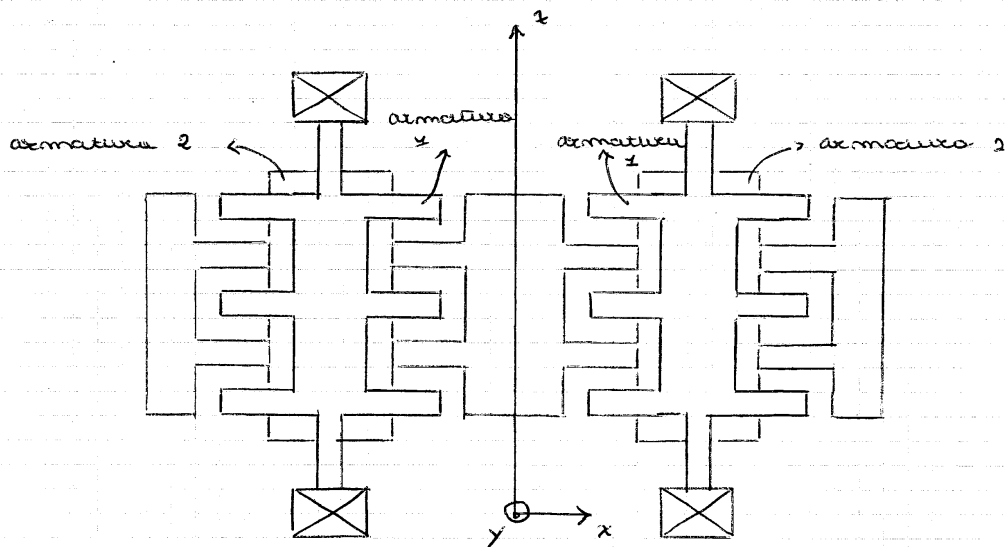
$$\bar{y} = \frac{2 \cdot n \cdot A_d}{3 \Delta y} = -3 \cdot \frac{2 \cdot n \cdot A_d}{\Delta y} = -3 \left[\frac{2 \cdot A_d}{\omega_y} \cdot Q_y \right] \cdot n$$

Per cui risulta che $\bar{y} \uparrow$ se $\Delta y \downarrow$: è desiderabile un sistema a banda piuttosto stretta.

y ha ampiezza proporzionale ad n .

La costante moltiplicativa sarà grande massimizzando Q_y ed A_d e riducendo al minimo ω_y .

SISTEMA ELETTROMECCANICO CHE SI COMPORTA COME UN DIAPASON OSCILLANTE POSTO IN ROTAZIONE INTORNO AL PROPRIO ASSE



Le masse motrici \bullet sono poste in oscillazione lungo y in contropase. Se la struttura ruota intorno a z la F_c tende a far avvicinare una delle due masse all'armatura di sensing 1 \bullet e a far allontanare l'altra

EFFETTO DELLO SPREADING IN FREQUENZA

Da vista $n \neq \text{cost.}$

Supponiamo ora che: $n(t) = n_0 \cos(\omega_s t)$

$$\begin{aligned} F_c &= 2 m v_{ee} n(t) = 2 m \frac{d}{dt} x(t) n(t) = \\ &= 2 m \omega_d n_0 A_d \cos(\omega_s t) \cos(\omega_d t) \\ &= 2 m \omega_d n_0 A_d \cdot \frac{1}{2} \left[\cos[(\omega_d + \omega_s)t] + \cos[(\omega_d - \omega_s)t] \right] \end{aligned}$$

Si sovrappompongono gli effetti delle due componenti:

$$y = B_s \cos[(\omega_d + \omega_s)t + \varphi_s] + B_d \cos[(\omega_d - \omega_s)t + \varphi_d]$$

$$\bar{y} \approx \frac{2 \cdot n_0 A_d}{2(\Delta\omega \pm \omega_s) + \omega \Delta y}$$

con $\Delta\omega$: spostamento tra la frequenza di risonanza della catena di driving e sensing

ω_s : spreading di frequenza della risultante angolare

Δy : banda catena di sensing

Prestando alla frequenza di risonanza della catena lungo x :

$$\omega_d \approx \omega_x \rightarrow \Delta\omega = \omega_y - \omega_x$$

Si conclude che \bar{y} dipende dallo spostamento tra la freq. di risonanza della catena di driving e della catena di sensing.

In caso di matching delle catene meccaniche

$$\omega_y = \omega_x \rightarrow \Delta\omega = \emptyset$$

$$\bar{y} = \frac{2 \cdot \Omega_0 A_d}{(2\omega_s \pm \gamma \Delta y)}$$

che è quasi un fuso con lo spostamento applicato dalla catena lungo x se $\Delta y \gg \omega_s$

$$\rightarrow \bar{y} = \frac{2 \cdot \omega_s A_d}{\pm \gamma \Delta y}$$

In caso di mismatching delle catene meccaniche

$$\omega_y \neq \omega_x$$

$$\text{con } \Delta\omega \gg \Delta y \rightarrow \bar{y} = \frac{2 \cdot \omega_s A_d}{2(\Delta\omega \pm \omega_s)}$$

e lo spostamento lungo y è in quadratura con lo spostamento applicato dalla catena di pilotaggio.

ORIGINE DELLO SPREADING FREQUENZIALE

una delle possibili ragioni è la termine $\frac{d\omega}{dt}$ dall'accelerazione che è dovuto come la termine di Coriolis $2 \omega \frac{dr}{dt}$.

$$x = A_d \sin(\omega_d t)$$

$$\Omega(t) = \Omega_0 \cos(\omega_s t)$$

Fais : termine compressivo della forza in direzione di seming.

$$\begin{aligned} F_{ais} &= 2m A_d \omega_d \Omega_0 \cos(\omega_d t) \cos(\omega_s t) + \\ &+ - m A_d \omega_s \Omega_0 \sin(\omega_d t) \sin(\omega_s t) \\ &= m A_d \Omega_0 (2\omega_d \cos(\omega_d t) \cos(\omega_s t) - \omega_s \sin(\omega_d t) \sin(\omega_s t)) \\ &= m A_d \Omega_0 \left[\omega_d \cos(\omega_d t - \omega_s t) + \omega_d \cos(\omega_d t + \omega_s t) + \right. \\ &\quad \left. + - \frac{1}{2} \omega_s \cos(\omega_d t - \omega_s t) + \frac{1}{2} \omega_s \cos(\omega_d t + \omega_s t) \right] \end{aligned}$$

$$= m A_d \Omega_0 \left[\left(\omega_d - \frac{1}{2} \omega_s \right) \cos \left[\left(\omega_d - \omega_s \right) t \right] + \left(\omega_d + \frac{1}{2} \omega_s \right) \cos \left[\left(\omega_d + \omega_s \right) t \right] \right]$$

È un segnale modulato in ampiezza con portante soppressa udono ed essere demodulato per mezzo di una rivelazione sincrona.

nel caso di mismatching della catena con ω_s trascurabile.

$$y \sim \frac{m \Omega_0 A_d}{\Delta \omega} \left[\left(\omega_d - \frac{1}{2} \omega_s \right) \cos \left[\left(\omega_d - \omega_s \right) t \right] + \left(\omega_d + \frac{1}{2} \omega_s \right) \cos \left[\left(\omega_d + \omega_s \right) t \right] \right]$$

$$y_{RIV} = y \cdot \cos(\omega_d t) \sim \frac{m \Omega_0 A_d}{\Delta \omega} \left[\omega_d \cos(\omega_s t) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \omega_d \cos(2\omega_d t - \omega_s t) - \frac{1}{2} \omega_s \cos(2\omega_d t - \omega_s t) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \omega_d \cos(2\omega_d t + \omega_s t) + \frac{1}{2} \omega_s \cos(2\omega_d t + \omega_s t) \right]$$

Filtraando in banda si ha:

$$y_{RIV} \sim \frac{m \Omega_0 A_d}{\Delta \omega} \cdot \omega_d \cos(\omega_s t) \quad \text{da cui si ricava } \Omega_0(t)$$

da sottoporre che ω_s non è conosciuto.

Se non è possibile trascurare ω_s rispetto a $\Delta \omega$ si ottiene:

$$y_{RIV} \sim \frac{m \Omega_0 A_d \Delta \omega}{(\Delta \omega - \omega_s)(\Delta \omega + \omega_s)} \cdot \left(\omega_d + \frac{1}{2} \omega_s \right) \cos(\omega_s t)$$

da cui si ricava $\Omega_0(t)$.

ACUSTICA FISICA

EQUAZIONI DEL CAMPO ACUSTICO

I sistemi acustici ed ultrasuoni sono utilizzati come:

- trasduttori ultrasuoni;
- filtri ad altissima frequenza.

$$S = \nabla_s \cdot u$$

$$v_{ee} = \frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow \nabla_s \cdot v_{ee} = \frac{\partial S}{\partial t} \quad \text{1}^{\text{a}} \text{ equazione del campo acustico.}$$

$$\nabla \cdot T = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F_{\text{ext}} \rightarrow \nabla \cdot T = \rho \cdot \frac{\partial v_{ee}}{\partial t} - F_{\text{ext}} \quad \text{2}^{\text{a}} \text{ equazione del campo acustico.}$$

EQUAZIONE DI CHRISTOFFEL

È nota anche come equazione delle onde sismiche

$$\nabla_s \cdot v_{ee} = \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$S = s : T \rightarrow \nabla_s \cdot v_{ee} = s : \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$c : s = I \rightarrow c : \nabla_s \cdot v_{ee} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot c : \nabla_s \cdot v_{ee} = \nabla \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot T = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F_{\text{ext}}$$

$$\nabla \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \rho \cdot \frac{\partial^2 v_{ee}}{\partial t^2} - \frac{\partial F_{\text{ext}}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot c : \nabla_s \cdot v_{ee} = \rho \frac{\partial^2 v_{ee}}{\partial t^2} - \frac{\partial F_{\text{ext}}}{\partial t}$$

È chiaramente un'equazione delle onde: è presente una derivata seconda rispetto al tempo e una rispetto al tempo con la comparsa di un termine forzante.

$$\nabla \rightarrow \nabla_{iK} \quad (3 \times 6)$$

$$\nabla_s \rightarrow \nabla_{Lj} \quad (6 \times 3)$$

Corrispondente matriciale:

$$\nabla_{iK} C_{KL} \nabla_{Lj} U_{e_i} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} U_{e_i} - \frac{\partial}{\partial t} F_{e_i}$$

$(3 \times 6) \cdot (6 \times 6) \cdot (6 \times 3) \cdot 3 \quad : \quad (3) \quad - \quad (3)$

$$M_{ij} = \nabla_{iK} C_{KL} \nabla_{Lj} \quad \text{Matrice di Cristoffel} \quad (3 \times 3)$$

ESEMPIO 1

Trasversale Fuce.

$$\nabla \cdot T = \rho \cdot \frac{\partial}{\partial t} U_{e_i}$$

Onda piana di stress che si propaga lungo y :

$$T_{xy} = T_{yx} = \sin(\omega t - ky)$$

$$\nabla \cdot T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset & \sin(\omega t - ky) & \emptyset \\ \sin(\omega t - ky) & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -k \cos(\omega t - ky) \\ \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix} = -\hat{x} k \cos(\omega t - ky)$$

La divergenza adesso di un grado e di conseguenza da tensore si passa a vettore.

$$\begin{bmatrix} -k \cos(\omega t - ky) \\ \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix} = \rho \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

Integrando una volte rispetto al tempo:

$$u_x = \frac{k}{\rho \omega^2} \cos(\omega t - ky)$$

$$\vec{u} = \hat{x} \frac{k}{\rho \omega^2} \cos(\omega t - ky) \quad \text{onda polarizzata lungo } \hat{x} \text{ che}$$

si muove lungo \hat{y} \rightarrow Propagazione trasversale t .

$$S_x = 2 S_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{k^2}{\rho \omega^2} \sin(\omega t - ky)$$

La densità di energia del tensore di stress poteva essere ricavata partendo direttamente il tensore di stress:

$$T = \begin{bmatrix} \emptyset & \sin(\omega t - ky) & \emptyset \\ \sin(\omega t - ky) & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \sin(\omega t - ky) \end{bmatrix} = T_J$$

$$T_0 = \sin(\omega t - ky)$$

$$D_{ij} T_J = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \partial/\partial y \\ \emptyset & \partial/\partial y & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \partial/\partial y & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \sin(\omega t - ky) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k \cos(\omega t - ky) \\ \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix}$$

↑
 Fatto di un'azione derivata rispetto ad x ed y in quanto $T_0(x)$

ESEMPIO 2

Per un cristallo cubico:

$$\begin{bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \\ T_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & C_{44} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & C_{44} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \\ S_0 \end{bmatrix}$$

$$T_0 = C_{44} \cdot S_0$$

$$\sin(\omega t - ky) = C_{44} \cdot \frac{k^2}{\rho \omega^2} \sin(\omega t - ky)$$

$$1 = C_{44} \cdot \frac{k^2}{\rho \omega^2} \quad \text{Relazione di dispersione.}$$

Velocità di fase della propagazione elastica:

$$\tilde{v}_{\text{el}} \Big|_x = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$$

t : propagazione trasversale.

ESEMPIO 3

$\vec{u}(r, t) = \hat{y} \cos(\omega t - ky)$ Onda longitudinale di spostamento: particella lungo \hat{y} in moto lungo \hat{y} (particelle vicine lungo \hat{y} e si muovono lungo \hat{y}).

$$S_2 = S_{yy} = K \sin(\omega t - ky)$$

$$T_j = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ S_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} T_1 = C_{12} K \sin(\omega t - ky) \\ T_2 = C_{11} K \sin(\omega t - ky) \\ T_3 = C_{12} K \sin(\omega t - ky) \end{cases}$$

$$\text{Div } T_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{12} K \sin(\omega t - ky) \\ C_{11} K \sin(\omega t - ky) \\ C_{12} K \sin(\omega t - ky) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot T = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\rightarrow \phi = \rho \cdot \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial y} C_{11} K \sin(\omega t - ky) = \rho \cdot \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$$

$$\rightarrow \phi = \rho \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} C_{11} K \sin(\omega t - ky) = -C_{11} K^2 \cos(\omega t - ky)$$

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = -\rho \cdot \omega^2 \cos(\omega t - ky)$$

$$\rightarrow -C_{11} K^2 \cos(\omega t - ky) = -\rho \omega^2 \cos(\omega t - ky)$$

$$C_{11} K^2 = \rho \omega^2$$

$$v_{\text{vel}}|_l = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}$$

l : propagazione longitudinale.

→ In un materiale isotropico onde longitudinali e trasversali si propagano con velocità di fase diversa.

ONDE PIANE

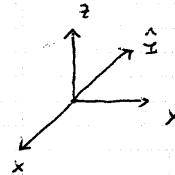
Onda piana armonica con pulsazione ω che si propaga in direzione $\hat{\mathbf{i}} = \hat{x} I_x + \hat{y} I_y + \hat{z} I_z$ e quindi:

per tipo $v_{ej} = v_{ee} e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$

con $\mathbf{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z$.

$v_{ej} = e^{j(\omega t - k(\hat{x}l_x + \hat{y}l_y + \hat{z}l_z) \cdot r)}$

l_x, l_y, l_z coseni direttori.



$$\nabla_{Lj} v_{ej} e^{j(\omega t - k(\hat{x}l_x + \hat{y}l_y + \hat{z}l_z) \cdot r)} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & \phi & \phi \\ \phi & \partial/\partial y & \phi \\ \phi & \phi & \partial/\partial z \\ \phi & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & \phi & \partial/\partial x \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ex} \\ v_{ey} \\ v_{ez} \end{bmatrix} e^{j(\omega t - k(\dots) \cdot r)}$$

Calcolo elemento 11:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} v_{ex} e^{j(\omega t - k(\hat{x}l_x + \hat{y}l_y + \hat{z}l_z) \cdot r)} &= \\ = \frac{\partial}{\partial x} v_{ex} e^{j(\omega t - k(\hat{x}l_x + \hat{y}l_y + \hat{z}l_z)(\hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z))} &= \\ = \frac{\partial}{\partial x} v_{ex} e^{j(\omega t - k(xl_x + yl_y + zl_z))} &= \\ = -jkl_x v_{ex} e^{j(\omega t - k(xl_x + yl_y + zl_z))} &= \\ = -jkl_x v_{ex} e^{j(\omega t - k(\hat{x}l_x + \hat{y}l_y + \hat{z}l_z) \cdot r)} &= \end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial x} \equiv -jkl_x$ derivata rispetto ad \hat{x} moltiplicata a moltiplicatore per $-jkl_x$.

l_x : coseno direttore lungo \hat{x} .

Risolta :

$$\nabla_{Lj} U_{ee} e^{j(\omega t - k \hat{i} \cdot r)} = -\gamma K \begin{bmatrix} l_x & 0 & 0 \\ 0 & l_x & 0 \\ 0 & 0 & l_z \\ 0 & l_z & l_y \\ l_z & 0 & l_x \\ l_y & l_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{ex} \\ U_{ey} \\ U_{ez} \end{bmatrix} e^{j(\omega t - k \hat{i} \cdot r)}$$

$$\begin{bmatrix} l_x & 0 & 0 \\ 0 & l_x & 0 \\ 0 & 0 & l_z \\ 0 & l_z & l_y \\ l_z & 0 & l_x \\ l_y & l_x & 0 \end{bmatrix} = l_{Lj}$$

$$\nabla_{Lj} = -\gamma K l_{Lj}$$

$$\nabla_{ik} = -\gamma K \begin{bmatrix} l_x & 0 & 0 & 0 & l_z & l_y \\ 0 & l_x & 0 & l_z & 0 & l_x \\ 0 & 0 & l_z & l_y & l_x & 0 \end{bmatrix} = -\gamma K l_{ik}$$

da cui risulta : $M_{ij} = l_{ik} C_{kl} l_{Lj}$

ed progettata sono conosciute :

- direzione di propagazione ;
- tipo di materiale .

$$k^2 (l_{ik} C_{kl} l_{Lj}) U_{eej} = k^2 M_{ij} U_{eej} = \rho \omega^2 U_{eei}$$

Per valori della classe cubica :

$$\begin{bmatrix} l_x & 0 & 0 & 0 & l_z & l_y \\ 0 & l_x & 0 & l_z & 0 & l_x \\ 0 & 0 & l_z & l_y & l_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_x & 0 & 0 \\ 0 & l_y & 0 \\ 0 & l_z & 0 \\ 0 & l_z & l_y \\ l_z & 0 & l_x \\ l_y & l_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & \epsilon \\ \gamma & \beta & \delta \\ \epsilon & \delta & \theta \end{bmatrix}$$

$l_{ik} \quad \cdot \quad C_{kl} \quad \cdot \quad l_{Lj}$

$$\alpha = C_{11} l_x^2 + C_{44} (1 - l_x^2)$$

$$\beta = C_{11} l_y^2 + C_{44} (1 - l_y^2)$$

$$\gamma = C_{11} l_z^2 + C_{44} (1 - l_z^2)$$

$$\delta = (C_{12} + C_{44}) l_y l_z$$

$$\epsilon = (C_{12} + C_{44}) l_x l_z$$

$$\theta = (C_{12} + C_{44}) l_x l_y$$

Se un mezzo è omogeneo isotropo, tutte le direzioni sono equivalenti.

$$\vec{l} = \hat{z} \quad (l_x = l_y = \phi ; l_z = 1)$$

$$\alpha = c_{44}$$

$$\beta = c_{44}$$

$$\delta = c_{44}$$

$$\dot{\delta} = \phi$$

$$\epsilon = \phi$$

$$\eta = \phi$$

Omogeneo per via dell'isotropia: $c_{12} = c_{11} - 2c_{44}$

$$k^2 H_{ij} U_{ej} = \rho \omega^2 U_{ei} \rightarrow k^2 \begin{bmatrix} c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & c_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{ex} \\ U_{ey} \\ U_{ez} \end{bmatrix} = \rho \omega^2 \begin{bmatrix} U_{ex} \\ U_{ey} \\ U_{ez} \end{bmatrix}$$

(3x3) · (3) (3)

↑
matrice diagonale

sistema indipendente sulle 3 righe.

Si ricorrono 3 equazioni di dispersione da cui risulta:

$$\begin{cases} \tilde{v}_{ex} = \sqrt{c_{44}/\rho} & \text{propagazione } t \\ \tilde{v}_{ey} = \sqrt{c_{44}/\rho} & \text{propagazione } t \\ \tilde{v}_{ez} = \sqrt{c_{11}/\rho} & \text{propagazione } l \end{cases}$$

SENSORI DI TEMPERATURA E MICROSISTEMI TERMICI

Un sensore di temperatura consta sempre di un elemento sensibile che, per effettuare la misura, deve essere messo in contatto con il corpo X di cui si vuole misurare la temperatura T_x .

Al fine di non introdurre errore:

- sensore raggiunga immediatamente la temperatura T_x ;
- la temperatura T_x di X non viene modificata dal contatto col sensore.

Queste condizioni non sono mai soddisfatte per via delle seguenti cause:

- Capacità del sensore $C_s \neq \emptyset$;
- Resistenza termica tra sensore e corpo $R_{xs}^{(\tau)} \neq \emptyset$;
- Resistenza termica tra sensore e ambiente $R_{sa}^{(\tau)} \neq \infty$;
- il funzionamento del sensore può produrre uno scioglimento di calore che, essendo $R_{xs}^{(\tau)} \ll R_{sa}^{(\tau)}$, si riverbera in S producendo una differenza di temperatura tra X ed S.

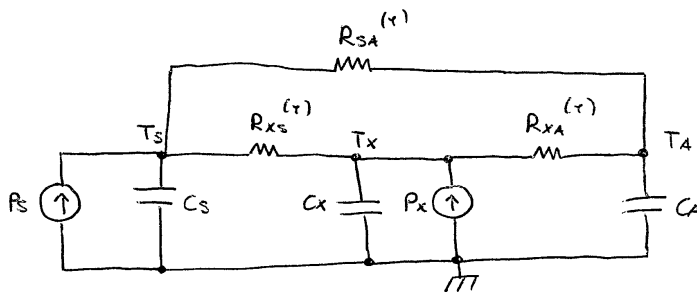
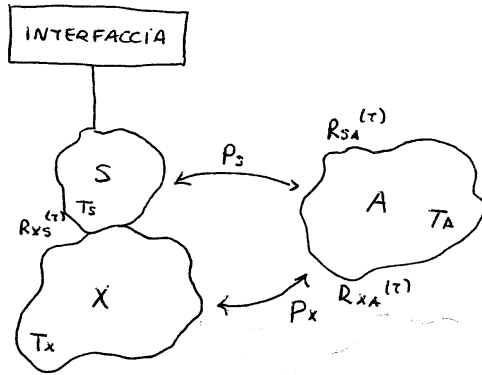
$$V[V] \rightarrow T[^\circ C]$$

$$I[A] \rightarrow P[W]$$

$$R[\Omega] \rightarrow R_{th}[^\circ C/W]$$

$$C[F] \rightarrow C_H[W \cdot s/^\circ C]$$

Schema degli interfacciamenti nella misura di temperatura e circuito equivalente:



Cosa desidero per il mio sistema:

- bassa C_s ; ← RIDUZIONE MASSA DEL SENSORE
- basso $R_{xs}(\tau)$; ← MASSIMIZZARE AREA DI CONTATTO TRA X ED S
- alta $R_{sa}(\tau)$. ← MATERIALI CON BASSA CONDUCEVILITÀ TERMICA E IL RAPPORTO $\frac{l}{S}$.

SENSORI RESISTIVI DI TEMPERATURA

Sono costituiti da un resistore la cui resistenza è funzione della temperatura secondo una legge riproducibile e costante nel tempo.

Coefficiente di temperatura del resistore:

$$TCR = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT}$$

dipende dal materiale con cui è realizzato il sensore e non dalla sua geometria.

$$\alpha = TCR \Big|_{T_0} = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT} \Big|_{T=T_0}$$

$R(T_0)$

$$\rightarrow \alpha = \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dT}$$

$$\alpha dT = \frac{dR}{R}$$

$$R = C_{te} \cdot e^{\alpha T}$$

$$R(T_0) = C_{te} \cdot e^{\alpha T_0} \quad \rightarrow \quad C_{te} = R(T_0) e^{-\alpha T_0}$$

$$R = R(T_0) e^{-\alpha T_0} e^{\alpha T} = R(T_0) e^{\alpha (T - T_0)} \sim R(T_0) [1 + \alpha (T - T_0)]$$

Sensori resistivi comuni:

- RTD;
- Termistori.

RTD (RESISTIVE TEMPERATURE DETECTORS)

Costituiti da un filo o da un film metallico la cui resistenza aumenta in modo quasi lineare con T .

Materiali di cui sono costituiti:

- Platino (Pt) : $\alpha_{CR} = 3,85 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ $(-200 \div 850) \text{ } ^\circ\text{C}$
- Rame (Cu) : $\alpha_{CR} = 4,3 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ $(-200 \div 260) \text{ } ^\circ\text{C}$
- Nichel (Ni) : $\alpha_{CR} = 6,84 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ $(-80 \div 320) \text{ } ^\circ\text{C}$

RTD Pt100 indica un RTD in platino la cui resistenza @ $T = \phi \text{ } ^\circ\text{C}$ è pari a 100 Ω .

$$R(T_0 = \phi \text{ } ^\circ\text{C}) = 100 \text{ } \Omega.$$

$$R(T) \sim R(T_0) [1 + \alpha(T - T_0)]$$

$$\text{con } \alpha = \alpha_{CR} = \frac{1}{R} \left. \frac{dR}{dT} \right|_{T=T_0}$$

un' espressione più precisa è la seguente:

$$R(T) \sim R(T_0) \left[1 + \alpha_1(T - T_0) + \alpha_2(T - T_0)^2 + \dots + \alpha_N(T - T_0)^N \right]$$

TERMISTORI

Sono resistori ad ossidi metallici la cui resistenza varia fortemente con la temperatura.

Gli ossidi metallici si comportano da semiconduttori; opposte sostanze droganti consentono di regolare la resistività del dispositivo.

Categorie:

- TERMISTORI NTC ($\text{TCR} < 0$)
- TERMISTORI PTC ($\text{TCR} > 0$)

I termistori NTC sono usati come sensori di temperatura, i PTC sono usati come limitatori di corrente.

Gli NTC hanno un comportamento fortemente non lineare:

LEGGE DEL TERMISTORE

$$R = R(T_0) e^{B \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)}$$

$$[T] = K$$

$$[T_0] = K$$

$$[B] = K$$

B: temperatura caratteristica del termistore.

$$\text{TCR} = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT} = - \frac{B}{T^2}$$

La sensibilità dei termistori è ~ 10 volte maggiore della sensibilità degli RTD.

In realtà $B = B(T)$.

Si utilizza una formula più precisa:

LEGGE DI STEINHART AND HART:

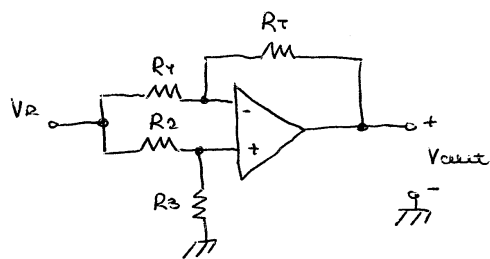
$$\frac{1}{T} = a + b \ln(R) + c \ln^3(R)$$

Linearizzando in un intorno della temperatura di lavoro si ottiene:

$$R(T) = R(T_w) [1 + \alpha(T - T_w)] \quad \text{intorno a } T = T_w$$

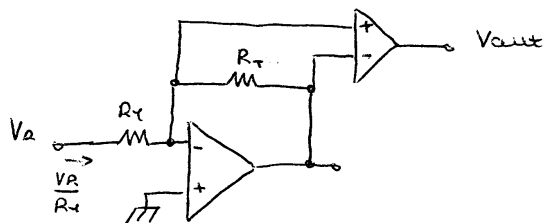
CIRCUITI DI MISURA

Schema a 2 pin con taratura della tensione di uscita:



$$\frac{R_3}{R_2} = \frac{R_T(T_0)}{R_1} \Rightarrow V_{out}(T_0) = 0$$

Schema a 4 pin:

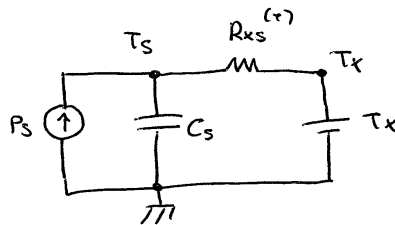
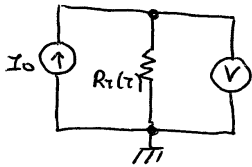


È necessario un
cavo commutato
al fine di ottenere
 $V_{out} = 0$ @ $T = T_0$.

PROBLEMA DELL'AUTORISCALDAMENTO IN SENSORI RESISTIVI

I sensori resistivi sono soggetti ad autoriscaldamento, in quanto alimentati da una corrente I_0 per consentire la misura della resistenza

$$P_s = I_0^2 \cdot R_r(\tau)$$



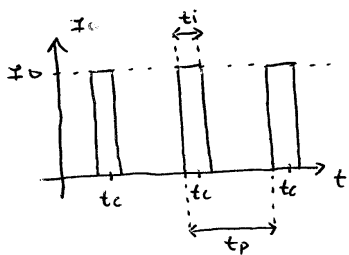
$$T_s = T_x + P_s \cdot R_{xs}(\tau) = T_x + I_0^2 R_r(\tau) \cdot R_{xs}(\tau)$$

Al fine di attenuare $T_s \sim T_x$ è necessario:

- I_0 piccola;
- $R_{xs}(\tau)$ piccola.

mantenere I_0 piccola può comportare l'attenuamento di variazioni di tensioni che verrebbero compensate con quelle indotte da fenomeni di deriva dell'oggetto e rumore dovuto al circuito di misura.

Soluzione: PULSAGGIO IMPULSATO



$$f = \frac{1}{t_p} \Rightarrow \frac{1}{2\pi R_{xs}(\tau) C_s}$$

La potenza richiesta:

$$P_s = \overline{P_s} = I_0^2 R_r(\tau) \cdot \frac{t_i}{t_p}$$

$$\rightarrow T_s = T_x + I_0^2 R_r(\tau) \cdot \frac{t_i}{t_p} \cdot R_{xs}(\tau)$$

SENSORI DI TEMPERATURA INTEGRATI A GIUNZIONE PN

Per una giunzione pn polarizzata a corrente costante:

$$V = V_T \ln\left(\frac{I_0}{I_s}\right), \quad V_T = \frac{kT}{q}$$

$$I_s = zT^\delta \exp\left(-\frac{E_{g0}}{qV_T}\right), \quad z = \text{cost}$$

E_{g0} : energia di gap
 $\delta \sim 3 \div 4$

$$\rightarrow V = V_{g0} - V_T \ln\left(\frac{zT^\delta}{I_0}\right), \quad V_{g0} = \frac{E_{g0}}{q}$$

$$T \uparrow \Rightarrow V \downarrow$$

V dipende in maniera non lineare da T .

Si possono costruire diodi con dipendenza $V(T)$ lineare per un ampio intervallo di temperature.

Si può realizzare la giunzione BE di un BJT per realizzare una giunzione pn in tecnologia BJT.

AD590

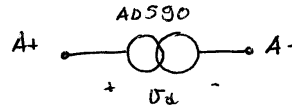
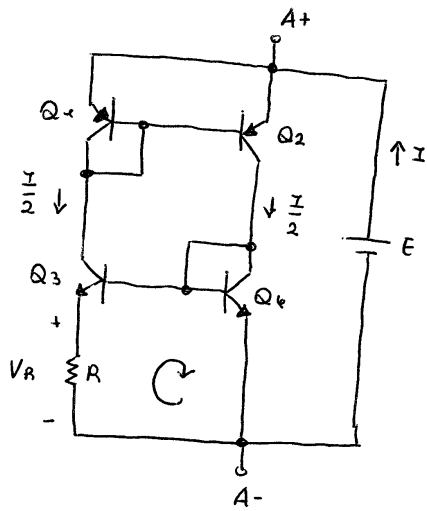
Sfrutta la tecnologia bipolare per realizzare la correlazione $T \rightarrow I$.

Questo integrato si comporta come un diodo A+A- che è alimentato con $V > E_{min}$ basate una corrente proporzionale a T e non a V recolta:

$$I = \mu T$$

$$[I] = k$$

$$\mu = + \mu A / K$$



$Q_1 = Q_2$
 $Q_3 \neq Q_4$
 $\rightarrow A_{E3} = \beta A_{E4}$
 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 in FAAR.
 $\rightarrow I_c \sim I_s e^{V_{BE}/V_T}$

$$\begin{aligned}
 -V_R - V_{BE3} + V_{BE4} &= \phi \quad \rightarrow \quad V_R = V_{BE4} - V_{BE3} \\
 &= V_T \ln\left(\frac{I_{C4}}{I_{S4}}\right) - V_T \ln\left(\frac{I_{C3}}{I_{S3}}\right) \\
 &= V_T \ln\left(\frac{I_{C4}}{I_{S4}} \cdot \frac{I_{S3}}{I_{C3}}\right)
 \end{aligned}$$

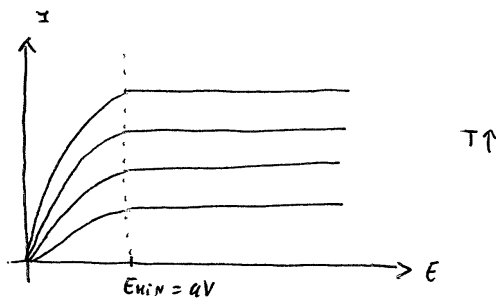
$$I_B \ll I_C \Rightarrow I_{C1} = I_{C2} = \frac{I}{2} \Rightarrow I_{C3} = I_{C4} = \frac{I}{2}$$

$$I_S = J_S \cdot A_E \Rightarrow I_{S3} = \beta I_{S4}$$

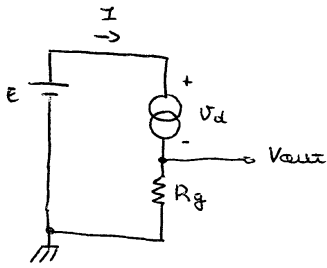
$$\rightarrow V_R = V_T \ln(\beta)$$

$$V_R = R \cdot \frac{I}{2} = V_T \ln(\beta) = \frac{kT}{q} \cdot \ln(\beta)$$

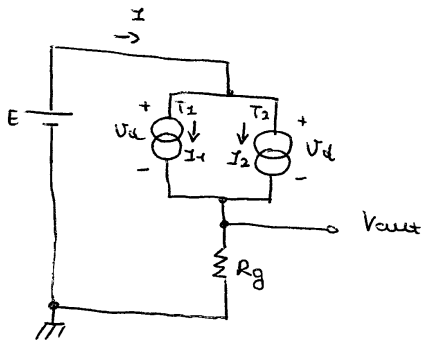
$$\rightarrow I = \left(\frac{2k}{Rq} \ln(\beta)\right) \cdot \tau = \mu \tau \quad \text{con } \mu = \frac{2k}{Rq} \ln(\beta)$$



Impiego ADS80 per conversione $T \rightarrow V$

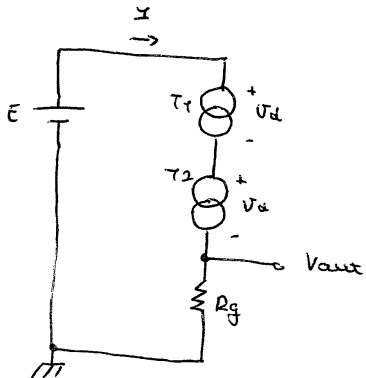


$$V_{out} = \mu T \cdot R_g$$



$$\begin{aligned} V_{out} &= R_g (I_1 + I_2) \\ &= R_g \mu (T_1 + T_2) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{V_{out}}{2} = R_g \mu \frac{T_1 + T_2}{2}$$

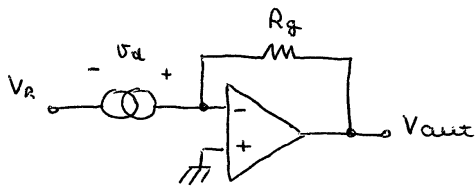


$$V_{out} = R_g \cdot \mu \cdot \min(T_1, T_2)$$

d'interpolata che lavora alla temperatura massima. viene forzato a lavorare a $V < E_{min}$.

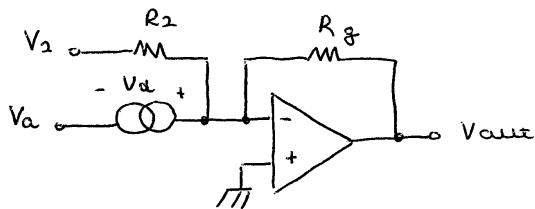
\rightarrow la corrente viene forzata dall'interpolata a T_{min} .

Applicazioni circuitali:



$$V_{out} = \mu T R_g$$

$$\text{con } V_R < -4V$$



$$V_{out} = \mu T R_g - V_2 \cdot \frac{R_g}{R_2}$$

$$V_{out} = \phi \quad @ \quad T = \phi + C$$

$$R_g \mu T - V_2 \frac{R_g}{R_2} = \phi$$

$$\rightarrow V_2 = R_g \mu T \cdot \frac{R_2}{R_g} = \mu T R_2 = \mu \cdot 273 \cdot R_2$$

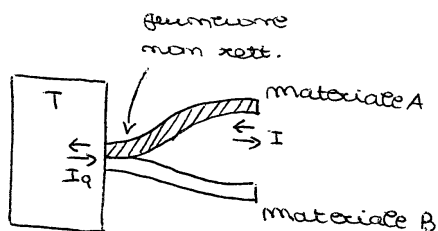
Risulta quindi: $V_{out} = R_g \mu [T - 273]$

$$V_{out} \propto T (^{\circ}C)$$

EFFETTI TERMOELETTRICI

Riguardano la conversione reciproca di energia elettrica in termica e viceversa.

EFFETTO Peltier

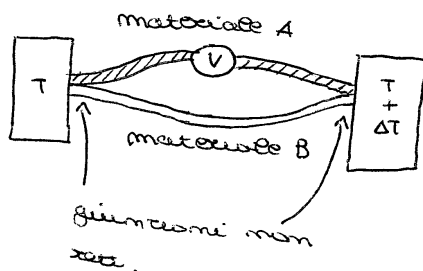


giunzione non rettificante tra due materiali in contatto termico con un termostato. nella giunzione esiste una corrente I imposta.

→ Viene generato o assorbito calore dalla giunzione con flusso proporzionale ad I .

$$Iq = \pi_{AB} \cdot I \quad \pi_{AB} = -\pi_{BA} \quad \text{coefficiente di Peltier.}$$

EFFETTO Seebeck



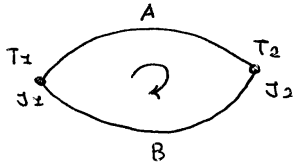
→ Il voltmetro ideale ($R_{im} = \infty$) misura una tensione che è funzione dei materiali e ΔT .

EFFETTO THOMSON

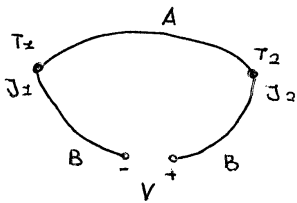
Se un conduttore sottoposto ad un gradiente di temperatura è attraversato da corrente si ha una sviluppo di potenza termica addizionale rispetto all'effetto Joule.

TERMOCOPIE

Strumento costituito da due conduttori A e B di natura diversa, connessi in due punti J_1 e J_2 .



Il circuito è quindi attraversato da corrente.



La tensione V risulta pari alla f. e. m. che genera la corrente nell'anello chiuso.

La tensione V , in accordo con l'effetto Seebeck, è funzione dei due materiali e delle temperature T_1 e T_2 .

Notazione: $V = E_{T_1}^{T_2}(A/B)$

misura intercompreso il conduttore B col + su T_2 ed il - su T_1 .

-> tensione da T_2 a T_1 di A rispetto a B.

$$E_{T_1}^{T_2}(A/B) = - E_{T_2}^{T_1}(A/B)$$

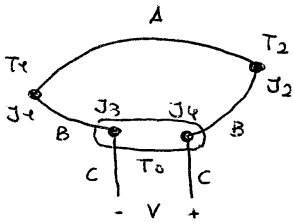
$$E_{T_1}^{T_2}(B/A) = - E_{T_1}^{T_2}(A/B)$$

LEGGI DELLE TERMOCOPPIE

- 1) Legge del materiale omogeneo: se il circuito è composto da un unico materiale, la f.e.m. misurata è nulla anche in presenza di $\Delta T \neq \emptyset$;
- 2) Legge della temperatura omogenea: se le giunzioni sono alla stessa temperatura, la f.e.m. misurata è nulla anche se $A \neq B$;

CONDIZIONE N&S: se fine di ottenere $V \neq \emptyset$ la contemporanea disomogeneità di materiali e temperatura nelle giunzioni.

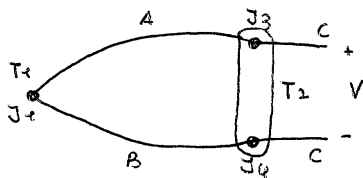
Introduciamo un terzo conduttore:



nel caso in cui:

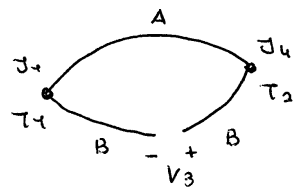
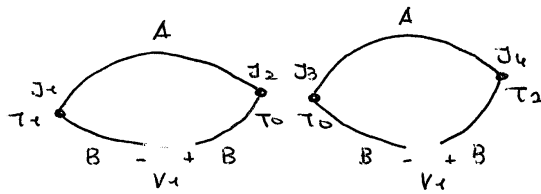
$T_{J3} = T_{J4} = T_0$, la tensione che misuriamo intertempendo C è indipendente da quest'ultimo.

$$V = E_{T_1}^{T_2}(A/B)$$



$$V = E_{T_1}^{T_2}(A/B)$$

3) legge della temperatura intermedia :



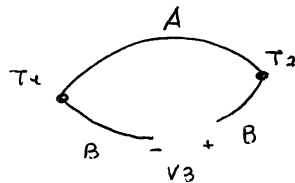
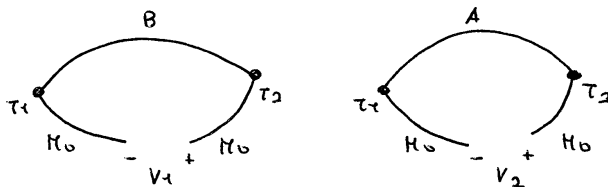
$$V_3 = V_1 + V_2$$

$$\begin{aligned} E_{T_1}^{T_2}(A/B) &= E_{T_1}^{T_0}(A/B) + E_{T_0}^{T_2}(A/B) \\ &= E_{T_0}^{T_2}(A/B) - E_{T_0}^{T_1}(A/B) \end{aligned}$$

$$V_{AB}(T) = E_{T_0}^T(A/B)$$

$$\rightarrow E_{T_1}^{T_2}(A/B) = V_{AB}(T_2) - V_{AB}(T_1)$$

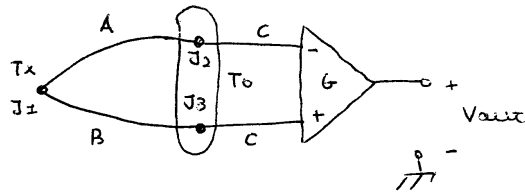
4) legge del metallo intermedio :



$$V_3 = V_2 - V_1$$

$$E_{T_1}^{T_2}(A/B) = E_{T_1}^{T_2}(A/H_0) - E_{T_1}^{T_2}(B/H_0)$$

UTILIZZO DELLE TERMOCOPIE PER LA MISURA DELLA TEMPERATURA



$$V_{out} = G \cdot E_{T_0}^{T_x} (A/B)$$

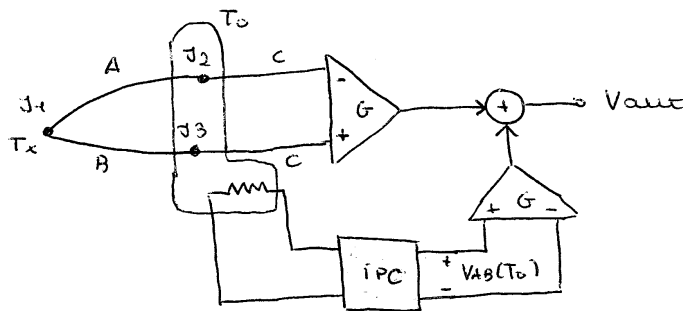
$$T_0 = \phi^\circ C \Rightarrow V_{out} = G \cdot E_{\phi}^{T_x} (A/B) = G \cdot V_{AB}(T_x)$$

in quanto $T_0 = \phi^\circ C \Rightarrow V_{out} = \phi V$

Se $T_0 \neq \phi^\circ C$:

1) misura T_0 e si calcola $V_{AB}(T_0)$

$$2) V_{out} = G [V_{AB}(T_x) - V_{AB}(T_0) + V_{AB}(T_0)] = G \cdot V_{AB}(T_x)$$



iPC risulta da compensazione della giunzione fredda

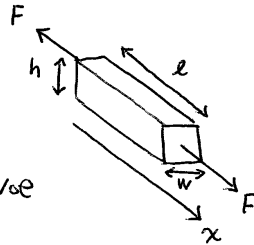
$$V_{out} = G \left[E_{T_0}^{T_x} (A/B) + E_{\phi}^{T_x} (A/B) \right] = G E_{\phi}^{T_x} (A/B) = G V_{AB}(T_x)$$

STRAIN GAGE

È un sensore in grado di misurare la deformazione locale di un corpo al quale è applicato.

Supponiamo stress monoassiale:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = \rho \cdot \frac{l^2}{V_{0e}}$$



$$A = w \cdot h$$

$$\rightarrow T_x = \frac{F}{A} = E \cdot S_x$$

$$dR = \frac{\delta R}{\delta \rho} \cdot \delta \rho + \frac{\delta R}{\delta l} \cdot \delta l + \frac{\delta R}{\delta V_{0e}} \cdot \delta V_{0e}$$

$$= \frac{l^2}{V_{0e}} \cdot \delta \rho + \rho \cdot \frac{2l}{V_{0e}} \cdot \delta l - \rho \frac{l^2}{V_{0e}^2} \cdot \delta V_{0e}$$

$$\rightarrow \frac{dR}{R} = \frac{\delta \rho}{\rho} + 2 \frac{\delta l}{l} - \frac{\delta V_{0e}}{V_{0e}}$$

↑
Effetto
piezoresistivo
" "
 $T_x \cdot \Pi_{xx}$

$$\text{Tr}(s) = \sum_{i=1}^3 S_i = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{T_x}{E} (1 + 2\nu) = S_x (1 + 2\nu)$$

$$\rightarrow \frac{dR}{R} = S_x (1 + 2\nu + E\Pi_{xx}) = \frac{\delta l}{l} (1 + 2\nu + E\Pi_{xx})$$

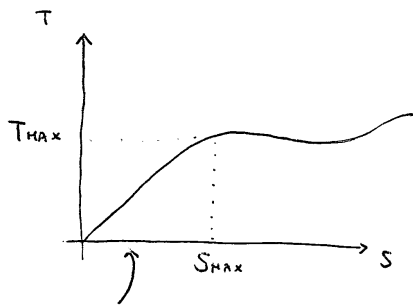
G: fattore di Gauge

$$G = \frac{dR/R}{\delta l/l} = \underbrace{1 + 2\nu}_{\text{geometrica}} + \underbrace{E\Pi_{xx}}_{\text{piezoresistività}}$$

Per piccole deformazioni: $R = R_0 (1 + G \delta e)$

$$R = R_0 \text{ se } S_x = \emptyset.$$

Esiste un limite alla deformazione misurabile:



Per un semiconduttore:

$$S_{MAX} \sim 3000 \div 4000 \mu E$$

Per un metallo:

$$S_{MAX} \sim 40000 \mu E$$

Qui la proporzionalità è data dalla legge di Hooke.

Per un metallo o una lega metallica:

$$R_0 = 120 \Omega$$

$$G = 2$$

Per il platino (Pt): $G = 6$.

CONSIDERAZIONI SULL'EFFETTO DELLA TEMPERATURA IN STRAIN
GAGE DI PLATINO

$$\Delta T = 10^\circ C, \quad TCR = 4 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ C^{-1}$$

$$\Delta R_{\Delta T} = R_0 \cdot TCR \cdot \Delta T = R_0 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 10 = R_0 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \Omega$$

$$\Delta R_s = R_0 \cdot G \cdot S_t \rightarrow S_t = \frac{\Delta R_s}{R_0 G} = \frac{\Delta R_s}{R_0 G} = \frac{R_0 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{R_0 \cdot 6} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-2}$$

$$\sim 10^4 \mu E$$

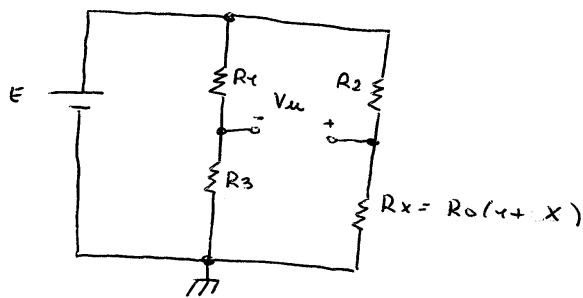
La variazione di temperatura può essere compensata
per deformazione.

Per la Costantina: $TCR = 10^{-5} \text{ } ^\circ C^{-1}$

CIRCUITI ELETTRONICI PER LA MISURA DELLA DEFORMAZIONE TRAMITE STRAIN GAGE

PONTE DI WEAATSTONE BILANCIATO

di misura al fine di misurare piccole variazioni
del valore della strain gage.



$$x = G \cdot \epsilon_T$$

Condizione di bilanciamento: $V_u = 0$ @ $x = 0$

$$\rightarrow R_1 = R_2 = R_3 = R_0$$

$$V_u^+ = E \cdot \frac{R_0(1+x)}{R_0(1+x) + R_0} = E \cdot \frac{1+x}{2+x}; \quad V_u^- = \frac{E}{2}$$

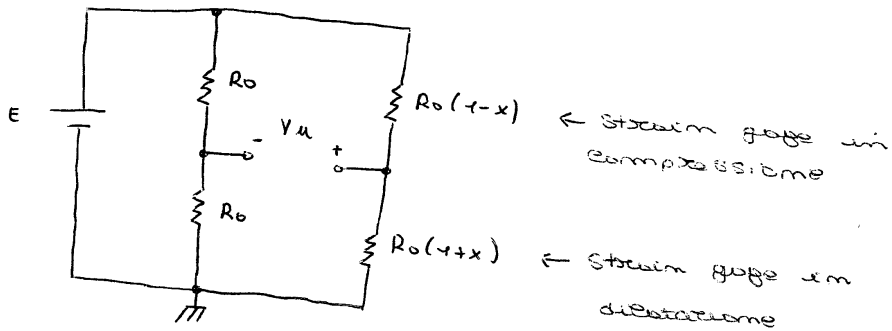
$$V_u = V_u^+ - V_u^- = E \left[\frac{1+x}{2+x} - \frac{1}{2} \right] = E \cdot \left[\frac{2+2x-2-x}{2(2+x)} \right] = \frac{E}{2} \cdot \frac{x}{2+x}$$

V_u non lineare con x

$$\text{se } 2 \gg x \Rightarrow V_u = \frac{E}{2} \cdot \frac{x}{2} : V_u \text{ lineare con } x.$$

l'effetto della temperatura, applicato in questo modo su 4 resistori, si elimina in uscita.

HALF BRIDGE



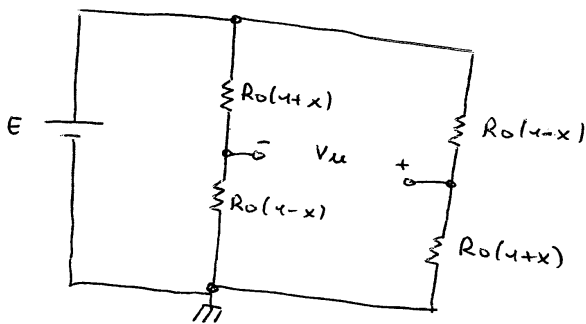
$$V_u^+ = E \cdot \frac{R_0(1+x)}{R_0(1+x) + R_0(1-x)} = E \cdot \frac{1+x}{1+x+1-x} = \frac{E}{2} \cdot (1+x)$$

$$V_u^- = \frac{E}{2}$$

$$V_u = V_u^+ - V_u^- = \frac{E}{2}(1+x) - \frac{E}{2} = \frac{E}{2} \cdot x$$

V_u sempre diretta con x .

FULL BRIDGE

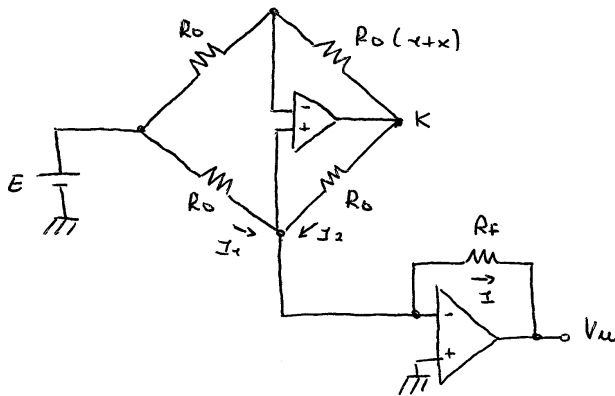


$$V_u^+ = E \cdot \frac{R_0(1+x)}{R_0(1+x) + R_0(1-x)} = \frac{E}{2} (1+x)$$

$$V_u^- = E \cdot \frac{R_0(1-x)}{R_0(1-x) + R_0(1+x)} = \frac{E}{2} (1-x)$$

$$V_u = V_u^+ - V_u^- = \frac{E}{2}(1+x) - \frac{E}{2}(1-x) = E \cdot x$$

PONTE DI WEATSTONE CON A.O.



$$V_u = -R_f \cdot I$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{E}{R_0} ; I_2 = \frac{V_k}{R_0}$$

$$V_k = -E \cdot \frac{R_0(x+x)}{R_0} = -E(x+x)$$

↑
config. inv.

$$V_u = -R_f \left[\frac{E}{R_0} - \frac{E}{R_0}(x+x) \right] = -R_f \left[-\frac{E}{R_0} \cdot x \right] = E \cdot \frac{R_f}{R_0} \cdot x$$

V_u lineare con x .

ELETTRODO

interfaccia tra un sistema in cui la conduzione avviene attraverso il movimento di ioni (conduzione ionica) e un sistema in cui la conduzione avviene per movimento di elettroni (conduzione elettronica).

ELETTROLITA

Sostanze che in soluzione si dissociano in ioni e non in molecole.

"Elettrolita" si riferisce alla capacità di condurre la corrente elettrica grazie all'incremento di ioni.

Gli elettroliti sono capaci di condurre corrente elettrica, una volta sciolti in soluzione, proprio per la presenza di ioni positivi e negativi nella soluzione formata, derivanti da dissociazione e ionizzazione dell'elettrolita.

La conduzione non è dovuta al libero movimento di elettroni entro una struttura cristallina densa come gli ioni a forte carico di trasportare la corrente elettrica.

CATALIZZATORE

Specie chimica che interviene durante lo svolgimento di una reazione che, modificando il complesso attivo della reazione, permette un abbassamento dell'energia di attivazione, aumentando quindi la velocità.

ARGOMENTI PREDEUCI AI SENSORI CHIMICI

CONDIZIONI DI EQUILIBRIO

Sistema isotermo, isobato, di volume costante
composto da 2 sottosistemi.

-> all'equilibrio i potenziali elettrochimici sono
uguali

$$\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 \quad (\bar{\mu} = \mu + qzV)$$

-> è nullo il gradiente del potenziale elettrochimico

$$\nabla \bar{\mu} = -qzE + \nabla \mu = 0$$

In una situazione di quasi equilibrio:

$$\nabla \bar{\mu} \neq 0$$

$$J \propto -qzE + \nabla \mu$$

$$J = \sigma \left(E - \frac{1}{qz} \nabla \mu \right) \leftarrow \text{equazione del Drift-Diffusion}$$

$$\nabla \mu = \frac{\partial \mu}{\partial c} \nabla c$$

$$qD \equiv \frac{\sigma}{q} \frac{\partial \mu}{\partial c}$$

con c : concentrazione delle
particelle.

$$\Rightarrow J = \sigma E - \frac{q}{z} D \nabla c$$

ESPRESSIONI PER LA CONDUCEBILITÀ

In un mezzo che conduce elettroni, lacune e ioni:

$$\sigma = nq\mu_n + pq\mu_p + \sum_i c_i |z_i| q\mu_i$$

LEGGE DEI GAS PERFETTI

$$P \cdot V_{\text{tot}} = n_{\text{tot}} \cdot R \cdot T \quad \text{con} \quad R = N_A \cdot k$$

n_{tot} : numero di moli

R : costante dei gas

LEGGE DI DALTON

$$P = \sum_{i=1}^k P_i, \quad \text{con} \quad P_i = \frac{n_{\text{tot}} \cdot R \cdot T}{V_{\text{tot}}}$$

Ogni gas, in una miscela ideale, si comporta come se l'altro gas non fosse presente.

→ le pressioni di ciascun gas possono essere semplicemente sommate.

REAGENTI - PRODOTTI

La trasformazione di x moli di reagente porta alla formazione di x moli di prodotti.

EQUAZIONE DI OSSIDO-RIDUZIONE

STATO DI OSSIDAZIONE: di un atomo in una sostanza è definito come la differenza tra il numero di elettroni di valenza dell'atomo considerato ed il numero di elettroni che ad esso rimangono dopo aver assegnato tutti gli elettroni di legame all'atomo più elettronegativo di ogni coppia.

OSSIDORIDUZIONE O REDOX: tutte quelle reazioni chimiche in cui cambia il numero di ossidazione degli atomi.

La reazione REDOX può essere pensata come lo avvenimento simultaneo di due distinte

semireazioni:

OSSIDAZIONE : aumento in numero di ossidazione di:
 $O + me^- \rightarrow R$ una specie chimica detta RIDUCENTE.

RIDUZIONE : diminuzione in numero di ossidazione di:
 $R \rightarrow O + me^-$ una specie chimica detta OSSIDANTE.

OSSIDORIDUZIONE : $O + me^- \leftrightarrow R$

EQUAZIONE DI NERNST

Esprime il potenziale di riduzione :

$$V = V_0 + \frac{KT}{qm} \ln \frac{C_0}{C_R}$$

V_0 : potenziale standard di riduzione

LEGGE DELL'AZIONE DI MASSA

$$m \cdot p = m_i^2$$

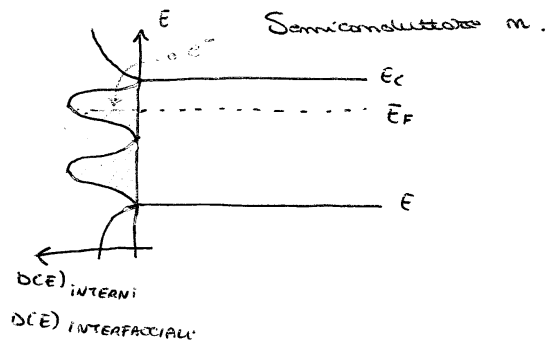
SENSORI DI GAS A SEMICONDUCTORE

EFFETTI DI SUPERFICIE

La superficie è la regione dove si interrompe la periodicità del reticolo cristallino.

→ nascono livelli energetici localizzati per gli elettroni distribuiti nel gap.

Questi livelli possono catturare o fornire un elettrone e si comportano quindi come accettori o donatori.

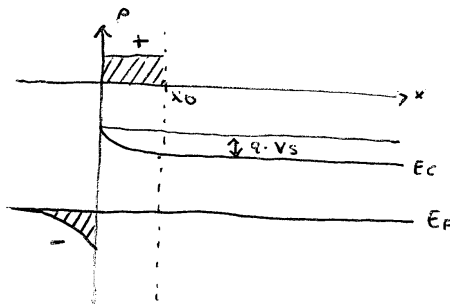


MODELLO A BANDE

gli stati superficiali sono distribuiti secondo un andamento non uniforme nel gap. L'occupazione degli stati interfaciali è governata dal livello di Fermi del semiconduttore con il quale gli stati sono in equilibrio.

Elettroni della banda di conduzione del semiconduttore andranno ad occupare gli stati della banda degli "accettori" superficiali. Secondoioni donatori occupati nel volume del semiconduttore, ossia una zona ristretta di cariche negative.

$$V_s = \frac{qN_0}{2\epsilon_s} x_0^2$$



densità di stati superficiali caricati:

$$N_s = N_D \cdot X_D$$

$$V_s = \frac{1}{N_D} \cdot \frac{q N_s^2}{2 \epsilon_s} \quad : \quad \text{potenziale di superficie di Schottky}$$

come funzione di N_s .

$$n_s = N_D e^{-\frac{q V_s}{k T}} \quad : \quad \text{densità di elettroni alla superficie}$$

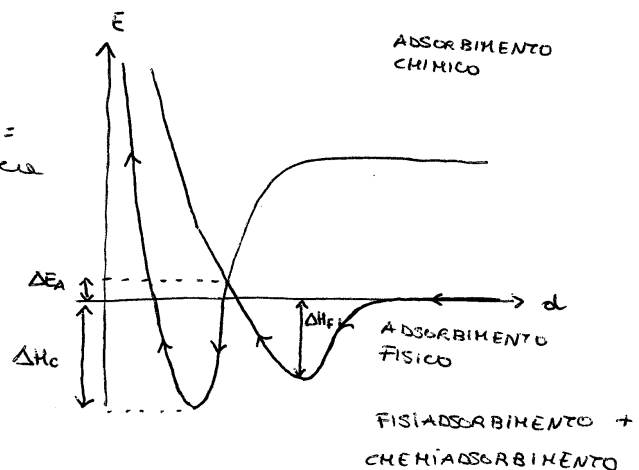
Esiste analogia tra stati superficiali ed adsorbati superficiali per quanto riguarda il comportamento nei confronti degli elettroni di conduzione.

INTERFACCIE SOLIDO - GAS

ASSORBIMENTO

MODELLO DI LENNARD-JONES

Si passa da una fase preesistente di adsorbato, in cui si manifesta un regime debole, per poi giungere superando la barriera di energia di ampiezza ΔE_a , nel sito di chemisorbimento, in cui si manifesta un regime forte.



ASSORBIMENTO DI OSSIGENO

Per superfici esposte all'atmosfera viene principalmente adsorbito ossigeno in forma O^- e O_2^- : la carica superficiale q_{Ns} è così dovuta principalmente dall'ossigeno.

-> l'ossigeno si comporta esattamente come uno stato accettore.

Le superfici dei sensori costruite con un semiconduttore sono saturate di ossigeno anche a pressioni parziali di quest'ultimo molto basse.

EFFETTI DI GAS RIDUCENTI

Nei casi di sensori a semiconduttore saturi con ossigeno superficiale, la presenza di un gas riducente, che riduce l'ossigeno, libera elettroni che vengono ricattati al semiconduttore.

Così si realizza un sensore per varie classi di gas riducente.

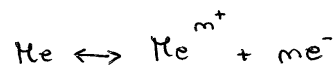
SENSORI ELETTROCHIMICI

Sono sensori che rivelano ioni in soluzione,

POTENZIALE DI ELETTRODO

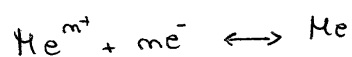
Quando un metallo viene immerso in una soluzione contenente ioni del metallo, può verificarsi il passaggio in soluzione di alcuni atomi del metallo come cationi (1), oppure il deposito sul metallo, allo stato di atomi neutri, di alcuni degli ioni del metallo presenti in soluzione (2).

(1) atomi del metallo abbandonano il reticolo cristallino e passano in soluzione come ioni positivi :



Sulla superficie del metallo si accumulano cariche negative \rightarrow si forma un doppio strato elettrico all'interfaccia metallo - soluzione portando alla creazione di una d.d.p. denominata potenziale di elettrodo.

(2) deposito di cationi dalla soluzione alla fase metallica :



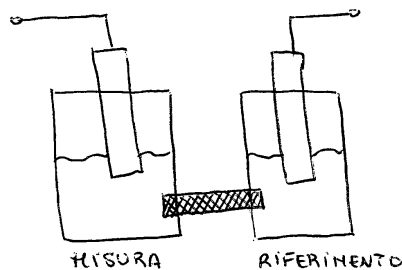
all'equilibrio termostato un eccesso di cariche positive sulla superficie del metallo un quanto i cationi fanno attratto elettroni al reticolo, mentre nello strato interfacciale rimangono un eccesso di cariche negative.

Queste cellule si distinguono come celle a interfaccia in modo da controllare la carica positiva della superficie metallica appiacciata alla soluzione: si determina un doppio strato elettrico ed una d.d.p. metallo/soluzione.

$$V = V_0 + \frac{KT}{qm} \cdot \ln \frac{C_0}{C_R} = V_0 + \frac{RT}{mF} \cdot \ln \frac{C_0}{C_R}$$

$$\begin{aligned} C_0 &= C_{He^{m+}} \\ C_R &= C_{He} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad V = V_0 + \frac{RT}{mF} \ln C_{He^{m+}}$$

CELLA ELETTROCHIMICA



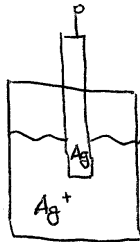
È formata da due semicelle costituite da due elettrodi immersi in due soluzioni in contatto tramite un setto poroso; questo impedisce l'interdiffusione degli ioni delle due soluzioni, ma assicura la continuità elettrica.

Il potenziale dei due elettrodi è funzione dell'attività degli ioni presenti nelle soluzioni.

Semicella di riferimento: soluzione mantenuta a concentrazione costante e l'elettrodo fornisce potenziale costante.

Semicele di misura: l'elettrodo fornisce un potenziale proporzionale ad'attività di uno ione immerso in soluzione.

ELETTRODI DI 1^a SPECIE



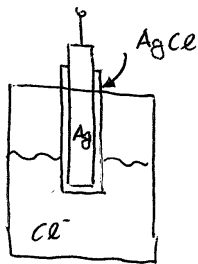
Ag/Ag^+

Comuna di un metallo immerso in una soluzione acquosa contenente disciolto un suo dato stesso metallo.

Reazione elettrochimica di riduzione: $Ag^+ + e^- \leftrightarrow Ag$

$$T = 25^\circ C \Rightarrow V = V_0 + 0,059 \log [Ag^+]$$

ELETTRODI DI 2^a SPECIE



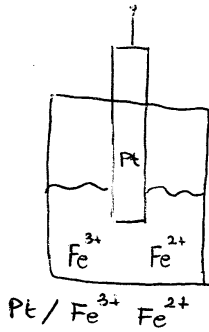
$Ag/AgCl/Cl^-$

Comuna di un metallo ricoperta da uno strato di un sale poco solubile del metallo, ed immerso in una soluzione contenente un elettrolita che manda in soluzione gli anioni del sale poco solubile.

Reazione elettrochimica di riduzione: $AgCl + e^- \leftrightarrow Ag + Cl^-$

$$T = 25^\circ C \Rightarrow V = V_0 - 0,059 \log [Cl^-]$$

ELETTRODI DI 3ª SPECIE (ELETTRODI REDOX)



Lamina di metallo inerte immersa in una soluzione contenente una specie chimica in due differenti stati di ossidazione, in una forma ossidata ed in una ridotta.

reazione elettrochimica di riduzione: $Fe^{3+} + e^- \leftrightarrow Fe^{2+}$

$$T = 25^\circ C \Rightarrow V = V_0 + 0,059 \log \frac{[Fe^{3+}]}{[Fe^{2+}]}$$

SENSORI AD ELETTROLITI SOLIDI

Sensori di concentrazione di specie chimiche allo stato gassoso.

Un tipo di cella elettrochimica a stato solido consiste in due elettrodi separati da un elettrolita solido a conduzione ionica.

A seconda del tipo di relazione elettrochimica tra l'elettrolita solido ed il gas da rilevare, si

osserva a comportamenti schematici si dividono in 3 tipi:

1) lo ione mobile dell'elettrolita solido coincide con quello derivato elettronicamente dal gas.

2) lo ione mobile " " " " " "

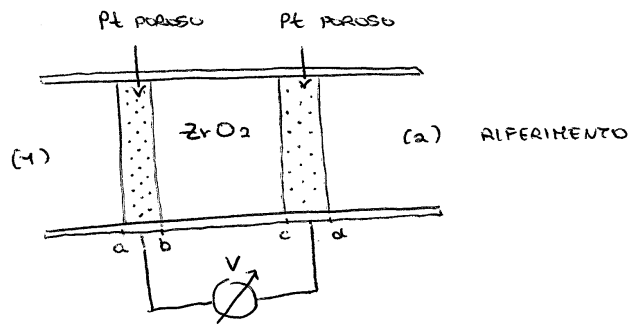
" " " " " "

3) nessuna relazione diretta tra gas da rilevare ed elettrolita solido senza l'assistenza di una fase ausiliaria.

MODELLO CLASSICO

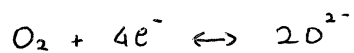
Valido per ossidi di tipo α .

La conduttività dell'elettrolita solido usato come membrana ma si stabilisce un potenziale che viene letto per mezzo di due elettrodi immersi nei due ambienti separati dalla membrana.



Il potenziale elettrochimico degli elettroni nei due elettrodi può differire poiché l'elettrolita solido è un buon conduttore ionico ma un buon isolante per gli elettroni.

La specie rivelata deve essere in equilibrio con lo ione che assicura la conduttività nell'elettrolita solido e il metallo catalitico contribuisce all'instaurarsi dell'equilibrio per mezzo del meccanismo seguente.



Sotto queste ipotesi:

1) specie da misurare in (1) e (2) sono le specie ioniche che ^{consentono} V conduttività nell'elettrolita solido.

2) Specie gassosa in (1) e (2) a equilibrio con la specie ionica a maggior molecola nell'elettrolita.

$$\text{Risulta : } V = \frac{1}{4qNa} RT \ln \frac{P_{O_2}^c}{P_{O_2}^b}$$

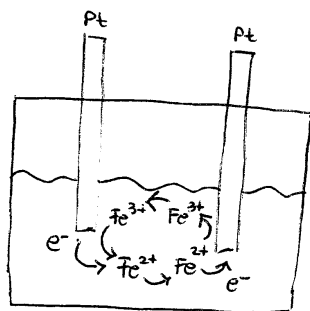
INTERFACCIE SOLIDO-LIQUIDO

Per la maggior parte dei materiali in contatto con un elettrolita si sviluppa un doppio strato di carica all'interfaccia: uno strato negativo sull'elettrodo ed uno positivo nell'elettrolita.

Al fine di trasferire elettroni tra liquido e solido (o viceversa) è necessaria una reazione redox all'interfaccia: $O + e^- \leftrightarrow R$

-> l'elettrodo su cui avviene la reazione è detto elettrodo di lavoro.

Coppia redox Fe^{3+}, Fe^{2+} : ioni ferrici e ferrosi che trasferiscono elettroni tra due elettrodi inerti muovendosi nella soluzione per diffusione.



Coppie redox che scambiano elettroni tra elettrodi sono dette "coppie elettroattive".

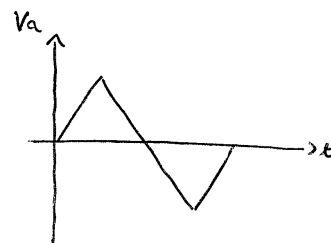
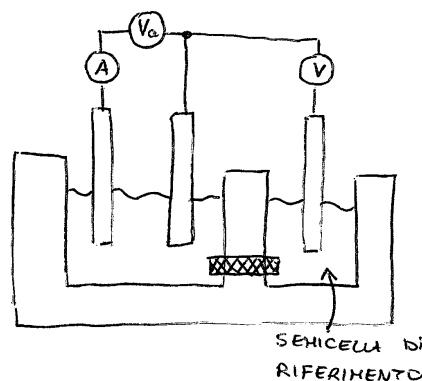
Una coppia inerte è una coppia redox che assicura alla soluzione la dovuta conducibilità ma non partecipa alla reazione all'elettrodo.

La coppia inerte interagisce con una coppia elettroattiva per permettere che il circuito si richiuda attraverso la soluzione elettrolitica.

La presenza di una coppia inerte favorisce la conduzione per corrente di migrazione di ioni e favorisce anche la conduzione per diffusione di ioni.

Se il fenomeno che limita la corrente, tramite la reazione all'elettrodo, è la diffusione dovuta ad un gradiente di concentrazione, misurando la corrente si misura il gradiente di concentrazione.

VOLTAHMETRIA



La corrente di Faraday anticipata può essere limitata dalla diffusione di reagenti e prodotti verso l'elettrodo e dall'elettrodo verso il volume della soluzione.

$$i_2 = nFA D_0 \frac{C_0(\omega, x)}{\delta_0}$$

$$\text{con } \delta_0 = D_0^{1/3} \nu^{1/6} \left(\frac{l}{\nu_m} \right)^{1/2}$$

D_0 : diffusività

ν : viscosità cinematica

l : lunghezza assiale in contatto col fluido

ν_m : velocità fluida

$V_{1/2}$: tensione di semionda

$$V_{1/2} = V \left(\frac{l}{2} \right)$$

$$i = \frac{i_l}{1 + \exp \left[- \frac{V - V_{1/2}}{V_T} \right]}$$