

PROGETTAZIONE DI SENSORI E MICROSISTEMI

[Fotocopie di Appunti PARTE 1]

A CURA DI ALESSANDRO PAGHI

PROFESSORE: Andrea Nannini (<http://www.iet.unipi.it/a.nannini/>)

LINK AL CORSO ANNO 2017/2018: <http://elearn.ing.unipi.it/course/view.php?id=1003>

FREQUENTAZIONE: Consigliata.

PREMESSA MATEMATICA ESSENZIALE

Si utilizza la rappresentazione cartesiana dei vettori $\vec{v}, \vec{v}_i, \vec{v}_j$

dove:

$$i = 1 \div 3$$

$$j = 1 \div 3$$

Vettori degli assi cartesiani: $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$

Vettore i -esimo generico: \hat{e}_i

nello spazio triviale:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$$

In n dimensioni: $\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \hat{e}_i$

PRODOTTO SCALARE TRA VETTORI

Dati due vettori \vec{v} ed \vec{u} :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \sum_i v_i u_i = v_i u_i$$

↑
Convenzione di
Sommatore di
Einstein: Sommatore
sue dummy index.

Il prodotto scalare tra vettori da come risultato uno scalare.

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v}^T \cdot \vec{u} = [v_x \ v_y \ v_z] \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = v_i u_i$$

PRODOTTO VETTORIALE

Dati due vettori \vec{a} ed \vec{b} , il prodotto vettoriale è distributivo rispetto alla somma.

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_i \hat{e}_i \times b_j \hat{e}_j = a_i b_j (\hat{e}_i \times \hat{e}_j)$$

$$\text{con } \hat{e}_i \times \hat{e}_j = \begin{cases} \hat{e}_k & \rightarrow i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2 \\ -\hat{e}_k & \rightarrow i, j, k = 3, 2, 1; 1, 3, 2; 2, 1, 3 \\ \emptyset & \rightarrow \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{e}_3$$

formalmente può essere ricordata come:

$$a \times b = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$a \times b \cdot c = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Definendo A una trasformazione lineare:

$$Aa \times Ab \cdot Ac = |A| (a \times b \cdot c)$$

Simbolo di permutazione ϵ_{ijk} o numeri di Levi:

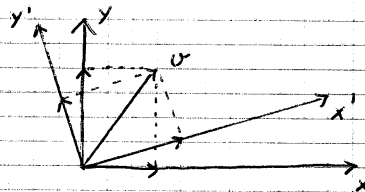
$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 \rightarrow i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2 \\ -1 \rightarrow i, j, k = 3, 2, 1; 1, 3, 2; 2, 1, 3 \\ \phi \rightarrow \text{altri} \end{cases}$$

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \epsilon_{ijk} \hat{e}_k \rightarrow a \times b = a_i b_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$$

PROPRIETÀ DI TRASFORMAZIONE DEI VETTORI

$$v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \rightarrow v' = \begin{bmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{bmatrix}$$

$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$



Calcoliamo la componente v'_x :

$$v'_x = \cos(\theta_{x'x}) v_x + \cos(\theta_{x'y}) v_y + \cos(\theta_{x'z}) v_z$$
$$= a_{xx} v_x + a_{xy} v_y + a_{xz} v_z$$

In generale: $v'_i = a_{ij} v_j$ $\left(\sum_{j=1}^m a_{ij} v_j \right)$

In forma matriciale: $v' = a \cdot v$

a è la matrice di rotazione.

La lunghezza del vettore è invariante rispetto al sistema di riferimento:

$$v \cdot v = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = (v'_x)^2 + (v'_y)^2 + (v'_z)^2$$

$$U \cdot U = U^T \cdot U = U'^T \cdot U' = U'^T \cdot a^T \cdot a \cdot U$$

$$\rightarrow a^T \cdot a = a^T \cdot a = I$$

La matrice di trasformazione a è unitaria.

TENSORI DEL SECONDO ORDINE

Dati due vettori u e U e la seguente trasformazione lineare T nello spazio cartesiano per cui:

$$u = T \cdot U$$

$$\begin{cases} u_x = T_{11} U_x + T_{12} U_y + T_{13} U_z \\ u_y = T_{21} U_x + T_{22} U_y + T_{23} U_z \\ u_z = T_{31} U_x + T_{32} U_y + T_{33} U_z \end{cases} \quad \begin{matrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{matrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{matrix}$$

affinché la relazione si conservi per una rotazione del sistema di riferimento, i coefficienti T_{ij} devono variare in un modo ben determinato

$$u' = a \cdot u = a \cdot T \cdot U$$

$$U' = a \cdot U \rightarrow U = a^{-1} \cdot U'$$

$$u' = a \cdot T \cdot a^{-1} \cdot U' = T' \cdot U'$$

$$\text{con } T' = a T a^{-1} = a T a^T$$

Si definisce operativamente "tensore del secondo ordine" una quantità costituita da 9 numeri scalari che si trasformano secondo $T' = a T a^T$.

Un tensore T_{ij} :

- Simmetrico se $T_{ij} = T_{ji}$

- Antisimmetrico se $T_{ij} = -T_{ji}$

Dato un tensore R , la componente:

- simmetrica $\bar{R}_S = (R + R^T) / 2$

- antisimmetrica $\bar{R}_A = (R - R^T) / 2$

Un tensore antisimmetrico ha solo 3 componenti indipendenti poiché le componenti diagonali sono nulle e le componenti extra-diagonali simmetriche, che sono uguali in modulo ma opposte in segno:

$$\begin{cases} u_x = T_{11} v_x + T_{12} v_y + T_{13} v_z \\ u_y = T_{21} v_x + T_{22} v_y + T_{23} v_z \\ u_z = T_{31} v_x + T_{32} v_y + T_{33} v_z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_x = T_{12} v_y + T_{13} v_z \\ u_y = -T_{12} v_x + T_{23} v_z \\ u_z = -T_{13} v_x - T_{23} v_y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & \emptyset & T_{23} \\ -T_{13} & -T_{23} & \emptyset \end{bmatrix}$$

Riscrive che:

$$\begin{bmatrix} T_{23} \\ T_{13} \\ T_{12} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_{23} \\ -T_{13} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -T_{23} & T_{13} & -T_{12} \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} T_{12} v_y + T_{13} v_z \\ -T_{12} v_x + T_{23} v_z \\ -T_{13} v_x - T_{23} v_y \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{un tensore antisimmetrico } \hat{a} \\ \text{equivalente ad un vettore associato} \\ \rightarrow \text{un vettore associato può essere} \end{array}$$

trattato come un tensore antisimmetrico del secondo ordine.

PRODOTTO DIADICO

Dati due vettori u e v , si definisce prodotto diadico:

$S = u \otimes v$ che da come risultato il tensore del secondo ordine $S_{ij} = u_i v_j$

$$S = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} [v_1 \ v_2 \ v_3] = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}(u \otimes v) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = u \cdot v$$

$$u = v = \hat{x}$$

$$\hat{x} \otimes \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si può osservare:

$$S = \mu_1 v_1 \hat{x} \otimes \hat{x} + \mu_1 v_2 \hat{x} \otimes \hat{y} + \mu_1 v_3 \hat{x} \otimes \hat{z} + \\ + \mu_2 v_1 \hat{y} \otimes \hat{x} + \mu_2 v_2 \hat{y} \otimes \hat{y} + \mu_2 v_3 \hat{y} \otimes \hat{z} + \\ + \mu_3 v_1 \hat{z} \otimes \hat{x} + \mu_3 v_2 \hat{z} \otimes \hat{y} + \mu_3 v_3 \hat{z} \otimes \hat{z}$$

$$(\hat{x} \otimes \hat{y}) u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mu_y \cdot \hat{x} \quad (\text{PROIETTORI})$$

È la proiezione lungo l'asse \hat{x} della componente μ_y di u .

$$(\hat{x} \otimes \hat{x}) u = \mu_x \hat{x} \quad (\text{PROIETTORI OMOLOGHI})$$

$$u = (\hat{x} \otimes \hat{x}) u + (\hat{y} \otimes \hat{y}) u + (\hat{z} \otimes \hat{z}) u \\ = (\hat{x} \otimes \hat{x} + \hat{y} \otimes \hat{y} + \hat{z} \otimes \hat{z}) u = I \cdot u$$

$$I_{xz} = I - (\hat{x} \otimes \hat{x}) = (\hat{y} \otimes \hat{y}) + (\hat{z} \otimes \hat{z}) \quad (\text{PROIETTORI TRASVERSALI})$$

Proiettano la componente trasversale a z , ovvero quella appartenente al piano xy .

$$(I_{xz}) u = (I - \hat{x} \otimes \hat{x}) u = \hat{y} \mu_y + \hat{z} \mu_z$$

PRODOTTO SCALARE TRA TENSORI DEL 2° ORDINE

$$S : T = \text{tr}(S^T T) \rightarrow S : T = S_{ij} T_{ij}$$

$$S : R = R : S$$

$$S : I = \text{tr}(S)$$

Il doppio prodotto scalare tra tensori secondici come risultato uno scalare.

PRODOTTO MATRICIALE TRA TENSORI DEL 2° ORDINE

$$AB = A_{ij} B_{jk} = A \cdot B$$

Formosa come risultato un tensore del 2° ordine

PRODOTTO VETTORE · TENSORE DEL 2° ORDINE

$$v^T A = v_{j,i} A_{ij} = v \cdot A$$

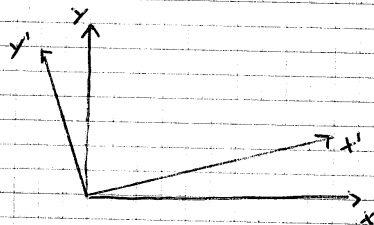
$$A v = A_{ij} v_{j,i} = A \cdot v$$

Formosa come risultato un vettore

$$v \cdot A = A \cdot v \text{ se } A \text{ è simmetrica.}$$

MATRICE DI ROTAZIONE

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\beta) & \cos(\gamma) \\ \cos(\delta) & \cos(\epsilon) & \cos(\zeta) \\ \cos(\eta) & \cos(\theta) & \cos(\iota) \end{pmatrix}$$



POLINOMIO CARATTERISTICO E INVARIANTI PRINCIPALI

$$T \text{ tensore, } \det(T - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

I_1, I_2, I_3 invarianti rispetto al sistema di RIF

$$I_1 = \text{tr}(T)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}$$

STATICA E DINAMICA DI SISTEMI ELASTICI

IL CONTINUO

Il continuo è una collezione di punti materiali ed è descritto da campi scalari e vettoriali che ammettono tutte le derivate necessarie rispetto al punto e al tempo.

Il punto materiale è un oggetto sufficientemente piccolo da essere individuato nello spazio da una tripla di componenti cartesiane ma contemporaneamente un numero adeguato grande di atomi da poter essere considerato un vero sistema termodinamico.

Le fluttuazioni termodinamiche dipendono dal numero N di particelle che compongono il sistema secondo una legge del tipo $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

Il continuo rappresenta una buona approssimazione e tolleranza statistica dell'ordine 10^{-3} .

CORPI ELASTICI DEFORMABILI

Un corpo elastico deformabile è un corpo che, sottoposto ad una sollecitazione, si deforma, ossia cambia forma e volume.

Nei corpi deformati ogni particella del materiale è spostata dalla sua posizione di equilibrio \rightarrow ma come dalle tensioni interne di richiamo verso le posizioni originali.

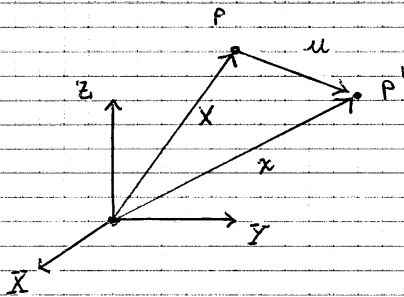
Un corpo plastico, a seguito di una deformazione, raggiunge una nuova posizione di equilibrio.

Un corpo fragile, a seguito di una deformazione si frammenta.

P : posizione particella nel corpo non deformato

P' : posizione particella nel corpo deformato

SPOSTAMENTO

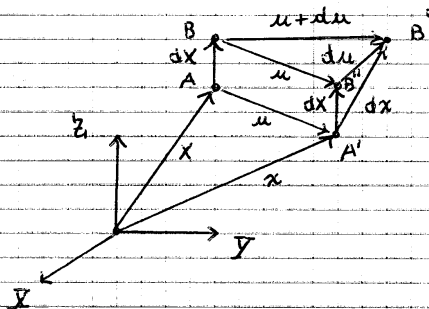


$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{x}'(\vec{x}, t) - \vec{x}$$

è definito come la
velocità spostamento.

esso spostamento $u(\vec{x}, t)$
contribuisce come sua deformazione,
in che traslazione

SPOSTAMENTO DIFFERENZIALE



$$d\vec{u} = d\vec{x}'(x, t) - dx$$

è definita come
spostamento differenziale.

dx individuata B''

dx individuata B'

esso spostamento infinitesimo $d\vec{u}$ non contribuisce come
traslazione.

GRADIENTE DI SPOSTAMENTO

$$\vec{u} = u_x \hat{x} + u_y \hat{y} + u_z \hat{z}$$

$$\Omega = x, y, z$$

$$u_\Omega = u_\Omega(x_x, x_y, x_z)$$

$$du_\Omega = \frac{du_\Omega}{dx_x} dx_x + \frac{du_\Omega}{dx_y} dx_y + \frac{du_\Omega}{dx_z} dx_z$$

$$\begin{bmatrix} du_x \\ du_y \\ du_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_x / \partial x_x & \partial u_x / \partial x_y & \partial u_x / \partial x_z \\ \partial u_y / \partial x_x & \partial u_y / \partial x_y & \partial u_y / \partial x_z \\ \partial u_z / \partial x_x & \partial u_z / \partial x_y & \partial u_z / \partial x_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_x \\ dx_y \\ dx_z \end{bmatrix}$$

Si definisce:

$$\varepsilon(x, t) = \begin{bmatrix} \partial u_x / \partial x_x & \partial u_x / \partial x_y & \partial u_x / \partial x_z \\ \partial u_y / \partial x_x & \partial u_y / \partial x_y & \partial u_y / \partial x_z \\ \partial u_z / \partial x_x & \partial u_z / \partial x_y & \partial u_z / \partial x_z \end{bmatrix}$$

ed è detta tensore spostamento differenziale o tensore gradiente di spostamento.

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{x}(\vec{x}, t) - \vec{x} \quad \text{è lo spostamento}$$

applicando l'operatore di gradiente:

$$\nabla \vec{u}(\vec{x}, t) = \nabla \vec{x}(\vec{x}, t) - \nabla \vec{x}$$

$$\rightarrow \nabla \vec{u}(\vec{x}, t) = \varepsilon(\vec{x}, t)$$

$$\nabla \vec{x}(\vec{x}, t) = F(\vec{x}, t)$$

$$\nabla \vec{x} = I$$

$$\text{Risultato: } \varepsilon(\vec{x}, t) = F(\vec{x}, t) - I$$

$$F := \nabla \vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} \quad \text{è il tensore gradiente di deformazione.}$$

DEFORMAZIONI:

$\varepsilon(x, t)$ è non nullo per rotazioni rigide
in quanto du è non nullo.

Per descrivere la deformazione è conveniente utilizzare quantità scalari che si annullano sia per traslazioni che per rotazioni pure di deformazioni.

$$\text{Deformazione } \Delta^2 = |dx(x, t)|^2 - |dX|^2$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= |dx(x, t)|^2 - |dX|^2 = dx \cdot dx - dX \cdot dX \quad (\partial \vec{x} = F \cdot \partial \vec{X}) \\ &= F dX \cdot F dX - dX \cdot dX = dX^t F^t F dX - dX^t \cdot dX \\ &= dX^t [F^t F - I] dX \end{aligned}$$

Introduciamo con $S = \frac{1}{2} [F^t F - I]$ il tensore di strain.

$$\epsilon = F - I \rightarrow F = \epsilon + I$$

$$S = \frac{1}{2} \left[(\epsilon + I)^t (\epsilon + I) - I \right] = \frac{1}{2} \left[\epsilon^t + \epsilon + \epsilon^t \epsilon \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\nabla u^t + \nabla u + \nabla u^t \nabla u \right]$$

La deformazione è quindi definita come:

$$\Delta' = 2 (dX^t S dX)$$

$$= 2 \begin{bmatrix} dx_x & dx_y & dx_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_x \\ dx_y \\ dx_z \end{bmatrix}$$

$$S_{ij}(x, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right] \quad \text{con } i, j, k = x, y, z.$$

SEMPLIFICAZIONI

Il tensore di stress S consente di esprimere la deformazione Δ' utilizzando le componenti del campo di spostamento u .

nei casi di piccole deformazioni:

$$S = \frac{1}{2} \left[\nabla u^t + \nabla u + \nabla u^t \nabla u \right] \approx \frac{1}{2} \left[\nabla u^t + \nabla u \right]$$

Il tensore di stress è la componente simmetrica di ϵ

$$S_{ij}(x, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad \text{con } i, j = x, y, z.$$

Ricordando che:

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{dx}{dX} - 1 \rightarrow \frac{dx}{dX} - \frac{du}{dX} = 1$$

$$\rightarrow \frac{du}{dx} \left(\frac{dx}{dX} - \frac{du}{dX} \right) = \frac{dx}{dX} \rightarrow \frac{du}{dx} \approx \frac{du}{dX}$$

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{du}{dX} \approx \neq$$

Perché $\vec{x} \sim \vec{x} := \vec{r} = x \cdot \hat{x} + y \cdot \hat{y} + z \cdot \hat{z}$

Tensore di Strain :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \right]$$

Tensore gradiente di spostamento :

$$E_{ij}(r, t) = \frac{\partial u_i}{\partial r_j}$$

Notazione ulteriormente semplificata :

$$u_x = u \quad r_j = j \quad \text{con } j = x, y, z$$

$$u_y = v$$

$$u_z = w$$

$$E = \begin{bmatrix} du/dx & du/dy & du/dz \\ dv/dx & dv/dy & dv/dz \\ dw/dx & dw/dy & dw/dz \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} du/dx & \frac{1}{2}(du/dy + dv/dx) & \frac{1}{2}(du/dz + dw/dx) \\ \frac{1}{2}(du/dy + dv/dx) & dv/dy & \frac{1}{2}(dv/dz + dw/dy) \\ \frac{1}{2}(du/dz + dw/dx) & \frac{1}{2}(dv/dz + dw/dy) & dw/dz \end{bmatrix}$$

Alcune considerazioni operative :

$$\nabla = \begin{bmatrix} d/dx \\ d/dy \\ d/dz \end{bmatrix}$$

$$\nabla \varphi = \begin{bmatrix} d/dx \\ d/dy \\ d/dz \end{bmatrix} \varphi = \begin{bmatrix} d\varphi/dx \\ d\varphi/dy \\ d\varphi/dz \end{bmatrix}$$

$$\nabla \vec{u} = \begin{bmatrix} du_x/dx & du_x/dy & du_x/dz \\ du_y/dx & du_y/dy & du_y/dz \\ du_z/dx & du_z/dy & du_z/dz \end{bmatrix} \quad (\text{gradiente vettore})$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} u_x + \frac{\partial}{\partial y} u_y + \frac{\partial}{\partial z} u_z \quad \left(\begin{array}{l} \text{divergenza} \\ \text{nettare} \end{array} \right)$$

Divergenza di un tensore :

$$\nabla \cdot T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} + \frac{\partial T_{13}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} + \frac{\partial T_{23}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x} + \frac{\partial T_{32}}{\partial y} + \frac{\partial T_{33}}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$T \cdot \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} + \frac{\partial T_{13}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} + \frac{\partial T_{23}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x} + \frac{\partial T_{32}}{\partial y} + \frac{\partial T_{33}}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$\nabla \cdot T = T \cdot \nabla$ sse T simmetrico.

$$\nabla_x \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{bmatrix}$$

Significato delle componenti del tensore S :

I termini S_{ii} sono legati alla variazione percentuale della dimensione media del sistema i -esimo, mentre i termini extra diagonali S_{ij} sono legati alla deformazione angolare compressiva che il corpo subisce nel piano ij .

RELAZIONE TRA S ED E

$S = \frac{1}{2} (E + E^T)$ la componente simmetrica del tensore gradiente di deformazione E proprio il tensore di strain.

In una forma semplificata risulta :

$$\begin{bmatrix} du_x \\ du_y \\ du_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} du_x/dx & du_x/dy & du_x/dz \\ du_y/dx & du_y/dy & du_y/dz \\ du_z/dx & du_z/dy & du_z/dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} du_x/dx & \frac{1}{2}(du_x/dy + du_y/dx) & \frac{1}{2}(du_x/dz + du_z/dx) \\ \frac{1}{2}(du_x/dy + du_y/dx) & du_y/dy & \frac{1}{2}(du_y/dz + du_z/dy) \\ \frac{1}{2}(du_x/dz + du_z/dx) & \frac{1}{2}(du_y/dz + du_z/dy) & du_z/dz \end{bmatrix}$$

$A \in \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon^t)$ è la componente antisimmetrica di ϵ e rappresenta pure rotazioni locali

$$A \in \vec{r} = \begin{bmatrix} \phi & \frac{1}{2} (du_x/dy - du_y/dx) & \frac{1}{2} (du_x/dz - du_z/dx) \\ \frac{1}{2} (du_y/dx - du_x/dy) & \phi & \frac{1}{2} (du_y/dz - du_z/dy) \\ \frac{1}{2} (du_z/dx - du_x/dz) & \frac{1}{2} (du_z/dy - du_y/dz) & \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

In virtù delle proprietà dei tensori antisimmetrici $A \in \vec{r}$ ha le stesse componenti di $\vec{A} \times \vec{r}$ dove \vec{A} è un vettore assiale

$$\vec{A} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{du_x}{dz} - \frac{du_z}{dx} \right), \frac{1}{2} \left(\frac{du_x}{dy} - \frac{du_y}{dx} \right), \frac{1}{2} \left(\frac{du_y}{dz} - \frac{du_z}{dy} \right) \right]$$

È noto che una rotazione di velocità angolare $\vec{\omega}$ (non funzione del punto) produce una velocità tangenziale $\vec{v}_{\text{te}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ e di conseguenza uno spostamento tangenziale nel tempo dt di modulo $\omega dt \times r$

De rotare della velocità risultata:

$$\nabla_x \vec{v}_{\text{te}} = \nabla_x (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Per via delle identità vettoriali:

$$\nabla_x (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \underbrace{(\vec{r} \cdot \nabla) \vec{\omega}}_{\phi} - \underbrace{\vec{r} (\nabla \cdot \vec{\omega})}_{\phi} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{r} + \vec{\omega} (\nabla \cdot \vec{r}) =$$

Per via della osservazione rispetto al punto

$$= -(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{r} + \vec{\omega} (\nabla \cdot \vec{r})$$

$$(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \omega_x + \frac{\partial}{\partial y} \omega_y + \frac{\partial}{\partial z} \omega_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \vec{\omega}$$

$$\vec{\omega} (\nabla \cdot \vec{r}) = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d/dx & d/dy & d/dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\omega_x \\ 3\omega_y \\ 3\omega_z \end{bmatrix} = 3\vec{\omega}$$

$$\nabla_x \vec{v}_{\text{te}} = -\vec{\omega} + 3\vec{\omega} = 2\vec{\omega}$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{U} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ \frac{du_x}{dt} & \frac{du_y}{dt} & \frac{du_z}{dt} \end{bmatrix} =$$

← la velocità è lo spostamento infinitesimo

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\hat{x} \left(\frac{du_z}{dx} - \frac{du_x}{dz} \right) + \hat{y} \left(\frac{du_x}{dz} - \frac{du_z}{dx} \right) + \hat{z} \left(\frac{du_y}{dx} - \frac{du_x}{dy} \right) \right] = \frac{d}{dt} \cdot A$$

Da cui risulta $A = \omega dt$.

A è uno spostamento angolare ed è correlato due che la componente antisimmetrica del tensore gradiente di deformazione rappresenta rotazioni locali.

NOTAZIONE SIMBOLICA

Omettendo gli indici: $\vec{\epsilon} = \nabla \cdot \vec{u}$

$$S = \frac{1}{2} (\epsilon + \epsilon^T) = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T)$$

Si definisce l'operatore gradiente simmetrico:

$$\nabla_s \vec{u} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T) \rightarrow S = \nabla_s \cdot \vec{u}$$

NOTAZIONE RIDOTTA PER S

Matrici simmetriche 3x3 possono essere trattate come vettori di 6 componenti

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & 1/2 a_6 & 1/2 a_5 \\ 1/2 a_6 & a_2 & 1/2 a_4 \\ 1/2 a_5 & 1/2 a_4 & a_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}$$

Applicando al tensore S:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \partial u_x / \partial x \\ \partial u_y / \partial y \\ \partial u_z / \partial z \\ \partial u_z / \partial y + \partial u_y / \partial z \\ \partial u_z / \partial x + \partial u_x / \partial z \\ \partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x \end{bmatrix}$$

OPERATORE ∇_s IN FORMA MATRICIALE

$$\begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \frac{\partial}{\partial y} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \frac{\partial}{\partial z} \\ \emptyset & \frac{\partial}{\partial z} & \emptyset \\ \frac{\partial}{\partial z} & \emptyset & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

$$S = \nabla_s \cdot \vec{u} \quad (\text{Forma matriciale})$$

$$S_i = \nabla_j u_j$$

$$i = 1 \div 6 \\ j = 1 \div 3$$

$$S_{(6 \times 1)} = \nabla_{j, (6 \times 3)} \cdot u_{(3 \times 1)}$$

FORZE E TENSORE DI STRESS

Le forze che agiscono su un corpo possono essere distinte in forze "di volume" e forze "di superficie".

Es. forze di volume:

$$\text{Forza di gravità: } \int_V \vec{f} dV = \rho \vec{g} dV$$

↑
densità di massa

$$\text{Forza elettrica: } \int_V \vec{f} dV = \rho \vec{E} dV$$

↑
densità di carica

Le forze di volume agiscono sulla singola particella del corpo e sono in grado di deformare staticamente un corpo elastico e produrre accelerazioni nel corpo.

Alternativamente deformazioni statiche o accelerazioni possono essere indotte applicando forze di superficie alle superfici che limitano il corpo; tali processi saranno chiamati forze interne del corpo tramite tensioni elastiche interne.

Indichiamo con p la pressione o la tensione applicata alla superficie del corpo.

EQUAZIONE DELLA DINAMICA

$$\int_{\text{sup}} p \, d\text{Sup} = \int_{\text{vol}} f_{\text{vol}} \, dV_{\text{vol}} = \int_{\text{vol}} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \, dV_{\text{vol}}$$

↑
Resistenza forze
di superficie

↑
Resistenza
forze di
volume

$$\begin{aligned} \rho \, dV_{\text{vol}} &= dm \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a \end{aligned}$$

$$\vec{F} = m \cdot a$$

TENSORE DI STRESS

In un corpo elastico deformato si originano tensioni interne che tendono a far tornare ciascuna particella nella sua posizione di equilibrio

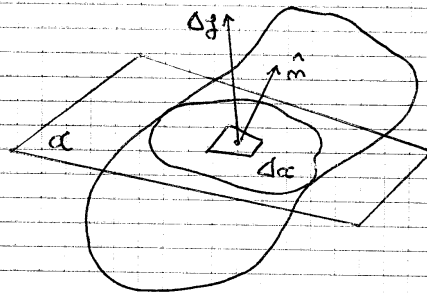
Δf : forza che agisce sulla superficie Δa .

In realtà Δf è la

resistenza di tutte

le tensioni applicate

su Δa .



Vertore di stress:

$$T_m(\hat{m}) = \frac{\Delta f}{\Delta a} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta a}$$

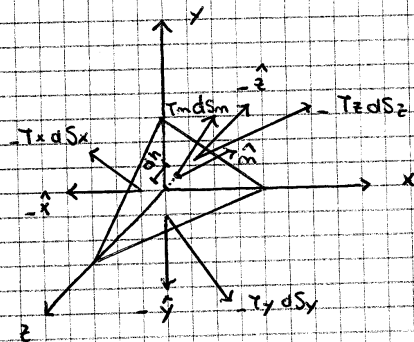
T_m dipende dal punto considerato e dall'orientamento del piano d .

In realtà Δa non può tendere a zero: per la meccanica del continuo Δa deve contenere un gran numero di particelle per essere considerato un sistema termodinamico esteso.

studiamo la dipendenza di T_m da \hat{n}

Si consideri una porzione di materiale elastico di forma tetraedica

Il vertice di questa è applicato una forza di superficie dS_ϕ , \hat{n} è la normale alla superficie obliqua di area dS_m



Equazione della statica:

$$T_m dS_m - T_x dS_x - T_y dS_y - T_z dS_z + f_{vol} dV = 0$$

f_{vol} è la densità di forza volumetrica che agisce sul corpo di volume $dV = \frac{1}{3} dS_m dh$

dh : altezza tetraedica rispetto alla sup. dS_m

dS_ϕ è la proiezione di dS_m sul piano perpendicolare ad ϕ , risulta:

$$dS_\phi = dS_m \cos \phi = dS_m (\hat{n} \cdot \hat{e}_\phi)$$

con \hat{e}_ϕ normale ad un'asse $\phi = x, y, z$ e $i = 1, 2, 3$

$$T_m dS_m - T_x dS_m (\hat{n} \cdot \hat{e}_1) - T_y dS_m (\hat{n} \cdot \hat{e}_2) - T_z dS_m (\hat{n} \cdot \hat{e}_3) + \frac{1}{3} f_{vol} dS_m dh = 0$$

$$T_m - T_x (\hat{n} \cdot \hat{e}_1) - T_y (\hat{n} \cdot \hat{e}_2) - T_z (\hat{n} \cdot \hat{e}_3) + \frac{1}{3} f_{vol} dh = 0$$

$$\text{se } dV \rightarrow 0 \Rightarrow dh \rightarrow 0$$

$$T_m - T_x (\hat{n} \cdot \hat{e}_1) - T_y (\hat{n} \cdot \hat{e}_2) - T_z (\hat{n} \cdot \hat{e}_3) = 0$$

$$T_m - (\hat{n} \cdot \hat{e}_i) T_i = 0$$

n.b.: T_i è la tensione relativa al piano \perp ad i

$$T_m = T_1 [m_1 \ m_2 \ m_3] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + T_2 [m_1 \ m_2 \ m_3] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + T_3 [m_1 \ m_2 \ m_3] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \end{bmatrix} m_1 + \begin{bmatrix} T_{21} \\ T_{22} \\ T_{23} \end{bmatrix} m_2 + \begin{bmatrix} T_{31} \\ T_{32} \\ T_{33} \end{bmatrix} m_3$$

$$= \begin{bmatrix} m_1 T_{11} + m_2 T_{21} + m_3 T_{31} \\ m_1 T_{12} + m_2 T_{22} + m_3 T_{32} \\ m_1 T_{13} + m_2 T_{23} + m_3 T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{bmatrix}$$

T è un tensore di stress e di Cauchy

$$[T_{ij}] = F / \text{Sup}^2 = P_n$$

T è simmetrico, perché:

$$T = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow T_m = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

in forma matriciale $\vec{T}_m = T \vec{m}$

È semplice vedere che:

$$T_m = \hat{m} \cdot (\hat{e}_1 \otimes T_1 + \hat{e}_2 \otimes T_2 + \hat{e}_3 \otimes T_3)$$

$$= \hat{m} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [T_{11} \ T_{12} \ T_{13}] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [T_{21} \ T_{22} \ T_{23}] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [T_{31} \ T_{32} \ T_{33}] \right\}$$

$$= \hat{m} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \right\}$$

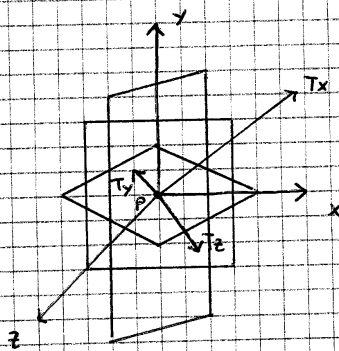
$$= \hat{m}^t \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \hat{m}$$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DI VETTORE E TENSORE DI STRESS

Consideriamo un punto materiale P di un continuo elastico nel nuovo stato e l'origine di una terna di assi cartesiani.

Si individuano in P le tensioni relative ai piani passanti per il punto e perpendicolari all'asse coordinato α e indichiamole con T_α .

$$\text{Dunque } T_\alpha = \hat{x} T_{\alpha x} + \hat{y} T_{\alpha y} + \hat{z} T_{\alpha z}$$



$$\begin{cases} T_x = \hat{x} T_{xx} + \hat{y} T_{xy} + \hat{z} T_{xz} \\ T_y = \hat{x} T_{yx} + \hat{y} T_{yy} + \hat{z} T_{yz} \\ T_z = \hat{x} T_{zx} + \hat{y} T_{zy} + \hat{z} T_{zz} \end{cases}$$

Da notare dai coefficienti di questo sistema.

$$\begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \text{ è un tensore di stress.}$$

Da ricordare che $\hat{m} = \frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|}$

EQUAZIONE DELLA DINAMICA

La risultante delle tensioni applicata sulla superficie di massima \hat{m} è data da $T \hat{m}$.

$$\int_{\text{Sup}} T \cdot \hat{m} \, d\text{Sup} + \int_{\text{Vol}} \text{Forze d'inc} = \int_{\text{Vol}} \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \, d\text{Vol}$$

$$(p = T \cdot \hat{m})$$

Per un tensore della divergenza: $\int_{\text{Sup}} T \cdot \hat{m} \, d\text{Sup} = \int_{\text{Vol}} \nabla \cdot T \, d\text{Vol}$

Risulta che l'equazione di Newton per un corpo elastico continuo sotto di un campo di stress $\bar{\sigma}$:

$$\nabla \cdot T = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F_{ext}$$

In coordinate cartesiane:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - F_{ext_i}, \text{ con } i, j = x, y, z$$

NOTAZIONE RIDOTTA PER T

Il tensore di stress T è simmetrico

$$T = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & T_6 & T_5 \\ T_6 & T_2 & T_4 \\ T_5 & T_4 & T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix}$$

Divergenza di T:

$$\nabla \cdot T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 & T_6 & T_5 \\ T_6 & T_2 & T_4 \\ T_5 & T_4 & T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} T_1 + \frac{\partial}{\partial y} T_6 + \frac{\partial}{\partial z} T_5 \\ \frac{\partial}{\partial x} T_6 + \frac{\partial}{\partial y} T_2 + \frac{\partial}{\partial z} T_4 \\ \frac{\partial}{\partial x} T_5 + \frac{\partial}{\partial y} T_4 + \frac{\partial}{\partial z} T_3 \end{bmatrix}$$

Lo stress ridotto si ottiene moltiplicando la matrice $\nabla \cdot T$ per T_j

$$\nabla \cdot T_j = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - F_i, \quad i = 1 \div 3 \quad j = 1 \div 6$$

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix}$$

LEGGE DI HOOKE

Esprime una relazione di linearità per piccole deformazioni tra stress e strain:

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} \quad ; \quad i, j, k, l = x, y, z.$$

Cioè è un tensore del 4° ordine dai moduli elastici o rigidezze.

$$S_{ij} = s_{ijkl} T_{kl} \quad ; \quad i, j, k, l = x, y, z.$$

s_{ijkl} sono dette compliance.

$$c_{ij} = c_{ijkl}$$

$$I \text{ o } J \quad i, j \text{ o } kl$$

1	xx
2	yy
3	zz
4	yz, zy
5	xz, zx
6	xy, yx

Legge di Hooke in notazione ridotta:

$$T_i = c_{ij} S_j \quad ; \quad S_i = s_{ij} T_j \quad , \quad c_{ij} = 6 \times 6$$

$$\rightarrow c_{ij}^{-1} T_i = S_j \quad \text{da cui risulta } s_{ij} = c_{ij}^{-1}$$

In notazione simmetrica:

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} \quad \text{può essere scritta come: } T = c : S$$

$$\text{analogaente } S = s : T$$

MATERIALE ISOTROPO

Un materiale isotropo è un materiale che si comporta ugualmente in tutte le direzioni secondo due punti considerati

La matrice delle righe per un materiale cristallino cubico \bar{c} :

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & C_{44} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & C_{44} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & C_{44} \end{bmatrix}$$

C_{ij} è simmetrica.

Per un materiale isotropo vale il seguente vincolo:

$$C_{12} = C_{11} - 2C_{44}$$

Definendo le costanti di Lamé:

$$\lambda = C_{12}$$

$$\mu = C_{44}$$

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \mu & \mu & \mu \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \mu & \mu & \mu \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \mu & \mu & \mu \end{bmatrix}$$

Ed è valida per un materiale non cristallino ed isotropo.

La nota si hanno solo due parametri:

$$E = \frac{13}{S_3} \quad \text{modulo di Young}$$

$$\nu = -\frac{S_1}{S_2} = -\frac{S_2}{S_3} \quad \text{rapporto di Poisson}$$

↑ deformazione nella direzione z a questa alla quale si applica il carico.

E è una riga data dal rapporto tra stress in direzione z e strain in direzione z.

ν indica che se due direzioni di deformazione x ed y si comportano alla stessa maniera rispetto allo strain in direzione z.

o tiene dunque conto del rapporto tra deformazione e contrazione

$$\nu = \frac{C_{12}}{C_{11} + C_{12}} \quad E = \frac{C_{11}^2 + C_{11}C_{12} - 2C_{12}^2}{C_{11} + C_{12}}$$

da cui risulta:

$$C_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$C_{12} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$C_{44} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

TIPOLOGIE DI STRESS

STRESS UNIASSIALE

Materiali tirati o compressi in una sola direzione

$$\begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix}$$

STRESS IDROSTATICO

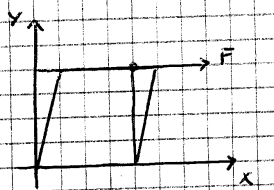
$$\begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

STRESS TANGENZIALE

Comporta una deformazione non uniforme su x, y, z .

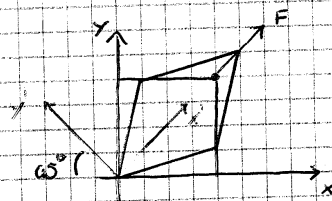
$$\begin{bmatrix} -T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

TAGLIO SEMPLICE



$$u(\vec{r}) = 2C_y \hat{x}$$

TAGLIO PURO



$$u(\vec{r}) = C_y \hat{x} + C_x \hat{y}$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2cy \\ \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} cy \\ cx \\ \emptyset \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} \emptyset & 2c & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} \emptyset & c & \emptyset \\ c & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} \emptyset & c & \emptyset \\ c & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix}$$

$$S_2 = E_2$$

$$S = \frac{E + E^T}{2}$$

$$S = \frac{E + E^T}{2}$$

$$\frac{E_1 - E_1^T}{2} = \begin{bmatrix} \emptyset & c & \emptyset \\ -c & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix}$$

$$\frac{E_2 - E_2^T}{2} = \emptyset$$

$E_1 = E_2$: Ciò significa che i due stati deformati sono sovrapposti per le deformazioni.

$\frac{E_1 - E_1^T}{2} \neq \emptyset$ mentre $\frac{E_2 - E_2^T}{2} = \emptyset$: nel primo caso si ha un rotazione locale.

Imponendo un nuovo sistema di riferimento per le taglie piane (x', y') occorre che :

a : matrice di rotazione

$$a = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & \emptyset \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & 1 \end{bmatrix}$$

$$a E_2 a^T = \begin{bmatrix} -c & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & c & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix}$$

La struttura del tensore di Strain risulta adesso la stessa del tensore di Stress.

$$S = s : T \quad \text{con} \quad s = c^{-1}$$

$$S_x = s_{xy} T_y$$

Supponiamo corpo uniaxiale su x:

$$S_x = s_{xy} \begin{bmatrix} T_x \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/E & T_x \\ -1/E & \sigma T_x \\ -1/E & \sigma T_x \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix}$$

nuove componenti di stress lungo x e lungo y

Supponiamo deformazione uniaxiale su x:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = c_{xy} \begin{bmatrix} S_x \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) S_x \\ \lambda S_x \\ \lambda S_x \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix}$$

non avere deformazione su y e z significa

aver scelto lo sistema di tali assi

→ maxime tensioni interne per aver stato
contribuzioni nelle direzioni 1 solo direzione
di deformazione

MODULO DI ELASTICITÀ DI VOLUME

Consideriamo la deformazione $\Delta^i = 2 dX^T S dX$

$$\Delta^i = dx^2 - dX^2 = 2 \begin{bmatrix} dx_x & dx_y & dx_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_x \\ dx_y \\ dx_z \end{bmatrix}$$

$$dx^2 = dX^2 + \Delta^i = dx_x^2 + dx_y^2 + dx_z^2 + 2 \begin{bmatrix} dx_x & dx_y & dx_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_x \\ dx_y \\ dx_z \end{bmatrix}$$

S è un tensore simmetrico ed esisterà un
sistema di assi cartesiani (sistema principale)
rispetto al quale esso risulta diagonale.

assumendo tale sistema di assi: (ξ, η, ζ)

$$dx^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 + 2 \begin{bmatrix} d\xi & d\eta & d\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & S_\beta & 0 \\ 0 & 0 & S_\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix}$$

$$= d\xi^2 (\gamma + 2S_\alpha) + d\eta^2 (\gamma + 2S_\beta) + d\zeta^2 (\gamma + 2S_\gamma)$$

nel nuovo sistema di coordinate siamo in presenza di tre distinte deformazioni riguardanti i tre assi coordinati:

$$\begin{cases} d\xi' = d\xi \sqrt{\gamma + 2S_\alpha} \sim d\xi (\gamma + S_\alpha) \\ d\eta' = d\eta \sqrt{\gamma + 2S_\beta} \sim d\eta (\gamma + S_\beta) \\ d\zeta' = d\zeta \sqrt{\gamma + 2S_\gamma} \sim d\zeta (\gamma + S_\gamma) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{componenti} \\ (\xi', \eta', \zeta') \text{ dopo la} \\ \text{deformazione.} \end{matrix}$$

Il volume dell'elemento infinitesimo risulta:

$$dV_{el}' = d\xi' d\eta' d\zeta' = d\xi (\gamma + S_\alpha) d\eta (\gamma + S_\beta) d\zeta (\gamma + S_\gamma)$$

$$= dV_{el} (\gamma + S_\alpha) (\gamma + S_\beta) (\gamma + S_\gamma) \sim dV_{el} (\gamma + S_\alpha + S_\beta + S_\gamma)$$

$$S_\alpha + S_\beta + S_\gamma = \text{tr}(S) = S_{xx} + S_{yy} + S_{zz}$$

↑
traccia sistema principale ↑
traccia sistema principale

↑
Immaginaria della traccia

$$dV_{el}' = dV_{el} (\gamma + S_{xx} + S_{yy} + S_{zz})$$

$$S_{xx} + S_{yy} + S_{zz} = \text{tr}(S) = \frac{dV_{el}' - dV_{el}}{dV_{el}} = \frac{\Delta V_{el}}{V_{el}}$$

Per una cura di calcolo / Combinazione risultata:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |S| \\ |S| \\ |S| \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \pm \begin{bmatrix} 3\lambda + 2\mu \\ 3\lambda + 2\mu \\ 3\lambda + 2\mu \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} |S| = \pm \begin{bmatrix} E/(1-2\nu) \\ E/(1-2\nu) \\ E/(1-2\nu) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} |S| = \pm \begin{bmatrix} C_{11} + 2C_{12} \\ C_{11} + 2C_{12} \\ C_{11} + 2C_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} |S|$$

Definendo $K = \frac{C_{11} + 2C_{12}}{3}$ come Modulo di Elasticità di Volume

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \pm 3 \text{Is} \begin{bmatrix} K \\ K \\ K \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \pm \frac{dV_0' - dV_0}{dV_0} \begin{bmatrix} K \\ K \\ K \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il modulo di elasticità di volume moltiplicato per la variazione di volume percentuale fornisce la tensora di Stress.

LEGGE DI HOOKE IN PRESENZA DI DILATAZIONI TERMICHE

La variazione relativa di volume dovuta a cause termiche può essere espressa come:

$$\frac{dV_0' - dV_0}{dV_0} = \alpha (\gamma - \gamma_0)$$

α : coefficiente di dilatazione termica

$\gamma - \gamma_0$: salto termico

T^j componente del tensore di stress dovuta alla dilatazione termica

$$T^j = \begin{bmatrix} K\alpha(\gamma - \gamma_0) \\ K\alpha(\gamma - \gamma_0) \\ K\alpha(\gamma - \gamma_0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha(\gamma - \gamma_0) \begin{bmatrix} K \\ K \\ K \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K\alpha(\gamma - \gamma_0) \\ K\alpha(\gamma - \gamma_0) \\ K\alpha(\gamma - \gamma_0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Componente elastica

Componente Termica

$$T = c : S + T^j \quad (\text{Relazione di Duhamel - Neumann})$$

$$\text{con } T^j = K\alpha I (\gamma - \gamma_0)$$

2^a equazione del moto si modifica secondo:

$$\nabla \cdot T = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F_{\text{ext}}$$

$$\nabla \cdot (c : \nabla_s u + T^s) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F_{\text{ext}}$$

$$\nabla \cdot c : \nabla_s u + \nabla \cdot (K \alpha I(\gamma, \gamma_0)) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F_{\text{ext}}$$

$$\nabla \cdot c : \nabla_s u + K \alpha \nabla \gamma = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F_{\text{ext}}$$

In assenza di forze gravitazionali e campi elettromagnetici, possiamo trascurare F_{ext} :

$$\nabla \cdot c : \nabla_s u + K \alpha \nabla \gamma = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Risulta allora da scrittura dell'equazione sopra onde o equazione di D'Alembert:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = K \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Dimostrazione: $\nabla \cdot (K \alpha I(\gamma, \gamma_0)) = K \alpha \nabla \gamma$

$$\nabla \cdot (K \alpha I \gamma) + \nabla \cdot (K \alpha I \gamma_0) = \nabla \cdot (K \alpha I \gamma)$$

$$\gamma_0 = \text{cost}$$

La divergenza di $I \cdot f(x, y, z)$ è uguale al gradiente di $f(x, y, z)$

$$\nabla \cdot I f = \nabla f$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dy} \\ \frac{d}{dz} \end{bmatrix} f(x, y, z)$$

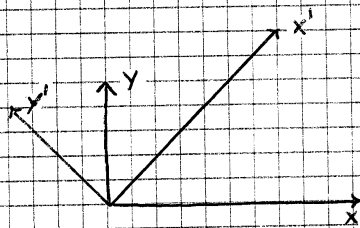
$$\nabla \cdot (K \alpha I \gamma) = K \alpha \nabla \gamma$$

$$\nabla \cdot c : \nabla_s u - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -K \alpha \nabla \gamma$$

$-K \alpha \nabla \gamma$ è la termine forzante dell'equazione delle onde, se γ è funzione del punto e del tempo.

Il moto è quindi determinato da un gradiente di temperatura.

Ci si pone adesso il problema di trovare la matrice che, a seguito di una trasformazione del sistema di riferimento, trasformi i vettori a 6 componenti S_i (di ordine) e T_i (di ordine) e di conseguenza, tramite la legge di Hooke espressa in forma ridotta, la matrice da righe e da colonne.



$$a_{xx} = \cos(\theta_{x'})$$

Per un vettore: $U' = a \cdot U$

Per una matrice: $S' = a S a^T$

$$T' = a T a^T$$

$$\begin{cases} S'_k = N_{kj} S_j \\ T'_i = K_{ij} T_j \end{cases}$$

$N_{k,j}, K_{ij}$: matrici 6×6 ,

sono le matrici di Born

che trasformano, rispettivamente,

S in S' e T in T' .

Queste due matrici mi consentono di operare una trasformazione senza passare dai tensori.

Legge di Hooke:

$$T = c \cdot S$$

$$T' = K T = K c S$$

$$S' = N \cdot S \rightarrow S = N^{-1} S'$$

$$T' = K c N^{-1} S' \quad \text{da cui risulta: } \begin{cases} c' = K c N^{-1} \\ s' = N s K^{-1} \end{cases}$$

Per la proprietà delle matrici di Born, per cui:

$$\begin{cases} N^{-1} = H^T \\ H^T = N^{-1} \end{cases}$$

risulta:

$$c' = H c H^T$$

$$s' = N s H^T$$

La matrice delle rigidezze e quella delle compliance dipendono dall'orientamento del sistema di riferimento \rightarrow il rapporto tra T ed S non è costante nello spazio.

ENERGIA DI DEFORMAZIONE

Si consideri un corpo di volume V_0 che subisce una deformazione ed è conseguentemente sede di un campo di stress.

Calcoliamo la densità volumetrica di lavoro δW_v compiuto dalle forze di stress $\nabla \cdot T$ quando si ha uno spostamento del tutto derivato dalla deformazione.

$$\delta W_v = (\nabla \cdot T) \cdot \delta u$$

$$\int_{V_0} \delta W_v dV_0 = \int_{V_0} (\nabla \cdot T) \cdot \delta u dV_0$$

Utilizzando la seguente identità:

$$\nabla \cdot (A^T v) = (\nabla \cdot A) \cdot v + A : \nabla v$$

dove A è un tensore simmetrico ($A^T = A$) e v è un vettore.

$$(\nabla \cdot A) \cdot v = \nabla \cdot (A v) - A : \nabla v$$

$$\int_{V_0} \delta W_v dV_0 = \int_{V_0} (\nabla \cdot T) \cdot \delta u dV_0$$

$$= \int_{V_0} \nabla \cdot (T \delta u) dV_0 - \int_{V_0} T : \delta \nabla u dV_0$$

Per un sistema a corpo divergente:

$$\int_{V_{ce}} \nabla \cdot (T \delta u) \, dV_{ce} = \int_{S_{sup}} (T \delta u) \cdot \hat{n} \, dS_{sup}$$

$$\int_{V_{ce}} \delta W_r \, dV_{ce} = \int_{S_{sup}} (T \delta u) \cdot \hat{n} \, dS_{sup} - \int_{V_{ce}} T : \delta \nabla u \, dV_{ce}$$

Da noti dell'arbitrarietà della superficie di integrazione che può essere scelta a distanza dai corpi che assenti d'ammassarsi di T o di essa risultata:

$$\int_{S_{sup}} (T \delta u) \cdot \hat{n} \, dS_{sup} = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{V_{ce}} \delta W_r \, dV_{ce} &= - \int_{V_{ce}} T : \delta \nabla u \, dV_{ce} = - \int_{V_{ce}} T : \delta \nabla_s u \, dV_{ce} \\ &= - \int_{V_{ce}} T : \delta S \, dV_{ce} \end{aligned}$$

$$\delta W_r = - T : \delta S = - \text{tr} (S S^T T) = - \text{tr} (T S S)$$

$$|\delta W_r| = T : \delta S = \text{tr} (S S^T T) = \text{tr} (T S S)$$

$$\delta W_r = - T_{ij} \delta S_{ij} = - T_x \delta S_x$$

$$|\delta W_r| = T_{ij} \delta S_{ij} = T_x \delta S_x$$

Da presenza di vettore di stress e strain ai insieme la densità volumetrica di energia dovuta alla deformazione.

MODELLI TERMODINAMICI DI SENSORI E MICRO SISTEMI

TERMODINAMICA DEI SOLIDI

La differenziale di un campo vettoriale è un' applicazione lineare che si dice:

- esatta se il campo vettoriale ad esso associato è conservativo (d);

- inesatta se il campo vettoriale ad esso associato non è conservativo (δ).

Una forma differenziale esatta può essere considerata funzione di n variabili P per cui risulta:

$$dF = P_1(x_1, \dots, x_m) dx_1 + P_2(x_1, \dots, x_m) dx_2 + \dots + P_m(x_1, \dots, x_m)$$

$$\text{con } P_1(x_1, \dots, x_m) = \partial F / \partial x_1$$

$$P_2(x_1, \dots, x_m) = \partial F / \partial x_2$$

...

$$P_m(x_1, \dots, x_m) = \partial F / \partial x_m$$

Da sistemi fisici privi di perdite vale il 1° principio della termodinamica per cui:

$$dU + \delta W = \delta Q$$

Attraverso il secondo principio della termodinamica:

ca:

$$\delta Q = T \delta s$$

$$\rightarrow dU + \delta W = T \delta s$$

$$dU = T \delta s - \delta W$$

U : energia interna del sistema

Q : calore

W : lavoro

T : temperatura assoluta

s : entropia.

ESPRESSIONI PER δW

SOLIDO DEFORMABILE DI VOLUME UNITARIO E COSTANTE,
SOTTOPOSTO A CAMPO ELETTROMAGNETICO

Vettori di:

- Stress T_i ;
- Strain S_i ;
- Campo elettrico E_i ;
- Campo magnetico H_i ;
- Induzione elettrica D_i ;
- Induzione magnetica B_i

$$\delta W = - T_i dS_i - E_i dD_i - H_i dB_i$$

$T_i dS_i$: lavoro speso di deformazione.

$E_i dD_i$: lavoro elettrico

$H_i dB_i$: lavoro magnetico

$$dU = \delta Q - \delta W = T d\mathcal{S} + T_i dS_i + E_i dD_i + H_i dB_i$$

Essendo dU una forma differenziale esatta

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial x_m} dx_m \quad \text{con } U = U(x_1, \dots, x_m)$$

E scegliendo come variabili indipendenti

\mathcal{S} , S_i , D_i e B_i risulta:

$$T = \left. \frac{\partial U}{\partial \mathcal{S}} \right|_{S_i, D_i, B_i}$$

$$T_i = \left. \frac{\partial U}{\partial S_i} \right|_{\mathcal{S}, D_i, B_i}$$

$$E_i = \left. \frac{\partial U}{\partial D_i} \right|_{\mathcal{S}, S_i, B_i}$$

$$H_i = \left. \frac{\partial U}{\partial B_i} \right|_{\mathcal{S}, S_i, D_i}$$

Se fosse conveniente avere T e non \mathcal{S} come
variabile indipendente si dovrebbe scegliere un'
espressione dell'energia contenente il
termine $\mathcal{S} dT$

La quantità $F = U - TS'$ è detta Energia Libera di Helmholtz

$$dF = dU - TdS' - S'dT = -dW - S'dT$$

$$dF = Tz dS_z + E_i dD_i + H_i dB_i - S'dT$$

$$\text{con } S' = \frac{\partial F}{\partial T} \Big|_{S, D, B}$$

SISTEMA APERTO RIGIDO

On questo sistema non si ha lavoro dovuto alle deformazioni e quindi risulta:

$$dW = PdV_{el} - \mu dN - VdQ$$

con PdV_{el} è indicato il lavoro meccanico

P : pressione

V_{el} : volume

Q : carica elettrica

V : potenziale

VdQ indica il lavoro elettrico

N : numero di particelle

μ : potenziale chimico

μdN indica il lavoro chimico

$$Q = zqN$$

z : valenza

$$\begin{aligned} \rightarrow dW &= PdV_{el} - \mu dN - Vqz dN = PdV_{el} - (\mu + zqV) dN \\ &= PdV_{el} - \bar{\mu} dN \end{aligned}$$

$$\bar{\mu}: \text{Potenziale elettrochimico}, \quad \bar{\mu} = \mu + zqV$$

$$\text{Se i portatori sono elettroni: } \bar{\mu} = \mu - qV$$

$$dF = -dW - S'dT = -PdV_{el} + \bar{\mu} dN - S'dT$$

$$\text{con } \bar{\mu} = \frac{\partial F}{\partial N} \Big|_{V_{el}, T}$$

SISTEMA ELETTROMECCANICO CON ATTUAZIONE ELETTRICA

$$dW_e = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lavoro meccanico}}}{f_e dx} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lavoro elettrico}}}{VdQ}$$

La forza f_e è una forza interna al sistema di origine elettrica che agisce su un componente meccanico provocandone lo spostamento dx

$$dU = dQ - dW_e = TdS - f_e dx + VdQ$$

$$dF = -dW_e - SdT = -f_e dx + VdQ - SdT$$

La f_e si ricava da:

$$f_e = - \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{Q, T} = \left. \frac{\partial W_e}{\partial x} \right|_Q$$

Se necessitiamo come variabile indipendente V e non Q :

$$F' = F - QV = U - TS - QV$$

$$\begin{aligned} dF' &= dU - dTS - TdS - dQV - QdV \\ &= \cancel{TdS} - f_e dx + \cancel{VdQ} - \cancel{dT} - \cancel{TdS} - \cancel{dQV} - QdV \\ &= -f_e dx - SdT - QdV \end{aligned}$$

Si definisce COENERGIA $U' = QV - U$

$$F' = -U' - TS$$

$$\begin{aligned} dU' &= -dF' - SdT - TdS \\ &= f_e dx + SdT + QdV - SdT - TdS \\ &= \underbrace{QdV + f_e dx}_{\text{variazione elettromeccanica}} - \underbrace{TdS}_{\text{variazione termica}} \end{aligned}$$

$$f_e = - \left. \frac{\partial F'}{\partial x} \right|_{V, T} = \left. \frac{\partial U'}{\partial x} \right|_{V, S} = \left. \frac{\partial U'}{\partial x} \right|_V$$

$$dU_e = QdV + f_e dx$$

nel caso di combacchio la coenergia $U' = U'(x, V)$ meo
 calcolo dalla forza dobbiamo calcolare:

$$f_e = \frac{\partial U'}{\partial x} \Big|_{V, \mathcal{I}}$$

nel caso di combacchio di energia $U = U(x, Q)$ meo
 calcolo dalla forza dobbiamo calcolare:

$$f_e = \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{Q, \mathcal{I}}$$

SISTEMA ELETTROMECCANICO CON ATTUAZIONE MAGNETICA

$$dW_m = \underbrace{f_m dx}_{\text{lavoro meccanico}} - \underbrace{i d\phi}_{\text{lavoro magnetico}}$$

La forza f_m è una forza interna al sistema di
 origine magnetica che agisce su un componente
 meccanico per spostarlo da x a $x + dx$

$$dU = dQ - dW_m = T d\mathcal{I} - f_m dx + i d\phi$$

$$dF = -dW_m - \mathcal{I} d\mathcal{I} = -f_m dx + i d\phi - \mathcal{I} d\mathcal{I}$$

$$f_m = - \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{\phi, \mathcal{I}} = \frac{\partial W_m}{\partial x} \Big|_{\phi}$$

Se vogliamo come variabile indipendente x e non
 ϕ :

$$F' = F - i\phi = U - T\mathcal{I} - i\phi$$

$$dF' = dU - T d\mathcal{I} - \mathcal{I} dT - i d\phi - \phi di$$

$$= T d\mathcal{I} - f_m dx + i d\phi - T d\mathcal{I} - \mathcal{I} dT - i d\phi - \phi di$$

$$= -f_m dx - \mathcal{I} dT - \phi di$$

Si definisce COENERGIA $U' = i\phi - U$

$$F' = -U' - T\mathcal{I}$$

$$dU' = -dF' - \mathcal{I} d\mathcal{I} - T d\mathcal{I}$$

$$= f_m dx + \mathcal{I} d\mathcal{I} + \phi di - \mathcal{I} d\mathcal{I} - T d\mathcal{I}$$

$$= \phi di + f_m dx - T d\mathcal{I}$$

$$dU'_m = \phi di + f_m dx$$

$$j_m = \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{i, \phi} \quad \text{e campo } U = U(x, i)$$

$$j_m = -\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{\phi, i} \quad \text{e campo } U = U(x, \phi)$$

TENSORE DI STRESS DI MAXWELL

Si consideri un campo elettrico \vec{E} che agisce su una media continua contenente cariche elettriche q con densità ρ .

Forza che agisce su una singola carica: $F = q \cdot E$

Densità di forza: $f = \rho \cdot E$

Legge di Gauss: $\nabla \cdot D = \rho = \nabla \cdot \epsilon E$

$$\rightarrow f = (\nabla \cdot \epsilon E) E$$

Per un sistema esclusivamente elettrico $\nabla \times E = 0$

$$\rightarrow f = (\nabla \cdot \epsilon E) E + \underbrace{(\nabla \times E) \times E}_{=0}$$

Consideriamo l'identità vettoriale:

$$(\nabla \times \vec{\psi}) \times \vec{\psi} = (\vec{\psi} \cdot \nabla) \vec{\psi} - \frac{1}{2} \nabla (\vec{\psi} \cdot \vec{\psi})$$

$$f = \underbrace{(\nabla \cdot \epsilon E) E}_{\text{Termine 1}} + \underbrace{\epsilon (E \cdot \nabla) E - \frac{\epsilon}{2} \nabla (E \cdot E)}_{\text{Termine 2}}$$

Consideriamo il Termine 1 e calcoliamo esplicitamente la componente lungo x :

$$f_x^{\diamond} = \epsilon \left(\frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z \right) E_x + \epsilon \left(E_x \frac{\partial}{\partial x} + E_y \frac{\partial}{\partial y} + E_z \frac{\partial}{\partial z} \right) E_x$$

$$= \epsilon \left[\frac{\partial}{\partial x} (E_x E_x) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) \right]$$

$$\uparrow$$

$$E_x \frac{\partial}{\partial y} E_y + E_y \frac{\partial}{\partial y} E_x = \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y)$$

analogamente per f_y^{\diamond} e f_z^{\diamond} .

$$f^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \epsilon \begin{bmatrix} E_x E_x & E_x E_y & E_x E_z \\ E_x E_y & E_y E_y & E_y E_z \\ E_x E_z & E_y E_z & E_z E_z \end{bmatrix} = \nabla \cdot \epsilon (E \otimes E)$$

Consideriamo la termine 2 e calcoliamo separatamente la componente lungo x:

$$f_x^0 = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial}{\partial x} (E_x E_x + E_y E_y + E_z E_z)$$

$$f^0 = \frac{1}{2} \epsilon \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (E_x E_x + E_y E_y + E_z E_z) = \frac{1}{2} \nabla \cdot I \epsilon (E \cdot E)$$

Per cui risulta:

$$f = f^0 + f^a = \nabla \cdot \left\{ \epsilon \left[(E \otimes E) - \frac{1}{2} I (E \cdot E) \right] \right\}$$

La densità di forza può essere ottenuta come divergenza del termine entro parentesi grappe che è un tensore del 2° ordine le cui componenti si chiama di tensore di Maxwell T_M .

F: forza totale

$$F = \int_{Vol} \nabla \cdot T_M dVol = \int_{Sup} T_M \cdot \hat{n} dSup$$

TENSORE DI MAXWELL IN NOTAZIONE RIDOTTA

$$T_M = \left\{ \epsilon \left[(E \otimes E) - \frac{1}{2} I (E \cdot E) \right] \right\} \quad \text{è un tensore simmetrico}$$

$$T_M = \epsilon \left\{ \begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} E_x E_x \\ E_y E_y \\ E_z E_z \\ E_x E_z \\ E_x E_y \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \emptyset \\ \emptyset \end{matrix} & \begin{matrix} (E_x E_x + E_y E_y + E_z E_z) \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} E_y E_z \\ E_x E_z \\ E_x E_y \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 2 \\ \emptyset \end{matrix} & \end{array} \right\}$$

In notazione ridotta $f = \nabla \cdot T_M$:

$$f = \epsilon \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \emptyset & \frac{\partial}{\partial y} & \emptyset & \frac{\partial}{\partial z} & \emptyset & \frac{\partial}{\partial x} \\ \emptyset & \emptyset & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 (E_x E_x - E_y E_y - E_z E_z) \\ 1/2 (-E_x E_x + E_y E_y - E_z E_z) \\ 1/2 (-E_x E_x - E_y E_y + E_z E_z) \\ E_y E_z \\ E_x E_z \\ E_x E_y \end{bmatrix}$$

ELETTROMECCANICA A PARAMETRI CONCENTRATI

PARAMETRI CONCENTRATI

Un sistema a parametri concentrati è costituito da un numero finito di elementi ciascuno dei quali è caratterizzato da una o più proprietà fisiche e privo di tutte le altre proprietà fisiche proprie di elementi di un altro tipo.

Un esempio di schematizzazione di un sistema fisico con elementi discreti è data da:

$$\lambda = c \cdot T = c \cdot \frac{2\pi}{\omega} \gg l \rightarrow \frac{fl}{c} \ll 1$$

λ : lunghezza d'onda

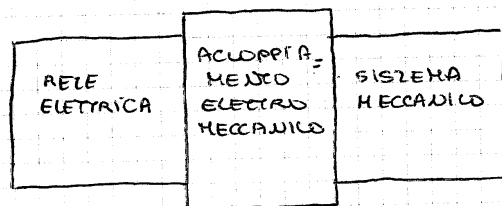
c : velocità della propagazione ondosa

T : periodo

l : lunghezza geometrica del sistema.

nel campo di validità dell'approssimazione a parametri concentrati un sistema elettromeccanico potrà essere trattato:

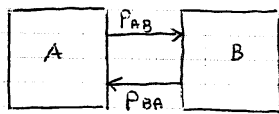
- per quanto riguarda la parte elettrica per mezzo della usuale teoria dei circuiti
- per quanto riguarda la parte meccanica con la teoria del corpo rigido includendo un'opportuna schematizzazione per gli elementi elastici e la parte elettromeccanica.



Equazioni di Kirchhoff.

Equazioni di Newton.
legge di continuità dello spazio.

VARIABILI CONIUGATE IN POTENZA



$$P_{AB}, P_{BA} > 0$$

$$P_{AB} = v_1^2$$

$$P_{BA} = v_2^2$$

$$P = P_{AB} - P_{BA} = v_1^2 - v_2^2 = (v_1 + v_2)(v_1 - v_2)$$

$$e(t) = v_1 + v_2 \quad ; \quad \text{tensione generalizzata}$$

$$f(t) = v_1 - v_2 \quad ; \quad \text{flusso generalizzato}$$

Si definisce inoltre:

$$p(t) = \int e(t) dt \quad ; \quad \text{momento generalizzato}$$

$$q(t) = \int f(t) dt \quad ; \quad \text{spostamento generalizzato}$$

Per un sistema elettrico:

$$e(t) = \text{tensione } U$$

$$f(t) = \text{corrente } i$$

$$p(t) = \quad /$$

$$q(t) = \text{carica } q$$

Per un sistema meccanico in rotazione:

$$e(t) = \text{torque } \mathcal{F}$$

$$f(t) = \text{velocità } U_{\omega}$$

$$p(t) = \text{momento } p$$

$$q(t) = \text{spostamento } \theta$$

Se la funzione $q(v)$ è lineare possiamo indicarla con $C(x)$ la proporzionalità:

$$q = C(x) \cdot v$$

$$\dot{e} = C(x) \cdot \frac{dv}{dt} + v \cdot \frac{dC(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Contributo della corrente a causa del moto di uno dei corpi con velocità dx/dt .

Per un sistema elettromeccanico con situazione elettrica:

$$dW_e = -f_e dx + v(q) dq \quad \text{trascuotendo il contributo termico}$$

In caso di rotazione di spostamento $dx = \delta$

$$dW_e = v(q) dq = \frac{q(v)}{C(x)} \cdot dq$$

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C(x)}$$

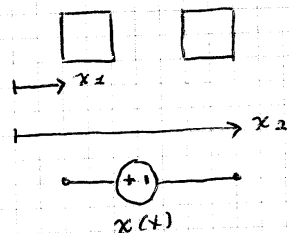
$$dW_e' = q(v) dv + f_e dx = q(v) dv = C(x) v dv$$

$$W_e' = \frac{1}{2} C(x) v^2$$

ELEMENTI CIRCUITALI GENERALIZZATI - SISTEMA MECCANICO

Sorgenti:

Si considerino due corpi separati, che identifichiamo con due nodi meccanici, in posizione x_1, x_2 .



Si definisce sorgente di spostamento un elemento che impone il seguente vincolo

meccanico : $x(t) = x_1 - x_2$

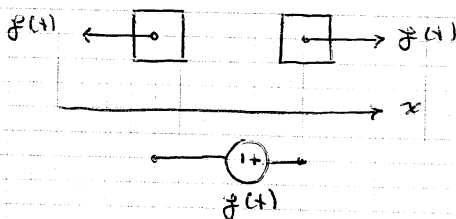
Una sorgente di spostamento non specifica la quantità di forza che può fornire che pertanto è qualsiasi.

Si definisce sorgente di velocità : $v(t) = \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}$



Infatti essa non specifica la forza applicata.

La sorgente di forza applica a due nodi una coppia di forze $f(t)$ dirette lungo l'asse x e considerate positive se tendono a avvicinare i nodi.



Essa non specifica spostamento / velocità tra i nodi cui la forza è applicata.

LA MOLLA IDEALE

È definita come un sistema privo di massa e non dissipativo la cui deformazione è una funzione ad un estremo della forza ai suoi capi.

Per una molla lineare vale la legge: $f = -k \cdot \Delta l$

Δl : variazione di lunghezza della molla

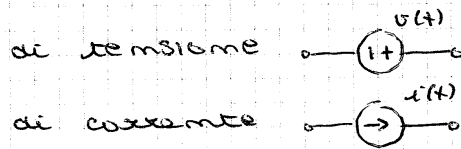
l : lunghezza della molla a riposo

k : rigidità della molla.

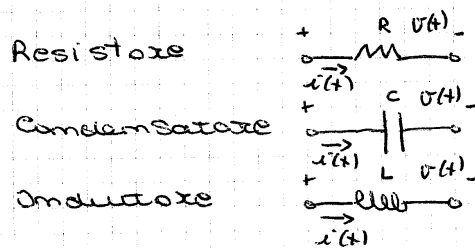
La molla è in grado di accumulare energia potenziale elastica.

ELEMENTI CIRCUITALI GENERALIZZATI - RETI ELETTRICHE

Sorgenti :



Elementi circuitali :



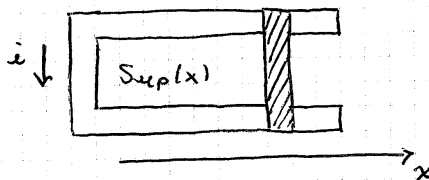
Le sorgenti e l'elemento dissipativo non necessitano di generalizzazioni.

Gli elementi circuitali che immagazzinano energia devono essere generalizzati per affermata la presenza di parti in movimento.

INDUTTANZA GENERALIZZATA

Consideriamo una opista che costituisca una identità di flusso magnetico B (provocato dalla corrente i che scorre nella opista).

La opista contiene una parte mobile lungo l'asse x .



$$\phi(i, x) = \int_{sup} B(i) \cdot n \, dS_{sup}$$

$$v = \frac{d}{dt} \phi(i, x) \quad \text{tensione indotta nella opista.}$$

$$= \frac{d\phi}{di} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{d\phi}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Se la funzione $B(i)$ è lineare, possiamo indicata con $L(x)$ la proporzionalità tra ϕ ed i :

$$\phi(i, x) = L(x) \cdot i$$

$$\rightarrow v = L(x) \cdot \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Contributo alla tensione indotta a causa del moto di una parte dello spiro, con velocità dx/dt .

Per un sistema elettromeccanico con attuazione magnetica:

$$dW_m = -f_m dx + i(\phi) d\phi \quad \text{secondo il contenzione termico}$$

In caso di relazione di spostamento $dx = \lambda$

$$dW_m = i(\phi) d\phi = \frac{\phi(i)}{L(x)} di$$

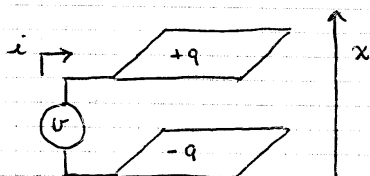
$$W_m = \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{L(x)}$$

$$dW_m' = \phi(i) di + f_m dx = \phi(i) di = L(x) \cdot i di$$

$$W_m' = \frac{1}{2} L(x) i^2$$

CAPACITÀ GENERALIZZATA

Si considerino due corpi equipotenziali alimentati da una tensione v . Uno dei due corpi può subire uno spostamento lungo un'asse x .



$$i = \frac{dq}{dt} q(v, x)$$

$$i = \frac{dq}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{dq}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Per sistemi elettromeccanici con attuazione elettrica, in cui si trascura il contributo della temperatura e si suppone assenza di variazione di carica:

$$dU = -f_e dx = kx dx$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2$$

Se si confronta con l'espressione dell'energia di una capacità generalizzata:

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C(\varphi)}$$

si osserva che le due espressioni hanno la stessa struttura.

Identificando come spostamenti generalizzati le quantità x e q , la molla ideale, dal punto di vista circuitale, può essere assimilata equivalentemente ad una capacità di valore $1/k$.

$\frac{1}{k}$: Complesso della molla.

LA MASSA IDEALE

Si tratta di un elemento indifferenziale e non dissipativo che è in grado di accumulare energia cinetica.

La relazione tra le variabili meccaniche forza e spostamento è data da:

$$f = m \cdot \frac{d}{dt} x$$

$$\text{Se } p = m \cdot v = m \cdot \frac{d}{dt} x$$

$$\rightarrow f = m \cdot \frac{d}{dt} p$$

Per sistemi elettromeccanici con attuazione elettrica, in cui si trascura il contributo della temperatura e si suppone assenza di variazione di carica:

$$dU = -f dx = m \frac{d^2}{dt^2} x \cdot dx$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{d^2}{dt^2} x$$

$$\rightarrow dU = \frac{1}{2} m \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \cdot dx$$

$$U = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m}$$

Se si confronta con l'espressione dell'energia di un'induttanza generalizzata:

$$U_m = \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{L(p)}$$

Com'è da aspettarsi, conviene identificare p con ϕ e m con L .

Da questo punto di vista meccanico, la molla può essere assunta tale ad un'induttanza di valore m .

SMORZATORE IDEALE VISCOLO

Si tratta di un elemento puramente dissipativo e pertanto rigido e pieno di massa un grado di libertà una forza in funzione della velocità relativa di due nodi.

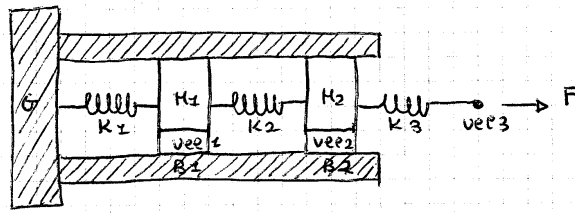
$$f = f(v_{rel})$$

Per uno smorzatore lineare risulta:

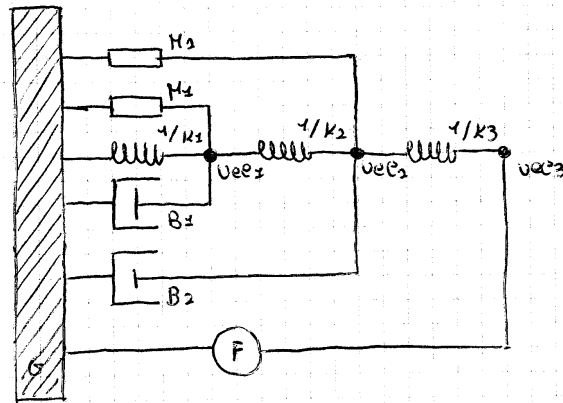
$$f = B \cdot \frac{d}{dt} (x_2 - x_1)$$

l'equivalente elettrico dello smorzatore è il resistore.

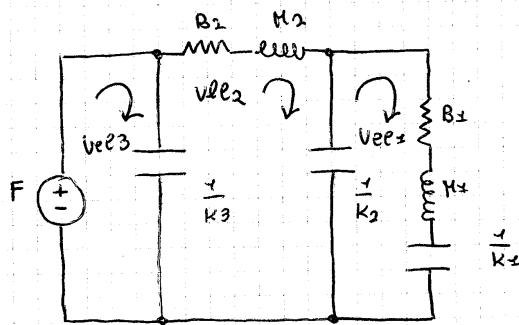
CIRCUITO EQUIVALENTE DI UN SISTEMA MECCANICO



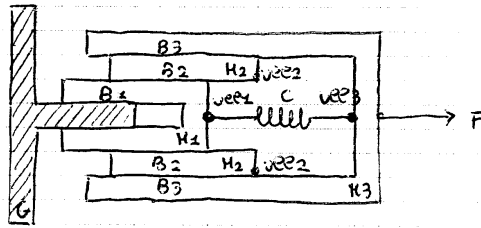
Circuito meccanico funzionale



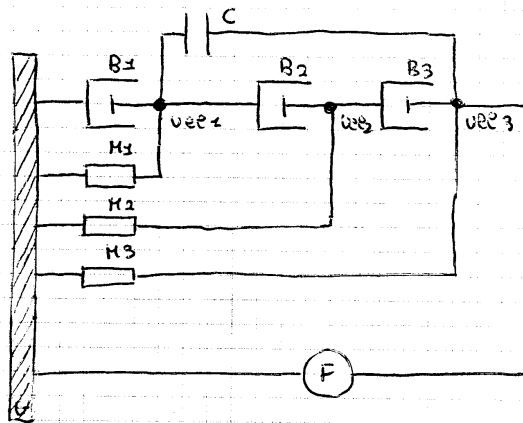
Circuito elettrico equivalente



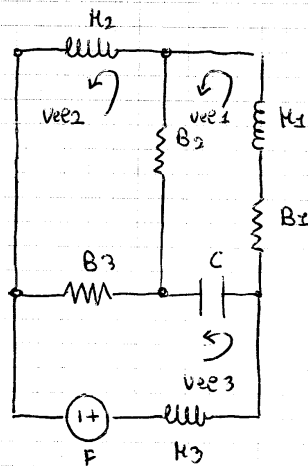
$$\begin{bmatrix}
 (B_1 + j\omega M_1 + \frac{K_1}{j\omega} + \frac{K_2}{j\omega}) & -\frac{K_2}{j\omega} & \phi \\
 -\frac{K_2}{j\omega} & (B_2 + j\omega M_2 + \frac{K_2}{j\omega} + \frac{K_3}{j\omega}) & -\frac{K_3}{j\omega} \\
 \phi & -\frac{K_3}{j\omega} & \frac{K_3}{j\omega}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 v_{ee1} \\
 v_{ee2} \\
 v_{ee3}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \phi \\
 \phi \\
 F
 \end{bmatrix}$$



Circuito meccanico funzionale

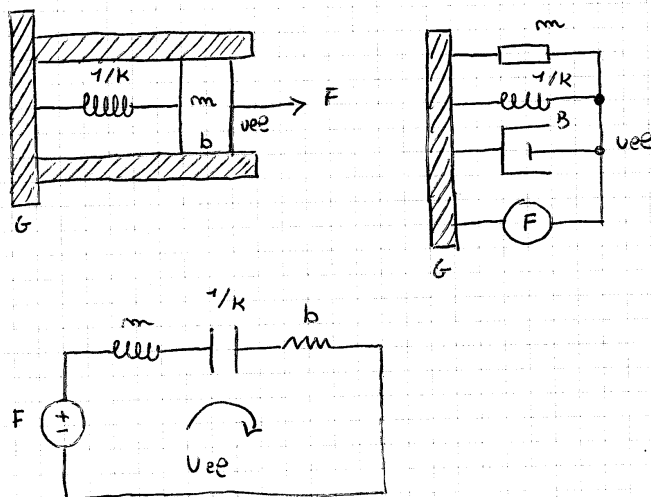


Circuito elettrico equivalente



$$\begin{bmatrix} (B_1 + \omega W H_1 + B_2 + \frac{K}{\omega}) & -B_2 & -\frac{K}{\omega} \\ -B_2 & (B_2 + \omega W H_2 + B_3) & -B_3 \\ -\frac{K}{\omega} & -B_3 & (\omega W H_3 + \frac{K}{\omega} + B_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ee1} \\ v_{ee2} \\ v_{ee3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \phi \\ F \end{bmatrix}$$

DINAMICA DI UN SISTEMA DEL SECONDO ORDINE
SISTEMA MASSA - MOLLA - SMORZATORE



$$\frac{v_{ee}}{F}(s) = \frac{1}{sm + b + \frac{K}{s}} = \frac{s}{ms^2 + bs + K}$$

$$ms^2 + bs + K = 0$$

$$s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{K}{m} = 0$$

$$\alpha = \frac{b}{2m} : \text{coefficiente di smorzamento}$$

$$\frac{K}{m} = \omega_0^2 \Rightarrow \omega_0 : \text{pulsazione di risonanza}$$

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0 \rightarrow s_{1/2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \frac{1}{2m} (-b + \sqrt{b^2 - 4mk}) = \omega_0 \left(-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \right)$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \frac{1}{2m} (-b - \sqrt{b^2 - 4mk}) = \omega_0 \left(-\frac{1}{2Q} - \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \right)$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\sqrt{km}}{b} : \text{fattore di qualità}$$

CIRCUITO EQUIVALENTE DI UN SISTEMA ELETTROMECCANICO

Per un sistema massa - molla - smorzatore:

$$\frac{V_{ee}(s)}{F} = \frac{S}{ms^2 + bs + k}$$

$$(ms^2 + bs + k) \cdot \frac{V_{ee}(s)}{S} = F(s)$$

$$\rightarrow (ms^2 + bs + k) \cdot x(s) = F(s)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + b \frac{d}{dt} x(t) + kx(t) = F(t)$$

È l'equazione del moto del sistema meccanico.

Se la forza è di origine elettrica:

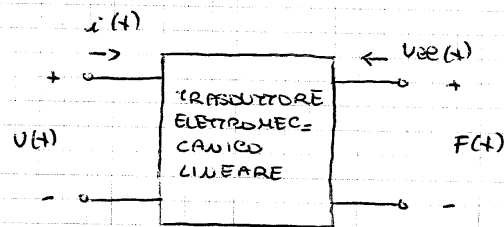
$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + b \frac{d}{dt} x(t) + kx(t) = F(v, t)$$

Le forze elettriche in gioco possono essere di 4 tipi:

- 1) elettrostatiche trasversali;
- 2) elettrostatiche in piano;
- 3) elettromagnetiche;
- 4) elettrodinamiche o a equipaggio mobile.

Limitiamo l'analisi alle forze elettrostatiche.

Schematizzo il sistema come un quadripolo con una porta elettrica ed una meccanica:



$$i(t) = \frac{q}{dt} q(t)$$

$$V_{ee}(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

Il sistema è lineare o linearizzato intorno ad un punto di riposo.

Si studiano piccole oscillazioni un regime sinusoidale permanente intorno al punto di equilibrio e il sistema sarà conservativo (esente da perdite).

$V(t)$ e $F(t)$ sono sollecitazioni esterne che agiscono sul sistema e pertanto il regime di lavoro meccanico introdotto nella trattazione di un sistema elettromeccanico con attuazione elettrica è cambiato:

$$dW_e = \underbrace{(-F) dx}_{\substack{\uparrow \\ \text{Lavoro meccanico} \\ \text{subito}}} - \underbrace{V dq}_{\substack{\uparrow \\ \text{Lavoro elettrico} \\ \text{subito}}}$$

$$dU = -dW_e \quad (\text{trascurando contributo della temperatura})$$

$$= F dx + V dq$$

$$dU = \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|_q dx + \left| \frac{\partial U}{\partial q} \right|_x dq$$

$$F(x, q) = \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|_q ; \quad V(x, q) = \left| \frac{\partial U}{\partial q} \right|_x$$

Equazioni che descrivono il comportamento incrementale intorno al punto di equilibrio (x_0, q_0) :

$$f(x, q) = \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\varphi} x + \left| \frac{\partial F}{\partial q} \right|_{\varphi} q$$

$$v(x, q) = \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{\varphi} x + \left| \frac{\partial V}{\partial q} \right|_{\varphi} q$$

Sono le equazioni costitutive del sistema elettromeccanico.

$$\text{con } \left| \frac{\partial F}{\partial q} \right|_{\varphi} = \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{\varphi}$$

$$\begin{bmatrix} f(x,q) \\ v(x,q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| \neq & \left| \frac{\partial F}{\partial q} \right| \neq \\ \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \neq & \left| \frac{\partial v}{\partial q} \right| \neq \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} = [B] \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| \neq & \left| \frac{\partial F}{\partial q} \right| \neq \\ \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \neq & \left| \frac{\partial v}{\partial q} \right| \neq \end{bmatrix}$$

è la matrice
costitutiva

Immettere :

$$\begin{bmatrix} v(x,q) \\ i \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} f(x,q) \\ v_{ee} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} f = B_{11} x + B_{12} q \\ v = B_{21} x + B_{22} q \end{cases}$$

$$q = \frac{f - B_{11} x}{B_{12}}$$

$$v = B_{21} x + B_{22} \cdot \frac{f - B_{11} x}{B_{12}} = B_{21} \cdot \frac{v_{ee}}{\omega} + B_{22} \cdot \frac{f - B_{11} \cdot \frac{v_{ee}}{\omega}}{B_{12}}$$

$$= \frac{B_{22}}{B_{12}} \cdot f + \left(\frac{B_{21}}{\omega} - \frac{B_{22} B_{11}}{\omega B_{12}} \right) \cdot v_{ee}$$

$$i = \omega q = \frac{\omega}{B_{12}} f - \frac{B_{11}}{B_{12}} v_{ee}$$

$$T = \begin{bmatrix} B_{22}/B_{12} & \frac{1}{\omega} \left(B_{21} - \frac{B_{22} B_{11}}{B_{12}} \right) \\ \omega/B_{12} & -B_{11}/B_{12} \end{bmatrix}$$

RETE EQUIVALENTE

È possibile schematizzare la matrice precedente come :

$$\begin{bmatrix} A_E & B_E \\ C_E & D_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/m & \phi \\ \phi & 1/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_M & B_M \\ C_M & D_M \end{bmatrix}$$

Quadrupolo
elettrico

Accoppia-
mento
Elettro-
meccanico

Quadrupolo
meccanico

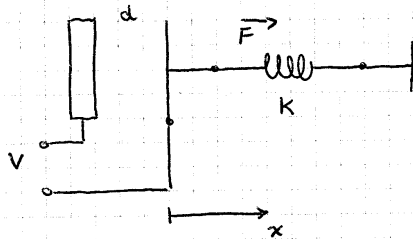
→ Trasformatore ideale.

La fattorizzazione corrisponde alla trasformazione del quadrupolo equivalente in un riduttore elettromeccanico complessivo mediante cascata di 3 quadrupoli :

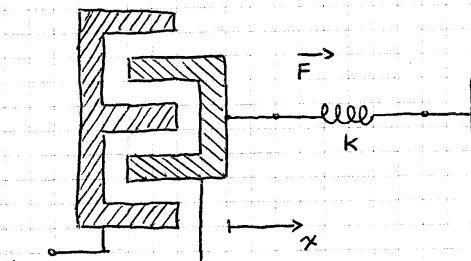
- elettrico ;
- di accoppiamento elettromeccanico ;
- meccanico .

ATTUATORE ELETTROSTATICO

Attuatore elettrostatico trasversale : condensatore a facce piane e parallele.



Attuatore elettrostatico in piano : condensatore interdigitato .



Il sistema, in definitiva, è un condensatore con un'armatura fissa ed una mobile sulla quale agisce una forza elettrostatica.

Le elementi che accumulano energia potenziale sono il condensatore e la molla.

$$U = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C(x)} + U_0 = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} \frac{(d+x) \cdot q^2}{\epsilon A} + U_0$$

$$C(x) = \frac{\epsilon A}{d+x}$$

$$U' = qV - U = qV - \frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{2} \frac{(d+x)}{\epsilon A} \cdot q^2 - U_0$$

$$F(x, q) = \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|_q = kx + \frac{q^2}{2\epsilon A}$$

$$V(x, q) = \left| \frac{\partial U}{\partial q} \right|_x = \frac{d+x}{\epsilon A} \cdot q$$

Punto di riposo $\phi = (x_0, q_0)$

$$f(x, q) = \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right|_x + \left| \frac{\partial F}{\partial q} \right|_q = kx + \frac{q_0}{\epsilon A} \cdot q$$

$$v(x, q) = \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right|_x + \left| \frac{\partial V}{\partial q} \right|_q = \frac{q_0}{\epsilon A} \cdot x + \frac{(d+x_0)}{\epsilon A} \cdot q$$

$$B = \begin{bmatrix} k & q_0/\epsilon A \\ q_0/\epsilon A & (d+x_0)/\epsilon A \end{bmatrix}$$

La matrice costitutiva è simmetrica in quanto il sistema è privo di perdite.

$$T = \begin{bmatrix} \frac{d+x_0}{\epsilon A} \frac{\epsilon A}{q_0} & \frac{1}{j\omega} \left(\frac{q_0}{\epsilon A} - \frac{k(d+x_0)/\epsilon A}{q_0/\epsilon A} \right) \\ j\omega \frac{\epsilon A}{q_0} & -k \frac{\epsilon A}{q_0} \end{bmatrix}$$

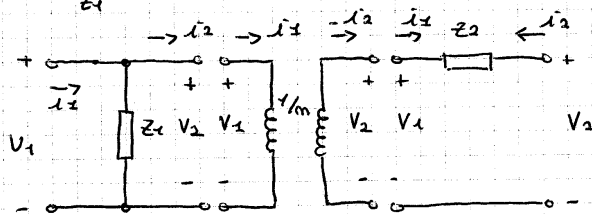
$$= \begin{bmatrix} \frac{d+x_0}{q_0} & \frac{1}{j\omega} \left(\frac{q_0}{\epsilon A} - k \frac{d+x_0}{q_0} \right) \\ j\omega \frac{\epsilon A}{q_0} & -k \frac{\epsilon A}{q_0} \end{bmatrix}$$

$$m = \frac{q_0}{d+x_0} ; C_0 = \frac{\epsilon A}{d+x_0} ; \frac{\epsilon A}{q_0} = \frac{C_0}{m}$$

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & -\frac{1}{j\omega} \left(\frac{k}{m} - \frac{m}{C_0} \right) \\ j\omega \frac{C_0}{m} & -k \frac{C_0}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & -\frac{1}{j\omega m} \left(k - \frac{m^2}{C_0} \right) \\ j\omega \frac{C_0}{m} & -k \frac{C_0}{m} \end{bmatrix}$$

Dalla parametrizzazione in 3 matrici risultata:

$$\begin{bmatrix} 1 & \emptyset \\ \frac{1}{Z_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/m & \emptyset \\ \emptyset & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -Z_2 \\ \emptyset & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/m & (1/m)Z_2 \\ 1/Z_1 m & (Z_2 + Z_1 m^2)/Z_1 m \end{bmatrix}$$



$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C_0} ; Z_2 = \frac{k}{j\omega} \left(1 - \frac{m^2}{C_0 k} \right) = \frac{k}{j\omega} (1 - k^2)$$

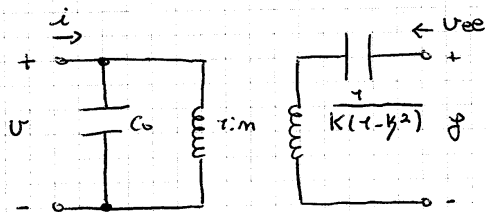
$$k^2 = \frac{m^2}{C_0 k} \quad \text{coefficiente di accoppiamento elettromeccanico}$$

$$m = \frac{q_0}{d + x_0}$$

k^2 può essere ottenuto come prodotto dei termini della diagonale secondaria della matrice B denota il prodotto dei termini della diagonale principale.

$$\begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} f \\ v_{ee} \end{bmatrix}$$

Circuito equivalente:

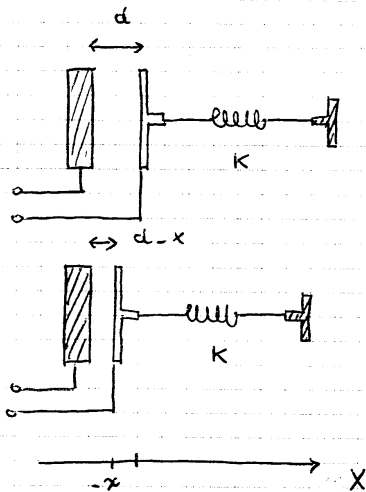


Il generatore di tensione vede una capacità modificata tramite il trasformatore del quadrupolo meccanico.

La molla che vede la forza applicata al quadrupolo meccanico, ha una rigidezza ridotta di un fattore $(1 - k^2)$

ATTUATORE A PIATTI PIANI

Attuatore con condensatore a piatte piane e parallele



ALIMENTAZIONE IN CARICA

La variabile indipendente è la carica.

$$U = \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C(x)} + U_0 = \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} \frac{(d+x)}{\epsilon A} \cdot q^2 + U_0$$

$$F(x, q) = \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|_q = Kx + \frac{q^2}{2\epsilon A}$$

$$V(x, q) = \left| \frac{\partial U}{\partial q} \right|_x = \frac{(d+x)}{\epsilon A} \cdot q$$

In condizioni di equilibrio: $F(x, q) = 0$

$$Kx + \frac{q^2}{2\epsilon A} = 0 \rightarrow x = -\frac{q^2}{2\epsilon KA} \quad \text{posizione di equilibrio}$$

$x < 0$: questo significa che l'armatura mobile si sposta avvicinandosi a quella fissa.

Risulta che la distanza tra i piatti varia:

$$d' = d + x = d - \frac{q^2}{2\epsilon KA}$$

Se $q \uparrow \Rightarrow x \downarrow \Rightarrow d' \downarrow$

$$d' = 0 \text{ per } q = q_{lim} \text{ con } q_{lim} = \sqrt{2\epsilon KA d}$$

q_{lim} è la carica per cui le armature si toccano.

Da notare che:

- $x \propto q^2$
- $x \neq d$

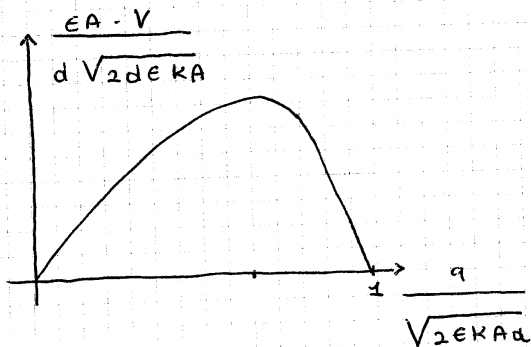
$$V(x, q) = \frac{(d+x)}{\epsilon A} \cdot q = \frac{q}{\epsilon A} \left(d - \frac{q^2}{2\epsilon K A} \right)$$

$$\frac{V(x, q)}{\sqrt{2\epsilon K A d}} = \frac{q}{\epsilon A \sqrt{2\epsilon K A d}} \cdot \left(d - \frac{q^2}{2\epsilon K A} \right)$$

$$\frac{V(x, q)}{d \sqrt{2\epsilon K A d}} = \frac{q}{\epsilon A \sqrt{2\epsilon K A d}} \cdot \left(1 - \frac{q^2}{2\epsilon K A d} \right)$$

$$\frac{\epsilon A}{d \sqrt{2\epsilon K A d}} \cdot V(x, q) = \frac{q}{\sqrt{2\epsilon K A d}} \cdot \left(1 - \frac{q^2}{2\epsilon K A d} \right)$$

Potenziale normalizzato in funzione della carica normalizzata e quella limite.



Calcolo della massima tensione tra i piatti:

$$\frac{dV}{dq} = 0 \rightarrow \frac{1}{\epsilon A} \left(d - \frac{q^2}{2\epsilon K A} \right) - \frac{q}{\epsilon A} \cdot \frac{q}{\epsilon K A} = \frac{d}{\epsilon A} - \frac{3q^2}{2\epsilon^2 K A^2} = 0$$

$$\text{Risulta } q = \sqrt{\frac{2\epsilon K A d}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} q_{\text{lim}} = 0,577 \cdot q_{\text{lim}}$$

$$V_{\text{max}} = \frac{q_{\text{lim}}}{\sqrt{3} \cdot \epsilon A} \cdot \left(d - \frac{d}{3} \right) = \sqrt{\frac{8Kd^3}{27\epsilon A}}$$

ALIMENTAZIONE IN TENSIONE

la variabile indipendente è la tensione.

$$U' = qV - U = qV - \frac{1}{2} Kx^2 - \frac{1}{2} \frac{q^2}{C(x)} - U_0$$

$$q = C(x) \cdot V$$

$$\rightarrow qV - \frac{1}{2} \frac{q^2}{C(x)} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C(x)}$$

$$U' = -\frac{1}{2} Kx^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C(x)} - U_0 = -\frac{1}{2} Kx^2 + \frac{1}{2} C(x) V^2 - U_0$$

$$F(x, V) = - \left| \frac{\partial U'}{\partial x} \right|_V = Kx - \frac{V^2}{2} \cdot \frac{d}{dx} C(x)$$

$$q(x, V) = \left| \frac{\partial U'}{\partial V} \right|_x = C(x) \cdot V$$

$$dW_e = - F dx - V dq$$

$$dU = - dW_e = F dx + V dq$$

$$dU' = - F dx + Q dV$$

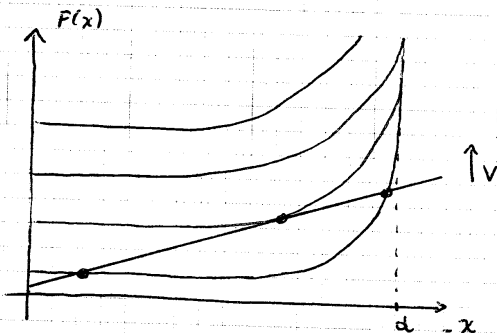
In condizioni di equilibrio: $F(x, V) = 0$

$$Kx - \frac{V^2}{2} \cdot \frac{d}{dx} C(x) = 0 \rightarrow x = \frac{V^2}{2K} \frac{d}{dx} C(x)$$

$$C(x) = \frac{\epsilon A}{d+x} \rightarrow x = \frac{V^2}{2K} \frac{\epsilon A}{(d+x)^2}$$

$$-x(d+x)^2 = \frac{V^2}{2K} \epsilon A$$

$$F(x) = Kx + \frac{V^2}{2} \cdot \frac{\epsilon A}{(d+x)^2} = 0 \rightarrow \frac{V^2}{2} \cdot \frac{\epsilon A}{(d+x)^2} = -Kx \text{ nel punto di equilibrio}$$



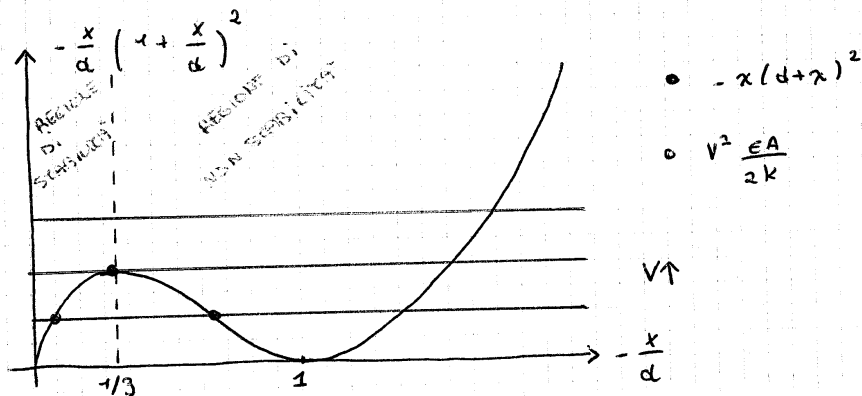
- Forza elettrica $\left(\frac{V^2}{2} \frac{\epsilon A}{(d+x)^2} \right)$
- Forza elastica $(-Kx)$

• Per $V = V_{PI}$ accade che •
interseca • in un solo
punto \rightarrow in realtà tangente
in un punto.

Per $V > V_{PI}$, • e • non hanno intersezioni.

Questo significa che la forza elastica non è più in grado di eguagliare la forza elettrica.

Da questo caso la forza elettrica è maggiore della forza elastica e la sua asintotica cresce come d'una sua l'altra



Caso di interesse: $0 < -\frac{x}{d} < 1$

Se caso $-\frac{x}{d} \geq 1$ non ha significato fisico.

$$\bullet -x(d+x)^2 = V^2 \frac{EA}{2k}$$

Calcolo della posizione del massimo:

$$\frac{d}{dx} (-x(d+x)^2) = 0$$

$$-(d+x)^2 - 2x(d+x) = -(d+x)(d+3x) = 0$$

$$\rightarrow x = -\frac{1}{3}d = x_{P1} : \text{spostamento di Ruote Im.}$$

$$x = -d \quad (\text{soluzione pura di interesse fisico})$$

$$V^2 \frac{EA}{2k} = \frac{1}{3}d \left(d - \frac{1}{3}d\right)^2 = \frac{4}{27}d^3$$

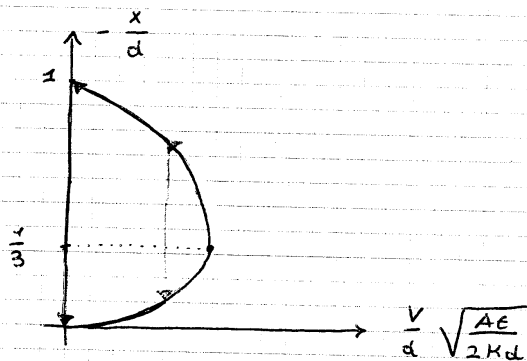
$$V_{P1} = \sqrt{\frac{8 \cdot kd^3}{27 EA}} : \text{Tensione di Ruote Im.}$$

Se $V < V_{P2}$: il sistema raggiunge una posizione di equilibrio.

Se $V > V_{P2}$: quando l'armatura si è spostata di $\frac{1}{3}d$ dalla distanza a riposo tra le armature d , il sistema cede perché la forza di richiamo della molla non è in grado di equilibrare la forza elettrica.

Alimentando in tensione questo attuatori si ottiene un intervallo di regolazione massima di $\frac{1}{3}d$ cui corrisponde una distanza tra le armature di $\frac{2}{3}d$.

Fenomeno di isteresi :



* in quanto in questo istante risulta $F_{elett} > F_{molla}$.

Qui è graficata solo la regione di esistenza dell'equazione precedente

$\frac{V}{d} \sqrt{\frac{AE}{2Kd}}$ è massima quando $-\frac{x}{d} = \frac{1}{3}$

Per $-\frac{x}{d} = 1 \rightarrow \frac{V}{d} \sqrt{\frac{AE}{2Kd}} = \phi$ la tensione tra le

armature si annulla e le armature si allontanano. Tornando a distanza d e una volta che il condensatore è di nuovo alimentato e si prosegue con un nuovo ciclo di isteresi.

Nei momenti in cui le armature si toccano è possibile che una scarica si generi. Questo ciclo di isteresi è chiaramente destrutturato per l'attuatore.

È possibile prevedere uno stop meccanico che elimini l'ampiezza del ciclo di isteresi evitando le c.c. delle armature.

Aggiunge a stessa stabilità e energia oltre avere un minimo e la sua derivata 2°a derivata essere maggiore di ϕ :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \phi, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > \phi.$$

Equivalente a dire:

$$\frac{\partial U'}{\partial x} = \phi, \quad \frac{\partial^2 U'}{\partial x^2} < \phi.$$

$$\text{ovvero: } \frac{\partial F}{\partial x} > \phi$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[Kx + \frac{V^2}{2} \frac{EA}{(d+x)^2} \right] > \phi$$

$$K - V^2 \frac{EA}{(d+x)^3} = K \left(1 - 2 \frac{V^2}{2K} \frac{EA}{(d+x)^3} \right) = K \left(1 + 2 \frac{x}{d+x} \right) > \phi$$

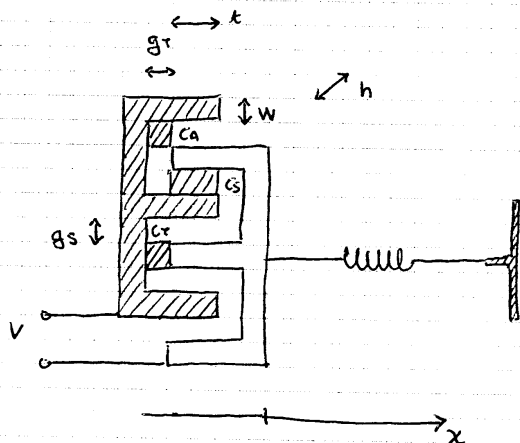
$$x = - \frac{V^2 \cdot EA}{2K(d+x)^2}$$

$$2. \quad \frac{x}{d} + 1 > \phi, \quad 3 \frac{x}{d} > -1, \quad x > -\frac{1}{3}d$$

$$1 + \frac{x}{d} > \phi \Rightarrow -\frac{x}{d} < \frac{1}{3}$$

COMB FINGER

ALIMENTAZIONE IN TENSIONE



C_A : Condensatore di angoli (ai bracci)

C_S : Condensatore di lato

$$C_S = 2 \frac{\epsilon h (t-x)}{g_s}$$

due per simmetria

C_r : Condensatore di testa

$$C_r = 2 \frac{\epsilon h w}{g_r + x}$$

m_e : numero di dita interdipendenti

Nelegoma ancala:

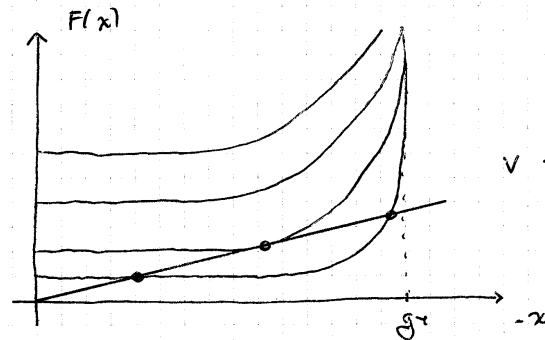
$$F(x, V) = - \left| \frac{\partial U'}{\partial x} \right|_V = Kx - \frac{V^2}{2} \frac{d}{dx} C(x)$$

$$q(x, V) = \left| \frac{\partial U'}{\partial V} \right|_x = C(x) \cdot V$$

$$\frac{d}{dx} C_S(x) = -2 \frac{\epsilon h}{g_s} ; \quad \frac{d}{dx} C_r(x) = -2 \frac{\epsilon h w}{(g_r + x)^2}$$

$$F(x, V) = Kx + m_e V^2 \left[\frac{\epsilon h}{g_s} + \frac{\epsilon h w}{(g_r + x)^2} \right] = Kx + \frac{V^2 \epsilon h m_e}{g_s} \left[r + \frac{w g_s}{(g_r + x)^2} \right]$$

Grafico della famiglia delle forze elettriche e della forza elastica:



- Forza elettrica
 $\frac{v^2 e h m e}{g_s} \left(1 + \frac{W g_s}{(g+x)^2} \right)$
- Forza elastica
 $(-kx)$
- punti di equilibrio

Per basse tensioni si hanno due soluzioni di equilibrio che al crescere di V deprimono in un'unica soluzione.

Successivamente non si hanno soluzioni e risulta $F_{elastica} < F_{elettrica}$.

Se il coefficiente di C_x fosse trascurabile, la famiglia delle curve della forza elettrica sarebbe costituita da tutte paraboliche spostate quadraticamente

$$\rightarrow F(x, V) = kx + m e \frac{v^2 e h}{g_s}, \quad F \propto V^2; \quad F \neq x.$$

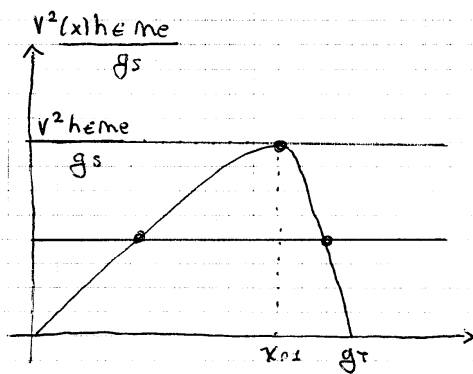
Om tal caso si avrebbe solo un punto di riposo.

Posizione di equilibrio:

$$F(x, V) = 0$$

$$kx + \frac{v^2 e h m e}{g_s} \left[1 + \frac{W g_s}{(g+x)^2} \right] = 0$$

$$\rightarrow \frac{v^2 e h m e}{g_s} = -kx \cdot \frac{(x+g)^2}{(W g_s + (x+g)^2)}$$



Graphico di $V^2(x) \cdot \frac{heme}{g_s}$

nostra critica

Due posizioni di equilibrio

Si grafica anche qui, solo la regione di esistenza dell'equazione precedente.

Calcoliamo x_{p2} :

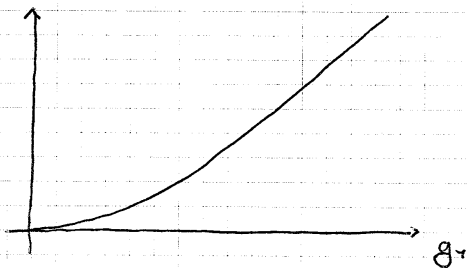
$$\frac{d}{dx} \left(-Kx \cdot \frac{(x+g_r)^2}{Wg_s + (x+g_r)^2} \right) = 0$$

$$= -K \cdot \frac{g_r + x}{(g_r + x)^2 + g_s W} (g_r^3 + 3g_r^2 x + 3g_r x^2 + g_s W g_r + x^3 + 3g_s W x) = 0$$

$$\rightarrow x^3 + 3x^2 g_r + 3x g_r^2 + 3W g_s x + g_r^3 + W g_s g_r = 0$$

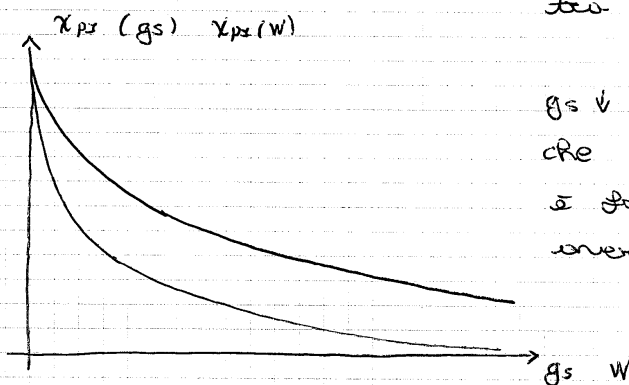
$$x_{p2} = g_r - \frac{1}{2} \sqrt[3]{g_s W (\sqrt{g_s W + g_r^2} + g_r)} + \frac{1}{2} \frac{g_s W}{\sqrt[3]{g_s W (\sqrt{g_s W + g_r^2} + g_r)}}$$

$x_{p2}(g_r)$



$$g_r \uparrow \Rightarrow x_{p2} \uparrow$$

Conferma che se si può in è dovuto alla capacità di testa che diventa sempre meno significativa al crescere della distanza tra i sensori.



$g_s \downarrow \Rightarrow x_{p2} \uparrow$ e conferma che la capacità di lato è fondamentale per avere x_{p2} elevato.

$W \downarrow \Rightarrow x_{02} \uparrow$ diminuendo l'area dell'estrodo
 la capacità di testa assume minor significato.

Studiando l'equilibrio risulta che
 e' intervallo di stabilità \bar{x} $(-x_{02}; \phi)$

Deriva da $\frac{\partial F}{\partial x} > \phi$

si ricava K dalla condizione di equilibrio $\frac{\partial F}{\partial x} = \phi$

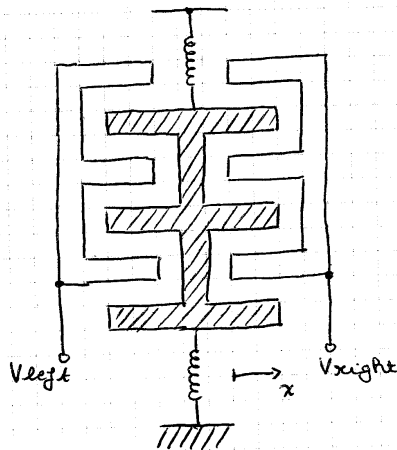
$$K = - \frac{V^2 \epsilon h m \epsilon}{x g_s} \left(1 + \frac{W g_s}{(g_r + x)^2} \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = K - 2 \frac{V^2 \epsilon h m \epsilon W}{(g_r + x)^3} > \phi$$

LINEARIZZAZIONE DELLA RISPOSTA

Per attuatori elettostatici comandati in
 tensione dipendono da V^2

Struttura con due combi finger peculiari ormai
 armature mobile comune



$$V_{left} = V_B - V$$

$$V_{right} = V_B + V$$

$$F_{left} \propto V_{left}^2 = (V_B - V)^2$$

$$F_{right} \propto V_{right}^2 = (V_B + V)^2$$

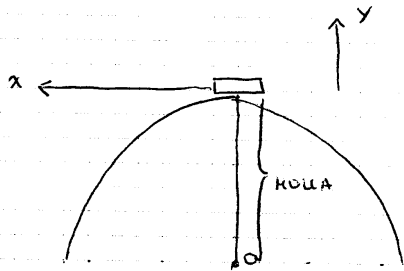
$$\rightarrow F_{right} - F_{left} = 4 V_B V$$

$$F_{right} - F_{left} \propto V$$

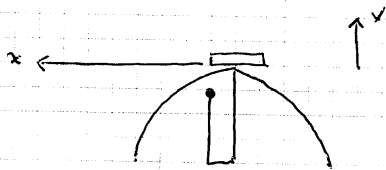
Prozzo da pagare: maggiore complessità realizzativa
 e spazio richiesto

Si utilizzano anche ripiegate al fine di
 risparmiare spazio:

Valei che l'armatura molece di misuresse solo lungo x e non lungo y :



Utilizzando una moleca molto lunga, posso approssimare il movimento lungo la circonferenza al movimento lungo la tangente.



La moleca ripiegata offre lo stesso smitaggio, ma in spazio ridotto.

Curvature moleca :



Curvature moleca ripiegata :



OSSERVAZIONE :

Tornando al discorso di un strutture aumentate per esempio in cerchio, non è da escludere effetti di perforazione del dielettrico quando i piatti si toccano

$$V \rightarrow \phi \quad \text{ma anche } d \rightarrow \phi \quad E = \frac{V}{d} \rightarrow (?)$$

$$E = - \frac{dV}{dx} = - \frac{q}{dx} \left[\frac{(d+x)}{\epsilon A} \cdot q \right] = - \frac{q^2}{\epsilon A}$$

$$q_{lim} = \sqrt{2\epsilon K A d} \rightarrow E = - \sqrt{\frac{2\epsilon K A d}{\epsilon^2 A^2}} = - \sqrt{\frac{2Kd}{\epsilon A}}$$

N.B: in realtà il campo andrebbe calcolato non al contatto ma ad una distanza tra gli elettrodi dell'ordine del cammino libero medio degli ioni.

ness'asse.

Se il campo elastico eccede la rigidità elastica dell'asse, per una distanza minore del cammino libero non si potrà avere una sezione a valanga e quindi non si avrà perforazione.

STRUTTURE

Si definisce TRAVE una porzione di un continuo materiale che si può immaginare generata dallo scostamento di una superficie A perpendicolare ad una linea spaziale \mathcal{L} , passante per il baricentro di A , lungo la linea stessa.

La forma di A può variare lungo \mathcal{L} ma A deve sempre essere sempre \perp ad \mathcal{L} .

\mathcal{L} : linea d'asse

A : sezione della trave

Solitamente \mathcal{L} è molto maggiore del massimo diametro di A .

I vincoli sono strutture tramite le quali vengono applicate forze o momenti che mantengono fissi alcuni punti o angoli della tangente alla trave.

Intuitivamente sono restrizioni alla mobilità di un corpo. La loro azione comporta la nascita di reazioni vincolari.

I vincoli formano un'azione cinematica e statica.

Tipi di vincoli:

- estremi liberi: assenza di vincoli;
- supporto scorrevole: esercita reazione verticale ma nessuna reazione orizzontale o momento; fissa la posizione verticale;
- cerniera: esercita reazioni orizzontali e verticali ma non momenti; fissa la posizione ma non l'angolo;

- incastri : esercita reazioni e momenti ; fissa posizione ed angolo.

IPOTESI DI SAINT VENANT E CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITA, ZIONE

Ipotesi necessaria per risolvere il problema elastico per una trave

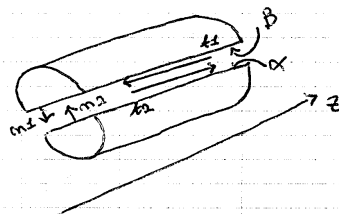
Trave rettilinea con un piano parallelo ad uno asse $\alpha \equiv \beta$.

Ipotesi : tensione normale ad $\alpha \equiv \beta$ da nulla, ovunque e uniche tensioni trasversali tra i piani α e β sono quelle tangenti ai due piani.

\hat{m} : normale ad α .

$$T_{mm} = T_m \cdot \hat{m} = T_m^T \cdot \hat{m} =$$

$$= \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ \emptyset \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ \emptyset \end{bmatrix}$$



con $\hat{m} \perp \hat{z}$

$$T_{mm} = \begin{bmatrix} T_{xx} m_x + T_{xy} m_y \\ T_{xy} m_x + T_{yy} m_y \\ T_{xz} m_x + T_{yz} m_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ \emptyset \end{bmatrix} = T_{xx} m_x^2 + 2 T_{xy} m_x m_y + T_{yy} m_y^2$$

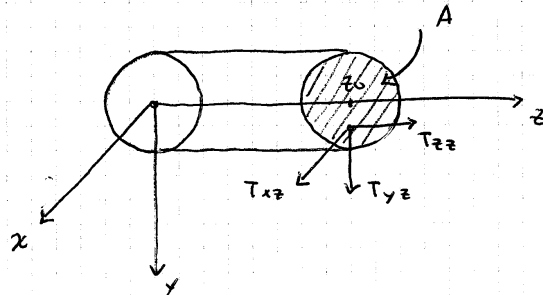
Poiché dall'esercizio $T_{mm} = \emptyset$

risultata $T_{mm} = \emptyset \Leftrightarrow T_{xx} = T_{xy} = T_{yy} = \emptyset$.

$$T = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & T_{xz} \\ \emptyset & \emptyset & T_{yz} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{bmatrix} \quad T : \text{tensione di stress}$$

$$T_z = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ \emptyset \end{bmatrix}$$

Si consideri una trave rettilinea ed un piano di sezione trasversale in $z = z_0$ parallelo al piano xy :



Tensione che agisce su un punto generico del piano α passante per z_0

$$T_z = \begin{bmatrix} \phi & \phi & T_{xz} \\ \phi & \phi & T_{yz} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \phi \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xz} \\ T_{yz} \\ T_{zz} \end{bmatrix}$$

Risultante di T_z su tutta la superficie A :

$$F_z = \int_A T_z dS = \begin{bmatrix} \int_A T_{xz} dS \\ \int_A T_{yz} dS \\ \int_A T_{zz} dS \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ N \end{bmatrix}$$

Tensione di taglio T :

$$T = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ \phi \end{bmatrix}$$

Tensione normale N :

$$N = \begin{bmatrix} \phi \\ \phi \\ N \end{bmatrix}$$

Si consideri il momento risultante di T_z su tutta A rispetto al punto (ϕ, ϕ, z_0) che è il baricentro di A .

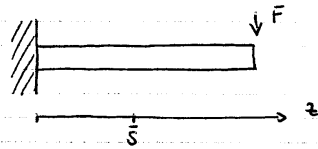
$$\text{Braccio } b: b = (x, y, z_0) - (\phi, \phi, z_0) = (x, y, \phi)$$

$$\vec{M}_z = \int_A (b \times T_z) dS = \int_A \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x & y & \phi \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{bmatrix} dS = \int_A \begin{bmatrix} y T_{zz} \\ -x T_{zz} \\ x T_{xy} - y T_{xz} \end{bmatrix} dS$$

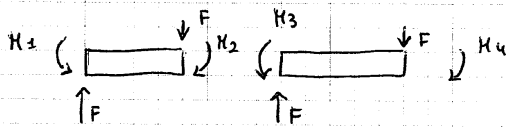
$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \int_A y T_{zz} dS \\ \int_A -x T_{zz} dS \\ \int_A (x T_{yz} - y T_{xz}) dS \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} M_x, M_y : \text{momenti flessionali} \\ M_z : \text{momento torzante} \end{array}$$

SOLLECITAZIONI:

Consideriamo una trave incastata ad un estremo e con una forza sulla punta.



Per studiare le sollecitazioni in $z = \bar{s}$ si considera il piano A passante per \bar{s} e si immagina la trave separata in due tronconi che si mantengono in equilibrio se saranno applicate alle parti forze e momenti uguali ma opposti in segno.



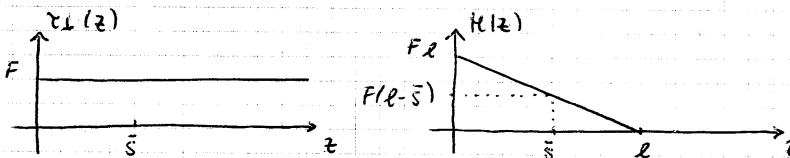
$$H_1 = F \cdot l$$

$$H_2 = F \cdot (l - \bar{s})$$

$$H_3 = F \cdot (l - \bar{s})$$

$$H_4 = \emptyset$$

Si grafica $F(z)$ ed $H(z)$ e risulta:



Si riducono forze e momenti sull'asse della trave.

Si ottiene una forza resistente \bar{z} ed un momento resistente m .

$$\bar{z}_{//} = N$$

$$\bar{z}_{\perp} = T$$

$$m_x = M$$

tensione
normale

tensione
di taglio

momento flettente

Queste tre sono le caratteristiche di sollecitazione in \bar{s} .

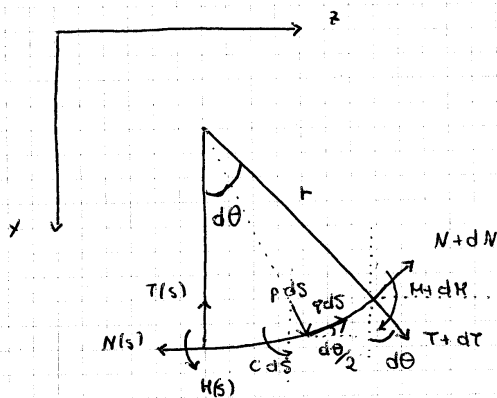
TRAVI PIANE AD ASSE CURVILINEO

Si considera un segmento $ds = r d\theta$ di una trave ad asse curvilineo.

r : raggio di curvatura

s : ascissa curvilinea

Sue estremità agiscono i esecuti distribuiti radiali $p(s)$ e tangenziali $q(s)$, nonché le coppie distribuite $c(s)$



Equazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} -N + q ds \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + p ds \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) + (T+dT) \sin(d\theta) + (N+dN) \cos(d\theta) = 0 \\ -T - q ds \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) + p ds \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - (N+dN) \sin(d\theta) + (T+dT) \cos(d\theta) = 0 \\ -Nr - H + r q ds - c ds + r(N+dN) + (H+dH) = 0 \end{cases}$$

$(T+dT)$ e T non applicano rotazione

equilibrio
rotazione

equilibrio
per forza

$$\sin \theta \sim \theta, \quad \cos \theta \sim 1$$

$$\begin{cases} \frac{dN}{ds} = -q - p \cdot \frac{d\theta}{2} - (T+dT) \cdot \frac{d\theta}{ds} \\ \frac{dT}{ds} = q \frac{d\theta}{2} - p + (N+dN) \frac{d\theta}{ds} \\ \frac{dH}{ds} = -qr + c - \frac{dN}{ds} r = c - r \left(q + \frac{dT}{ds} \right) \end{cases}$$

$$ds = r d\theta \rightarrow \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}$$

$$\begin{cases} \frac{dN}{ds} = -q - \frac{T}{r} \\ \frac{dT}{ds} = -p + \frac{N}{r} \\ \frac{dM}{ds} = c + T \end{cases}$$

Se la trave piana ha ~~asse rettilineo~~, ovvero non ha curvatura: $\frac{1}{r} \rightarrow \phi$.

$$\begin{cases} \frac{dN}{dz} = -q \\ \frac{dT}{dz} = -p \\ \frac{dM}{dz} = c + T \end{cases}$$

ascissa curvilinea $s \equiv$ ascissa lineare z .

← Equazioni della linea elastica

Risulta: $\frac{d^2M}{dz^2} = \frac{dc}{dz} + \frac{dT}{dz} = \frac{dc}{dz} - p$

Se $c(s) = \phi$ ovvero non ci sono coppie distribuite:

$$\frac{d^2M}{dz^2} = -p.$$

Risulta che la derivata seconda del momento flettente fatta rispetto a z è uguale ai carichi distribuiti trasversali cambiati di segno.

CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE E STATO DI TENSIONE

$$\vec{F}_z = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_A T_{xz} ds \\ \int_A T_{yz} ds \\ \int_A T_{zz} ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_A T_3 ds \\ \int_A T_4 ds \\ \int_A T_5 ds \end{bmatrix}$$

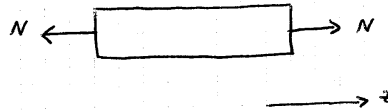
con T , conosciuta dalle ipotesi di De Saint Venant:

$$T = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & T_{xz} \\ \emptyset & \emptyset & T_{yz} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \emptyset \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ \emptyset \end{bmatrix} = T_z$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_A y T_{zz} ds \\ \int_A -x T_{zz} ds \\ \int_A (x T_{yz} - y T_{xz}) ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_A y T_3 ds \\ \int_A -x T_3 ds \\ \int_A (x T_5 - y T_4) ds \end{bmatrix}$$

N, M_x, M_y dipendono esclusivamente da T_3 .

TENSIONE NORMALE



Consideriamo una coppia di forze di trazione applicate agli estremi di una trave.

L'unica caratteristica di sollecitazione non nulla è N .

$$N = \int_A T_3 ds$$

In assenza di carichi distribuiti: $q = \emptyset \rightarrow \frac{dN}{dz} = \emptyset$

$$\frac{d}{dz} \int_A T_3 ds = \emptyset \rightarrow \frac{dT_3}{dz} = \emptyset$$

T_3 non è funzione di z .

Supponiamo che T_3 dipenda linearmente da x ed y .

$$T_3 = T_{30} + a_1 x + a_2 y = T_{30} + [a_1, a_2] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T_{30} + a \cdot r$$

$$N = \int_A T_3 ds = \int_A (T_{30} + a \cdot r) ds = \underbrace{T_{30} \int_A ds}_A + a \cdot \underbrace{\int_A r ds}_\emptyset = A T_{30}$$

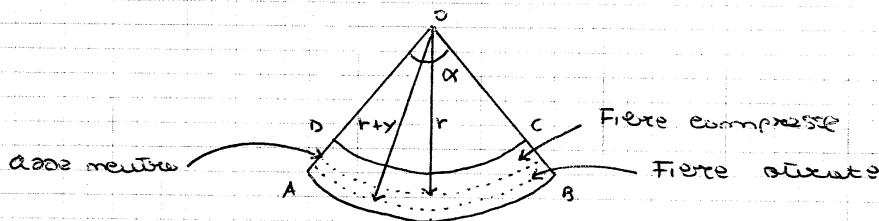
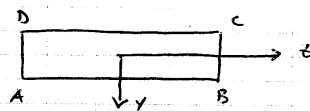
In questo caso l'origine degli assi coincide col baricentro.

$$T_3 = T_{30} = \frac{N}{A}$$

FLESSIONE

Nei casi di deformazioni flessionali si assume l'ipotesi di Euler-Bernoulli, un'asse della stessa sezione del corpo deformato si mantiene perpendicolare all'asse deformato.

Una flessione è provocata da un momento flettente.



r : Raggio di curvatura dell'asse neutro

$r+y$: Raggio di curvatura di una fibra deformata.

E : modulo di Young.

$$S_3 = \frac{\Delta L}{L} \rightarrow T_3 = E \cdot S_3 = E \cdot \frac{\Delta L}{L} = E \cdot \frac{\alpha(r+y) \cdot \alpha r}{\frac{\alpha r}{L}} = E \cdot \frac{y}{r}$$

Il momento flettente all'equilibrio uguale al momento risultante della distribuzione di stress

Equazione di Bernoulli-Mohr:

$$M_x = \int_A y T_3 ds = \frac{E}{r} \int_A y^2 ds = \frac{E}{r} J$$

$J = \int_A y^2 ds$ momento d'inerzia della sezione di area A rispetto all'asse

$$T_3 = E \cdot \frac{y}{r}$$

$$M_x = \frac{E}{r} J$$

$$\rightarrow T_3 = \frac{M_x}{J} y$$

Espressione di T in funzione del momento flettente mediante l'ipotesi che il momento flettente sia l'unica sollecitazione che agisca sulla trave.

Risulta che ogni combinazione di forza normale e momento flessionale conduce allo stato di tensione:

$$T_x = \frac{N(z)}{A} + \frac{M_x(z)}{J} \cdot y$$

FLESSIONE DI BARRE

$$y = f(x)$$

la curvatura di y è: $K = \frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2}{dz^2} \cdot y}{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}\right)^3}$

$$\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3 \sim 1 + \frac{3}{2}x^2 + o(x^4)$$

$$K = \frac{1}{r} \sim -\frac{d^2}{dz^2} u_y$$

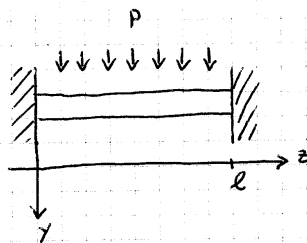
$$\frac{d^2}{dz^2} M_x = -P \rightarrow \frac{d^2}{dz^2} \left(EJ \frac{1}{r} \right) = -P$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(EJ \cdot \frac{d^2}{dz^2} u_y \right) = P \rightarrow \frac{d^4}{dz^4} u_y = \frac{P}{EJ}$$

Equazione di Maxwell di Eulero-Bernoulli.

Questa è nota come equazione fondamentale della teoria della trave.

ESEMPI



$$\frac{d^4}{dz^4} u_y = \frac{P}{EJ} \quad p \text{ è un carico distribuito}$$

Condizioni al contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_y(\phi) = \phi \\ u_y(l) = \phi \end{array} \right\} \text{ spostamenti nulli in } z = \phi, l.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz} u_y(\phi) = \phi \\ \frac{d}{dz} u_y(l) = \phi \end{array} \right\} \text{ rotazioni nulli in } z = \phi, l.$$

$$u_y(z) = a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4$$

$$\frac{d}{dz^4} u_y = \frac{P}{EI} \rightarrow e = \frac{P}{4!EI} = \frac{P}{24EI}$$

$$u_y(\phi) = \phi \rightarrow a = \phi$$

$$\frac{d}{dz} u_y(\phi) = \phi \rightarrow b = \phi$$

$$u_y(z) = \phi z^2 + dz^3 + \frac{P}{24EI} z^4$$

$$u_y(l) = \phi \rightarrow \phi l^2 + dl^3 + \frac{P}{24EI} l^4 = \phi$$

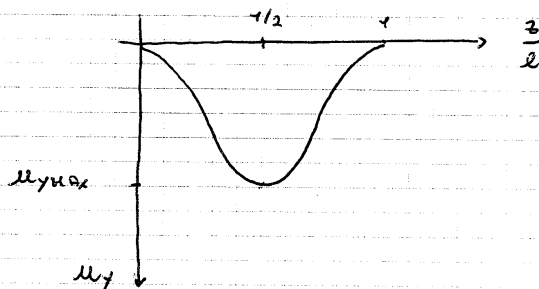
$$\frac{d}{dz} u_y(l) = \phi \rightarrow 2\phi l + 3dl^2 + \frac{P}{6EI} l^3 = \phi$$

$$d = -\frac{P}{12EI} l$$

$$c = \frac{P}{24EI} l^2$$

$$u_y(z) = \frac{P}{24EI} l^2 z^2 - \frac{P}{12EI} l z^3 + \frac{P}{24EI} z^4$$

$$= \frac{P}{24EI} z^2 (l - z)^2$$

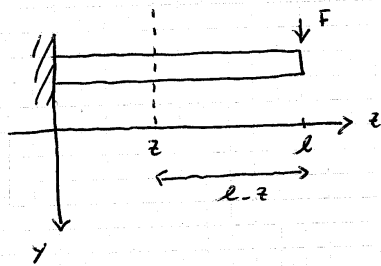


$$u_{y \max} = u_y \left(z = \frac{l}{2} \right) = \frac{P}{24EI} \left(\frac{l}{2} \right)^4 = \frac{l^4}{384EI} P$$

Costante della molla equivalente:

$$K = \frac{P}{u_{y \max}} = \frac{384EI}{l^4}$$

l, l : parametri di oggetto.



Valuto il momento flettente:

$$M_x(z) = -F(l-z) \quad (-) \text{ ROTAZIONE ORARIA.}$$

$$M_x = \frac{E}{r} \cdot y$$

$$\frac{1}{r} \sim -\frac{d}{dz^2} u_y$$

$$\frac{d^2}{dz^2} u_y = -\frac{M_x}{EJ} = \frac{F(l-z)}{EJ}$$

Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} u_y(\varphi) = d \\ \frac{d}{dz} u_y(\varphi) = \phi \end{cases}$$

$$u_y(z) = a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4$$

$$\frac{d^4}{dz^4} u_y(z) = \phi \quad (p=\phi)$$

$$\rightarrow e = \phi$$

$$u_y(\varphi) = \phi \rightarrow a = \phi$$

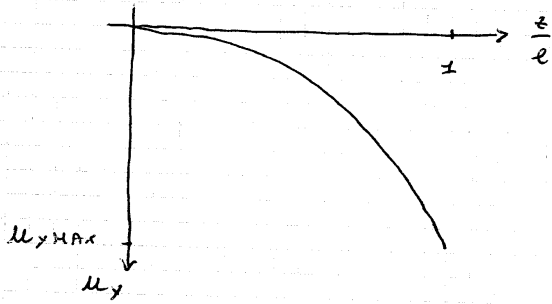
$$\frac{d}{dz} u_y(\varphi) = \phi \rightarrow b = \phi$$

$$u_y(z) = \phi z^2 + dz^3$$

$$\frac{d^2}{dz^2} u_y = \frac{F(l-z)}{EJ} \rightarrow 2c + 6dz = \frac{F(l-z)}{EJ}$$

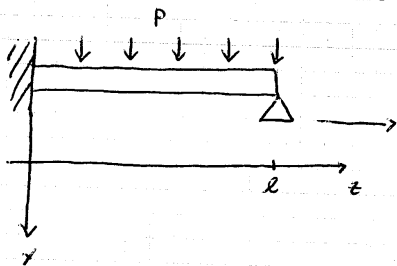
$$z = \varphi \rightarrow c = \frac{F\ell}{2EJ} ; d = -\frac{F}{6EJ}$$

$$u_y(z) = \frac{F\ell}{2EJ} \cdot z^2 - \frac{F}{6EJ} \cdot z^3 = \frac{F\ell}{2EJ} \cdot z^2 \left(1 - \frac{z}{3\ell}\right)$$



$$M_{y \max} = M_y(z=l) = \frac{F}{3EJ} \cdot l^3$$

$$K = \frac{F}{M_{y \max}} = \frac{3EJ}{l^3}$$



Restituisci reazione vincolare
 nulla: se momento
 resistente è nulla a
 meno che non ce ne sia
 una esplicitamente applicata

$$\frac{d^4}{dz^4} M_y(z) = \frac{p}{EJ}$$

$$M_y(z) = a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4$$

$$\begin{cases} M_y(0) = 0 \\ \frac{d}{dz} M_y(0) = 0 \\ M_y(l) = 0 \end{cases}$$

$$M(l) = 0$$

$$\rightarrow -EJ \frac{d^2}{dz^2} M_y(l) = 0$$

$$\frac{d^4}{dz^4} M_y(z) = \frac{p}{EJ} \rightarrow e = \frac{p}{24EJ}$$

$$M_y(0) = 0 \rightarrow a = 0$$

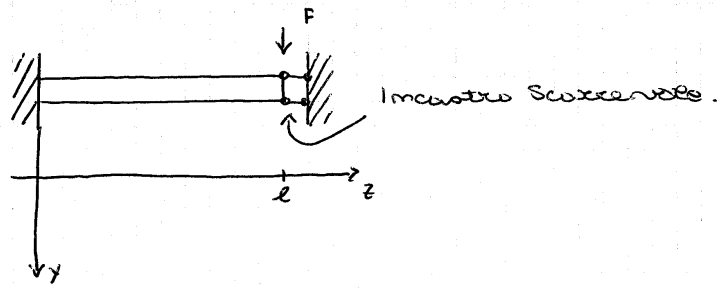
$$\frac{d}{dz} M_y(0) = 0 \rightarrow b = 0$$

$$M_y(z) = cz^2 + dz^3 + \frac{p}{24EJ} z^4$$

$$c \cdot l^2 + dl^3 + \frac{p}{24EJ} \cdot l^4 = 0 \leftarrow M_y(l) = 0$$

$$-EJ \left(2c + 6dl + \frac{p}{2EJ} l^2 \right) = 0$$

$$\rightarrow c = -\frac{1}{16} \cdot \frac{pl^2}{EJ} ; d = -\frac{5}{48} \cdot \frac{pl}{EJ}$$



$$\frac{d^4}{dz^4} u_y(z) = \phi \rightarrow e = \phi$$

$$u_y(z) = a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4$$

$$u_y(\phi) = \phi \rightarrow a = \phi$$

$$\frac{d}{dz} u_y(\phi) = \phi \rightarrow b = \phi$$

$$\frac{d}{dz} u_y(l) = \phi \rightarrow 2cl + 3dl^2 = \phi$$

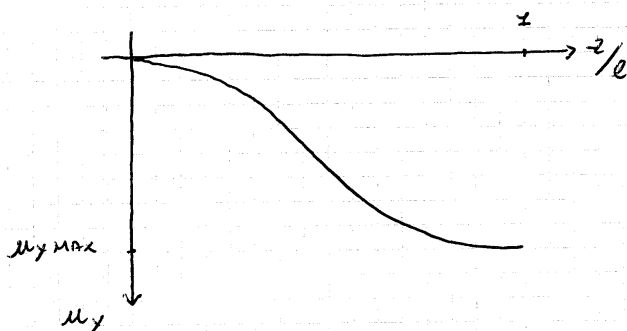
$$T(l) = \frac{d}{dz} M(z) = -EJ \cdot \frac{d^3}{dz^3} u_y(z) = F$$

$$\rightarrow d = -\frac{F}{6EJ} ; c = \frac{F \cdot l}{4EJ}$$

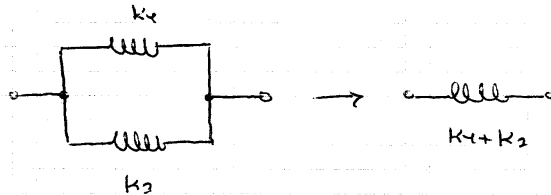
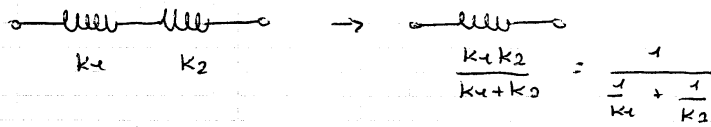
$$u_y(z) = \frac{F \cdot l}{4EJ} z^2 - \frac{F}{6EJ} z^3 = \frac{F}{2EJ} \left(\frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{3} z^3 \right)$$

$$u_{y \max} = u_y(z=l) = \frac{F l^3}{12EJ}$$

$$k = \frac{F}{u_{y \max}} = \frac{12EJ}{l^3}$$

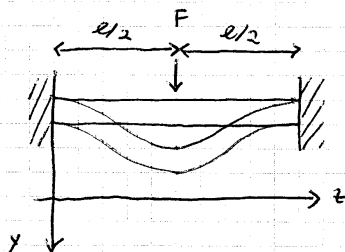


COMBINAZIONE DI STRUTTURE ELASTICHE



(come i condensatori ...)

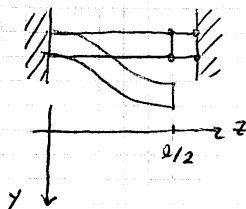
Scomposizione di una trave in due strutture in parallelo:



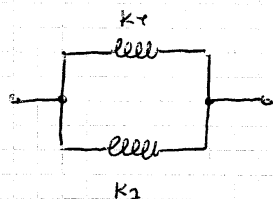
- prima di avere applicato F
- dopo avere applicato F .

Chiusamente risulta la deformata avere tangente nulla in $z = l/2$.

Seiamo in $z = l/2$ e sostituiamo la seconda parte della trave con un vincolo che tenga conto di questo dato: INCASTRO SCORREVOLE.



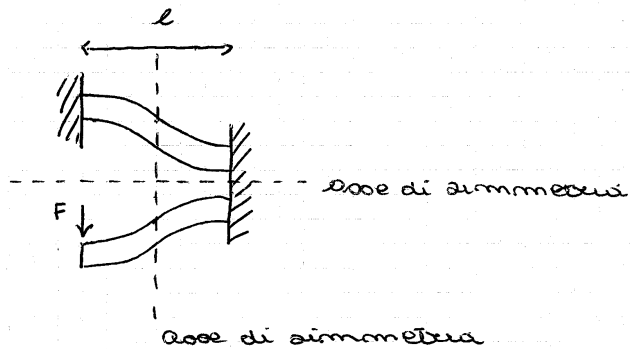
Le due parti della trave agiscono in modo indipendente: le moesce cinematiche sono poste in parallelo:



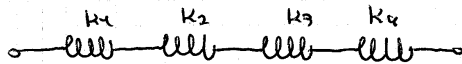
$$k_1 = k_2 = 12 EJ \cdot \frac{8}{l^3} = 96 \frac{EJ}{l^3}$$

$$K_{ris} = k_1 + k_2 = 192 \cdot \frac{EJ}{l^3}$$

Costante elastica della molla ripiegata:



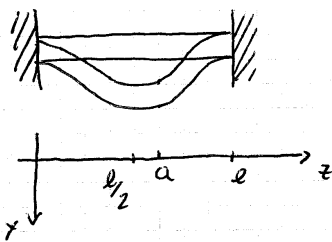
La molla equivalente è composta da 4 elementi posti in serie:



$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 3EJ \cdot \frac{8}{l^3} = 24 \frac{EJ}{l^3}$$

$$k_{ris} = \frac{1}{4} \cdot 24 \frac{EJ}{l^3} = 6 \frac{EJ}{l^3}$$

meè caso in cui risulta:



$$a > l/2$$

$$k = \frac{3EJ(4+2a)^2}{2(1-a)^2 a^3}$$

$$\text{se } a = \frac{l}{2} \rightarrow k = 102 \cdot \frac{EJ}{l^3}$$

ATTUATORE TERMO-ELASTICO

Trave di spessore H riscaldata in modo che sia sede di un profilo lineare di temperatura in direzione \hat{y}
 che tipo $y = mT + q$.

$$y = mT + q$$

$$\begin{cases} \frac{H}{2} = mT_i + q \\ -\frac{H}{2} = mT_e + q \end{cases}$$

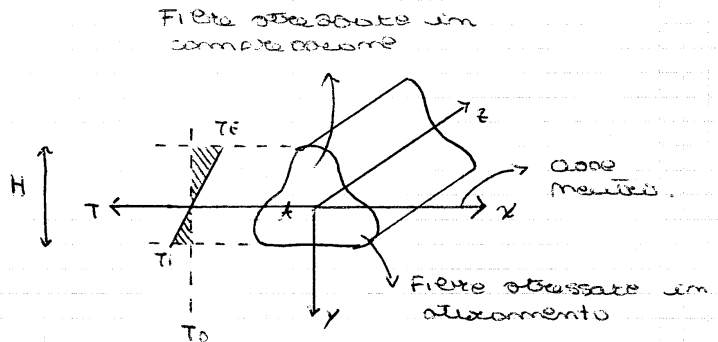
$$\rightarrow H = m(T_i - T_e) \rightarrow m = \frac{H}{T_i - T_e}$$

$$\rightarrow m(T_i + T_e) + 2q = 0 \rightarrow q = -\frac{1}{2} H \frac{T_i + T_e}{T_i - T_e}$$

$$y = \frac{H}{T_i - T_e} \cdot T - \frac{1}{2} H \frac{T_i + T_e}{T_i - T_e}$$

$$\text{Definendo } T_0 = \frac{T_i + T_e}{2}$$

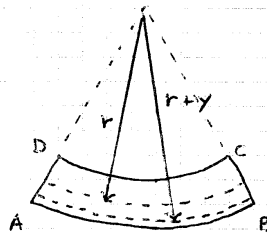
$$y = \frac{H}{T_i - T_e} (T - T_0) \rightarrow (T - T_0) = \frac{T_i - T_e}{H} \cdot y$$



Consideriamo una configurazione deformata di una generica trave lunga L :

Rotazione di angolare per
 l'asse neutro ($y = 0$): $\alpha T_0 L$

α : coefficiente di dilatazione
 termica



Rotazione di angolare ad una generica quota y :

$$\alpha \left(T_0 + \frac{T_i - T_e}{H} y \right) L$$

$$\text{Strain lungo } z: S_z(y) = \frac{\left[L + \alpha \left(T_0 + \frac{T_i - T_e}{H} y \right) L \right] - \left[L + \alpha T_0 L \right]}{L} \quad \left(\frac{\Delta L}{L} \right)$$

$$= \alpha \frac{T_i - T_e}{H} \cdot y$$

$$\rightarrow \text{Curvatura termica } \frac{1}{r} = \alpha \frac{T_i - T_e}{H} = \alpha T^*, \quad T^* = \frac{T_i - T_e}{H}$$

nel caso in cui agisca un momento flettente e un gradiente di temperatura:

$$\left(\frac{1}{K}\right)_{RIS} = \left(\frac{1}{K}\right)_{FLETT} + \left(\frac{1}{K}\right)_{TEMP} = \frac{M}{EJ} + \alpha T^* = -\frac{d^2}{dz^2} u_y$$

$$M = -EJ \left(\frac{d^2}{dz^2} u_y + \alpha T^* \right)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} M = -P$$

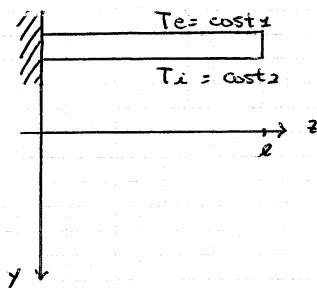
$$\rightarrow \frac{d^2}{dz^2} \left(-EJ \left(\frac{d^2}{dz^2} u_y + \alpha T^* \right) \right) = -P$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{d^2}{dz^2} u_y + \alpha T^* \right) = \frac{P}{EJ}$$

Equazione di Eulero-

Bernoulli generalizzata ad un gradiente di temperatura.

ESEMPIO



Temperature costanti ed assenza di forze applicate:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{d^2}{dz^2} u_y + \alpha T^* \right) = \frac{P}{EJ}$$

$P = \emptyset$, αT^* indipendente da \hat{z}

$$\rightarrow \frac{d^4}{dz^4} u_y = \emptyset \rightarrow e = \emptyset$$

$$u_y(z) = a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4$$

$$\begin{cases} u_y(\emptyset) = \emptyset \rightarrow a = \emptyset \\ \frac{d}{dz} u_y(\emptyset) = \emptyset \rightarrow b = \emptyset \end{cases}$$

$$u_y(z) = cz^2 + dz^3$$

Per l'estremo libero si ha:

$$\begin{cases} M(z) = 0 \\ T(z) = 0 \end{cases} \rightarrow -EJ \cdot \frac{d^2}{dz^2} u_y(z) - EJ \alpha T^* = 0 \rightarrow 2C + 6d \cdot z = -\alpha T^*$$

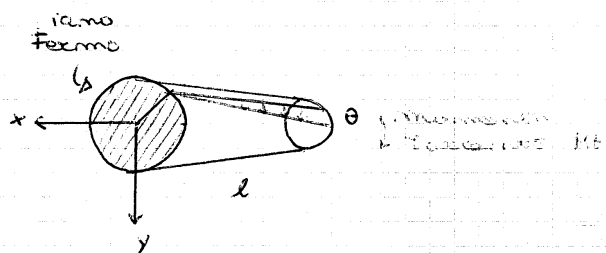
$$\rightarrow T(z) = 0 = \frac{dM(z)}{dz} = -EJ \frac{d^3}{dz^3} u_y(z) = 0 \rightarrow d = 0$$

$$\rightarrow C = -\frac{\alpha T^*}{2}$$

$$u_y(z) = -\frac{\alpha T^*}{2} z^2$$

SOLLECITAZIONI TORSIONALI

θ è l'angolo di torsione causato dall'applicazione del momento torcente M_t .



Tra θ ed M_t sussiste una relazione di linearità:

$$M_t = k \cdot \frac{G}{l} \cdot \theta$$

k torsionale della molla

k : fattore di dimensionalità

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} : \text{Rigidità}$$

DINAMICA DELLE STRUTTURE

Estensione al caso dinamico di quanto visto per il caso statico: siamo interessati a vibrazioni lungo la direzione y perpendicolare all'asse z e viceversa nel punto.

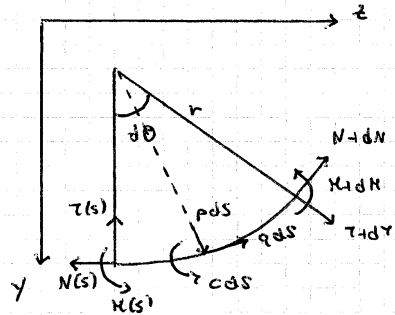
$$-T - q ds \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) + p ds \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) +$$

$$+ (N+dN) \sin(d\theta) + (T+dT) \cos(d\theta) = p ds \frac{d^2 u_y}{dt^2}$$

p : densità lineare di massa.

$p ds$: massa dell'elemento infinitesimo.

Termine
inertiale



$\sin(\theta) \approx \theta$; $\cos(\theta) \approx 1$

$$\frac{dT}{ds} - q \frac{d\theta}{2} + p - (N+dN) \frac{d\theta}{ds} = p \frac{d^2 u_y}{dt^2}$$

Trascurando gli infinitesimi:

$$\frac{dT}{ds} + p - N \frac{d\theta}{ds} = p \frac{d^2 u_y}{dt^2}$$

$$ds = r d\theta \rightarrow \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{dT}{ds} + p - \frac{N}{r} = p \frac{d^2 u_y}{dt^2}$$

$p(s) = \phi$ presenza di carichi radiali distribuiti.

$c(s) = \phi$ presenza di coppie distribuite.

$$\frac{dM}{ds} = c + T = T$$

$$M = \frac{1}{r} E J$$

$$\frac{1}{r} \approx - \frac{d^2 u_y}{dz^2}$$

$$\rightarrow \frac{dT}{ds} - \frac{N}{r} = p \frac{d^2 u_y}{dt^2}$$

$$s \approx z$$

$$T = \frac{dM}{dz} \rightarrow \frac{dT}{dz} = \frac{d^2 M}{dz^2} = E J \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$EJ \cdot \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{y}{r} \right) - \frac{N}{r} - \rho \frac{d^2}{dt^2} u_y = \phi$$

$$EJ \cdot \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{d^2}{dz^2} u_y \right) - N \cdot \frac{d^2}{dz^2} u_y + \rho \cdot \frac{d^2}{dt^2} u_y = \phi$$

N : tensione normale

Ricordando che $\tau_3 = \frac{N}{A}$, nei microsistemi questa tensione potrebbe essere dovuta a stress residui del materiale.

non'idea di poter controllare tecnologicamente tale parametro, N diventa un parametro di progetto.

VIBRAZIONE DI UNA BARRA

Supponiamo assenza di stress residui: $N = \phi$.

$$EJ \cdot \frac{d^4}{dz^2} u_y + \rho \cdot \frac{d^2}{dt^2} u_y = \phi$$

Ci limitiamo a vibrazioni armoniche del tipo:

$$u_y = W(z) \sin(\omega t)$$

l'equazione alle derivate parziali diventa un'equazione ordinaria:

$$EJ \cdot \frac{d^4}{dz^2} W - \rho \omega^2 W = \phi$$

$$\beta^4 = \frac{\rho \omega^2}{EJ} \rightarrow \frac{d^4}{dz^2} W - \beta^4 W = \phi$$

polinomio caratteristico: $\lambda^4 - \beta^4 = \phi$

esso ha radici $\pm \beta$, $\pm j\beta$.

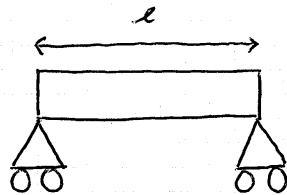
Soluzione generale:

$$W = c_1 e^{\beta z} + c_2 e^{-\beta z} + c_3 e^{j\beta z} + c_4 e^{-j\beta z}$$

$$= A \cosh(\beta z) + B \sinh(\beta z) + C \cos(\beta z) + D \sin(\beta z)$$

A, B, C, D determinate dalle condizioni al contorno.

Configurazione dei vincoli:



$$\begin{cases} W(0) = 0 \rightarrow A + C = 0 \\ W(l) = 0 \\ \frac{d^2 W}{dz^2}(0) = 0 \rightarrow \beta^2 [A \cosh(\beta z) + B \sinh(\beta z) - C \cosh(\beta z) - D \sinh(\beta z)] = 0 \\ \frac{d^2 W}{dz^2}(l) = 0 \end{cases} \quad A - C = 0$$

$$\Rightarrow A = C = 0$$

$$W = B \sinh(\beta z) + D \cosh(\beta z)$$

$$\begin{cases} B \sinh(\beta l) + D \cosh(\beta l) = 0 \\ B \sinh(\beta l) - D \cosh(\beta l) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \sinh(\beta l) & \cosh(\beta l) \\ \sinh(\beta l) & -\cosh(\beta l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} = 0$$

Soluzione banale $B = D = 0$

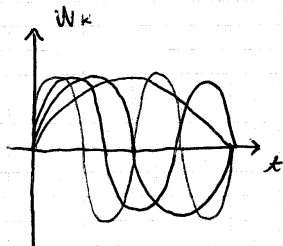
Soluzione non banale:

$$\sinh(\beta l) \cosh(\beta l) = 0 \rightarrow \beta l = k\pi \rightarrow \beta = \frac{k\pi}{l}$$

$B = 0$, D indeterminata.

Si ottengono infinite soluzioni con ampiezza del tipo:

$$W_k = D_k \cosh(\beta z) = D_k \cosh\left(\frac{k\pi}{l} z\right)$$

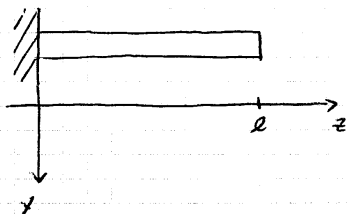


MODI DI VIBRAZIONE:

$k=1$
 $k=2$
 $k=3$
 $k=4$

$$\beta^4 = \frac{pW^2}{EJ} = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 \rightarrow \omega_k = \sqrt{\frac{EJ}{p}} \frac{k^2\pi^2}{l^2}$$

Configurazione dei vincoli:



$$\begin{cases} W(\varphi) = 0 \\ \frac{d}{dz} W(\varphi) = 0 \\ \frac{d^2}{dz^2} W(l) = 0 \\ \frac{d^3}{dz^3} W(l) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d^4}{dz^4} W - \beta^4 W = 0$$

$$\rightarrow W = A \cosh(\beta z) + B \sinh(\beta z) + C \cos(\beta z) + D \sin(\beta z)$$

...

$$C = -A$$

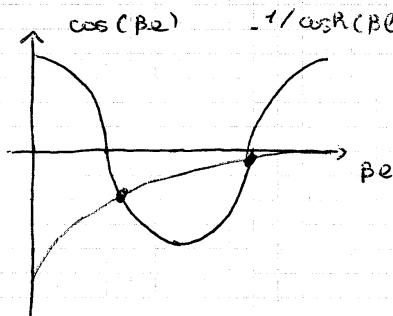
$$D = -B$$

$$A = -B \cdot \frac{\sinh(\beta l) + \sin(\beta l)}{\cosh(\beta l) + \cos(\beta l)} \leftarrow \frac{d^2}{dz^2} W = 0$$

$$A = -B \cdot \frac{\cosh(\beta l) + \cos(\beta l)}{\sinh(\beta l) - \sin(\beta l)} \leftarrow \frac{d^3}{dz^3} W = 0$$

$$\text{Si ricorre a } 1 + \cosh(\beta l) \cos(\beta l) = 0 \rightarrow \cos(\beta l) = -\frac{1}{\cosh(\beta l)}$$

che si risolve graficamente:



$$\beta l = \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad k \geq 3$$

$$\text{Si ottiene: } W = A \cdot \frac{\sinh^2(\beta l)}{\cos(\beta l)} \left[\frac{\sinh(\beta l) - \sin(\beta l)}{\sinh(\beta l) + \sin(\beta l)} - \frac{\cosh(\beta l) - \cos(\beta l)}{\cosh(\beta l) + \cos(\beta l)} \right]$$