

PROGETTAZIONE DI SENSORI E MICROSISTEMI

[Appunti in Breve]

A CURA DI ALESSANDRO PAGHI

PROFESSORE: Andrea Nannini (<http://www.iet.unipi.it/a.nannini/>)

LINK AL CORSO ANNO 2017/2018: <http://elearn.ing.unipi.it/course/view.php?id=1003>

FREQUENTAZIONE: Consigliata.

MATEMATICA ESSENZIALE

PRODOTTO SCALARE TRA VETTORI

$$v \cdot u = v^T \cdot u = v_i \cdot u_i \quad \text{risultato uno scalare}$$

PRODOTTO VETTORIALE

$$a \times b = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

TENSORE DEL 2° ORDINE

Quantità costituita da 8 relazioni scalari che rappresenta una specifica trasformazione.

Simmetrico se : $T_{ij} = T_{ji}$

Antisimmetrico se : $T_{ij} = -T_{ji}$

Componente simmetrica : $T_S = (T + T^t) / 2$

Componente antisimmetrica : $T_A = (T - T^t) / 2$

Tensore antisimmetrico equivale ad un vettore axiale :

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & T_{12} & T_{13} \\ -T_{12} & \emptyset & T_{23} \\ -T_{13} & -T_{23} & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{23} \\ T_{13} \\ -T_{12} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{12} v_y + T_{13} v_z \\ -T_{12} v_x + T_{23} v_z \\ -T_{13} v_x - T_{23} v_y \end{bmatrix}$$

PRODOTTO DIADICO

$$u \otimes v = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} [v_1 v_2 v_3] = u_i v_j$$

PRODOTTO SCALARE TRA TENSORI DEL 2° ORDINE

$$S : T = S_{ij} T_{ij} = \text{tr}(S^t T)$$

CONSIDERAZIONI ALGEBRICHE

$$\nabla = \begin{bmatrix} d/dx \\ d/dy \\ d/dz \end{bmatrix}$$

$$\nabla \varphi = \begin{bmatrix} d\varphi/dx \\ d\varphi/dy \\ d\varphi/dz \end{bmatrix} \quad \text{gradiente}$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = \begin{bmatrix} du_x/dx & du_x/dy & du_x/dz \\ du_y/dx & du_y/dy & du_y/dz \\ du_z/dx & du_z/dy & du_z/dz \end{bmatrix} \quad \text{gradiente vettore}$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial}{\partial x} u_x + \frac{\partial}{\partial y} u_y + \frac{\partial}{\partial z} u_z \quad \text{divergenza vettore}$$

$$\nabla \times \vec{u} = \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u_x & u_y & u_z \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot T = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad \text{divergenza tensore}$$

STATICA E DINAMICA DI SISTEMI ELASTICI

IL CONTINUO

Collezione di punti materiali ed è descritto da campi scalari e vettoriali che ammettono tutte le derivate necessarie rispetto al punto o al tempo

PUNTO MATERIALE

oggetto individuato nello spazio da una terna di componenti e considerato un solido sistema termodinamico.

CORPO ELASTICO DEFORMABILE

Scatto posto ad una sollecitazione si deforma dalla sua posizione di equilibrio \rightarrow nascono tensioni interne che richiamano le particelle nelle posizioni originali.

SPOSTAMENTO

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{x}^0 \quad \text{contribuiscono rotazioni e traslazioni}$$

SPOSTAMENTO DIFFERENZIALE

$$d\vec{u} = d\vec{x} - d\vec{x}^0 \quad \text{non contribuiscono traslazioni}$$

GRADIENTE DI SPOSTAMENTO

Tensore gradiente di spostamento:

$$E(x, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x_x} & \frac{\partial u_x}{\partial x_y} & \frac{\partial u_x}{\partial x_z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x_x} & \frac{\partial u_y}{\partial x_y} & \frac{\partial u_y}{\partial x_z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x_x} & \frac{\partial u_z}{\partial x_y} & \frac{\partial u_z}{\partial x_z} \end{bmatrix}; \quad d\vec{u} = E(x, t) \cdot d\vec{x}$$

$$\begin{matrix} D\vec{u} \\ \text{"} \\ E(x, t) \end{matrix} = \begin{matrix} D\vec{x} \\ \text{"} \\ F(x, t) \end{matrix} - \begin{matrix} D\vec{x} \\ \text{"} \\ I \end{matrix} \quad \rightarrow \quad E(x, t) = F(x, t) - I.$$

F: tensore gradiente di deformazione

ad $E(x, t)$ come rotazioni e traslazioni.

DEFORMAZIONI E STRAIN

$\Delta^i = |dx|^2 - |dX|^2$ misura per rotazioni e traslazioni

$$\Delta^i = dX^t [F^t F - I] dX$$

$S = \frac{1}{2} [F^t F - I]$: Tensore di Strain o di deformazione

$$= \frac{1}{2} [\epsilon^t + \epsilon + \epsilon^t \epsilon] = \frac{1}{2} [\nabla u^t + \nabla u + \nabla u^t \nabla u]$$

consente di calcolare la deformazione Δ^i utilizzando le componenti del campo di spostamento u .

Per piccole deformazioni: $S = \frac{1}{2} [\nabla u^t + \nabla u] = \frac{1}{2} [\epsilon^t + \epsilon]$
↑ componente simmetrica di ϵ

Semplificando:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} du/dx & dv/dx & dw/dx \\ dv/dy & du/dy & dw/dy \\ dw/dz & dv/dz & du/dz \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

ed

$r_j = i$ con $j = x, y, z$.

$$S = \frac{1}{2} [\epsilon^t + \epsilon]$$

S_{ii} : legati alle rotazioni potenziali in direzione i .

S_{ij} : legati alle deformazioni angolari del corpo sul piano ij .

Operatore gradiente simmetrico ∇_s :

$$S = \nabla_s \cdot \vec{u} \quad , \quad \nabla_s \cdot \vec{u} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^t)$$

mat $3 \times 3 \equiv$ vettore 6 elementi

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1/2 a_6 & 1/2 a_5 \\ 1/2 a_6 & a_2 & 1/2 a_4 \\ 1/2 a_5 & 1/2 a_4 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S = \begin{bmatrix} \partial u_x / \partial x \\ \partial u_y / \partial y \\ \partial u_z / \partial z \\ \partial u_z / \partial y + \partial u_y / \partial z \\ \partial u_z / \partial x + \partial u_x / \partial z \\ \partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x \end{bmatrix}$$

∇_s in forma matriciale:

$$S_i = \nabla_{z_j} \cdot u_j$$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & \phi & \phi \\ \phi & \partial/\partial x & \phi \\ \phi & \phi & \partial/\partial z \\ \phi & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & \phi & \partial/\partial x \\ \partial/\partial x & \phi & \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

FORZE E STRESS

Forze di volume : agiscono sulle singole particelle

Forze di superficie : agiscono sulle superfici che limitano il corpo.

EQUAZIONE DELLA DINAMICA

$$\int_{S_{sup}} p \, dS_{sup} + \int_{V_{cor}} \rho_{cor} \, dV_{cor} = \int_{V_{cor}} \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \, dV_{cor}$$

\uparrow Risultante F_{sup} \uparrow Risultante F_{vol} \uparrow $F = m \cdot a$

TENSORE DI STRESS

In un corpo elastico deformato nascono tensioni interne che tendono a far tornare ciascuna particella nella sua posizione di equilibrio.

VEETTORE DI STRESS : $T_m(\hat{m}) = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$

$$T_m = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{yx} & T_{zx} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{zy} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix}$$

Tensore di Stress.

$$[T_{ij}] = \frac{F}{S_{sup}} = P_r$$

T è simmetrico.

$$p = T \cdot \hat{m}$$

$$\text{div} T = \int_{S_{sup}} T \cdot \hat{m} \, dS_{sup} = \int_{V_{cor}} \nabla \cdot T \, dV_{cor}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot T = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F_{vol}$$

$$T = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & T_6 & T_5 \\ T_6 & T_2 & T_4 \\ T_5 & T_4 & T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix}$$

LEGGE DI HOOKE

Relazione di linearità per Stress e Strain per piccoli deformazioni.

$$T_{ij} = c_{ijkl} \cdot S_{kl}$$

c_{ijkl} : tensore del 4° ordine delle rigidità

$$S_{ij} = s_{ijkl} \cdot T_{kl}$$

s_{ijkl} : tensore del 4° ordine delle compliance.

Notazione ridotta :

$$T_I = C_{IJ} \cdot S_J$$

$$S_I = s_{IJ} \cdot T_J$$

$$\rightarrow S_{IJ} = C_{IJ}^{-1}$$

$$T = c : S$$

$$S = s : T$$

Rigidità di un materiale isotropico elastico :

$$C_{IJ} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix}$$

è simmetrica.

Per un materiale isotropico elastico : $C_{12} = C_{11} - 2C_{44}$.

$$C_{IJ} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$\text{con } \lambda = C_{11}$$

$$\mu = C_{44}$$

Modulo di Young: $E = \frac{T_3}{S_3}$

→ angolare data dal rapporto in direzione z tra stress e strain.

Rapporto di Poisson: $\nu = -\frac{S_1}{S_2} = -\frac{S_2}{S_3}$

→ deformazione in direzione trasversale a quella in cui è applicato il carico

le direzioni x ed y si comportano nelle stesse maniere rispetto allo strain lungo z.

$$\nu = \frac{C_{12}}{C_{11} + C_{12}}, \quad E = \frac{C_{11}^2 + C_{11}C_{12} - 2C_{12}^2}{C_{11} + C_{12}}$$

N.B: l'applicazione di uno stress lungo un asse può provocare strain lungo gli altri assi.

Besogna di deformazione su certi assi implica la nascita di tensioni interne

MODULO DI ELASTICITÀ DI VOLUME

$$K = \frac{C_{11} + 2C_{12}}{3}$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \pm 3 |S| \begin{bmatrix} K \\ K \\ K \\ \varphi \\ \varphi \\ \varphi \end{bmatrix} = \pm \frac{dV_e' - dV_e}{dV_e} \begin{bmatrix} K \\ K \\ K \\ \varphi \\ \varphi \\ \varphi \end{bmatrix}$$

il modulo di elasticità di volume moltiplicato per le variazioni di volume percentuali fornisce T.

LEGGE DI HOOKE IN PRESENZA DI DILATAZIONI TERMICHE

$$\frac{dV_{\text{el}}' - dV_{\text{el}}}{dV_{\text{el}}} = \alpha(\tau - \tau_0)$$

$$T^z = \alpha(\tau - \tau_0) \begin{bmatrix} K \\ K \\ K \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

LEGGE DI HOOKE IN PRESENZA DI STRAIN E DILATAZIONI TERMICHE

$$T = c : S + T^z \quad \text{con } T^z = K\alpha I(\tau - \tau_0)$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K\alpha(\tau - \tau_0) \\ K\alpha(\tau - \tau_0) \\ K\alpha(\tau - \tau_0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot T = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F_{\text{ext}}$$

$$\nabla \cdot (c : \nabla_s u + T^z) = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F_{\text{ext}}$$

$$\nabla \cdot c : \nabla_s u + K\alpha \nabla \tau = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F_{\text{ext}}$$

$$F_{\text{ext}} = \phi \Rightarrow \nabla \cdot c : \nabla_s u - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -K\alpha \nabla \tau$$

\uparrow
 termine forzante

espansione della
 cande

N.B: c ed s dipendono dall'orientamento del sistema di riferimento

→ rapporto tra T ed S non costante nello spazio.

ENERGIA DI DEFORMAZIONE

Densità volumetrica di lavoro δW_T compiuto dalle forze di stress $\nabla \cdot T$ quando si fa uno spostamento δu internamente dovuto alla deformazione.

$$\delta W_T = (\nabla \cdot T) \cdot \delta u = -T : \delta S = -T_i \delta S_i$$

MODELLI TERMODINAMICI DI SENSORI E MICROSISTEMI

1° PRINCIPIO TERMODINAMICA:

$$\text{In sistemi privi di perdite } \delta U = \delta W = \delta Q$$

2° PRINCIPIO TERMODINAMICA:

$$\delta Q = T \delta S$$

FORMA DIFFERENZIALE ESATTA:

$$\delta F = p_1(x_1, \dots, x_m) dx_1 + p_2(x_1, \dots, x_m) dx_2 + \dots + p_m(x_1, \dots, x_m) dx_m$$

$$\text{con } p_1 = \partial F / \partial x_1$$

⋮

$$p_m = \partial F / \partial x_m$$

SOLIDO DEFORMABILE SOTTO POSTO A CAMPO ELETTROMAGNETICO

$$\delta W = -T_i \delta S_i - E_i \delta D_i - H_i \delta B_i$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 lavoro di lavoro lavoro
 deformazione elettrico magnetico

$$\delta U = \delta Q - \delta W = T \delta S + T_i \delta S_i + E_i \delta D_i + H_i \delta B_i$$

δU è una forma diff. esatta.

var. indep.: S, S_i, D_i, B_i

$$T = \left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_{S_i, D_i, B_i}$$

$$E_i = \left. \frac{\partial U}{\partial D_i} \right|_{S, S_i, B_i}$$

$$T_i = \left. \frac{\partial U}{\partial S_i} \right|_{S, D_i, B_i}$$

$$H_i = \left. \frac{\partial U}{\partial B_i} \right|_{S, S_i, D_i}$$

Stagelo ovvero come nel indep: T, S_z, D_z, B_z :

$$F = U - T, S \quad \text{energia libera di Helmholtz}$$

$$dF = dU - T dS - S dT = -dW - S dT = -S dT + T_z dS_z + E_z dD_z + H_z dB_z$$

$$S = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_{S, D, B}$$

$$E_z = \left. \frac{\partial U}{\partial D_z} \right|_{T, S, B}$$

$$T_z = \left. \frac{\partial U}{\partial S_z} \right|_{T, D, B}$$

$$H_z = \left. \frac{\partial U}{\partial B_z} \right|_{T, S, D}$$

SISTEMA APERTO RIGIDO

no lavoro dovuto alle deformazioni:

$$dW = P dV_e - \mu dN - V dQ = P dV_e - \bar{\mu} dN$$

\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow
 lavoro lavoro lavoro potenziale
 meccanico chimico elettrico elettrochimico
 $\bar{\mu} = \mu + zqV$

$$dF = -dW - S dT = -P dV_e + \bar{\mu} dN - S dT$$

SISTEMA ELETTROMECCANICO CON ATTUAZIONE ELETTRICA

$$dW_e = f_e dx - V dQ$$

\uparrow \uparrow
 lavoro lavoro
 meccanico elettrico.

$$dU = T dS - f_e dx + V dQ$$

$$dF = -dW_e - S dT = -f_e dx + V dQ - S dT$$

$$f_e = - \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{Q, T} = \left. \frac{\partial W_e}{\partial x} \right|_Q$$

Q, T var. indep.

Stagelo V, T var. indep.

$$F' = F - QV$$

$$dF' = -f_e dx - S dT - Q dV$$

$$U^i = QV - U \quad \text{energia}$$

$$F^i = -U^i - T_j S^j$$

$$dU^i = \underbrace{QdV + f_e dx}_{\text{electromechanical terms}} - TdS^i$$

$$f_e = - \left. \frac{\partial F^i}{\partial x} \right|_{V, T} = \left. \frac{\partial U^i}{\partial x} \right|_{V, S^i} = \left. \frac{\partial U^i}{\partial x} \right|_V$$

$$dU^i = QdV + f_e dx$$

TENSORE DI STRESS DI MAXWELL

campo elettrico E .

$$F = q \cdot E$$

$$f = \rho \cdot E = \nabla \cdot \left\{ \epsilon \left[(E \otimes E) - \frac{1}{2} \mathbb{I} (E \cdot E) \right] \right\} \leftarrow \text{La densità di forza e la divergenza del Tensore di Maxwell.}$$

$$\rho = \nabla \cdot D = \nabla \cdot \epsilon E$$

$$T_M = \epsilon \left[(E \otimes E) - \frac{1}{2} \mathbb{I} (E \cdot E) \right] \quad \text{tensore simmetrico di Maxwell}$$

$$F = \int_{\text{vol}} f \, d\text{vol} = \int_{\text{vol}} \nabla \cdot T_M \cdot d\text{vol} = \int_{\text{sup}} T_M \cdot \hat{n} \, d\text{sup}$$

STRUTTURE

VINEOLI

Strutture sottili in cui sui bordi vengono applicate forze e momenti

-> Sono restrizioni della mobilità del corpo e possono da nascita di reazioni vincolari.

IPOTESI DI DE SAINT VENANT

Risolve il problema elastico per una trave

-> tensioni normali sul piano secante una trave nulla, uniche tensioni vincolari sono quelle tangenti.

Risulta:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & T_{xz} \\ 0 & 0 & T_{yz} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{bmatrix}$$

$$T_z = T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xz} \\ T_{yz} \\ T_{zz} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow z$$

$$\vec{T}_z = \begin{bmatrix} \int_A T_{xz} dS \\ \int_A T_{yz} dS \\ \int_A T_{zz} dS \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Risultante su} \\ \text{tutta la sup. A} \end{array} \right\}$$

$$[-]_z = \begin{bmatrix} \int_A y T_{zz} dS \\ \int_A -x T_{zz} dS \\ \int_A (x T_{yz} - y T_{xz}) dS \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{momenti flessionali} \\ \text{momento torcente} \end{array} \right\}$$

Sono le caratteristiche di deformazione.

TRAVI PIANE AD ASSE CURVILINEO

asse equicarro, α da curvatura $\frac{z}{R} \rightarrow \phi$:

$$\frac{dN}{dz} = -q$$

$$\frac{dT}{dz} = -p$$

$$\frac{dM}{dz} = c + T$$

$$\frac{d^2M}{dz^2} = \frac{dc}{dz} - p$$

$$\text{Se } c = \phi \rightarrow \frac{d^2M}{dz^2} = -p$$

FLESSIONI DI BARRE

Equazione di Morera o di Eulers - Bernoulli:

$$\frac{d^4}{dz^4} u_y = \frac{P}{E \cdot J}$$

P : carichi distribuiti

J : momento d'inerzia

E : modulo di Young

Equazione di Morera o di Eulers - Bernoulli

generalizzata ad un gradiente di temperatura

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{d^2}{dz^2} u_y + \alpha T^* \right) = \frac{P}{E \cdot J}$$

$$T^* = \frac{T_i - T_e}{H}$$

H : operatore della trave.

DINAMICA DELLE STRUTTURE

$$E \cdot J \cdot \frac{d^4}{dz^4} u_y - N \cdot \frac{d^2}{dz^2} u_y + p \cdot \frac{d^2}{dt^2} u_y = \phi$$

PIEZORESISTIVITÀ

$$\epsilon = \rho \cdot J$$

ρ simmetrico

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_6 & \rho_5 \\ \rho_6 & \rho_2 & \rho_4 \\ \rho_5 & \rho_4 & \rho_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \\ \rho_6 \end{bmatrix}$$

Per un materiale cristallino cubico (Si):

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \\ \rho \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Descrivere piezoresistività:

$$\begin{bmatrix} \rho_1^T \\ \rho_2^T \\ \rho_3^T \\ \rho_4^T \\ \rho_5^T \\ \rho_6^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \\ \rho \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} \delta\rho_1 \\ \delta\rho_2 \\ \delta\rho_3 \\ \delta\rho_4 \\ \delta\rho_5 \\ \delta\rho_6 \end{bmatrix}$$

\uparrow ρ im
 assenza
 di stress

\uparrow ρ im
 presenza
 di stress

con

$$\begin{bmatrix} \delta\rho_1 \\ \delta\rho_2 \\ \delta\rho_3 \\ \delta\rho_4 \\ \delta\rho_5 \\ \delta\rho_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{12} & \pi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix}$$

\uparrow
 coefficienti piezoresistivi
 π

\uparrow
 T

PIEZOELETTRICITA'

lega il mondo elettrico al mondo acustico.

Si sottopone un sistema a sollecitazioni meccaniche ed elettriche e si calcolano le risposte.

→ Risposta meccanica: variazione di lunghezza totale del sistema

→ Risposta elettrica: variazione del momento di dipolo elettrico totale.

Un solido non piezoelettrico possiede un centro di simmetria elettrica:

Sollecitazione meccanica \Rightarrow risposta meccanica

Sollecitazione elettrica \Rightarrow risposta elettrica

Un solido piezoelettrico è totalmente neutro ma possiede un momento di dipolo elettrico \neq permanente.

Sollecitazione meccanica \Rightarrow risposta meccanica + elettrica

Sollecitazione elettrica \Rightarrow risposta elettrica + meccanica

Equazione costitutiva di un dielettrico cristallino:

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j = \epsilon_0 E_i + P_i, \quad P_i: \text{polarizzazione}$$

→ un dielettrico sottoposto ad un campo elettrico manifesta una polarizzazione.

EFFETTI PIEZOELETTRICI:

DIRETTO: un materiale dielettrico si polarizza sia in seguito all'applicazione di un campo elettrico che all'applicazione di uno stress.

INVERSO: applicando ad un materiale un campo elettrico si osserva una deformazione meccanica.

EQUAZIONI COSTITUTIVE PIEZOELETTRICHE

$$D_i = \epsilon_{ij}^T E_j + d_{ij} T_j$$
$$S_i = d_{ij} E_j + s_{ij}^E T_j$$

$$\begin{bmatrix} D_i \\ S_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{ij}^T & d_{ij} \\ d_{ij} & s_{ij}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ T_j \end{bmatrix}$$

ϵ : permittività

d : tensore piezoelettrico di strain

s : compliance

D : spostamento elettrico

E : campo elettrico

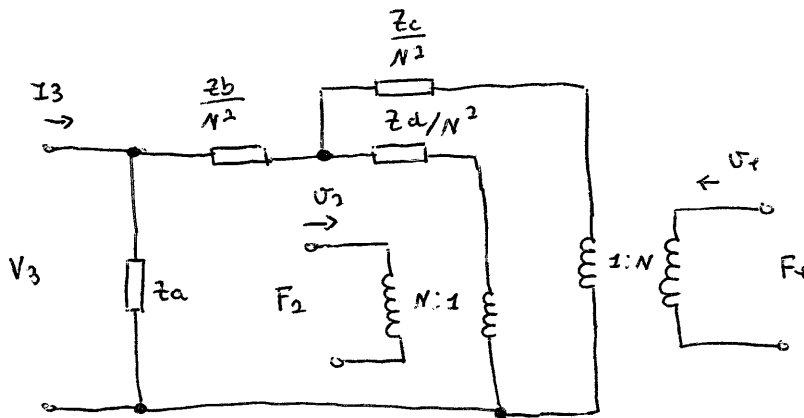
S : strain

Matrice elasto-piezoelettrica.

CIRCUITO EQUIVALENTE DI MASON

Schematica di funzionamento di un trasduttore piezoelettrico funzionante in modo opooste.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = -j \begin{bmatrix} \frac{z_0}{\tan kd} & \frac{z_0}{\sin kd} & \frac{hx5}{\omega} \\ \frac{z_0}{\sin kd} & \frac{z_0}{\tan kd} & \frac{hx5}{\omega} \\ \frac{hx5}{\omega} & \frac{hx5}{\omega} & \frac{1}{\omega C_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{Equazioni elasto-elettriche.}$$



$$Z_c = Z_d = j z_0 \tan\left(\frac{kd}{2}\right)$$

$$\text{con } N = hx5 \cdot C_0$$

$$Z_b = \frac{z_0}{j \sin(kd)} - \frac{N^2}{j \omega C_0}$$

$$Z_a = \frac{1}{j \omega C_0}$$

C_0 : capacità clamp.