LABORATORIO DI MISURE ELETTRONICHE

[Appunti di Teoria delle Misurazioni]

A CURA DI ALESSANDRO PAGHI

PROFESSORE: Ada Fort (http://www3.diism.unisi.it/people/person.php?id=27)

LINK AL CORSO ANNO 2015/2016:
http://www3.diism.unisi.it/FAC/index.php?bodyinc=didattica/inc.insegnamento.php&id=55147&aa=2015

FREQUENTAZIONE: Consigliata.

PROCESSO DI MISURA (MISURAZIONE)

Procedimento in grado di quantificare le proprietà di un oggetto o di un fenomeno.

Essenzialmente è un confronto diretto o indiretto con un campione.

Il risultato della misurazione non coincide col valore vero ma si discosta da esso di una quantità detta errore.

X_v: valore vero e: errore.

X_m: valore misurato

$$X_v - X_m = e$$

Il risultato di una misurazione dovrebbe essere composto da:

- un numero N, detto valore misurato, che ci fornisce la stima quantitativa del misurando;
- un'unità di misura [U], che individua il campione;
- un numero u, detto incertezza, che fornisce informazioni sull'errore;

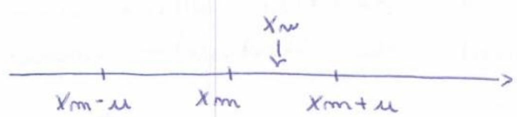
$$X_m = N[U] + u.$$

INCERTEZZA

Parametro associato al risultato di una misura, che descrive l'intervallo dei valori che possono essere ragionevolmente attribuiti al misurando.

N.B. Per ERRORE si intende una grandezza inconoscibile che può essere trattata come una v.a.

Per INCERTEZZA si intende un valore che caratterizza la distribuzione di probabilità dell'errore, in particolare la sua larghezza.



ACCURATEZZA

Viene inteso come il massimo errore:

$$e_{MAX} = X_v - X_m \big|_{MAX}$$

PRECISIONE

Vicinanza dei risultati di una misurazione alla media aritmetica ottenuta con prove ripetute.

RIPETIBILITÀ

Vicinanza dei risultati ottenuti da prove ripetute nelle stesse condizioni operative.

RIPRODUCIBILITÀ

Vicinanza dei risultati ottenuti da prove ripetute variando le condizioni operative.

GRANDEZZA DI INFLUENZA

Grandezza che non è oggetto della misurazione ma che influenza il risultato.

ERRORE

e_T : errore totale

e_A : errore accidentale $\qquad e_T = e_A + e_S$

e_S : errore sistematico

ERRORE SISTEMATICO

Tutti gli errori che si ripetono con lo stesso segno e lo stesso valore ogni volta si ripeta la misurazione nelle stesse condizioni (errore strumentale).

ERRORE ACCIDENTALE

Errori che si presentano con valore e segno diversi ogni volta si ripete la misurazione nelle stesse condizioni (causati da fluttuazioni delle condizioni ambientali, presenza di disturbi variabili, rumore elettronico ...)

N.B. Entrambi i contributi sono trattati come v.a.

La ripetizione della prova porta diverse realizzazioni della v.a. Errore Accidentale, mentre l'Errore Sistematico è legato alla stessa realizzazione della v.a.

Per avere una diversa realizzazione di e_s è necessario cambiare lo strumento.

ERRORE ASSOLUTO

$$e_r = x_v - x_m$$

ERRORE RELATIVO

$$\varepsilon = \frac{x_v - x_m}{x_v} \approx \frac{x_v - x_m}{x_m} .$$

RICHIAMO DI STATISTICA

Dato uno spazio di eventi S si definisce $P(A)$ la probabilità della manifestazione di un evento A.

$P(A)$ gode di:

$P(A) \geq \phi$

$P(A) \leq 1$, $P(A=S) = P(S) = 1$.

PROBABILITÀ DI UN EVENTO

X: insieme degli eventi

$X = \{x_i\}$

$$p_i = p(x_i) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_i}{N} .$$

Dati due eventi A, B:

PROBABILITÀ CONGIUNTA

$P(A,B) = P(A \cap B)$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

$$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$$

$$P(A,B) = P(A|B)\, P(B)$$

Se gli eventi sono statisticamente indipendenti:

$$P(A,B) = P(A) \cdot P(B)$$

VARIABILE ALEATORIA (V.A.)

X v.a. rappresenta una mappatura da uno spazio degli eventi Ω su uno spazio di numeri reali.

DISTRIBUZIONE CUMULATIVA DI PROBABILITA'

$F_X(x) = P(X \le x)$

Proprietà:

1) $\emptyset \le F_X(x) \le 1$

2) $F_X(x)$ non decrescente

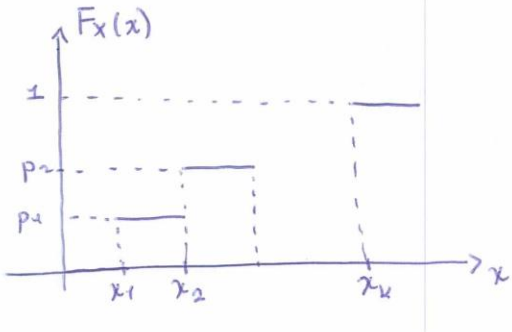
3) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = \emptyset$

4) $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

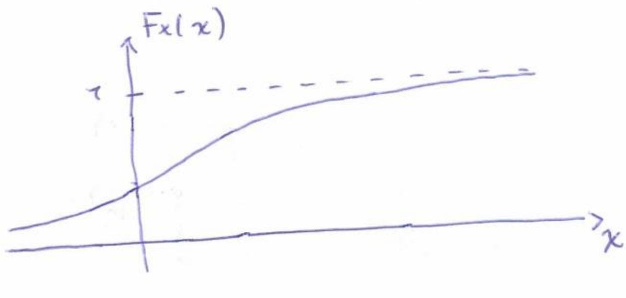
5) $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$

6) $P(X=a) = F_X(a) - F_X(a^-)$

v.a. discreta



v.a. continua



DENSITÀ DI PROBABILITÀ

Proprietà:

1) $f_X(x) \geq \emptyset$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

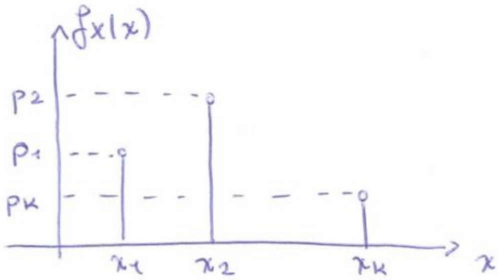
3) $P(X \in A) = \int_A f_X(x)\,dx$

4) $P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$

5) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$

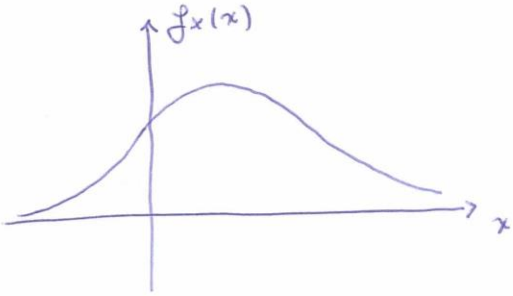
v.a. discreta

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{N} p(x_i)\,\delta(x - x_i)$$



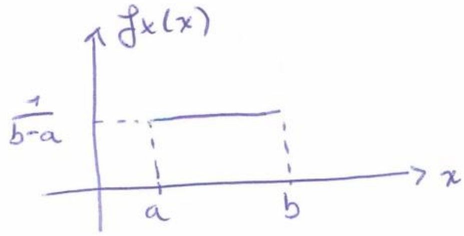
v.a. continua

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$



DENSITÀ DI PROBABILITÀ UNIFORME

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ \emptyset & \text{altrove} \end{cases}$$



DENSITÀ DI PROBABILITÀ GAUSSIANA

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_x} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

MEDIA di v.a. X

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx$$

MEDIA di una funzione della v.a. $g(x)$

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx$$

MOMENTO DI ORDINE K

$$\mu_k = E[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)\, dx$$

$$k=1 \Rightarrow E[X^1] = E[X]$$

MOMENTO CENTRATO DI ORDINE K

$$m_k = E[(X-\mu_1)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_1)^k f_X(x)\, dx$$

VALORE ATTESO

$$\mu = E[X] = \sum_{i=1}^{N} x_i\, p(x_i) \qquad \text{v.a. discreta}$$

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx \qquad \text{v.a. continua}$$

Rappresenta il baricentro della funzione di densità di probabilità.

VARIANZA

$$\sigma_X^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_{i=1}^{N} (x_i-\mu)^2\, p(x_i) \qquad \text{v.a. discreta}$$

$$\sigma_X^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)\, dx \qquad \text{v.a. continua.}$$

N.B: $\sigma_X^2 = E\left[(X - E[X])^2\right] = E[X^2] - E[X]^2$.

DEVIAZIONE STANDARD

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

Descrive lo scostamento dei valori dal valor medio.

$f_X(x)$ uniforme:

$$\mu_X = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$f_X(x)$ gaussiana:

$$\mu = \mu_X$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_X^2$$

$$P\{\mu_X - \sigma_X < X \leq \mu_X + \sigma_X\} = 0{,}68$$

$$P\{\mu_X - 2\sigma_X < X \leq \mu_X + 2\sigma_X\} = 0{,}95$$

$$P\{\mu_X - 3\sigma_X < X \leq \mu_X + 3\sigma_X\} = 0{,}997$$

V.A. STANDARDIZZATA

$$y = \frac{X-\mu_x}{\sigma_x}$$

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$f_x(x)\Big|_{\substack{\mu_x=\emptyset \\ \sigma_x=1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y^2/2}$$

VARIABILI ALEATORIE MULTIPLE

X v.a. con $f_x(x)$

Y v.a. con $f_y(y)$

$$F_{x,y}(x,y) = P\{X \le x,\ Y \le y\}$$

$$f_{x,y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{x,y}(x,y)$$

Se X, Y statisticamente indipendenti:

$$f_{x,y}(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

Proprietà:

1) $F_x(x) = F_{x,y}(x, \infty)$

2) $F_y(y) = F_{x,y}(\infty, y)$

3) $f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x,y)\, dy$

4) $f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x,y)\, dx$

5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x,y)\, dx\, dy = 1$

6) $F_{x,y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{x,y}(u,v)\, du\, dv$

MEDIA di una funzione di più v.a.

$$E[g(x,y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\, f_{x,y}(x,y)\, dx\, dy$$

Se $g(x,y) = X \cdot Y \Rightarrow E[X \cdot Y] = corr(X,Y)$.

Se $g(x,y) = (X-\mu_x)(Y-\mu_y) \Rightarrow E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)] = cov(X,Y)$.

COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE

$$\rho_{x,y} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y} \qquad \begin{cases} \rho_{x,y} = \emptyset & : \text{v.a. scorrelate} \\ \rho_{x,y} = 1 & : \text{dipendenza totale} \end{cases}$$

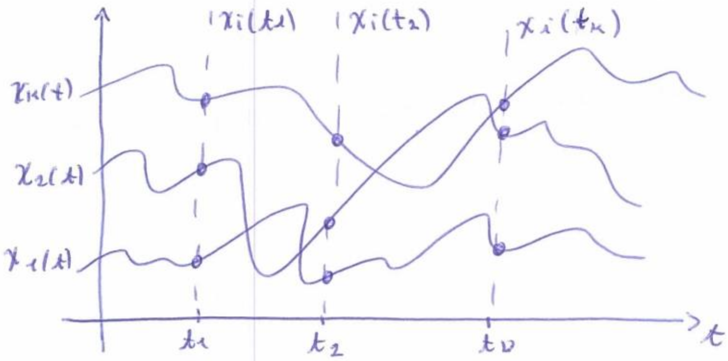
Se X, Y sono statisticamente indipendenti

$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$

PROCESSO STOCASTICO

Si intende una v.a. indicizzata $X(t)$.

Ad ogni realizzazione $x_i(t)$ di $X(t)$ viene associato un segnale che evolve nel tempo e a cui corrisponde, ad ogni istante di tempo t_k, una v.a. $X(t_k)$ descritta da $f_{X(t_k)}(x)$ con realizzazione $x_i(t_k)$.



$x_1(t), \ldots, x_k(t)$ realizzazioni di $X(t)$

$x_i(t_1), \ldots, x_i(t_k)$ realizzazioni di $X(t_k)$

MEDIA DI INSIEME

$$\mu_X(t_0) = E[X(t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_{X(t_0)}(x) \, dx$$

FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE PER UN SEGNALE DETERMINISTICO

$$R_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \, x^*(\tau - t) \, d\tau$$

Per un processo stocastico:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 \, f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2) \, dx_1 dx_2 = E\left[X(t_1) X(t_2)\right].$$

PROCESSO STAZIONARIO IN SENSO STRETTO

Se le sue proprietà statistiche non dipendono dall'istante temporale scelto

PROCESSO STAZIONARIO IN SENSO LATO

- $\mu_x(t)$ è indipendente dal tempo

$\rightarrow \mu_x(t) = E[X(t)] = cost$

- $R_{xx}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = R_x(t_1, t_2)$ dipende solo da $\tau = t_2 - t_1$.

$\rightarrow R_{xx}(t_1, t_2) = R_x(\tau)$

MEDIA TEMPORALE

Fissata una realizzazione $x(t)$ di $X(t)$:

$$A\{x(t)\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, dt$$

FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE NEL TEMPO

$$R(\tau) = A\{x(t)\, x(t+\tau)\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, x(t+\tau)\, dt$$

PROCESSO REGOLARE

Se per ogni realizzazione si ottengono le stesse medie temporali.

$\rightarrow A\{x(t)\} = cost$.

PROCESSO ERGODICO

Se medie di insieme e medie temporali possono essere scambiate

Il concetto di ergodicità è molto importante perché stabilisce l'equivalenza dei due domini: il dominio delle realizzazioni e il dominio temporale.

Stabilisce di poter acquisire informazioni complete sul processo a partire dall'osservazione su un periodo infinito di una sola realizzazione.

Supponendo un processo stazionario, regolare e ergodico:

DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA (D.S.P.)

$$P(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Rappresenta la distribuzione spettrale media della potenza del processo.

$$P(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} E\left[\left| F_T(f) \right|^2 \right]$$

$F_T(f)$: trasformata di Fourier del segnale $x(t)$ troncato in una finestra temporale di durata T.

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)^2\, dt = E[x^2] = R(\emptyset) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f)\, df$$

PROCESSO BIANCO

$$P(f) = \frac{N_0}{2}$$

$$R_x(\tau) = F^{-1}\left[P(f)\right] = \frac{N_0}{2} \cdot \delta(\tau)$$

Per ogni $\tau \neq \emptyset \Rightarrow R_x(\tau) = \emptyset$

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f)\, df = \infty \, .$$

Per un processo bianco, le v.a. relative a due istanti generici, purchè diversi, risultano scorrelate. Se il processo è gaussiano, le due v.a. risultano anche indipendenti.

Se un processo osservato ha una banda finita:

$$P(f) = \begin{cases} N_0/2 & -B < f < B \\ \emptyset & \text{altrove} \end{cases}$$

$$P = N_0 \cdot B$$

$$R_x(\tau) = N_0 B \,\text{sinc}(2\pi B \tau)$$

Per un sistema LTI:

$$P_i(f) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow P_o(f)$$

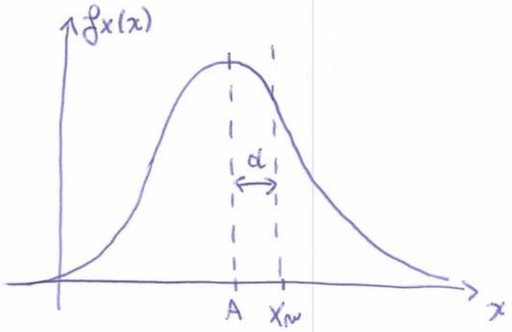
$$P_o(f) = |H(f)|^2 \cdot P_i(f)$$

TEORIA DELLA MISURAZIONE

STIMA DELL' INCERTEZZA

TIPO A : Parte dell'incertezza che può essere stimata con metodi statistici, attraverso l'analisi di prove ripetute;

TIPO B : Parte dell'incertezza che può essere valutata attraverso informazioni a priori;



Rappresenta la densità di probabilità del valore misurato al ripetersi della misurazione.
Rappresenta cioè la probabilità che al ripetersi della misura si ottenga il valore misurato x.
$x - A$ rappresenta la v.a. errore accidentale, e la larghezza della distribuzione determina il valore dell'incertezza di tipo A.
La deviazione d, è la v.a. errore sistematico, e la sua distribuzione determina l'incertezza di tipo B.

STIMA DELL'INCERTEZZA DI TIPO A

Supponiamo N misure ripetute x_i, i risultati delle singole misure x_i sono le realizzazioni di N v.a. X_i iid (identiche e identicamente distribuite).

Si stima A attraverso la media aritmetica $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

$\bar{x}$ è una realizzazione della v.a. $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i$ che gode di queste proprietà:

1) $\bar{X}$ è NON POLARIZZATO, ovvero converge in media.

$$E[\bar{X}] = E[X_i] = A.$$

2) La stima è EFFICIENTE nel senso dei minimi quadrati.

$$E[(\bar{X}-A)^2] \leq E[(\bar{X}_J - A)^2]$$

in cui $\bar{X}_J$ rappresenta qualunque altra stima di A.

3) La stima è CONSISTENTE, ovvero converge in probabilità.

$$\lim_{N \to \infty} P(|\bar{X}-A| \geq \varepsilon) = \emptyset \quad , \forall \varepsilon > \emptyset$$

Da 1) si ottiene che la media aritmetica è una v.a. con densità di probabilità centrata su A.

La varianza si ottiene da:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = E[(\bar{X}-A)^2] = E\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i - A\right)^2\right] =$$

$$= E\left[\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} (X_i - A)^2\right] + E\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (X_i - A) \frac{1}{N} \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq i}}^{N} (X_J - A)\right] =$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} E[(X_i - A)^2] + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq i}}^{N} \cancel{E[(X_i - A)(X_J - A)]}^{\to \emptyset}_{\text{v.a. iid}} = \frac{\sigma_X^2}{N}.$$

La varianza di $\bar{x}$ diminuisce al crescere di N

$$\lim_{N \to \infty} \sigma^2_{\bar{x}} = \emptyset$$

L'incertezza di tipo A viene valutata attraverso la stima della varianza della media aritmetica $\bar{X}$.

Per stimare la varianza a partire dai risultati di prove ripetute:

$$S_x^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$$

Questo stimatore è NON POLARIZZATO, EFFICIENTE e CONSISTENTE.

$$E[S_x^2] = E\left[\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2\right] = E\left[\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - A + A - \bar{x})^2\right] =$$

$$= E\left[\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - A)^2\right] + E\left[\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - A)^2\right] - 2E\left[\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - A)(\bar{x} - A)\right] =$$

$$= \frac{N}{N-1}\sigma_x^2 + \frac{1}{N-1}\sigma_x^2 - 2E\left[\frac{N}{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - A)(\bar{x} - A)\right]\right. =$$

$$= \frac{N}{N-1}\sigma_x^2 + \frac{1}{N-1}\sigma_x^2 - 2E\left[\frac{N}{N-1}(\bar{x} - A)^2\right] = \frac{N}{N-1}\sigma_x^2 - \frac{1}{N-1}\sigma_x^2 = \sigma_x^2$$

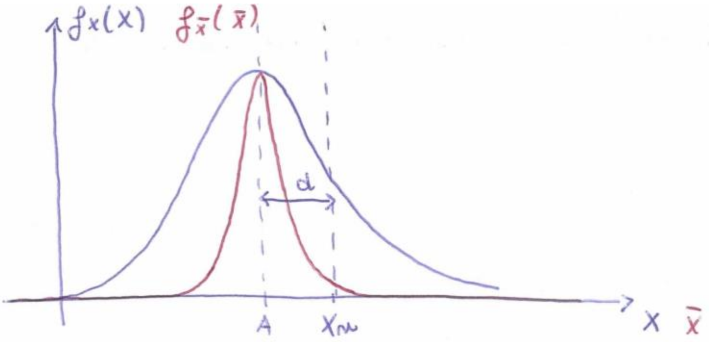
A noi interessa stimare $\sigma^2_{\bar{x}}$, ma $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{1}{N} \cdot \sigma_x^2$

quindi uso questo stimatore:

$$S^2_{\bar{x}} = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$$

da cui si ricava la deviazione standard sperimentale:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}\ .$$



con $N=30$.

nel caso avessimo a disposizione i risultati di N prove ripetute, il risultato della misura sarà dato dalla media aritmetica, mentre l'incertezza di tipo A sarà data dalla deviazione standard sperimentale della media aritmetica.

INTERVALLI DI CONFIDENZA

Fissata una probabilità p, si vuole determinare quale sia l'ampiezza dell'intervallo centrato in $\bar{x}$ in cui cade A con probabilità p.

$\bar{X}$ segue una gaussiana:

$P(|A-\bar{x}| < \sigma_{\bar{x}}) = 0{,}684$

$P(|A-\bar{x}| < 2\sigma_{\bar{x}}) = 0{,}954$

$P(|A-\bar{x}| < 3\sigma_{\bar{x}}) = 0{,}997$

se $N > 30$, in quanto a questo punto $\sigma_{\bar{x}}$ è ben stimato da $s_{\bar{x}}$.

Se N non è abbastanza grande, non è più ragionevole credere che $s_{\bar{x}}$ approssimi bene $\sigma_{\bar{x}}$.

Però la variabile t che si ottiene:

$$t = \frac{\bar{x} - A}{s_{\bar{x}}}$$

nel caso di variabili X_i iid e tutte gaussiane segue la distribuzione di Student a $\nu = N-1$ gradi di libertà.

Quindi: $P(|\bar{x}-A| < k_p(\nu)\, s_{\bar{x}}) = p$

ν	$p=0{,}682$	$p=0{,}954$	$p=0{,}997$
1	$k_p(\nu) = 1{,}84$	13,97	235,80
10	1,05	2,28	3,96
30	1,027	2,11	3,33
100	1,005	2,025	3,077
∞	1	2	3

STIMA DI ALTRI PARAMETRI STATISTICI

Se si è interessati a stimare $f_X(x)$ a partire da risultati di N prove ripetute occorre procedere nel seguente modo:

v.a. discreta:

Dato l'insieme di valori che la v.a. può assumere $\{x_1, x_2, \dots, x_M\}$, sia F_m il numero di volte che si verifica l'evento $X = x_m$ (F_m è la frequenza) e sia $f_m = \frac{F_m}{N}$

(f_m è la frequenza relativa).

F_m e f_m sono v.a. e per la legge dei grandi numeri vale che: $\lim_{N \to \infty} f_m = P(X = x_m) = p_m$.

v.a. continua:

necessario dividere il dominio in classi.

Data x_{MAX} realizzazione col massimo valore e x_{MIN} realizzazione col minimo valore, si divide l'intervallo (x_{MIN}, x_{MAX}) in M sottointervalli C_m di lunghezza

$\Delta x = \frac{x_{MIN} - x_{MAX}}{M}$.

Detto x_M, l'estremo inferiore di C_m, si definisce l'evento $A_M = X \in C_m$ con probabilità $p_m = P(x_m < X \leq x_m + \Delta x) =$

$= F_X(x_m + \Delta x) - F_X(x_m) \approx f_X(x_m) \cdot \Delta x$.

F_m si ottiene contando il numero di volte che si verifica l'evento A_m, e $f_m = \frac{F_m}{N}$.

Sia F_m che f_m sono v.a. e per la legge dei grandi numeri vale che:

$$\lim_{N \to \infty} f_m = P(A_m) = F_X(x_m + \Delta x) - F_X(x_m) \approx f_X(x_m) \Delta x \; .$$

INCERTEZZA COMBINATA

$e_{TOT} = e_A + e_B$

e_A: errore dovuto a incertezza di tipo A.
e_B: // // // // // // B.

$$E[e^2_{TOT}] = E[e^2_A + e^2_B + 2e_A e_B] = E[e^2_A] + E[e^2_B] + 2E\cancel{[e_A e_B]}$$

per indipendenza

$E[e^2_A]$ viene stimata grazie a $s^2_{\bar{x}}$.

$E[e^2_B] = u^2_B$

$$u_{TOT} = \sqrt{s^2_{\bar{x}} + u^2_B} \; .$$

PROCEDURA PER INCERTEZZA COMBINATA

N prove ripetute.

1) stimare il valore misurato come: $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$

2) stimare l'incertezza di tipo A come: $S_{\bar{x}}^2 = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}$

3) Individuare tutti i contributi significativi che contribuiscono all'errore di tipo B, $e_{B,i}$ ed effettuare opportune ipotesi sulle loro distribuzioni.

4) Calcolare $E[e_B^2]$ come $u_B^2 = E\left[\left(\sum_i e_{B,i}\right)^2\right]$, valutando per ogni contributo la varianza e la covarianza con altri contributi, se non nulla.

5) stimare l'incertezza combinata come: $u_{TOT} = \sqrt{S_{\bar{x}}^2 + u_B^2}$

6) Presentare il risultato della misura come:

$$\bar{x} \pm u_{TOT}.$$

PROPAGAZIONE DELL'INCERTEZZA DI TIPO A E B

MISURE INDIRETTE

Y esprimibile come funzione di X_i, $i = 1, \ldots, k$.

$$Y = f(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k).$$

In maniera indiretta ottengo:

$$y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_k)$$

Per calcolare l'incertezza si deve considerare come l'errore e_y sia legato agli errori sulle grandezze e_{xi}

$$y_v + e_y = f(x_{1v} + e_{x1}, x_{2v} + e_{x2}, \ldots, x_{kv} + e_{xk})$$

in cui y_v ed x_{iv} indicano i valori veri convenzionali:

Considerando errori di piccola entità posso sviluppare in serie di Taylor troncata al I° ordine:

$$y_v + e_y = f(x_{1v}, x_{2v}, x_{3v}, \dots) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} f \Big|_{x_1, x_2, \dots = x_{1v}, x_{2v}, \dots}$$

La varianza dell'errore si ottiene da:

$$E[e_y^2] = E\left[\left(\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} f \cdot e_{x_i}\right)^2\right] = E\left[\left(\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} f \cdot e_{x_i}\right)\left(\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} f \cdot e_{x_j}\right)\right] =$$

$$= E\left[\left(\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} f \cdot e_{x_i}\right)^2\right] + E\left[\left(\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} f \cdot e_{x_i}\right)\left(\sum_{\substack{j \\ i \neq j}} \frac{\partial}{\partial x_j} f \cdot e_{x_j}\right)\right] =$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right)^2 E[e_{x_x}{}^2] + \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} \frac{\partial}{\partial x_i} f \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} f \cdot E[e_{x_i} e_{x_j}] =$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right)^2 \sigma_{x_i}^2 + \sum_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \rho_{x_i x_j} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j} .$$

Pertanto:

$$u_y = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u_{x_i}{}^2 + \sum_i \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \rho_{x_i x_j} u_{x_i} u_{x_j}} .$$

Se X_i sono tutti statisticamente indipendenti allora

$$\rho_{x_i x_j} = \emptyset$$

In caso contrario, nel caso di errori di tipo A:

$$C_{\bar{x_i}, \bar{x_j}} = \frac{1}{(N-1)N} \sum_{m=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} (x_{im} - \bar{x}_i)(x_{jm} - \bar{x}_j)$$

in cui x_{im} rappresenta la misura della i-esima grandezza alla m-esima ripetizione

La stima di ρ_{x_i, x_j} si ottiene da:

$$r_{\bar{x_i},\bar{x_j}} = \frac{C_{\bar{x_i},\bar{x_j}}}{S_{\bar{x_i}}\, S_{\bar{x_j}}} .$$

nel caso di $|\rho_{x_i,x_j}| = 1$ si ha totale correlazione degli errori e:

$$u_y = \sum_i \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| u_{x_i} .$$