LABORATORIO DI MISURE ELETTRONICHE

[Fotocopie di Appunti]

A CURA DI ALESSANDRO PAGHI

PROFESSORE: Ada Fort (http://www3.diism.unisi.it/people/person.php?id=27)

LINK AL CORSO ANNO 2015/2016:
http://www3.diism.unisi.it/FAC/index.php?bodyinc=didattica/inc.insegnamento.php&id=55147&aa=2015

FREQUENTAZIONE: Consigliata.

04/03/2016

MISURAZIONE

Procedimento in grado di quantificare la proprietà di un oggetto o di un fenomeno.

→ Essenzialmente è un confronto con un campione.

Il campione prende il nome di unità di misura.

misura diretta: c'è un confronto con un campione.

misura indiretta: viene effettuata mediante un confronto con una formula $y = f(x_0, x_1, \dots, x_k)$



MISURANDO

È una definizione incompleta, c'è un grado di incertezza.

X_M : Valore vero, teorico , X_m : valore misurato

PROCESSO DI MISURA

Anche qui c'è un certo grado di incertezza

L'errore è nel confronto con l'unità di misura.

$X_M - X_m = e$: ERRORE DI MISURA

Teoria degli Errori :

Natura degli Errori :

→ Errore Grossolano ;

→ // Sistematico ; (dovuto a strumento e campione)

→ // Accidentale ; (dovuto all'ambiente)

$e_x = e_A + e_S$

↓ ↓ → SISTEMATICO

Errore Assoluto

È proprio $e_r = x_v - x_m$ ed ha unità di misura

Errore Relativo

$$\varepsilon = \frac{x_v - x_m}{x_v} \approx \frac{x_v - x_m}{x_m}$$

ed non ha unità di misura, si esprime in %.

$x_m = 0,00123\,4(5)\ V$

è esatta fino a qui!

Queste sono cifre esatte

PARAMETRI PER QUALIFICARE UNA MISURA

ACCURATEZZA

Descrive lo scostamento fra x_v e x_m.

Viene intesa come l'errore massimo.

$$e_{MAX} = e_r|_{MAX} = x_v - x_m|_{MAX}$$

PRECISIONE

È un attributo del metodo di misura. Da precisione di misura che differenzia ciò fra i valori ottenuti in prove ripetute.

RIPETIBILITÀ

Indica quanto sono vicini i valori ottenuti in prove ripetute.

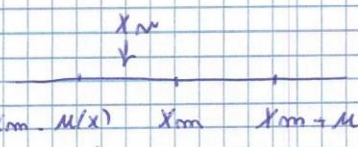
RIPRODUCIBILITÀ

Indica quanto sono vicini i valori ottenuti in prove in ambienti diversi.

INCERTEZZA

Parametro associato al risultato di una misurazione che descrive la dispersione dei valori che possono essere ragionevolmente attribuiti al misurando.

www.alessandropaghi.it



GRANDEZZA DI INFLUENZA.
Grandezza che non è oggetto di misurazione ma influenza il risultato.

RICHIAMO DI STATISTICA

PROBABILITÀ di un evento
X: insieme degli eventi

$\{x_i\}$ con $i = 1, \dots, K$

$p_i = p(x_i) = \lim_{N \to \infty} \left(\frac{N_i}{N} \right)$

↳ frequenza

PROBABILITÀ CONGIUNTA
Dati due eventi A, B → $P(A,B) = P(A \cap B)$

// CONDIZIONATA
Dati due eventi A, B → $P(A|B)$

→ $P(A,B) = P(A|B)\,P(B)$

EVENTI STATISTICAMENTE INDIPENDENTI
$P(A,B) = P(A)\,P(B)$

VARIABILE ALEATORIA (v. a.)

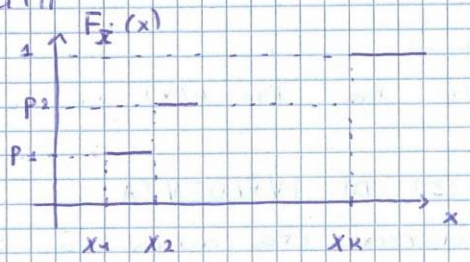
X variabile aleatoria, x valori.

v. a. DISCRETA
$\{x_1, x_2, \dots, x_K\}$

www.alessandropaghi.it

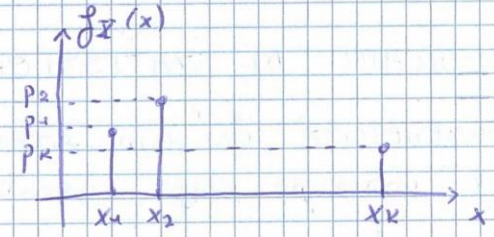
DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ

$$F_X(x) = P\{X \leq x\}$$



DENSITÀ DI PROBABILITÀ

$$f_X(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i \cdot \delta(x - x_i)$$



N.a. CONTINUA

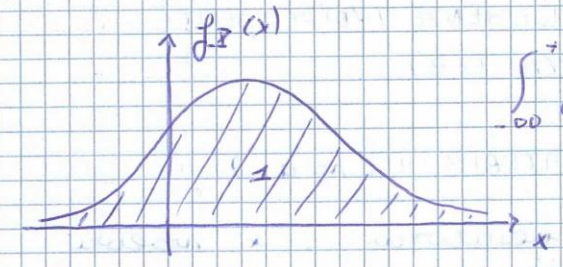
DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ

$$F_X(x) = P\{X \leq x\}$$



DENSITÀ DI PROBABILITÀ

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x < X < x + \Delta x\}}{\Delta x} = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

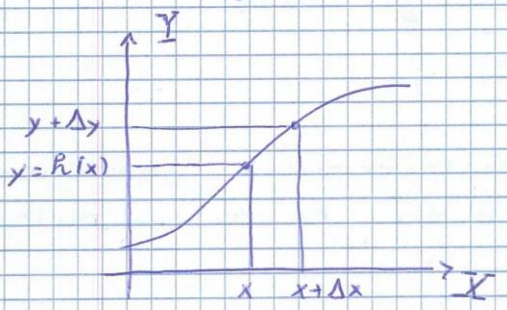


$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$$

www.alessandropaghi.it

Se conosco X e $f_X(x)$ ed inoltre

$Y = R(X) \rightarrow f_Y(y) = ?$



$$P\{x < X \leq x+\Delta x\} \approx f_X(x)\,\Delta x = P\{y \leq Y \leq y+\Delta y\} = f_Y(y)\,\Delta y$$

Vero se la funzione è invertibile → crescente.

$$f_X(x)\,dx = f_Y(y)\,dy$$

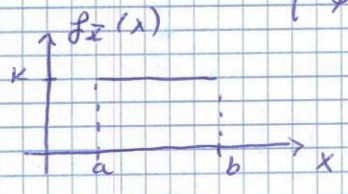
$$f_Y(y) = f_X(x)\cdot\frac{dx}{dy} = f_X(R^{-1}(y))\,\frac{dx}{dy}$$

ESEMPIO:

$y = ax+b \quad ; \quad x = \frac{y-b}{a}$

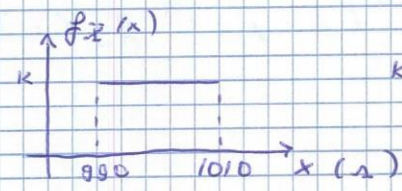
$$f_Y(y) = \frac{1}{a}\cdot f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$f_X(x)$ UNIFORME $= \begin{cases} k & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$



$k = \frac{1}{b-a}$

$R = 1\,k\Omega$
$t = 1\%$



$k = \frac{1}{20}\,\Omega^{-1}$

www.alessandropaghi.it

$f_X(x)$ GAUSSIANA

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Seguono la distribuzione gaussiana quelle v.a. che sono date da tanti contributi di v.a. indipendenti.

PARAMETRI STATISTICI

MOMENTI

Momento non centrato di ordine k:

$$\mu_{k_X} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^k f_X(u)\,du$$

$k=1$: valor medio

$E(x) = \mu_1$

$$\mu_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u\, f_X(u)\,du$$

↑ ci dice dove è centrata $f_X(u)$

VALOR MEDIO di $h(X)$

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\, f_X(u)\,du$$

$k=2$: $E(X^2) = \mu_2$

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f_X(u)\,du$$

↑ Potenza media dei segnali ma non Re come unità di misura Watt

Momento centrato di ordine k:

$$m_{k_X} = E[(X - E(X))^k]$$

$$= E[(X-\mu_1)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (u-\mu_1)^k f_X(u)\,du$$

$m_1 = 0$

www.alessandropaghi.it

$$m_2 = \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (u - \mu_x)^2 f_X(u)\, du$$

$$= E[(X - \mu_x)^2]$$

DEVIAZIONE STANDARD

$$\mathrm{STD}(X) = \sigma_X$$

$f_X(x)$ uniforme

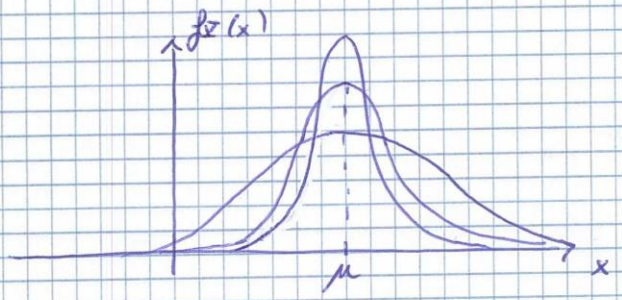
$$\mu_x = \int_a^b \frac{1}{b-a}\, u\, du = \frac{b+a}{2}$$

$$\sigma_X^2 = \int_a^b \frac{1}{b-a} \left(u - \frac{b+a}{2}\right)^2 du = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$f_X(x)$ Gaussiana

$$E[X] = \mu_x$$

$$\mathrm{VAR}(X) = E[(X - \mu_x)^2] = \sigma_X^2$$



$$P\{\mu_x - \sigma_x < X \leq \mu_x + \sigma_x\} = 0,68$$

$$P\{\mu_x - 2\sigma_x < X \leq \mu_x + 2\sigma_x\} = 0,95$$

$$P\{\mu_x - 3\sigma_x < X \leq \mu_x + 3\sigma_x\} = 0,997$$

www.alessandropaghi.it

v. a. STANDARDIZZATA

$$y = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \qquad \text{con} \quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$f_Y(y) = \sigma_x f_X(y\sigma_x + \mu_x)$$

$$\rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \qquad \text{con} \quad \mu_y = 0, \quad \sigma_y^2 = 1$$

In generale:

$$P\{\mu_x - K\sigma_x < X \leq \mu_x + K\sigma_x\} = P\left\{-K \leq \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} < K\right\}$$

$$= P\{-K \leq Y \leq K\} = \underline{2F_N(K) - 1}$$

Livello di confidenza.

con $F_N(Y) = \int_{-\infty}^{y} f_X(u)\,du$

www.alessandropaghi.it

06/03/2016

Disuguaglianza di MARKOV

$$P\{|Y| \geq \lambda\} \leq \frac{E(|Y|^r)}{\lambda^r}$$

centrata in $\emptyset$

Y : v.a. centrata in $\emptyset$ $= X - \mu_X$

$$P\{|X-\mu_X| \geq \lambda\} \leq \frac{E(|X-\mu_X|^r)}{\lambda^r}$$

$\lambda = K\sigma_X$

$r = 2$

$$P\{\mu_X - \lambda < X \leq \mu_X + \lambda\} \geq 1 - \frac{E(|X-\mu_X|^r)}{\lambda^r}$$

$$P\{\mu_X - K\sigma_X < X \leq \mu_X + K\sigma_X\} \geq 1 - \frac{\sigma_X^2}{K^2\sigma_X^2} = 1 - \frac{1}{K^2}$$

$K = 1 \rightarrow P \geq \emptyset$

$K = 2 \rightarrow P \geq 0{,}75$

$K = 3 \rightarrow P \geq 0{,}88$

DISTRIBUZIONE BIVARIATA

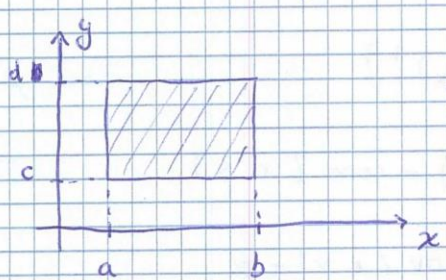
X v.a. $f_X(x)$ sono densità di prob. marginali.

Y v.a. $f_Y(y)$

→ Distribuzione congiunta $F_{X,Y}(x,y)$

Densità congiunta $f_{X,Y}(x,y)$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)$$



$$P\{a < X \leq b,\ c < Y \leq d\} = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv$$

$$= F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(a,d) - F_{X,Y}(b,c) + F_{X,Y}(a,c)$$

$$F_{X,Y} = P\{X \leq x,\ Y \leq y\}$$

www.alessandropaghi.it

$F_{X,Y}(x,y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$

$\Rightarrow F_X(x) = F_{X,Y}(x, \infty)$

$f_{X,Y}(x,y) \Rightarrow f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,w)\,dw$

MOMENTI NON CENTRATI di ordine r, s

VAL. ATTESO $E[R(x,y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R(u,w) f_{X,Y}(u,w)\,du\,dw$

$E[X^r \cdot Y^s] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u^r \cdot w^s f_{X,Y}(u,w)\,du\,dw = \mu_{r,s} = \text{corr}(X,Y)$

$\mu_{1,1} = E[X \cdot Y]$ correlazione

Se X, Y sono statistic. indip:

$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

allora $\rightarrow E[X \cdot Y] = E[X]\,E[Y] = \mu_X \cdot \mu_Y$

Se X, Y stat. indip $\Rightarrow E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$

$E[X] \cdot E[Y] = E[X \cdot Y] \Rightarrow X, Y$ stat indip sse X, Y ~~sono~~ seguono una densità di prob. gaussiana bivariata.

MOMENTO CENTRATO r, s

$m_{r,s} = E\left((X - \mu_X)^r \cdot (Y - \mu_Y)^s\right)$ con $\mu_X = E(X)$

$m_{1,1} = E\left((X - \mu_X)(Y - \mu_X)\right) = \text{cov}(X,Y)$

Se X, Y stat. indip. $\rightarrow \text{cov}(X,Y) = \emptyset$

www.alessandropaghi.it

Coefficiente di Correlazione:

$$\rho_{x,y} = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} \quad ; \quad 0 \leq |\rho_{x,y}| \leq 1$$

$\rho_{x,y} = 0$ -> [illegible] sono scorrelate
$\rho_{x,y} = 1$ -> dip totale, x è x traslata!
$\rho_{x,y} \neq 0$ non son dipend.

GAUSSIANA BIVARIATA

$$f_{x,y}(x,y) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y \sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x \sigma_y}\right)}$$

$\rho < 1 \Rightarrow \rho = \rho_{xy}$

Se $\rho = 0 \Rightarrow f_{x,y}(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$

PROCESSI STOCASTICA

~~famiglia~~ di v.a. indicizzate
$X(t)$

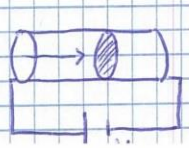
$$\forall N \in \mathbb{N}, \ \forall t_1, \dots, t_N \quad F_{X_1, \dots, X_N}(x_1, \dots, x_N) = P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_m) \leq x_N\}$$

PROCESSI STAZIONARIO

In senso stretto: tutte le prob. congiunte sono invarianti a traslazioni di t.

$$P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_m) \leq x_m\} = P\{X(t_1+h) \leq x_1, \dots, X(t_m+h) \leq x_m\}$$

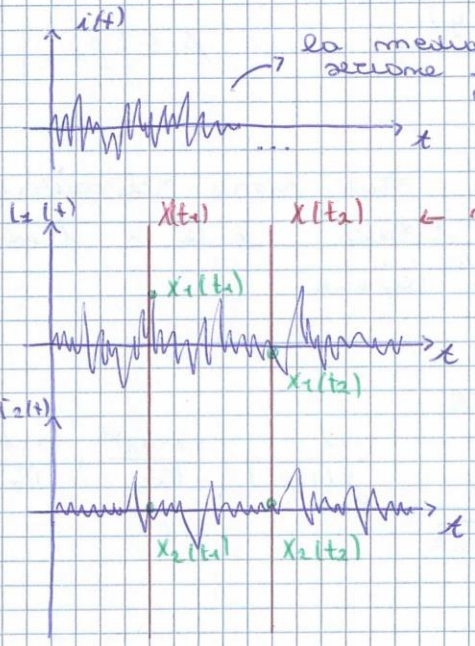
Rumore Termico:



Se $V = 0 \Rightarrow I = 0$

www.alessandropaghi.it

ma per effetto termico gli elettroni si muovono ugualmente:



: realizzazione del processo stocastico.

Se il processo è stat. in senso stretto:

$$N=1 \Rightarrow F_{X(t_1)}(x) = F_{X(t_1+h)}(x)$$

$$\Rightarrow X(t_1) \Rightarrow f_{X(t_1)}(x) \quad ; \quad X(t_m) \Rightarrow f_{X(t_m)}(x)$$

$$\text{e } f_{X(t_1)}(x) = f_{X(t_m)}(x)$$

- -

$x_1(t)$: collezione di realizzazioni, dominio temporale

$X(t_1)$: dominio di insieme, v.a.

↳ Ha una $f_{X(t_1)}(x)$

www.alessandropaghi.it

CORRELAZIONE

$$E[X(t)X(s)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u\cdot v \; f_{x(t),x(s)}^{(u,v)}\, du\, dv = R_{xx}(t,s)$$

Se il processo è stazionario

$$R_{xx}(t,s) = R_{xx}(s-t)$$

MEDIA TEMPORALE

$$A\{R(x(t))\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R(x(t))\,dt$$

Se media d'insieme:

$$E(R(X(t))) = \text{cost} \Rightarrow \text{processo stazionario}$$

Se media temporale:

$$A\{R(x(t))\} = \text{cost} \Rightarrow \text{processo regolare}$$

Se $E\{R(X(t))\} = A\{R(x(t))\} \Rightarrow$ processo ergodico.

Noi trattiamo processi stat., reg., ergod., a media $\neq$.

$\Downarrow$

FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

$$A\{x(t)x(t+\tau)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,x(t+\tau)\,dt = R_x(\tau)$$

Se è ergodico:

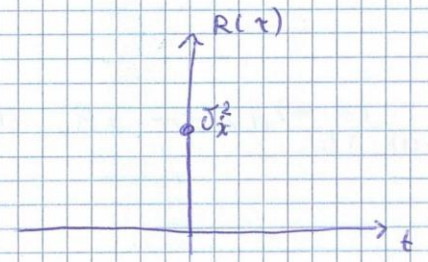
$$R_x(\tau) = R_{xx}(\tau) = E(X(t)X(t+\tau))$$

$R_x(\phi) = \sigma_x^2$, potenza media

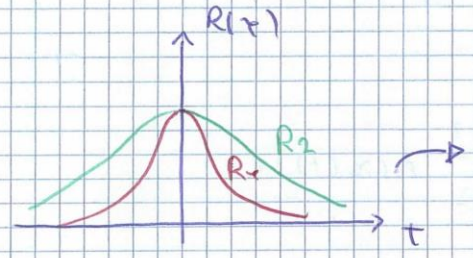
$\overset{!}{=} x_{eff}^2 + x_{RMS}^2$

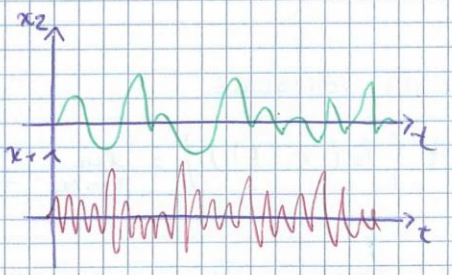
www.alessandropaghi.it

$$R_x(\phi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\, dt$$ è una potenza media



Questo è un segnale che varia con velocità infinita → NON ESISTE





DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA

$$P(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\left[|F_T(\omega)|^2 \right] \qquad \left[V^2/_{Hz} \right]$$

$$F_T(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Dice come è distribuita la potenza sull'asse.

TEOREMA DI WEINER - KINTCHINE

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau = \text{Fourier}\{R_x(\tau)\}$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

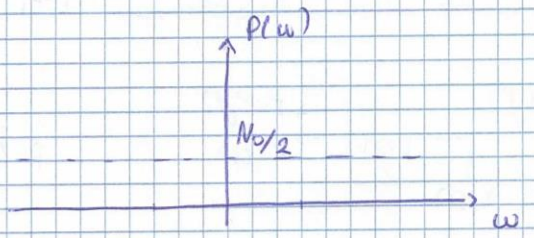
$$R_x(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f)\, df$$

www.alessandropaghi.it

PROCESSO BIANCO

$$R_x(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

$$P(\omega) = \frac{N_0}{2}$$



BIANCO in una BANDA

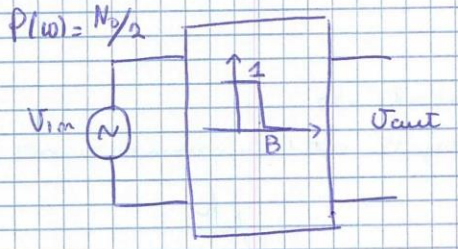
$$P(\omega) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & -\omega_0 \le \omega \le \omega_0 \\ \emptyset\,; \text{ vettore} \end{cases}$$

$$R_x(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \text{sinc}(\omega_0 \tau)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{\omega_0}{\pi}$$

Se $2\pi B = \omega_0$

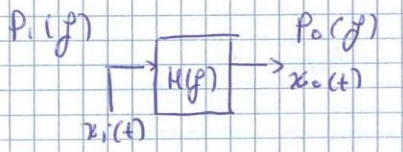
$$\sigma_x^2 = N_0 B$$



$$V_{eff\,out} = \sigma_v = \sqrt{N_0 B}$$

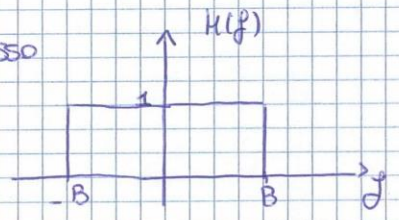
www.alessandropaghi.it

Supponiamo un sistema LTI 07/03/2016



$$P_o(f) = |H(f)|^2 P_i(f)$$

P. BASSO

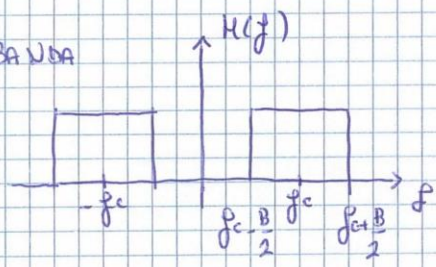


Se $P_i(f) = \frac{N_0}{2}$

$\rightarrow P_o(f) = \frac{N_0}{2}$ $\quad -B \leq f \leq B$

$\sigma_{x_0}^2 = x_{0\,eff}^2 = N_0 \cdot B$

P. BANDA



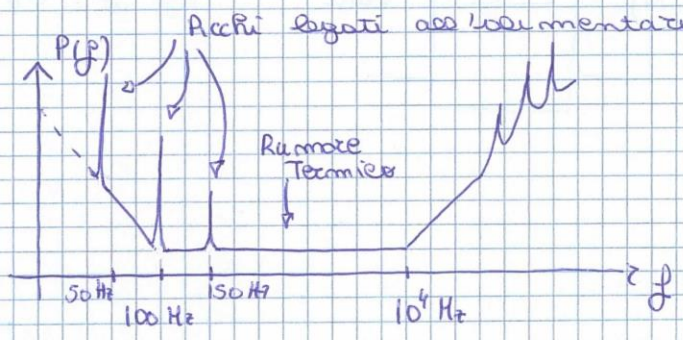
Se $P_i(f) = \frac{N_0}{2}$

$P_o(f) = \frac{N_0}{2}$ $\quad f_c - \frac{B}{2} \leq f \leq f_c + \frac{B}{2}$

$-f_c - \frac{B}{2} \leq f \leq -f_c + \frac{B}{2}$

GENERICO DIAGRAMMA DELLA DENS. SPETTR. DI POTENZA DEL RUMORE

Grafico qualitativo indicativo



A frequenza bassa il rumore è causato per via di:

- deriva termica
- rumore flicker

www.alessandropaghi.it

TEORIA della MISURAZIONE

STIMA DELL'INCERTEZZA

u: incertezza ed ha la stessa unità di misura del misurando.

$e_{TOT} = e_A + e_S$

↑ ↑ ↑

N.a. N.a. N.a.

Processo di misura

La misurazione crea una v.a. X.

Quando lo sperimentatore ottiene un numero x che è una realizzazione di X.

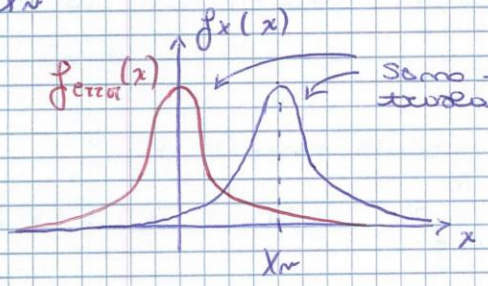
X_V: valore vero $\in \mathbb{R}$ è un numero non una v.a.

$X_V - X = e_{TOT}$ (↑ N.a.)

$X_V - x = e_{TOT}$ (↑ numero (realizzazione della v.a. sperimentale))

Ipotesi: il processo di misura è centrato in X_V.

$E[X] = X_V$



Centrare esattamente su X_V significa avere $\sigma_X^2 = \emptyset$.

INCERTEZZA STANDARD: è una stima della deviazione standard σ_X.

www.alessandropaghi.it

$e_{TOT} = e_A + e_S$

↳ 1 realizzazione se ripetessi stessa misura

x + " " " " " "

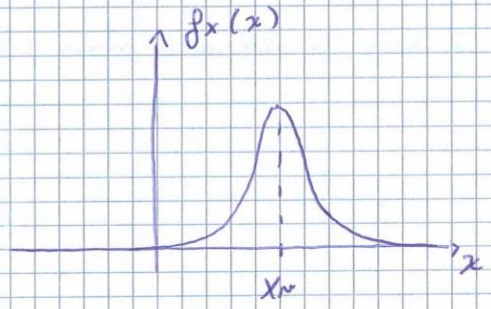
e_A, e_S stat. indip. a media nulla

$E[e_{TOT}] = \emptyset$

$E[e_A] = \emptyset$

$E[e_S] = \emptyset$ lo posso fare perché stat. indip.

$f_{e_A}(e_A \mid e_S) = f_{e_A}(e_A)$, $e_S = \emptyset$.



in verità il valore medio non è X_N ma $X_N + e_S$.

→ supponiamo $e_S = \emptyset$.

Ripetere la misura n volte in condizioni identiche

$x_1, x_2, \dots, x_n$ osservazioni

↓ ↓ ↓

X_1 X_2 X_n v. a. identicamente distribuite e indipendenti

Come attengo X_m, valore misurato?

$$X_m = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$ STIMA di $E(X_i) = E(X)$

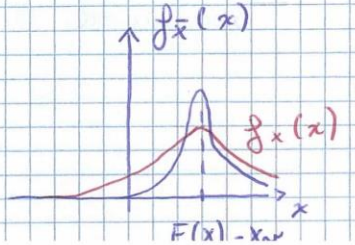
$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i$$ STIMATORE

$\bar{x}$ realizzazione di $\bar{X}$

La STIMA è NON POLARIZZATA

→ $\bar{X}$ converge in media a X_N

$$E\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E(X) = X_N.$$



www.alessandropagni.it

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E(X_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E(X) = \frac{1}{N}\, N\, E(X) = E(X)$$

$f_{\bar{x}}(x)$ ha varianza minore di $f_x(x)$

tanto minore più misurazioni facciamo.

$\sigma_{\bar{x}}^2$? Spero che $\sigma_{\bar{x}}^2 < \sigma_x^2$

$$E\left[(\bar{X} - X_M)^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - X_M)\right)^2\right]$$

$$= E\left(\frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i - X_M)^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N}(x_i - X_M)(X_j - X_M)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} E\left[(x_i - X_M)^2\right] = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sigma_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{N}$$

$$\rightarrow \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{N} \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma_x$$

Se $\rho_{i,j} = 1 \rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \sigma_x$

La STIMA è CONSISTENTE

→ converge in probabilità

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{N\to\infty} P\left\{|\bar{x} - X_M| \geq \varepsilon\right\} = 0.$$

→ asintoticamente $\bar{x}$ converge a X_M.

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad (B) \quad \xrightarrow{\text{STIMARE}} \quad E[X]$$

$$E[X] \overset{\text{v.a.c}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} u\, f_x(u)\, du$$

(*) ↓

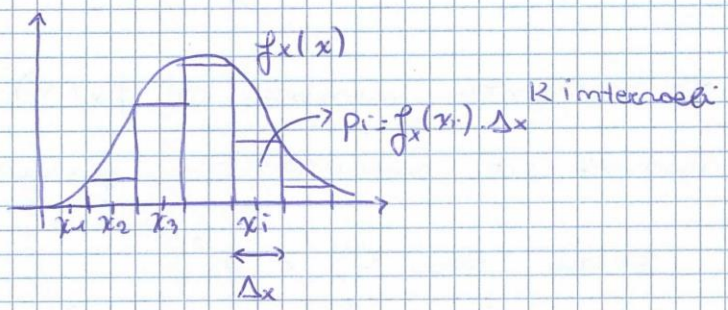
$$\overset{\text{v.a.d}}{=} \sum_{j=1}^{k} p_j x_j \qquad \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$$

$$\approx \sum_{j=1}^{k} \frac{N_j}{N} x_j = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k} N_j x_j \quad (A)$$

(A) e (B) sono la stessa cosa.

www.alessandropaghi.it

(*)



$P\{X = x_i\} = \emptyset$!!!

STIMA di σ_x POLARIZZATA

$\sigma_x^2 = E\left((X - X_M)^2\right)$

S'^2_x : STIMATORE

$S'^2_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$

STIMA È POLARIZZATA ? (converge in media)

$E(S'^2_x) \overset{?}{=} \sigma_x^2$ NO! $\rightarrow$ $E(S'^2_x) = \sigma_x^2 - \frac{\sigma_x^2}{N}$.

$$E\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - X_M + X_M - \bar{x})^2\right) = E\left(\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i - X_M)^2 + \sum_{i=1}^{N}(\bar{x} - X_M)^2 - 2\sum_{i=1}^{N}(x_i - X_M)(\bar{x} - X_M)\right)\right)$$

$$= \sigma_x^2 + E\left((\bar{x} - X_M)^2\right) - E\left(\frac{2}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i - X_M)\right)(\bar{x} - X_M)\right)$$

$$= \sigma_x^2 + E\left((X - X_M)^2\right) - 2E\left((\bar{x} - X_M)^2\right)$$

$$= \sigma_x^2 - E\left((\bar{x} - X_M)^2\right)$$

$E(S'^2_x) = \sigma_x^2 \cdot \frac{N-1}{N}$

$\rightarrow S_x^2 = \frac{N}{N-1} \cdot S'^2_x$ STIMATORE NON POLARIZZATO

$\rightarrow S_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$

www.alessandropaghi.it

ERRORE ACCIDENTALE

N ripetizioni della misura

$x_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$

incertezza di $\bar{x}$: $u_A^2(\bar{x}) = \frac{1}{(N-1)N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 = S_{\bar{x}}^2$

$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{N}$

N deve essere tale da rendere $e_A < \frac{1}{10} \cdot e_S$
in quanto $e_{TOT} = e_A + e_S$.

x : variabile casuale
$\bar{x}$: variabile mediata

10/03/2016

Cosa si fa per valutare l'incertezza dovuta all'errore accidentale ?

N ripetizioni

$\bar{x} = x_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1} x_i$

$u_A(x) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}$ INCERTEZZA STANDARD

$e_{TOT} = e_A + e_S$

Divisione l'incertezza in due tipi
- INCERTEZZA di TIPO A : si basa su analisi di prove ripetute;
- INCERTEZZA di TIPO B : stima basata su informazioni a priori;

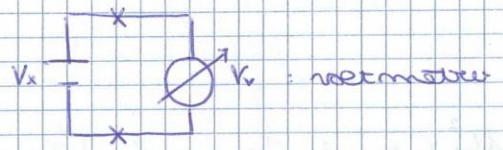
$E(e_{TOT}^2) = E((e_A + e_S)^2) = E(e_A^2) + E(e_S^2) + 2E(e_A e_S)$

e_{TOT} : INCERT. TOTALE
e_A^2 : u_A^2
e_S^2 : u_B^2
$E(e_A e_S) \to 0$ per indipendenza

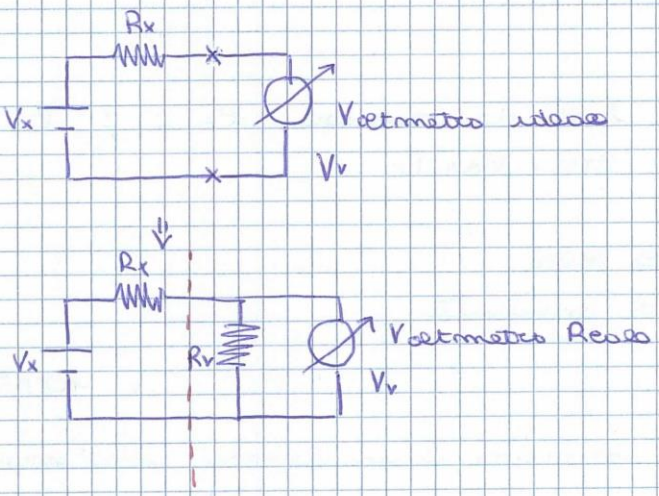
$\to$: "stima di".

www.alessandropaghi.it

Supponiamo di voler misurare un V.



ma in realtà avrò:



Errori:

1) ERRORE DI INSERZIONE: io vorrei $V_x \cdot \frac{R_v}{R_x+R_v} = V_v$

$$e_I = V_x - V_x \cdot \frac{R_v}{R_x+R_v}$$

$$e_I = V_v \cdot \frac{R_x+R_v}{R_v} \cdot \frac{R_x}{R_x+R_v} = V_v \cdot \frac{R_x}{R_v}$$

Supponendo $R_x \ll R_v$ questo errore è trascurabile

2) ERRORE STRUMENTALE

ACCURACY: % V_{FS} + % V_L (↑ Valore letto)

↑ Valore Fondo Scala

(Valore MAX dell'errore)

Esempio: 0,005 + 0,01

$V_L = A_{DC} V_v + V_{OFFSET}$

↑ Idealmente 1 — ↑ Idealmente 0

L'errore strumentale è un errore di guadagno e di offset.

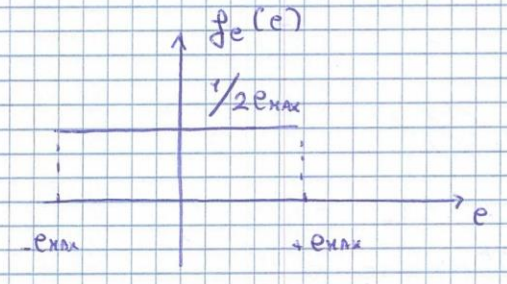
www.alessandropaghi.it

$e_{MAX} = C_1 V_{FS} + C_2 V_L$ errore max

$\varepsilon = C_1 \cdot \frac{V_{FS}}{V_L} + C_2$ errore relativo

con C costanti!

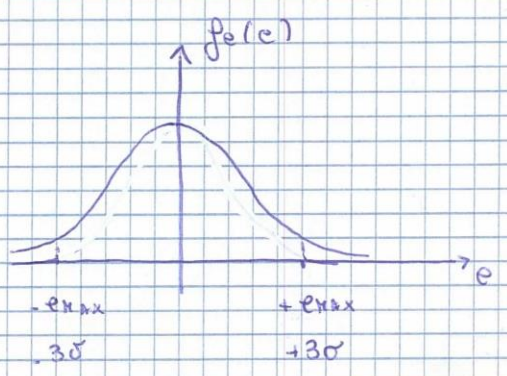
μ_B è una stima di σ_{es}



Distr. uniforme

(*)

$\sigma_{es} = \frac{e_{MAX}}{\sqrt{3}}$



Distr. Gaussiana

$\sigma_{es} = \frac{e_{MAX}}{3}$

(*) $\sigma_{es}^2 = \frac{1}{2e_{MAX}} \int_{-e_{MAX}}^{+e_{MAX}} e^2 de = \frac{e^2_{MAX}}{3}$

$u_c(r) = \sqrt{u_A^2(r) + \frac{e^2_{MAX}}{3}}$

↑ incertezza combinata della tensione

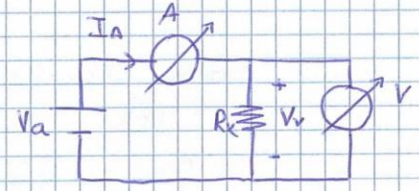
www.alessandropaghi.it

PROPAGAZIONE delle INCERTEZZE

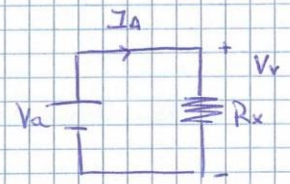
MISURE INDIRETTE

$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$

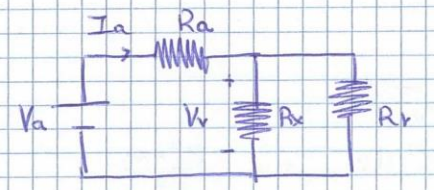
misurare una Resistenza indirettamente:



Idealmente dovrebbe corrispondere a:



Realmente:



$R_x = \frac{V_v}{I_a}$

E' è errore di misurazione dello su I_a.

Ricavo:

x_{1m} $u_c(x_1)$

x_{2m} $u_c(x_2)$

$\vdots$

x_{km} $u_c(x_k)$

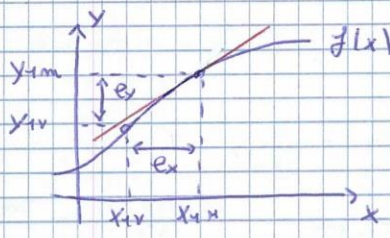
$\rightarrow y_m$ $u_c(y)$

$y_m = f(x_{1m}, x_{2m}, \ldots, x_{km})$

www.alessandropaghi.it

Per trovare e_y

trovare quella linearizzazione di f



$$y_v = y_m + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,(x_{i\,v} - x_{i\,m})$$

$$\rightarrow e_y = \sum_{i=1}^{k} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_{1m},\, x_{2m},\, \ldots,\, x_{km}} e_{x_i}$$

$$e_y = \sum_{i=1}^{k} c_i\, e_{x_i}$$

$u(y)$

$$\sigma_y^2 = E(e_y^2) = E\left[\left(\sum_{i=1}^{k} c_i e_{x_i}\right)^2\right] =$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{k} c_i^2 e_{x_i}^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} c_i c_j e_{x_i} e_{x_j}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} c_i^2\, \underline{e_{x_i}^2} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} c_i c_j\, \rho_{i,j}\, \underline{\sigma_{x_i}}\, \underline{e_{x_j}}$$

- Conosco

con $\rho_{i,j} = 0$ $\rightarrow$ $u^2(y) = \sum_{i=1}^{k} c_i^2\, u_c^2(x_i)$

con $|\rho_{i,j}| = 1$ $\rightarrow$ $u^2(y) = \sum_{i=1}^{k} c_i^2 u_{x_i}^2 + \sum_{i}\sum_{\substack{j \\ j\neq i}} |c_i||c_j| u_i u_j$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} |c_i| u_i\right)^2$$

PROPAGAZIONE DELL'ERRORE MASSIMO $e_{y\,MAX}$

$$e_{y\,MAX} \leq \sum_{i=1}^{k} |c_i|\, e_{x_i\,MAX}$$

www.alessandropaghi.it

$y = x_1 + x_2$

Conosco $e_{x_1 MAX}$, $e_{x_2 MAX}$

$$e_{y MAX} \leq \sum_{i=1}^{k} |c_i| e_{x_i MAX} = e_{x_1 MAX} + e_{x_2 MAX}$$

$$|c_1| = \frac{\partial}{\partial x_1} y = 1 \quad , \quad |c_2| = \frac{\partial}{\partial x_2} y = 1$$

$$\varepsilon_y = \frac{e_{y MAX}}{y} = \frac{e_{x_1 MAX} + e_{x_2 MAX}}{x_1 + x_2} = \frac{\frac{e_{x_1 MAX} \cdot x_1}{x_1} + \frac{e_{x_2 MAX} \cdot x_2}{x_2}}{x_1 + x_2}$$

$$= \frac{\varepsilon_{x_1} x_1 + \varepsilon_{x_2} x_2}{x_1 + x_2}$$

$y = x_1 - x_2$

$$e_{y MAX} \leq e_{x_1 MAX} + e_{x_2 MAX}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\varepsilon_{x_1} x_1 + \varepsilon_{x_2} x_2}{x_1 + x_2}$$

$y = x_1 \cdot x_2$

$$e_{y MAX} \leq x_2 e_{x_1 MAX} + x_1 e_{x_2 MAX}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2}$$

$$y = \frac{x_1}{x_2}$$

$$\varepsilon_{y MAX} \leq \frac{1}{x_2} \cdot e_{x_1 MAX} + \frac{x_1}{x_2^2} e_{x_2 MAX}$$

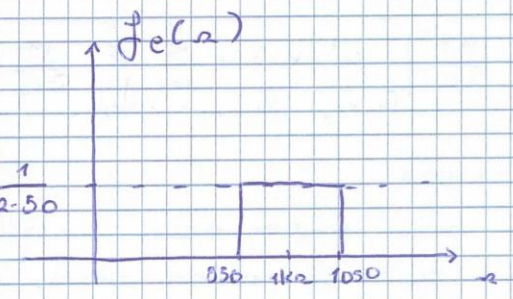
$$\varepsilon_y = \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2}.$$

www.alessandropaghi.it

$n = 10$

$R_i = 1\ K\Omega$ TOLLERANZA $= \pm 5\%$

$$R_S = \sum_{i=1}^{n} R_i$$



$e_{MAX} = 50\ \Omega$

$$u(R_i)^2 = \frac{1}{2 \cdot 50} \int_{950\Omega}^{1050\Omega} (R - 1000\ \Omega)^2\, dR = E\left[(R - \mu_R)^2\right]$$

$$= \int_{-50}^{50} \frac{1}{100\ \Omega}\, e^2\, de = \left(\frac{50}{\sqrt{3}}\ \Omega\right)^2$$

$$\text{TOL} \pm 5\% \Rightarrow u(R_i) = \frac{50}{\sqrt{3}}\ \Omega$$

Propagazione dell'incertezza

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{K} c_i^2\, u^2(x_i) + \sum_{i=1}^{K} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{K} |c_i||c_j|\rho_{ij}\, u(x_i)\, u(x_j)$$

$$|\rho_{ij}| = \emptyset \rightarrow u^2(y) = \sum_{i=1}^{K} c_i^2\, u^2(x_i) = 10 \cdot \frac{50^2}{3}\ \Omega$$

Quindi R_S una serie di K resistenze uguali:

$$u^2(R_S) = K\, u^2(R) \Rightarrow u(R_S) = \sqrt{K}\, u(R)$$

$$\frac{u(R_S)}{R_S} = \frac{\sqrt{K}\, u(R)}{K \cdot R}$$

$$\rightarrow \frac{u(R_S)}{R_S} = \frac{u(R)}{\sqrt{K}\, R}$$

www.alessandropaghi.it

14/03/2016

Supponendo:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

$$y_m = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)$$

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|^2_{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k} u^2(x_i) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i) u(x_j) \rho_{i,j}}$$

INCERTEZZA ESTESA

Quantificare un intervallo intorno al valore misurato in cui il valore vero cade con una probabilità assegnata = p.

$$P\left\{ x_m - k_p u_c < \bar{x} \leq x_m + k_p u_c \right\} = p$$

Devo conoscere la dens. di probabilità di $\bar{x}$ e la stima di σ_x che è u_c.

Se $\bar{x}$ è gaussiana e $u_c \approx \sigma_x$, allora:

$p = 0,68 \rightarrow k_p = 1$

$p = 0,95 \rightarrow k_p = 2$

$p = 0,997 \rightarrow k_p = 3$

Supponendo che $\bar{x}$ sia ottenuta come media di N guassiane i.i.d.

$$t = \frac{\bar{x} - x_m}{s(\bar{x})} \qquad s^2(x) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2$$

Distribuzione di Student

→ dipende solo da ν: GRADI DI LIBERTÀ

$$\nu = N - 1$$

In tale caso posso scrivere:

$$p\left\{ -k_p(\nu) \leq \frac{\bar{x} - x_m}{s(\bar{x})} \leq k_p(\nu) \right\} = p$$

www.alessandropaghi.it

ν	$P = 0,68$	$P = 0,95$	$P = 0,997$
1	$k_p = 1,84$	$k_p = 13,97$	$k_p = 235,8$
10	$k_p = 1,05$	$k_p = 2,28$	$k_p = 3,96$
30	$k_p = 1,02$	$k_p = 2,09$	$k_p = 3,3$
100	$k_p = 1,005$	$k_p = 2,025$	$k_p = 3,097$
∞	$k_p = 1$	$k_p = 2$	$k_p = 3$

k_p : fattore di copertura

Se $u_c^2 = \sum_{i=1}^{k} c_i^2 u_i^2$

ν_i : g.d.l. di u_i

ν_{eff} : g.d.l. di t

$$\rightarrow \nu_{eff} = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^{k} c_i^4 \cdot \frac{u_i^4}{\nu_i}}$$

u_i INCERTEZZA TIPO A: $N-1 = \nu_i$

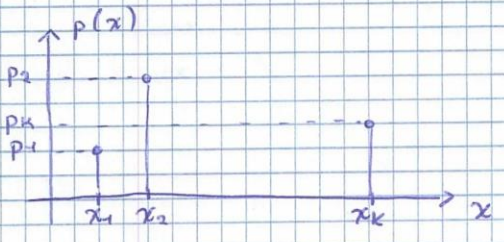
u_i INCERTEZZA TIPO B: $\nu_i = \infty$

$\nu_i = 1$ (WORST CASE).

STIMA ~~dddd~~ DENSITA' di PROBABILITA'

Data X v.a. e N osservazioni $x_1, x_2, \dots, x_N$.

e K osservazioni $x_1, x_2, \dots, x_K$.

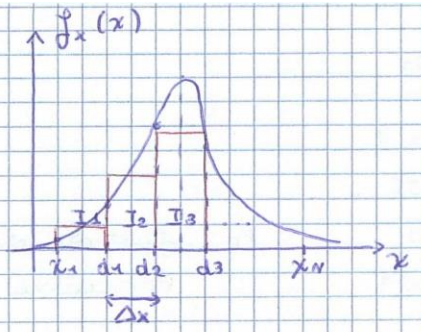


$p_i = P\{X = x_i\}$

$p_i = \lim_{N \to \infty} \frac{N_i}{N} \rightarrow p_i \approx \frac{N_i}{N} = f_i$ frequenza relativa.

Se X v.a. continua e N osservazioni:

www.alessandropaghi.it



Supponendo x_i ordinati.

Divido in K intervalli uguali: $\frac{x_N - x_1}{K} = \Delta x$

$K < N$

$$P\{X \in I_i\} \approx f_x(d_{i-1}) \cdot \Delta x \approx \frac{N_i}{N}$$ con N_i: # di campioni in I_i.

$$f_x(d_{i-1}) = \frac{N_i}{N \Delta x}$$

REGRESSIONE LINEARE

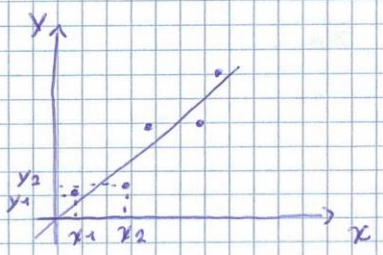
Supponiamo $y = mx + q$, dipendenza lineare fra y e x

stimare m e q.

→ misurare contemporaneamente x ed y

N misure (x_i, y_i)

Ho una resistenza: $V = R \cdot I$, quanto vale R?



•: misure reali

/: retta ideale

Ragiono con i minimi quadrati:

$$y_i = mx_i + q + e_i$$

m, q che minimizzano l'errore quadratico medio

→ $e_i = y_i - mx_i - q$

$$e^2_{MS} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (y_i - mx_i - q)^2$$

$$N \cdot \frac{d}{dm} e^2_{ms} = -2 \sum_{i=1}^{N} (y_i - mx_i - q) \cdot x_i = \emptyset$$

www.alessandropaghi.it

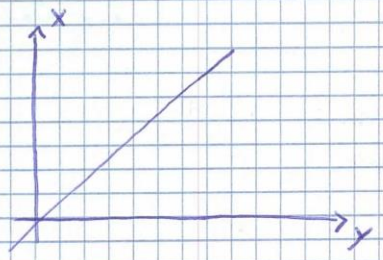
$$N \frac{d}{dq} e^2_{rms} = -2 \sum_{i=1}^{N} (y_i - m x_i - q) = 0$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - N \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N \bar{x}^2} \quad ; \quad q = \frac{\bar{y} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \bar{x} \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N \bar{x}^2}$$

$$= \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x^2}$$

TEST PER LINEARITÀ

Scambio gli assi:



$x = m' y + q'$ con $m' = \frac{1}{m}$

$\rightarrow m \cdot m' = 1$

Supponiamo di avere N misure di X_w

$x_i \quad i = 1, \dots, N$

$u(x_i) \quad i = 1, \dots, N$

X_i indipendenti ma non identicamente distribuite

$\rightarrow E(X_i) = X_w$

$\rightarrow E((x_i - X_w)^2) = \sigma^2_{X_i}$

Uso questo stimo:

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{N} f_i x_i$$

Uso questo stimatore:

$$\hat{X} = \sum_{i=1}^{N} f_i X_i \quad \leftarrow \text{deve essere polarizzato}$$

www.alessandropaghi.it

$$\min_{\gamma_i} E\left((\tilde{X} - X_w)^2\right)$$

VINCOLO su γ_i:

$E(\tilde{X} - X_w) = 0$ ovvero $E[\tilde{X}] = X_w$

$$E\left(\sum_{i=1}^{N} \gamma_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i E(X_i) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i X_w = X_w$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \gamma_i = 1.$$

Inoltre $\tilde{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} \frac{X_i}{\sigma_{Xi}^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_{Xi}^2}}$, $\gamma_i = \dfrac{1}{\sigma_{X_i}^2} \cdot \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_{Xi}^2}}$

SI (Sistema Internazionale)

Lunghezza	m
Tempo	s
Massa	kg
Corrente	A
Temper.	K o °C
Int. Lumin.	cd
Quantità Sostanza	mol

angolo piano	rad
angolo solido	sr rad

Costanti: numeri senza incertezza

vel. luce	c	(m/s)	$c = 3 \cdot 10^8$ m/s
permeabilità del vuoto	μ_0	(H/m)	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-3}$ H/m
conducibilità del vuoto	ε_0	(F/m)	$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m

www.alessandropaghi.it

17/03/2016

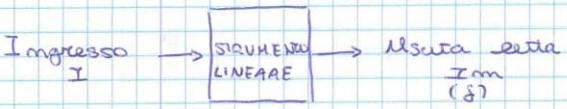
STRUMENTI DI MISURA

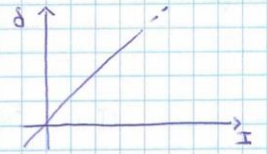
STRUMENTI ELETTROMECCANICI

MAGNETOELETTRICO - AD AZIONE PROPORZIONALE

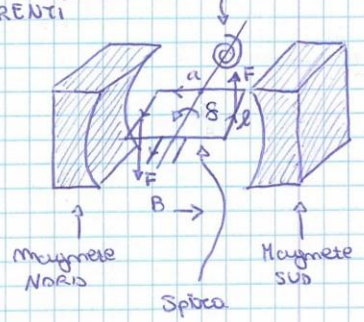
(Strumento Indicatore)







AMPEROMETRO PER PICCOLE CORRENTI



$$d\underline{F} = (d\underline{\ell} \wedge \underline{B})\, I$$

$$|F| = B \ell I$$

Si genera una forza che fa ruotare la spira.

$$Cm = BI\ell a$$

All'equilibrio: $Cm = Cr = K\delta$

Cr: Coppia resistente della molla

$$BI\ell a = K\delta$$

$\rightarrow \delta$: uscita strumento $= \frac{B\ell a}{K} \cdot I = K_s \cdot I$

con K_s: costante strumentale $= \frac{B\ell a}{K}$.

VALORE FONDO SCALA: massimo valore che è possibile leggere.

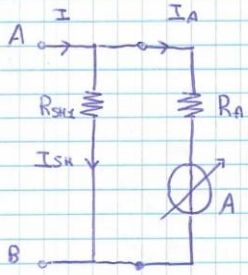
INTERVALLO DI MISURA: valori misurabili

INTERVALLO DI SICUREZZA: valori per cui lo strumento non si rompe.

www.alessandropaghi.it

SENSIBILITÀ: $\alpha = \frac{d\vartheta}{dI}$

Supponiamo $I_{FS} = 100\,\mu A$ posso realizzare facilmente uno strumento con $I_{FS} = 1\,mA$?

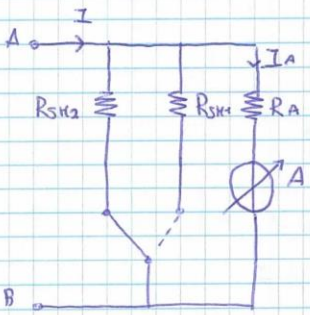


$$I_A = \frac{R_{SH}}{R_A + R_{SH}} \cdot I$$

$$= \frac{1}{10} \cdot I \qquad R_A = 9\,R_{SH}$$

AB è il nuovo strumento

Resistenza piccola, carico grande: $R < 150\,\Omega$



$$I_A = \frac{R_{SH2}}{R_A + R_{SH2}} \cdot I$$

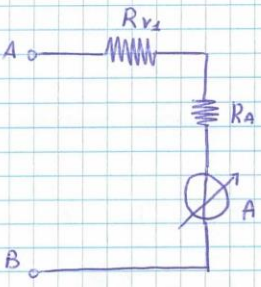
$I_{FS2} = 10\,mA$

$$R_{SH2} = \frac{1}{99} \cdot R_A$$

Voglio realizzare anche un voltmetro

$I_{FS} = 100\,\mu A$

$V_{FS} = 1\,V$



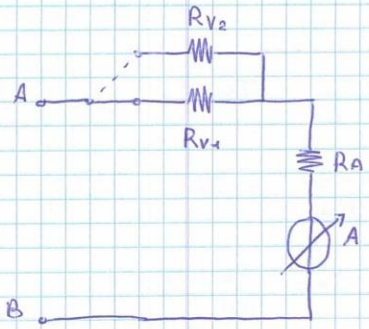
$$I_{FS} = \frac{V_{FS}}{R_{V1} + R_A}$$

È un convertitore V - I.

$$\frac{1\,V}{100\,\mu A} = R_{V1} + R_A = 10\,K\Omega$$

Se voglio $V_{FS} = 10\,V$

www.alessandropaghi.it



$R_A + R_{V2}\ (10\,V) = 100\,k\Omega$

L'amperometro è una resistenza diversa a seconda della portata

$$R_{eq\,Amp} = R_{SH1} \,//\, R_A \,//\, R_{SH2}$$

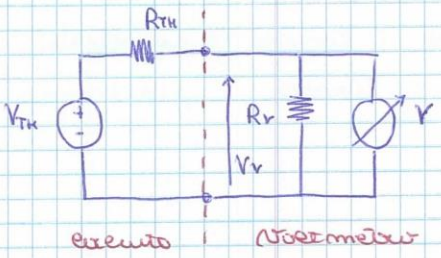
Resistenza ↓ quando portata ↑.

Per il voltmetro:
Resistenza ↑ quando portata ↑.

ERRORE DI CARICO o DI INSERZIONE

Lo strumento ideale non perturba la grandezza che misura.

Misura di tensione:



$$V_V = V_{TH} \cdot \frac{R_V}{R_{TH} + R_V}$$

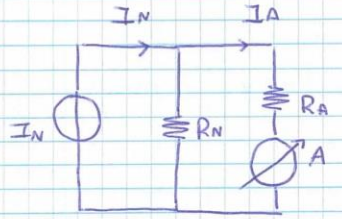
$$V_V (R_{TH} + R_V) \cdot \frac{1}{R_V} = V_{TH}$$

$$E_V = V_{TH} - V_V = V_V \cdot \frac{R_{TH} + R_V}{R_V} - V_V = V_V \cdot \frac{R_{TH}}{R_V}$$

$$\varepsilon = \frac{E_V}{V_V} = \frac{R_{TH}}{R_V}$$

www.alessandropaghi.it

Misura di Corrente:



$$I_A = \frac{R_N}{R_A + R_N} \cdot I_N$$

$$I_A \cdot \frac{R_A + R_N}{R_A} = I_A$$

$$E_I = I_N - I_A = \frac{R_A}{R_N} \cdot I_A$$

$$\varepsilon_I = \frac{R_A}{R_N}$$

VOLTMETRO : $R_{FS=1V} = (10 \div 100)\ k\Omega$ (tester ~~elettromeccanici~~)

SENSIBILITA': $\frac{d\,out}{dim}$

RISOLUZIONE: minimo Δin che produce una deviazione dell'uscita Δout distinguibile dal rumore.

CLASSE : errore considerato costante su tutta la scala quantificato in percentuale del fondoscala.

COMPORTAMENTO DINAMICO

$$J\ddot{\delta} + D_r\dot{\delta} + K\delta = C_m = B\,l\,a\,I = K_I\,I$$

momento di inerzia — attrito viscoso — molla — coppia + campo magnetico

a differenza di prima ora ci sono i termini variabili nel tempo.

$$\dot{\delta}(\phi^-) = \phi \quad ; \quad \delta(\phi) = \phi$$

$$(Js^2 + D_r s + K)\,\delta(s) = C_m(s) \qquad \text{LAPLACE}$$

$$\frac{\delta(s)}{C_m(s)} = \frac{1}{Js^2 + D_r s + K}$$

$$= \frac{1/K}{\frac{J}{K}s^2 + \frac{D_r}{K}s + 1} = \frac{1/K}{-\frac{J}{K}\omega^2 + \frac{D_r}{K}j\omega + 1} = \frac{A_{DC}}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\omega\frac{2\xi}{\omega_0} + 1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{J}} \quad ; \quad 2\frac{\xi}{\omega_0} = \frac{D_r}{K}$$

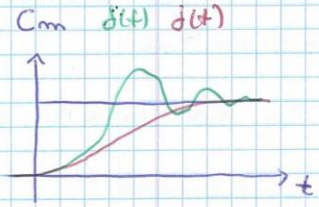
www.alessandropaghi.it

$$p_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \sqrt{1-\xi^2} \quad \text{se } \xi < 1$$

$$= -\xi\omega_0 \pm \sqrt{\xi^2-1} \quad \text{se } \xi > 1$$

ξ : smorzamento

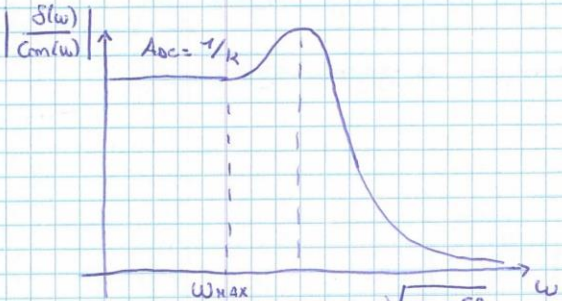
ω_0 : pulsazione naturale



Se i poli sono reali

Se i poli sono complessi e coniugati

$$\delta(t) = \delta_\infty \left(1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\, t + \varphi\right)\right) \quad \text{con } \varphi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$



$\omega_{MAX} \cong \frac{\omega_0}{10}$ $\quad \omega_p = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$ se $\xi < 0{,}7$.

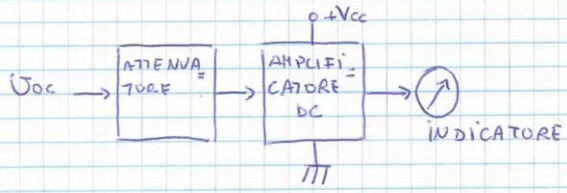
Per $\omega < \frac{\omega_0}{10}$ i segnali possono essere considerati statici.

Quindi questo è uno strumento che lavora in DC.

www.alessandropaghi.it

21/03/2016

STRUMENTI ELETTRONICA ANALOGICI · DC VOLTMETRO



Max sensibilità e portata minima → segnale VDC connesso direttamente all'amplificatore

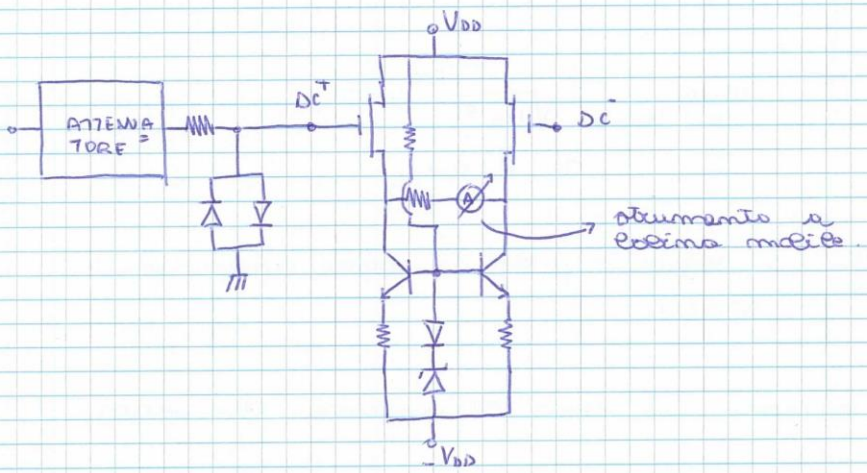
L'amplificatore (voltmetrico) ha Rin molto grande

Perché è stato inserito l'amplificatore?
1) Adattamento di impedenza; → Sottrae la corrente dall'indicatore da Rin.
2) Aumentando la sensibilità;

Portata più alta, subentra Attenuatore.

Come può essere fatto l'amplificatore in DC?

Prima soluzione: amp. differenziale.

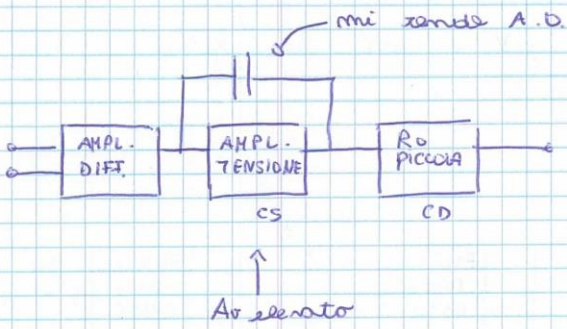


Fondo Scala: 0,3 V

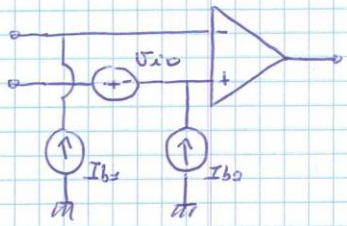
Seconda Soluzione: A.O.

Fondo Scala: mV

www.alessandropaghi.it



ERRORI in CONTINUA



V_{io} : tensione di offset

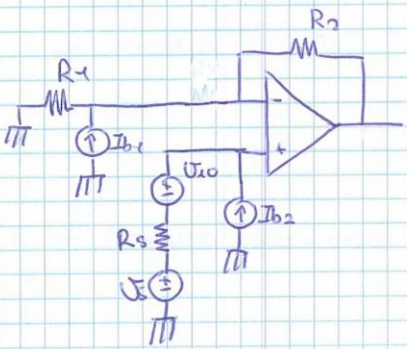
$I_{b1,2}$: correnti di polarizzazione

V_{io} genera, quando gli ingressi sono c.c.

$\rightarrow V_o = V_{io} \cdot A_V$

nel caso RAIL TO RAIL : $V_{io} < \frac{V_{alim}}{A_V}$.

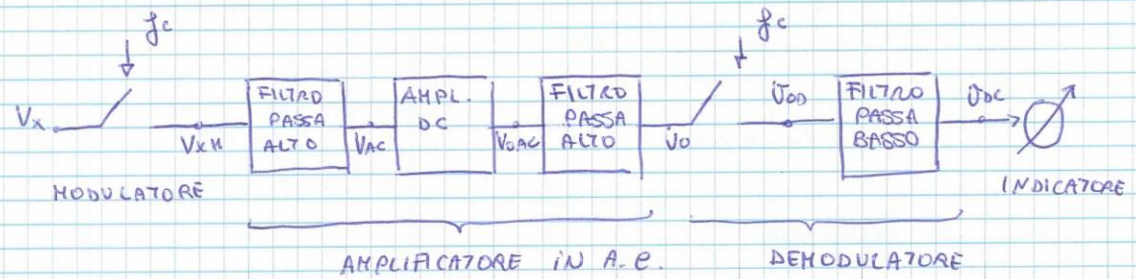
A.O. config. non invertente

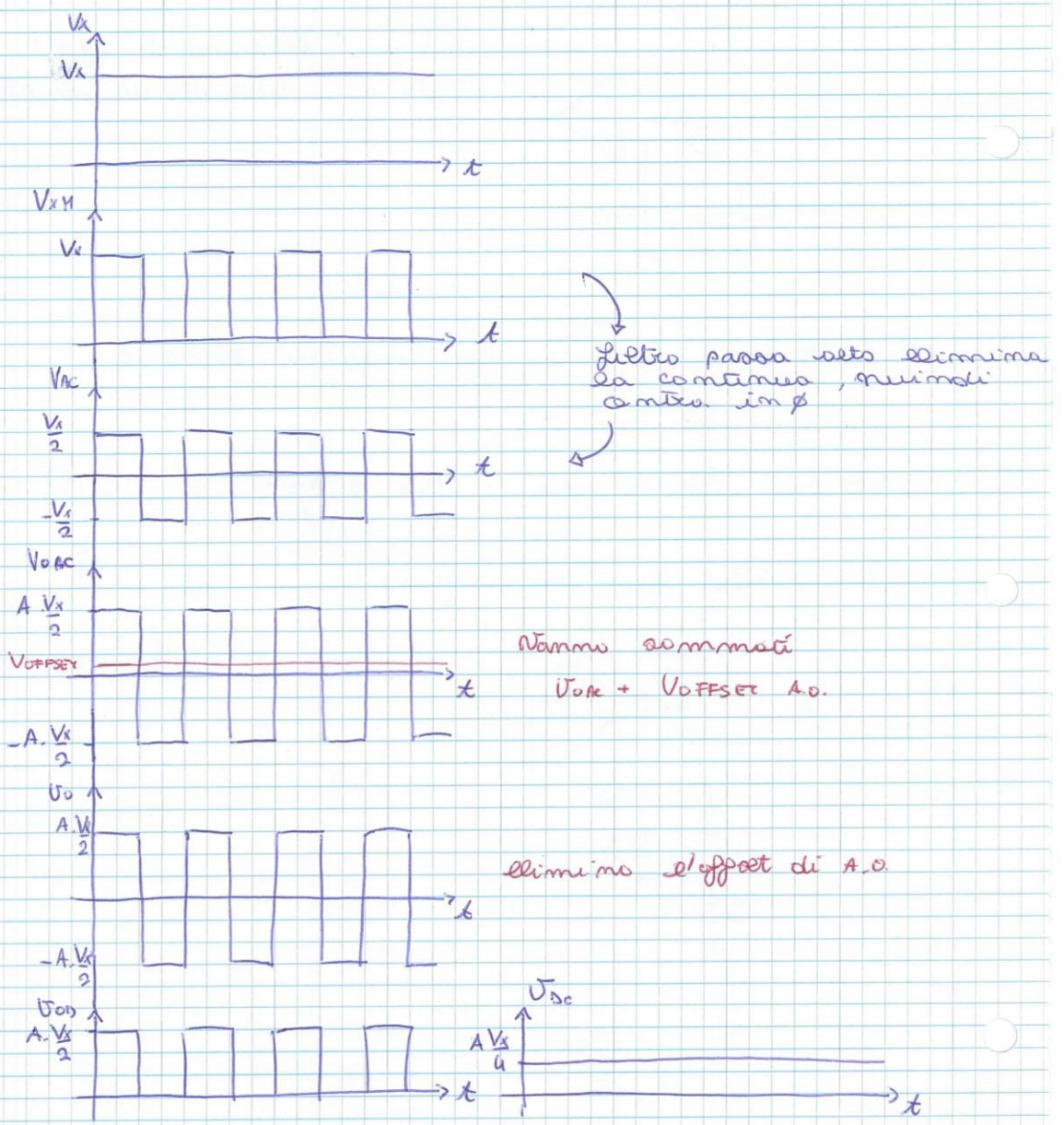


www.alessandropaghi.it

Per riuscire a misurare μV e nV si usa

VOLTMETRO CHOPPER

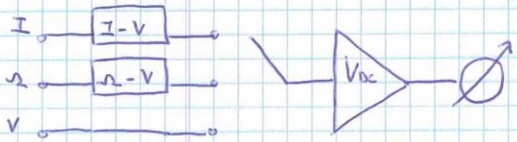




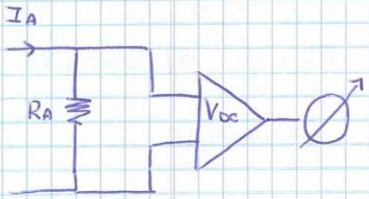
MULTIMETRO

VOLTMETRO + I→V

+ Ω→V



AMPEROMETRO I-V passivo



RA definisce le portate scala ma è anche la resistenza vista dallo strumento.

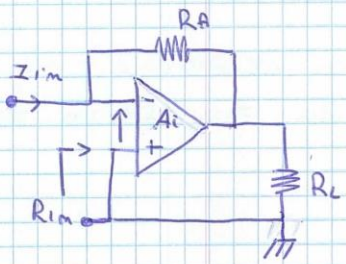
Se $V_{FS} = 100\ mV$ e voglio $I_{A\,FS} = 100\ \mu A$

$\rightarrow R_A = 1\ k\Omega$

Burden Voltage: max c.d.p. ai capi dell'amperometro (V_B)

$$V_B > R_A \cdot I_{FS}$$

I-V attiva (amplificatore di corrente)



$R_{in} \neq 0\ \Omega$ nel caso ideale

$R_{in} = \frac{R_A}{A_i}$ nel caso reale visto dal morsetto meno (-).

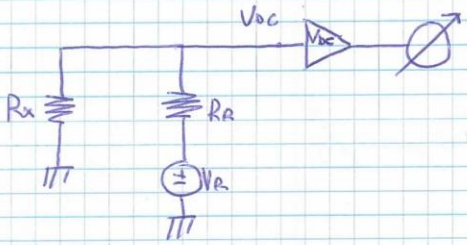
$$V_o = -I_A \cdot R_A$$

$$V_{in} = V_- - V_+ = -\frac{V_o}{A_i} = \frac{I_A R_A}{A_i}$$

www.alessandropaghi.it

OHMETRO Ω-V non lineare

Generatore di tensione costante



$$V_{DC} = V_A \cdot \frac{R_x}{R_x + R_A}$$

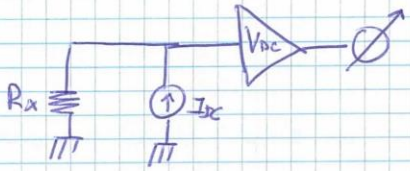
$R_x = 0 \Rightarrow V_{DC} = 0$

$R_x = R_A \Rightarrow V_{DC} = V_A/2$

$R_x = \infty \Rightarrow V_{DC} = V_A$

La misura non è quindi lineare.

OHMETRO Ω-V lineare



$V_{DC} = R_x \cdot I_{DC}$

in quanto $R_{in} \sim \infty\ \Omega$

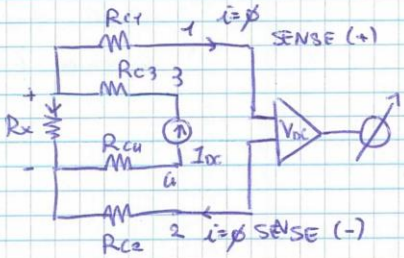
La misura è quindi lineare.

I problemi sono presenti quando R_x è grande

R_x paragonabile con R_{in}.

Se R_x è molto piccola è un problema in quanto diventa paragonabile con la resistenza dei fili.

Risolvo così posiamo 4W:



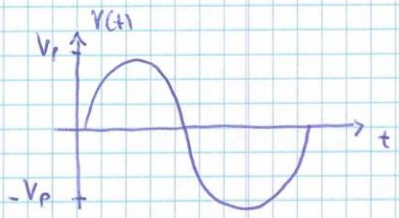
$V_{DC} = R_x \cdot I_{DC}$.

www.alessandropaghi.it

31/03/2076

Tensioni e Correnti Alternate

Gli strumenti sono tarati in V efficaci.



$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v(\tau)^2 \, d\tau}$$

$$v(t) = V_p \sin(2\pi f_0 t)$$

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V_p^2 \sin^2(2\pi f_0 \tau)\, d\tau} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$$

Valor medio convenzionale:

$$V_{MC} = \frac{1}{T}\int_0^T |v(\tau)|\, d\tau = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} V_p \sin(2\pi f_0 \tau)\, d\tau$$

$$= \frac{2V_p}{\pi}$$

$$V_{eff} = V_{MC} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}11\, V_{MC}$$

Se ho un offset:

$$v(t) = V_{DC} + v_p \sin(2\pi f_0 t)$$

$$V_{eff} = \sqrt{V_{DC}^2 + \frac{V_p^2}{2}} = V_{DC} + \frac{V_p}{\sqrt{2}}$$

Gli strumenti per fare la misura misurano prima in DC e poi in AC e dopo p.s.e.

www.alessandropaghi.it

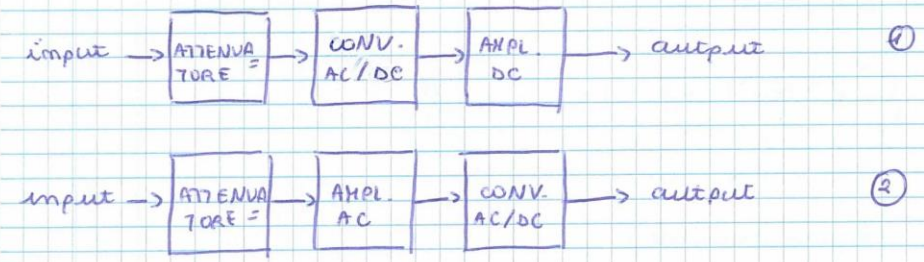
Fattore di Forma:

$F = \frac{V_{eff}}{V_{MC}}$ → per una sinusoide $F = 1{,}11$

Fattore di Picco (di cresta):

$F_P = \frac{V_P}{V_{eff}}$ → per una sinusoide $F_P = \sqrt{2}$.

Come si misura in AC?

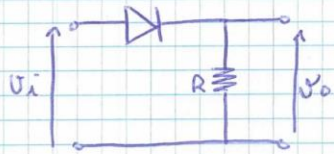


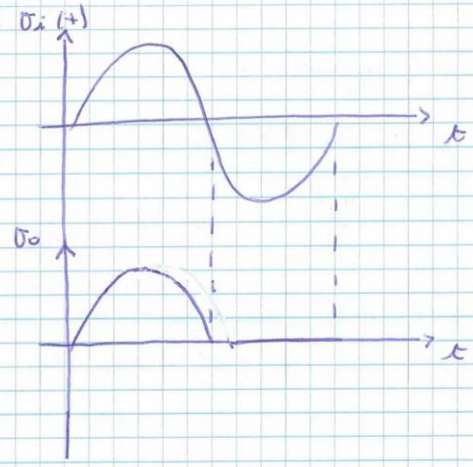
① mi permette di usare un qualsiasi Ampe.

② mi permette di essere molto sensibile e disaccoppiarmi dall'ingresso.

Come raddrizzo?

Raddr. singola semionda





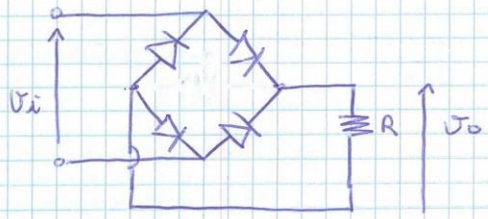
$V_{MC} = \frac{2V_P}{\pi}$.

$V_{MC} = \frac{V_P}{\pi}$.

$I_{SS} = \frac{V_{MC}}{R + R_\gamma} - \frac{V_\gamma}{2(R + R_\gamma)}$

con $V_{MC} = \frac{V_P}{\pi}$

Raddrizzatore a doppia semionda



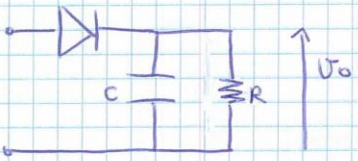
$$I_{DS} = \frac{V_{MC}}{R+R_f} - \frac{V_f}{R+R_f} \quad \text{con } V_{MC} = \frac{2V_P}{\pi}$$

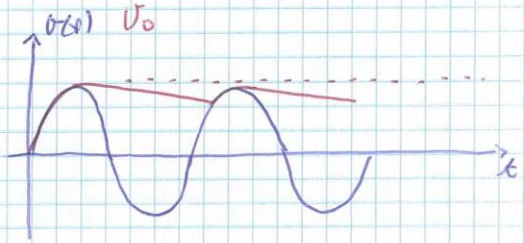
$$= 2\,I_{SC}$$

STRUMENTI DI MISURA

VOLTMETRO A VALORE DI PICCO O DI CRESTA

Come ricavo V_P ?





R: Resistenza intrinseca a C

$$\frac{V_P - V_0}{V_P} = \frac{1}{2\pi RCf}$$

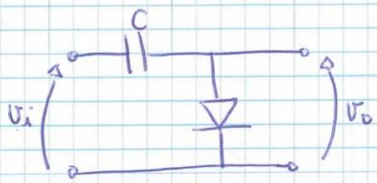
$$\rightarrow V_R = \Delta V = \frac{V_P}{2\pi RCf}$$

Posso quindi calcolare f_{min} che garantisca il min. ripple:

$$f_{min} = \frac{V_P}{\Delta V 2\pi RC} = \frac{1}{2\pi RC\varepsilon} \quad \text{con } \varepsilon = \frac{\Delta V}{V_P}.$$

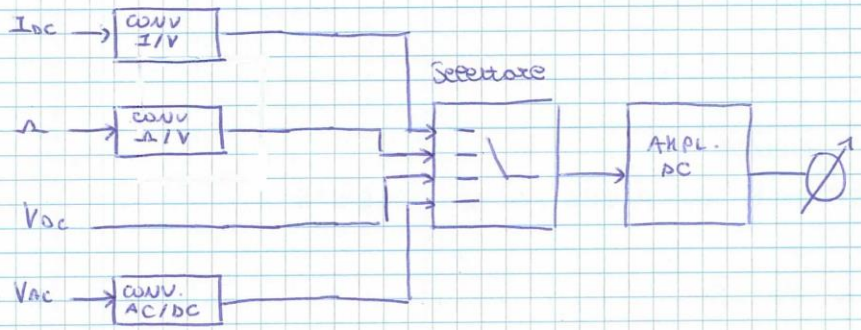
www.alessandropaghi.it

Ma se il mio segnale in AC ha un offset uso questo circuito

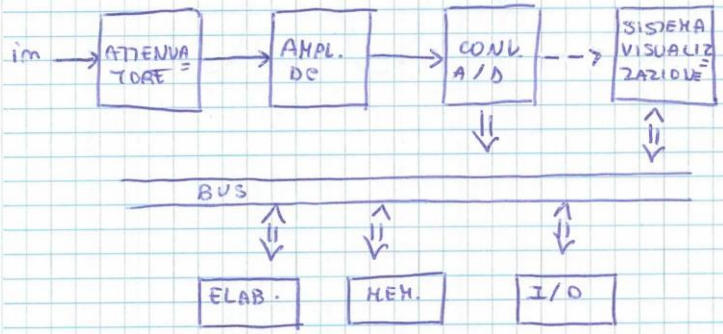


È un filtro passa alto!
→ Elimina la componente in DC.

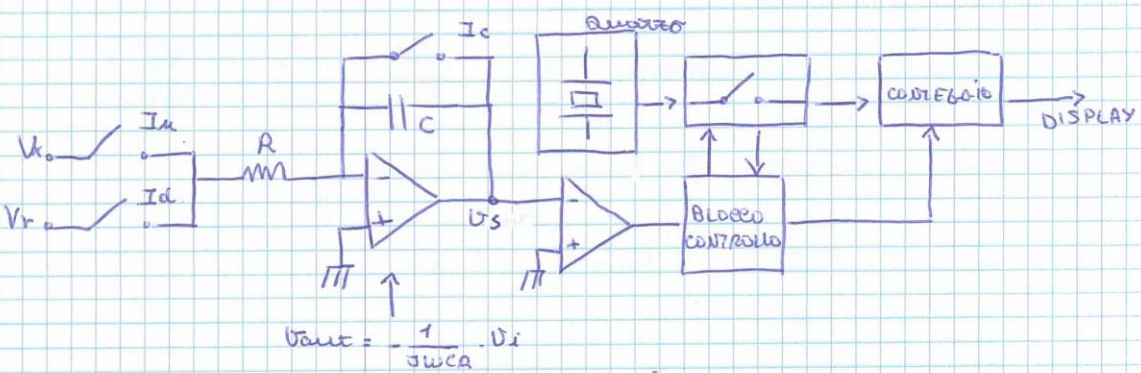
MULTIMETRO ANALOGICO



MULTIMETRO DIGITALE

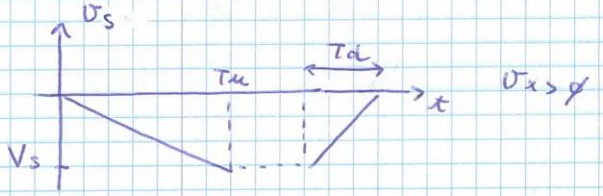


VOLTMETRO NUMERICO A DOPPIA RAMPA



$$V_{out} = -\frac{1}{RC} \cdot V_i$$

All'inizio chiudo I_c e scarico il condensatore C.
Poi apro I_c.
Chiudo I_m e comincia la fase di RUN UP



T_m è imposto dal contatore

Poi chiudo I_m e apro I_0 applicando V_r che ha segno opposto a V_x, comincia la fase di RUN DOWN

$$V_s = -\frac{1}{RC} \cdot V_x \cdot T_m$$

$$V_s - \frac{1}{RC} \cdot V_r \cdot T_d = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_x T_m}{RC} = \frac{V_r T_d}{RC}$$

$$\rightarrow V_x = -V_r \cdot \frac{T_d}{T_m}$$

$$T_d = N_d \cdot t_{ck}$$
$$N_m = N_m \cdot t_{ck}$$

$$\rightarrow V_x = -V_r \cdot \frac{N_d}{N_m}$$

Quindi ho trovato il valore di V_x.

Posto $V_x = -V_r \cdot \frac{N_d}{N_u}$

ΔV_x : passo di quantizzazione $= \frac{|V_r|}{N_u} = \frac{V_x}{N_d} = \frac{V_{fs}}{N_{d\,MAX}}$.

↑ minima quantità che posso misurare

$T_{misura} = T_u + T_d = (N_u + N_d)\, t_{ck}$

$= \frac{N_{d\,MAX}\, t_{ck}}{V_{fs}} [\,|V_r| + V_x\,]$

$T_{mis\,MAX} = T_{mis}\,(V_x = V_{fs}) = \left[1 + \frac{|V_r|}{V_{fs}}\right] N_{d\,MAX}\, t_{ck}$

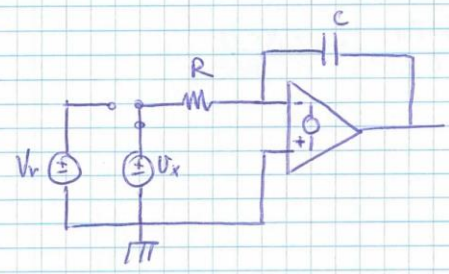
$= 2\, N_{d\,MAX} \cdot t_{ck}$

$N_{d\,MAX} = 2^b \rightarrow T_{mis\,MAX} = 2 \cdot 2^b \cdot t_{ck} = 2^{b+1}\, t_{ck}$

Cause di possibile errore:

1) V_{offset} sull'integratore;
2) V_{offset} sul comparatore;
3) Non linearità della rampa di integrazione;
4) Cariche residue su C;

1)



$(V_x + V_{offset})\, T_u = (V_r - V_{offset})\, T_x$

$V_x = \frac{V_r T_x}{T_u} - V_{offset}\left(1 + \frac{T_x}{T_u}\right)$

con $\Delta V_x = |V_{offset}|\left(1 + \frac{T_x}{T_u}\right)$

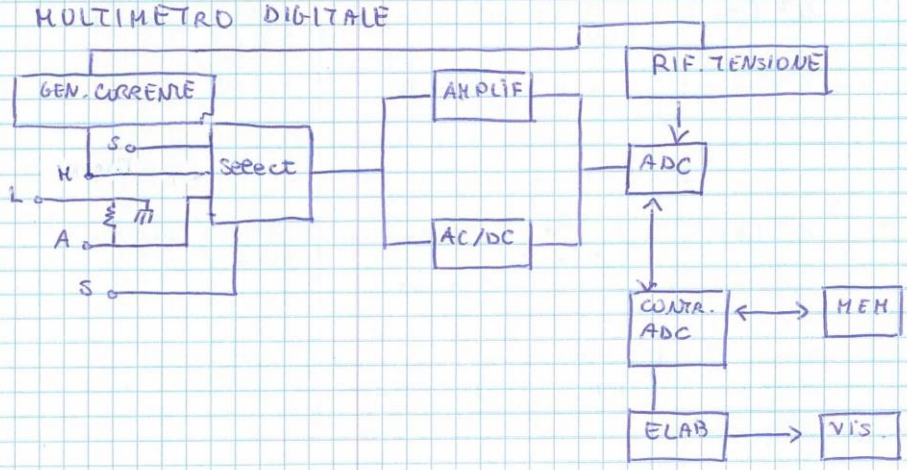
2) $V_{x_e} = V_r \cdot \frac{T_x + T_e}{T_u} = \frac{V_r T_x}{T_u} + \underbrace{\frac{V_r \cdot T_e}{T_u}}_{V_{offset\ comp.}}$.

$\rightarrow T_e = \frac{V_{offset\,comp.}\, T_u}{V_r}$

$= \frac{V_{offset\,comp.}\, RC}{V_r}$

www.alessandropaghi.it

MULTIMETRO DIGITALE

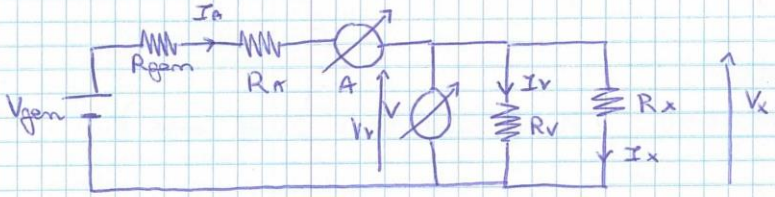


Laboratorio 04/04/16

metodo voltamperometrici

Amperometro a monte

a)



$V_x = V_V$

$I_x = I_A \cdot \frac{R_V}{R_x + R_V}$

$R_x = \frac{V_x}{I_x}$

$\rightarrow R_x = \frac{R_V V_V}{R_V I_A - V_V}$

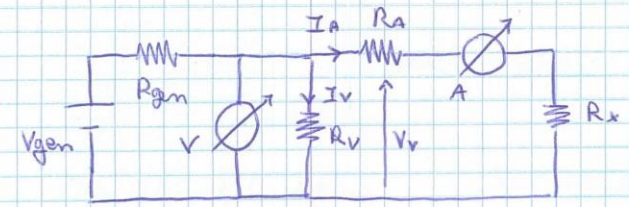
tiene conto di V_V, I_A, R_V.

Se $\frac{R_V}{R_A}$ è grande

$R_x = \frac{V_V}{I_A}$.

Amperometro a valle

b)



$\frac{V_V}{I_A} = R_x + R_A$

$\rightarrow R_x = \frac{V_A}{I_A} - R_A$

tiene conto di V_V, I_A, R_A.

www.alessandropaghi.it

a)

$$u^2(R_x) = \left(\frac{\partial R_x}{\partial I_A}\right)^2 u^2(I_A) + \left(\frac{\partial R_x}{\partial V_V}\right)^2 u^2(V_V) + \left(\frac{\partial R_x}{\partial R_V}\right)^2 u^2(R_V)$$

Se gli errori sono indipendenti

b)

$$u^2(R_x) = \left(\frac{\partial R_x}{\partial V_V}\right)^2 u^2(V_V) + \left(\frac{\partial R_x}{\partial I_A}\right)^2 u^2(I_A) + \left(\frac{\partial R_x}{\partial R_A}\right)^2 u^2(R_A)$$

Voglio misurare una $R = 33\ k\Omega$

$P_{MAX} = \frac{1}{4}\ Watt = 250\ mW$

Impostato NPLC nel multimetro = 10 così nel range DC $1 \div 100\ V$

→ RMS noise adder % range = 0,0 .

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{(30^2)}{(33 \cdot 10^3)} = 29\ mW$$

Per il multimetro:

ACCURACY SPECIFICATIONS (% of reading + % of range)

DC Voltage:

Range 100.0000 V → 0,0040 + 0,0006

DC current:

Range 1,000000 mA → 0,050 + 0,006

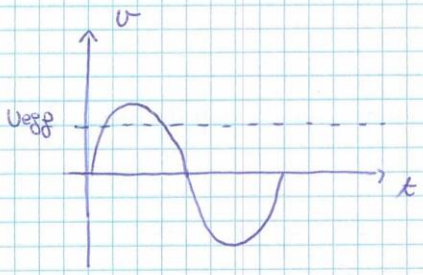
MISURE:

1) $V_{gen} = 10,9760\ V$	$V_V = 10,9759\ V$	$I_A = 334,234\ \mu A$
2) $V_{gen} = 12,7004\ V$	$V_V = 12,7004\ V$	$I_A = 386,992\ \mu A$
3) $V_{gen} = 13,7460\ V$	$V_V = 13,7455\ V$	$I_A = 418,625\ \mu A$
4) $V_{gen} = 15,1003\ V$	$V_V = 15,1001\ V$	$I_A = 459,879\ \mu A$
5) $V_{gen} = 16,2284\ V$	$V_V = 16,2281\ V$	$I_A = 494,259\ \mu A$
6) $V_{gen} = 18,4700\ V$	$V_V = 18,4790\ V$	$I_A = 563,007\ \mu A$
7) $V_{gen} = 20,0050\ V$	$V_V = 20,0059\ V$	$I_A = 609,637\ \mu A$
8) $V_{gen} = 23,5271\ V$	$V_V = 23,5269\ V$	$I_A = 686,075\ \mu A$
9) $V_{gen} = 23,6640\ V$	$V_V = 23,6642\ V$	$I_A = 720,406\ \mu A$
10) $V_{gen} = 25,1938\ V$	$V_V = 25,1936\ V$	$I_A = 766,827\ \mu A$

www.alessandropaghi.it

07/04/2016

Valore efficace



$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{0}^{\tau} v^2(\tau)\, d\tau}$$

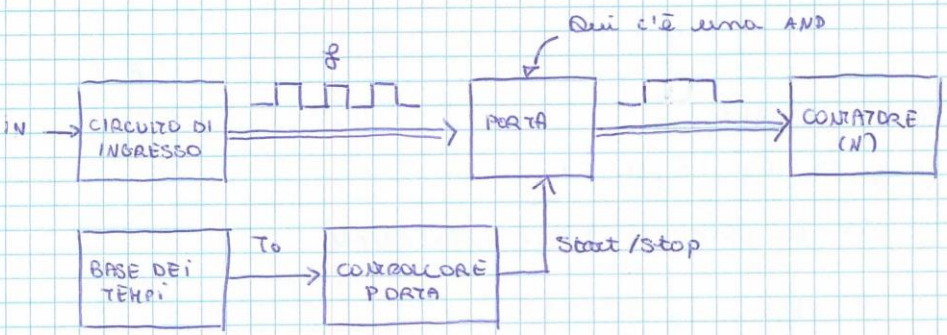
Accuratezza Strumenti:

$$\pm (V_1\% \; V_{letto} + V_2\% \; V_{FS})$$

Strumento a termocoppia (Voltmetro a vero Veff)

Facendo scorrere una corrente su R, genera una potenza e quindi la resistenza di Joule ad una temperatura τ.
Converto poi τ in V che è Veff.

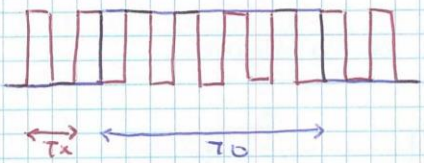
Misuratore di Frequenza:



$T_0 = N \cdot T_x \rightarrow f_x = \frac{N}{T_0}$

T_x: periodo incognito

$f_x = \frac{1}{T_x}$.



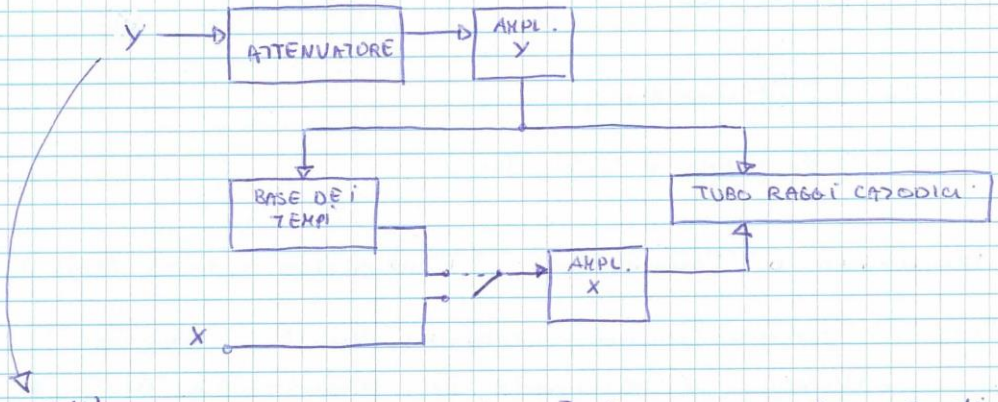
Errore commesso:

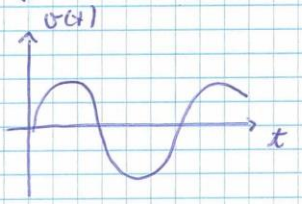
$$e_{f_x} = \frac{1}{T_0} + e_{T_0} \cdot \frac{N}{T_0^2}$$

www.alessandropaghi.it

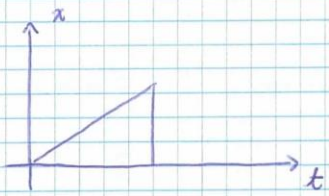
$$\varepsilon_{g_x} = \frac{e_{g_x}}{g_x} = \frac{1}{N} + \varepsilon_{T_0}$$

OSCILLOSCOPIO (Convertatore Tensione - Posizione)
ANALOGICO





x può essere un segnale di qualsiasi genere:

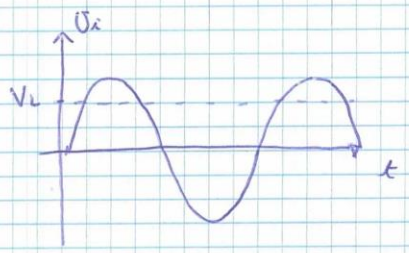


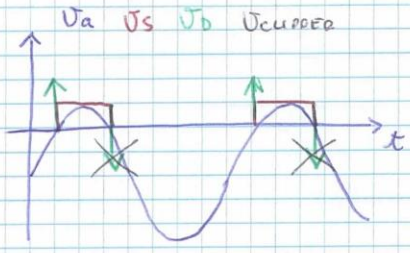
TUBO A RAGGI CATODICI
Vedi pag. 63, 64, 65, 66, 67

+ ANALISI STATICA - DINAMICA DELLA DEFLESSIONE

DEFLESSIONE VERTICALE pag 68 - 69
DEFLESSIONE ORIZZONTALE pag 69 - 70

SISTEMA DI TRIGGER pag. 71





Clipper elimina la S negativa.

www.alessandropaghi.it

14/04/2016

LABORATORIO

$$u_c(R_x) = \sqrt{u_A^2(R_x) + u_B^2(R_x)}$$

non avendo le prove ripetute considero

$u_A(R_x) = \emptyset$

$\rightarrow u_c(R_x) = u_B(R_x)$

$e_i = V_i - R \cdot I_i$

$e_{ms} = \sum_{i=1}^{N} (V_i - R \cdot I_i)^2$

$$\min_R (e_{ms}) = \frac{d}{dR} e_{ms} \Rightarrow R = \frac{\sum_{i=1}^{N} V_i I_i}{\sum_{i=1}^{N} I_i^2}$$

$$u(R) = \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial R}{\partial I_i}\right| u(I_i) + \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial R}{\partial V_i}\right| u(V_i)$$

$$\left|\frac{\partial R}{\partial I_J}\right| = \frac{V_J \sum_{i=1}^{N} I_i^2 - 2 I_J \sum_{i=1}^{N} V_i I_i}{\left(\sum_{i=1}^{N} I_i^2\right)^2}$$

$$\left|\frac{\partial R}{\partial V_J}\right| = \frac{I_J}{\sum_{i=1}^{N} I_i^2}$$

$u(V_i) = \varepsilon_V V_i \quad \forall i$

$u(I_i) = \varepsilon_I I_i \quad \forall i$

$R = 32,842\ \Omega$

Va considerato Shunt Resistor per 1 mA di corrente uguale a 200 Ω

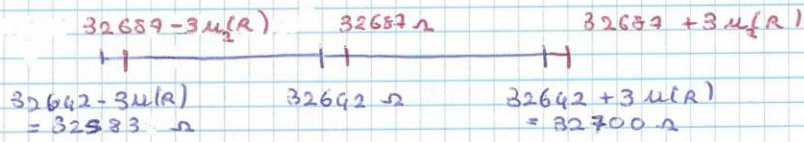
$\rightarrow R = 32642\ \Omega$

$R_{calc} = 32687,5\ \Omega$

$u(R) = \frac{e_R}{\sqrt{3}} \Rightarrow e_R = 58,87\ \Omega$

$u(R) = 19,62\ \Omega$

www.alessandropaghi.it

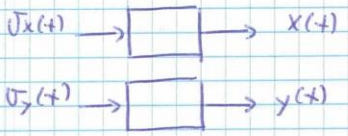


$$u_2(R) = \left(\frac{0{,}010}{100} \cdot 32659 + \frac{0{,}001}{100} \cdot 100 \cdot 10^3 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 19\ \Omega$$

↑ in quanto supponiamo distribuzione uniforme

14/04/2016

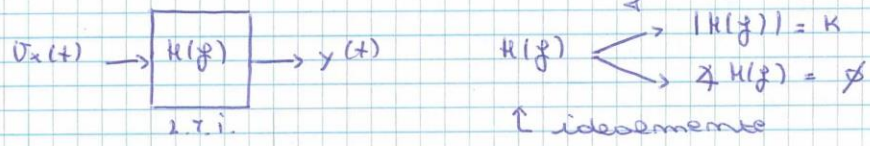
Consideriamo un oscilloscopio:



L'uscita è una copia fedele dell'ingresso:

$v_i(t) = v \cdot f(t) \rightarrow y(t) = A \cdot f(t)$

In realtà non sarà così:



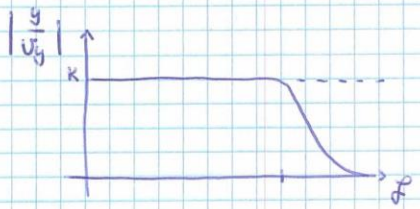
In realtà $y(t) = A \cdot f(t - t_0)$

$H(f) \rightarrow |H(f)| = A$

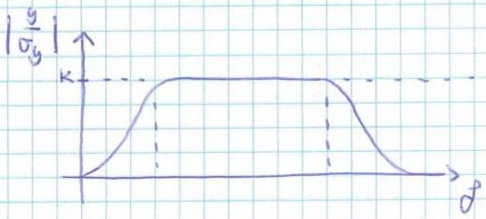
$\angle H(f) = -2\pi f t_0$

www.alessandropaghi.it

ACCOPPIAMENTO DC



ACCOPPIAMENTO AC



$$H(f) = \frac{K}{1 + j\frac{f}{f_K}}$$

↑ Comportamento a polo dominante.

Un resistore ha ai suoi capi un segnale



$$H(f) = \frac{V_L(f)}{V_y(f)} = \frac{A_{DC}}{1 + j \cdot f/f_K}$$ idealmente $A_{DC} = 1$

L'errore è sia in continua che in alternata.
L'errore in continua è dato dalla taratura.
L'errore in alternata è tanto più grande quanto è più grande f.

$$V_y = V_0 \operatorname{sen}(2\pi f_0 t)$$

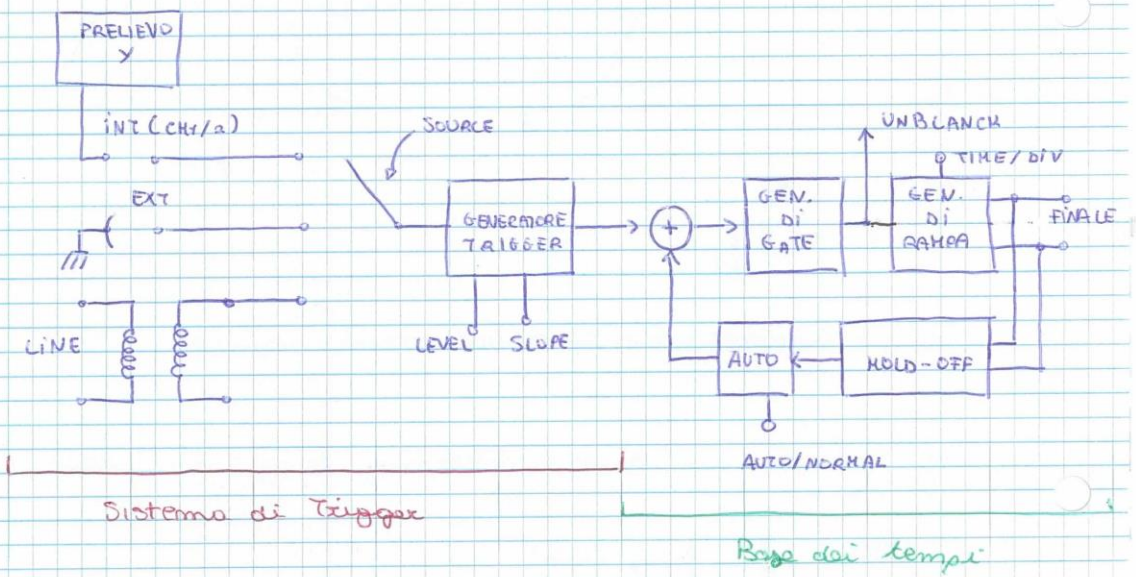
$$V_L(t) = \frac{V_0 \cdot A_{DC}}{\sqrt{1 + f^2/f_K^2}} \cdot \operatorname{sen}(2\pi f_0 t + \angle H(f_0))$$

Se un generico segnale è composto da più armoniche, ogni armonica viene modificata in ampiezza e fase.

Parametri di un oscilloscopio:
BANDA (BW) = f_K.

www.alessandropaghi.it

Canale Orizzontale



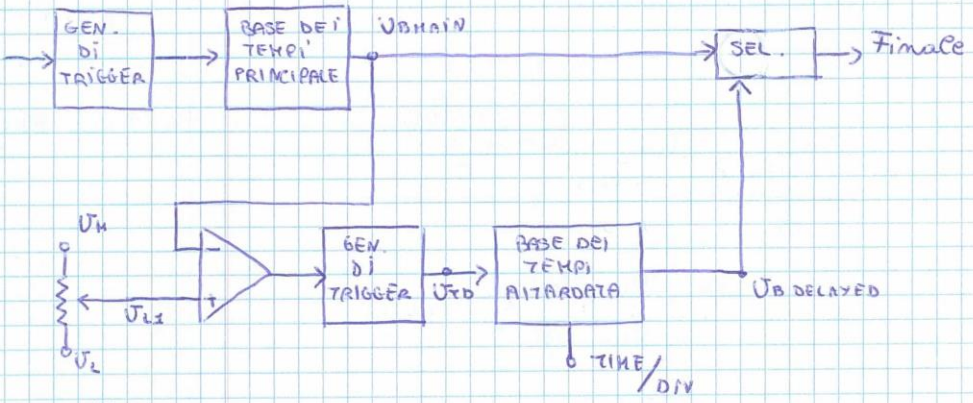
SLOPE: Serve per decidere se il sistema di Trigger si aggancia su livello con pendenza positiva o negativa.

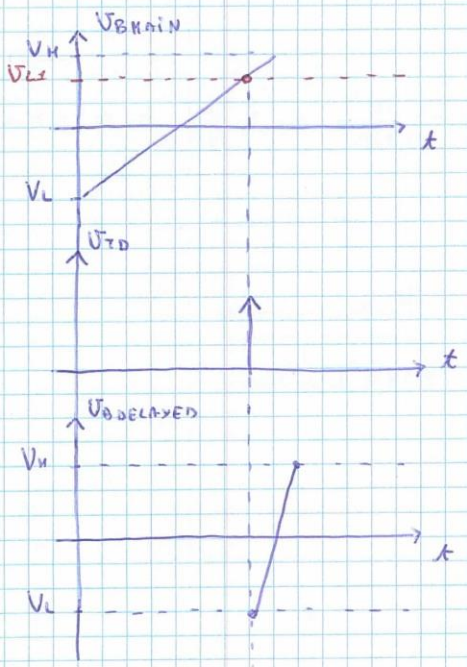
Siccome nel segnale reale c'è presente rumore inserisco un filtro prima del generatore di trigger.

Tipi di filtri:

- HF REJ (Passa Basso)
- LF REJ (Passa alto)
- NOISE REJ (Trigger di Schmitt)

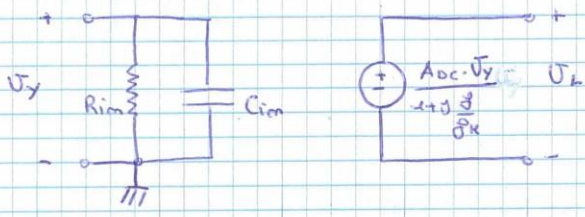
Base dei tempi ritardata





Così riesco a osservare un tratto del segnale registrato nella traccia.

Modello elettrotecnico dell'oscilloscopio



$f_H \approx 100$ MHz

Si vorrei che $R_{im} = \infty\ \Omega$

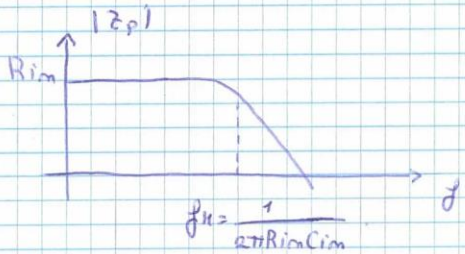
$C_{im} = 0\ F$

In realtà: $C_{im} \approx 42$ pF

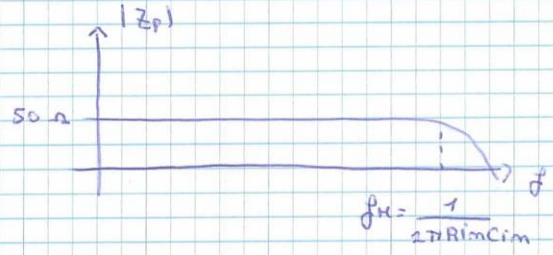
$$|Z_c| = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^6 \cdot 10^{-11}}\ \Omega = \frac{10^{11}}{2\pi 10^6}\ \Omega = \frac{10^5}{2\pi}\ \Omega \approx 16\ K\Omega \quad \text{per } f = 10^6 \text{ Hz}$$

$R_{im} \approx 1\ M\Omega$

$$Z_p = \frac{R_{im}}{1 + j\omega C_{im} R_{im}}, \qquad |Z_p| = \frac{R_{im}}{\sqrt{1 + \omega^2 C_{im}^2 R_{im}^2}}$$



Per avere oscilloscopi a larga banda $R_{im} = 50\ \Omega$.



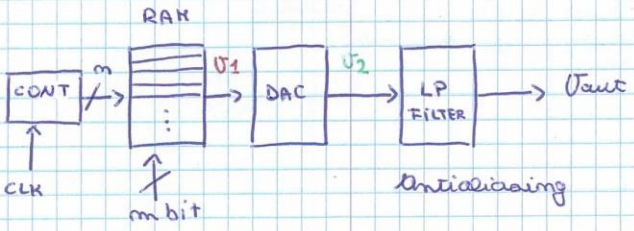
www.alessandropaghi.it

21/04/2016

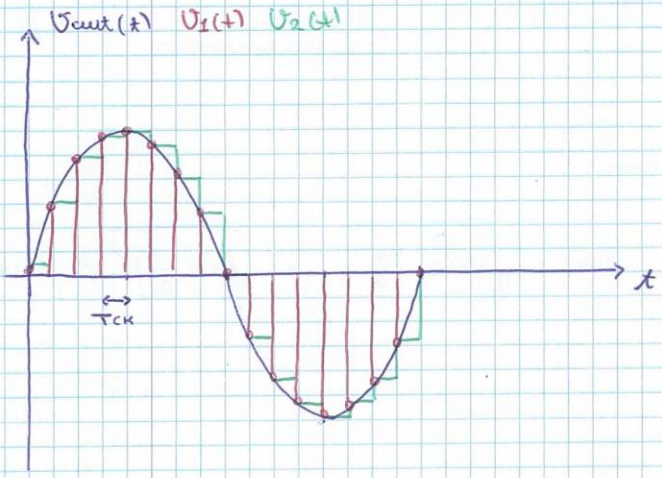
Generatore di Funzione:

Si basa sulla tecnologia DDS

DDS semplificato:



$$f_{CK} = \frac{1}{T_{CK}}$$



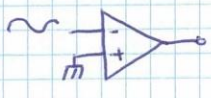
f_0: frequenza sinusoide

$$f_0 = \frac{f_{CK}}{N_{CAMPIONI}} \qquad N = 2^m$$

Per una sinusoide: $f_0 < \frac{f_{CK}}{2}$

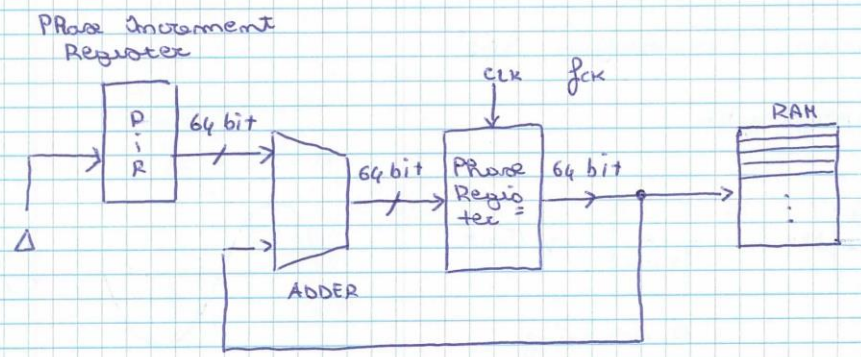
Per un'onda triangolare: $5 f_0 < \frac{f_{CK}}{2}$.

Per un'onda quadra: compara una sinusoide con $\frac{1}{m}$



www.alessandropaghi.it

DDS Reale:



$$f_0 = \frac{f_{CK}}{2^n} \cdot \Delta$$

Risoluzione in frequenza: $\Delta f_0 = \frac{f_{CLK}}{2^n}$

Onda sinusoidale:

$V_{PP} = 2\,V$

$V_{DC} = 1\,V$

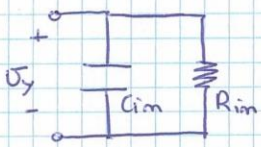
$f = 1\,KHz$

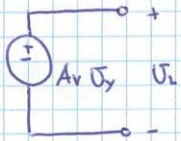
$$V_{RMS} = \sqrt{V_{DC}^2 + \frac{V_{AC}^2}{2}} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\right)V^2} = 1{,}22\,V$$

www.alessandropaghi.it

28/04/2016

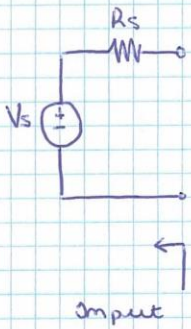
Oscilloscopio





$$A_V = \frac{A_{DC}}{1 + j\frac{f}{f_H}}$$

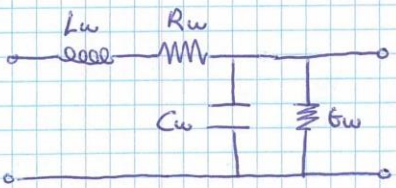
$f_H = B\omega\ (-3dB)$



$R_{in} = 1\,M\Omega$

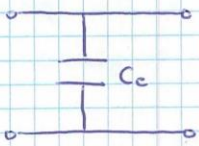
$C_{in} = 12\,pF$

L'ingresso dell'oscilloscopio è connesso a U_i tramite un cavo coassiale:



modello di un cavo reale

Per un cavo coassiale:



$C_c = 100\,pF/m$