

FONDAMENTI DI INFORMATICA

[Fotocopie di Appunti]

A CURA DI ALESSANDRO PAGHI

PROFESSORE: Marco Gori (<http://www3.diism.unisi.it/people/person.php?id=24>)

LINK AL CORSO ANNO 2013/2014:

<http://www3.diism.unisi.it/FAC/index.php?bodyinc=didattica/inc.insegnamento.php&id=54674&aa=2013>

FREQUENTAZIONE: Sconsigliata per studenti provenienti da scuole con indirizzo Informatico, facoltativo per gli altri.

$$(324)_{10} = 4 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2$$

$$(334)_5 = 4 \cdot 5^0 + 3 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^2 = 4 + 15 + 75 = (94)_{10}$$

$$(334)_5 = (94)_{10}$$

94	5
18	4
3	3
0	3

$$(94)_{10} = (334)_5$$

$$(1101)_2 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 = 1 + 0 + 4 + 8 = (13)_{10}$$

13	2
6	1
3	0
1	1
0	1

$$(13)_{10} = (1101)_2$$

$$(201)_3 = (?)_4$$

$$= 1 \cdot 3^0 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 = 19$$

$$= 1 + 0 + 2 \cdot (21)$$

$$= 1 + 42 = (103)_4$$

BASE 4

0
1
2
3
10
11
12
13
20
21
22
23
...

21

2

102

$$(201)_3 = (103)_4$$

$$(201)_3 = 1 \cdot 3^0 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 = (19)_{10}$$

$$(103)_4 = 3 \cdot 4^0 + 0 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^2 = (19)_{10}$$

103	3
13	12
1	2
0	0

$$(201)_3$$

$$(0,75)_{10} = 7 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} = (0,75)_{10}$$

$$(0,11)_2 = 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = (0,75)_{10}$$

$$(0,75)_{10} = (?)_2$$

$$= (0,11)_2$$

$$\begin{array}{r} 0,75 \cdot 2 \\ \textcircled{1},5 \\ 0,5 \cdot 2 \\ \textcircled{1} \\ 0 \end{array}$$

$$(0,1011)_2 = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

$$= \frac{11}{16} = (0,6875)_{10}$$

$$\begin{array}{r} 0,6875 \cdot 2 \\ \textcircled{1},375 \\ 0,375 \cdot 2 \\ \textcircled{0},75 \cdot 2 \\ \textcircled{1},5 \\ 0,5 \cdot 2 \\ \textcircled{1} \\ 0 \end{array} \quad (0,6875)_{10} = (1011)_2$$

$$(0,7)_{10} = (?)_2$$

$$\begin{array}{r} 0,7 \cdot 2 \\ \textcircled{1},4 \\ 0,4 \cdot 2 \\ \textcircled{0},8 \cdot 2 \\ \textcircled{1},6 \\ \text{PERIODO} \left\{ \begin{array}{l} 0,6 \cdot 2 \\ \textcircled{1},2 \\ 0,2 \cdot 2 \\ \textcircled{0},4 \end{array} \right. \end{array} \quad (0,7)_{10} = (10110)_2$$

+3

3	2
1	1
0	1

$$(11)_2 = 3$$

Rappresentazione su 4 bit

$$+3 = (0011)_2$$

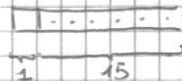
$$-3 = (?)_2$$

Complemento a due di

$$(0011)_2 = (1100)_2$$

$$\begin{array}{r} 1100 + \\ 1 \\ \hline (1101)_2 = (-3)_{10} \end{array}$$

Range numeri positivi e negativi



$$n = 16$$

$$NEG = -2^{n-1} = -32768$$

$$POS = 2^{n-1} - 1 = 32767$$

$$Range = (-2^{n-1}; 2^{n-1} - 1)$$

$$\begin{aligned}
 (1001)_2 &= 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 \\
 &= 1 \cdot (1) + 1 \cdot (8) \\
 &= (9)_{10} \\
 &= (11)_8 \\
 &= (12)_7
 \end{aligned}$$

$(9)_{10}$

$$\begin{array}{r|l}
 9 & 7 \\
 1 & 2 \uparrow \\
 0 & 1
 \end{array}$$

$(12)_7$

$$\begin{array}{r|l}
 9 & 8 \\
 1 & 1 \uparrow \\
 0 & 1
 \end{array}$$

$(11)_8$

$(0,1875)_{10}$

$$\begin{array}{rcl}
 0,1875 & \cdot 2 & \\
 \hline
 0,3750 & \cdot 2 & \\
 0,7500 & \cdot 2 & \\
 1,5000 & & \\
 0,5000 & \cdot 2 & \\
 \downarrow 1,0000 & & \\
 0,0000 & &
 \end{array}$$

$(0,0011)_2$

$(0,6)_{10}$

$$\begin{array}{rcl}
 0,6 & \cdot 2 & \\
 \hline
 1,2 & & \\
 0,2 & \cdot 2 & \\
 0,4 & \cdot 2 & \\
 0,8 & \cdot 2 & \\
 1,6 & & \\
 \hline
 0,6 & \cdot 2 & \\
 1,2 & & \\
 0,2 & &
 \end{array}$$

$(0,\overline{1001})_2$

$$\begin{array}{r|l}
 5 & 2 \\
 2 & 1 \uparrow \\
 1 & 0 \\
 0 & 1
 \end{array}
 \quad 5_{10} = 0101_2$$

$$\begin{array}{r|l}
 3 & 2 \\
 1 & 1 \uparrow \\
 0 & 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1100 + \\
 \hline
 1 \\
 -3_{10} = (1101)_2
 \end{array}$$

ENTROPIA DI UNA SORGENTE

$$I(\hat{S}) = - \sum_{s \in S} p(s) \log p(s) \quad [\text{bit}]$$

ENTROPIA CON SIMBOLI EQUIPROBABILI

$$I(S) = \log m$$

$$\hat{S} = \{(s_1, 0.25), (s_2, 0.25), (s_3, 0.25), (s_4, 0.25)\}$$

$$I(\hat{S}) = - 4 \cdot \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} = - \log \frac{1}{4} = 2 \text{ bit}$$

$$\hat{S}' = \{(s_1, 1/4), (s_2, 1/4), (s_3, 5/16), (s_4, 3/16)\}$$

$$I(\hat{S}') = \left(-\frac{1}{4} \log \frac{1}{4}\right) \cdot 2 - \frac{5}{16} \log \frac{5}{16} - \frac{3}{16} \log \frac{3}{16} = 1,9772 \text{ bit}$$

Simboli equiprobabili: max informazione.

$$\hat{S}_1 = \{(a, 1/4), (b, 3/4)\}$$

$$\hat{S}_2 = \{((a,a), 1/16), ((a,b), 3/16), ((b,a), 3/16), ((b,b), 9/16)\}$$

$$I(\hat{S}_1) = -\frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \log \frac{3}{4} = 0,8113 \text{ bit}$$

$$I(\hat{S}_2) = 2 \cdot I(\hat{S}_1)$$

$$\text{L, } I(\hat{S}_m) = m \cdot I(\hat{S}_1)$$

P	Q	R	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg Q \wedge R$	$\neg(P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge R)$
F	F	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	F	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	V	F	V
V	F	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F	F
V	V	V	F	V	F	F	F

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$\neg P$	$P \leftrightarrow Q$	$\neg Q \rightarrow \neg P$	$P \rightarrow \neg Q$
F	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F	V
V	V	V	V	V	F	V	V	F

$P \rightarrow Q$ Viene tradotto come $\neg P \vee Q$

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

$$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) =$$

$$= (\underbrace{\neg P \wedge \neg Q}_F) \vee (\underbrace{\neg P \wedge P}_F) \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P) = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P)$$

È vero solo se le variabili hanno gli stessi valori.

DE MORGAN

$$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$$

$$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$$

$$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P) \quad \text{TAUTOLOGIA}$$

$$\begin{aligned}
 (P \rightarrow Q) &\leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P) \\
 &= (\bar{P} + Q) \cdot (\bar{Q} + \bar{P}) + (\bar{P} + Q) \cdot (Q + \bar{P}) \\
 &= \bar{P} \cdot Q + \bar{P} + Q + \bar{P} \cdot \bar{Q} + P \cdot \bar{Q} + P \cdot \bar{Q} \\
 &= \bar{P} \cdot Q + \bar{P} + Q + P \cdot \bar{Q} \quad \text{---} \\
 &= \bar{P} (1 + Q) + P \cdot \bar{Q} + Q (P + \bar{P}) \\
 &= \bar{P} + P \cdot \bar{Q} + P \cdot Q + \bar{P} \cdot Q = \bar{P} + P \cdot (Q + \bar{Q}) = P + \bar{P} = 1
 \end{aligned}$$

$$\neg(P \rightarrow Q) \equiv (P \wedge \neg Q)$$

$$\begin{aligned}
 &[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow (P \rightarrow R) \\
 &(\bar{P} + Q) \cdot (\bar{Q} + R) + (\bar{P} + R) \\
 &(\bar{P} + Q) + (\bar{Q} + R) + (\bar{P} + R) \\
 &P \cdot \bar{Q} + Q \cdot \bar{R} + \bar{P} + R \\
 &P \cdot \bar{Q} + Q \cdot \bar{R} + \bar{P} (Q + \bar{Q}) + R (Q + \bar{Q}) \\
 &\quad \quad \quad \text{---} \quad \quad \quad \text{---} \\
 &P \bar{Q} + Q \bar{R} + \bar{P} Q + \bar{P} \bar{Q} + R Q + R \bar{Q} \\
 &\bar{Q} (P + \bar{P}) + Q (\bar{R} + R) + \bar{P} Q + R \bar{Q} = \bar{Q} + Q + \bar{P} Q + R \bar{Q} = \text{True} \\
 &\quad \quad \quad \text{---} \quad \quad \quad \text{---} \quad \quad \quad \text{---}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow (P \rightarrow R) \\
 &(\bar{P} + Q) \cdot (\bar{Q} + R) + (\bar{P} + R) = (\bar{P} + Q) \cdot (\bar{Q} + R) \cdot (P + \bar{R}) \\
 &(\bar{P} \bar{Q} + \bar{P} R + Q \bar{Q} + QR) \cdot P + \bar{R} = \bar{P} \bar{Q} P \bar{R} + \bar{P} R P \bar{R} + Q R P \bar{R} = F = V
 \end{aligned}$$

STRUTTURA PROPOSIZIONALE

- 1) Fra P e Q DISJUNCTIVE SYLLOGISM $P \vee Q$
 Mom $\bar{P}$ e caso di P . $P \vee Q, \neg P \vdash Q$ $\neg P$
 $\therefore Q$ $\therefore Q$
- 2) Se P , allora Q . MODUS PONENS $P \rightarrow Q$
 P $P \rightarrow Q, P \vdash Q$ P
 $\therefore Q$ $\therefore Q$
- 3) Se P , allora Q . MODUS TOLENS $P \rightarrow Q$
 Mom $\bar{Q}$ il caso di Q . $P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$ $\neg Q$
 $\therefore$ Mom $\bar{P}$ il caso di P . $\therefore \neg P$
- 4) Se P , allora Q . AFFIRMING THE CONSEQUENT
 Q
 $\therefore P$

SIMBOLI SPECIALI

Operatori logici

mom $\bar{P}$ il caso di

E

O

Se ... allora ...

Se e solo se

Simboli

$\neg$

$\wedge$

$\vee$

$\rightarrow$

$\leftrightarrow$

Differenza fra $\rightarrow$ e $\vdash$

IMPLICAZIONE IN
UNA PROPOSIZIONE.

DA UN INSIEME DI ARGOMENTI
DERIVA LA CONCLUSIONE.

$$[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow (P \rightarrow R)$$

P	Q	R	[[(P → Q) ∧ (Q → R)] → (P → R)]				
F	F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V	F
V	F	V	F	F	V	V	F
V	V	F	V	F	F	V	V
V	V	V	V	V	V	V	V

↑ Tutti Vero: TAUTOLOGIA!

$$(\bar{P} + Q) \cdot (\bar{Q} + R) + (\bar{P} + R)$$

$$= P \cdot \bar{Q} + Q \cdot \bar{R} + \bar{P} + R$$

$$= P \cdot \bar{Q} + Q \cdot \bar{R} + \bar{P}(Q + \bar{Q}) + R(Q + \bar{Q})$$

$$= P \cdot \bar{Q} + Q \cdot \bar{R} + \bar{P}Q + \bar{P}\bar{Q} + RQ + R\bar{Q}$$

$$= \bar{Q}(P + \bar{P}) + Q(\bar{R} + R) + \bar{P}Q + R\bar{Q}$$

$$= \underbrace{\bar{Q} + Q}_{T} + \bar{P}Q + R\bar{Q} = T$$

$$(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$$

P	Q	(P ∨ Q) ∧ ¬(P ∧ Q)			
F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	F
V	F	V	V	V	F
V	V	V	F	F	V

↑ EX OR ⊕

$$(P + Q) \cdot \overline{P \cdot Q} = (P + Q) \cdot (\bar{P} + \bar{Q}) = \cancel{P\bar{P}} + P\bar{Q} + \cancel{Q\bar{Q}} + \bar{P}Q = P\bar{Q} + \bar{P}Q = P \oplus Q$$

$P \vee \neg P$: TAUTOLOGIA

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
F	V	V
V	F	V

↑
TAUTOLOGIA

$P \wedge \neg P$: CONTRADDIZIONE

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
F	V	F
V	F	F

$(\neg P \vee \neg Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$

P	Q	$(\neg P \vee \neg Q)$	$\leftrightarrow$	$(P \wedge Q)$
F	F	V	V	F
F	V	V	V	F
V	F	F	V	F
V	V	F	F	V

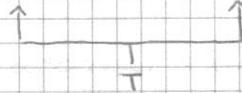
↑
contraddizione

Quindi : $(\neg P \vee \neg Q) \leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$ = Tautologia!

$$((P \wedge Q) \wedge (R \wedge S)) \rightarrow P$$

P	Q	R	S	(P ∧ Q)	∧	(R ∧ S)	→ P
F	F	F	F	F	F	F	V
F	F	F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	V
F	V	V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	F	F	V	V
V	V	F	F	V	F	F	V
V	V	F	V	V	F	F	V
V	V	V	F	V	F	F	V
V	V	V	V	V	V	V	V

$$P \cdot Q \cdot R \cdot S + P = \bar{P} + \bar{Q} + \bar{R} + \bar{S} + P = T$$



$$P \vee Q, \neg P \vdash Q$$

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$\vdash Q$
F	F	F	V	F
F	V	V	V	V
V	F	V	F	F
V	V	V	F	V

← La conclusione è vera.

$$P \vee Q, \neg P \vdash Q : ((P \vee Q) \wedge \neg P) \rightarrow Q$$

$$(P + Q) \cdot \bar{P} + Q = \bar{P} \cdot \bar{Q} + P + Q$$

$$= \bar{P}\bar{Q} + P(Q + \bar{Q}) + Q(P + \bar{P}) = \bar{P}\bar{Q} + P\bar{Q} + P\bar{Q} + PQ + Q\bar{P}$$

$$= \bar{P}\bar{Q} + P\bar{Q} + PQ + Q\bar{P} = P(Q + \bar{Q}) + \bar{P}(Q + \bar{Q}) = T$$

$$P, Q \vdash R : \text{argomento}$$

$$(P \wedge Q) \rightarrow R : \text{singola wff}$$

l'argomento è valido se:
 $(P \wedge Q) \rightarrow R$ is True.

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$$

P	Q	R	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow R$	$\vdash P \rightarrow R$
F	F	F	V	V	V ✓
F	F	V	V	V	V ✓
F	V	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V ✓
V	F	F	F	V	F
V	F	V	F	V	V
V	V	F	V	F	F
V	V	V	V	V	V ✓

l'argomento è
 valido.

$P \rightarrow Q, Q \vdash P$

P	Q	$P \rightarrow Q$	Q	$\vdash P$
F	F	V	F	F
F	V	V	V	F X
V	F	F	F	V
V	V	V	V	V ✓

L'argomento è invalido

$P \rightarrow Q, P \rightarrow \neg Q \vdash \neg P$

P	Q	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow \neg Q$	$\vdash \neg P$
F	F	V	V	V ✓
F	V	V	V	V ✓
V	F	F	V	F
V	V	V	F	F

$((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q)) \rightarrow \neg P$

$$(\bar{P} + Q) \cdot (\bar{P} + \bar{Q}) + \bar{P} = P \cdot \bar{Q} + P Q + \bar{P} = P \bar{Q} + P Q + \bar{P} (Q + \bar{Q})$$

$$= P \bar{Q} + P Q + \bar{P} Q + \bar{P} \bar{Q} = P (Q + \bar{Q}) + \bar{P} (Q + \bar{Q}) = T$$

$P \vee Q, Q \vee R \vdash P \vee R$

P	Q	R	$P \vee Q$	$Q \vee R$	$\vdash P \vee R$
F	F	F	F	F	F
F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F X
F	V	V	V	V	V ✓
V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	V	V ✓
V	V	F	V	V	V ✓
V	V	V	V	V	V ✓

L'argomento è invalido.

$$R \vdash P \leftrightarrow (P \vee (P \wedge Q))$$

P	Q	R	P	V	(P ∧ Q)	↔	P
F	F	F	F	F	F	✓	
F	F	V	F	F	F	✓	
F	V	F	F	F	F	✓	
F	V	V	F	F	F	✓	
V	F	F	V	F	F	✓	
V	F	V	V	F	F	✓	
V	V	F	V	V	V	✓	
V	V	V	V	V	V	✓	

L'argomento è
valido.

↑ TAUTOLOGIA

$$R \rightarrow (P \leftrightarrow (P \vee (P \wedge Q)))$$

$$\bar{R} \vee (P \leftrightarrow (P \vee (P \wedge Q))) = \bar{R} \vee P \leftrightarrow P = R \vee T = T$$

$\underbrace{P \leftrightarrow (P \vee (P \wedge Q))}_{P \leftrightarrow P}$
 $P \leftrightarrow P$
 T

$$P \wedge Q \vdash \neg \neg P$$

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg \neg P$
F	F	F	F
F	V	F	F
V	F	F	V
V	V	V	V

① TABELLA DI VERITÀ

L'argomento è valido

$$P \cdot Q \rightarrow \overline{\overline{P}}$$

$$\overline{P \cdot Q} + P = \overline{P} + \overline{Q} + P = T$$

② PROPOSIZIONE ASSOCIATA

③ ALBERO DI REFUTAZIONE

$P \wedge Q$ ← Premessa

$\neg \neg P$ ← Conclusione negata

$P \wedge Q$ ✓

$\neg \neg P$

P

Q

$P \wedge Q$ ✓

$\neg \neg P$ ✓

P

Q

$\neg P$

$P \wedge Q$ ✓

$\neg \neg P$ ✓

P

Q

$\neg P$

X

L'argomento è valido!

$P \vee Q, \neg P \vdash Q$

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$\vdash Q$
F	F	F	V	F
F	V	V	V	V
V	F	V	F	F
V	V	V	F	V

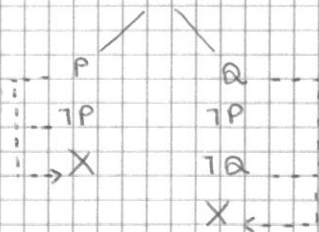
✓ l'argomento è valido.

$((P \vee Q) \cdot \bar{P}) \rightarrow Q$

$$((P \vee Q) \cdot \bar{P}) + Q = \bar{P}Q + P + Q = \overline{P+Q} + P + Q = T$$

$P \vee Q$ } Premesse
 $\neg P$ }
 $\neg Q$ } conclusione negata

$P \vee Q$ ✓
 $\neg P$ ✓
 $\neg Q$ ✓



l'argomento è valido!

$P \vee Q, P \vdash \neg Q$

P	Q	$P \vee Q$	$\neg Q$
F	F	F	V
F	V	V	F
V	F	V	V
V	V	V	F

l'argomento è invalido

$$(P \vee Q) \cdot P + Q = P \bar{Q} + P + Q = P(\bar{Q} + 1) + Q = P + Q$$

$P \vee Q$

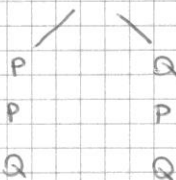
P

$\neg \neg Q$

$P \vee Q \checkmark$

P $\checkmark$

$\neg \neg Q \checkmark$



l'argomento è invalido.

$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P \vdash R$

$P \rightarrow Q : (\neg P \vee Q)$

$Q \rightarrow R : (\neg Q \vee R)$

P

$\neg R$

$P \rightarrow Q \checkmark$

$Q \rightarrow R$

P

$\neg R$

$\neg P$

Q

$P \rightarrow Q \checkmark$

$Q \rightarrow R \checkmark$

P

$\neg R$

$\neg P$

Q

X

$\neg Q$

R

X

$P \rightarrow Q \checkmark$

$Q \rightarrow R \checkmark$

$P \checkmark$

$\neg R \checkmark$

$\neg P$

Q

X

$\neg Q$

R

X

$\neg R$

X

l'argomento è valido.

$$P \leftrightarrow Q, \neg P \vdash \neg Q$$

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$
F	F	V	V	V
F	V	F	V	F
V	F	F	F	V
V	V	V	F	F

✓

L'argomento è valido.

$$\begin{aligned} (P \leftrightarrow Q) \cdot \bar{P} + \bar{Q} &= (PQ + \bar{P}\bar{Q}) \cdot \bar{P} + \bar{Q} = PQ + \bar{P}\bar{Q} + P + \bar{Q} \\ &= (\bar{P} + \bar{Q}) \cdot (P + Q) + P + \bar{Q} = \cancel{P\bar{P}} + Q\bar{P} + P\bar{Q} + \cancel{Q\bar{Q}} + P + \bar{Q} \\ &= Q\bar{P} + P\bar{Q} + P + \bar{Q} \\ &= \bar{Q}(P + \bar{P}) + P + \bar{P}Q = \bar{Q} + P + \bar{P}Q \dots \end{aligned}$$

$$P \leftrightarrow Q$$

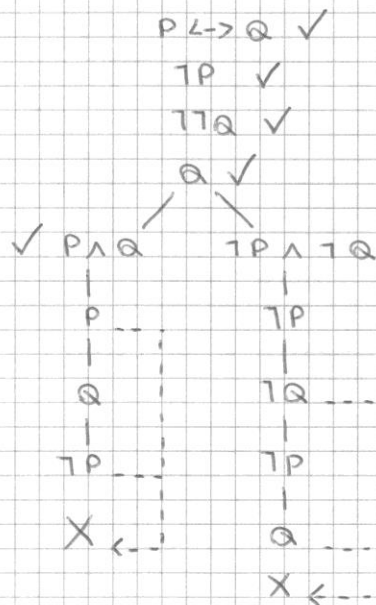
$$\neg P$$

$$P \leftrightarrow Q$$

$$\neg P$$

$$\neg \neg Q \quad \checkmark$$

$$Q$$



L'argomento è valido.

$$\neg(P \wedge Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q$$

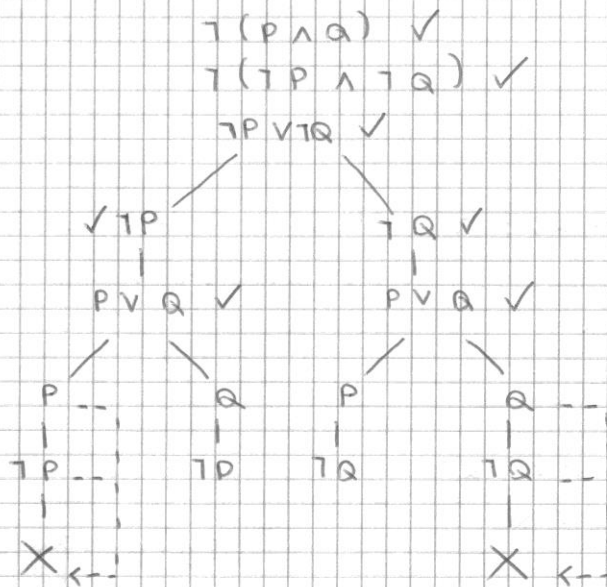
P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$\vdash$	$\neg P$	$\wedge$	$\neg Q$	
F	F	V	F	V	V	V	✓
F	V	V	F	V	F	F	X
V	F	V	F	F	F	V	X
V	V	F	V	F	F	F	

L'argomento è invalido.

$$P \cdot Q + \bar{P} \bar{Q} = P \cdot Q + \bar{P} \bar{Q}$$

$$\neg(P \wedge Q)$$

$$\neg(\neg P \wedge \neg Q)$$



L'argomento è invalido.

$$P, P \rightarrow Q \vdash P \leftrightarrow Q$$

P	Q	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
F	F	V	V
F	V	V	F
V	F	F	F
V	V	V	V

✓

l'argomento è valido.

$$\begin{aligned}
 &P \cdot (\bar{P} + Q) \rightarrow (PQ + \bar{P}\bar{Q}) : P(\bar{P} + Q) + PQ + \bar{P}\bar{Q} \\
 &= \bar{P} + P\bar{Q} + PQ + \bar{P}\bar{Q} = \underbrace{\bar{P} + P}_{T} + \underbrace{P(\bar{Q} + Q)}_T + \bar{P}\bar{Q} = T
 \end{aligned}$$

P

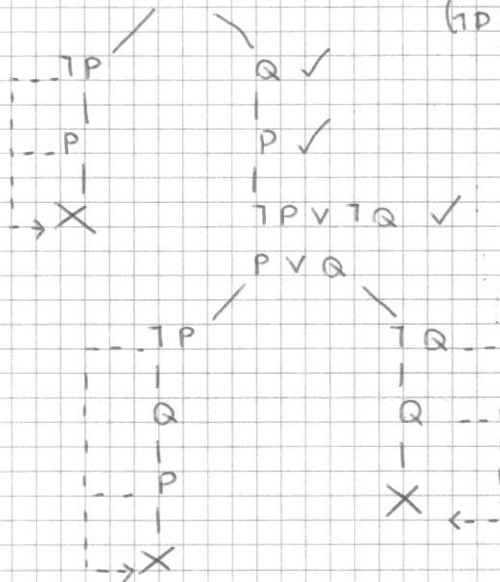
$P \rightarrow Q$

$\neg(P \leftrightarrow Q)$

P ✓

$P \rightarrow Q$ ✓

$$\begin{aligned}
 &\neg(P \leftrightarrow Q) : \neg((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \\
 &(\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)
 \end{aligned}$$



l'argomento è valido.

$$P \rightarrow (R \vee S), (R \wedge S) \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q$$

P	Q	R	S	$P \rightarrow (R \vee S)$	$(R \wedge S) \rightarrow Q$	$\vdash P \rightarrow Q$
F	F	F	F	V	F	V
F	F	F	V	V	F	V
F	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V
F	V	F	V	V	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	F
V	F	V	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V	F
V	V	F	F	F	F	V
V	V	F	V	V	F	V
V	V	V	F	V	F	V
V	V	V	V	V	V	V

l'argomento è invalido.

$$P \rightarrow (R \wedge S), (R \vee S) \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q$$

P	Q	R	S	$P \rightarrow (R \wedge S)$	$(R \vee S) \rightarrow Q$	$\vdash P \rightarrow Q$	
F	F	F	F	V	F	V	✓
F	F	F	V	V	V	V	
F	F	V	F	V	V	V	
F	F	V	V	V	F	V	
F	V	F	F	V	F	V	✓
F	V	F	V	V	V	V	✓
F	V	V	F	V	V	V	✓
F	V	V	V	V	V	V	✓
V	F	F	F	F	F	F	
V	F	F	V	F	V	F	
V	F	V	F	F	V	F	
V	F	V	V	V	F	F	
V	V	F	F	F	F	V	
V	V	F	V	F	V	V	
V	V	V	F	F	V	V	
V	V	V	V	V	V	V	✓

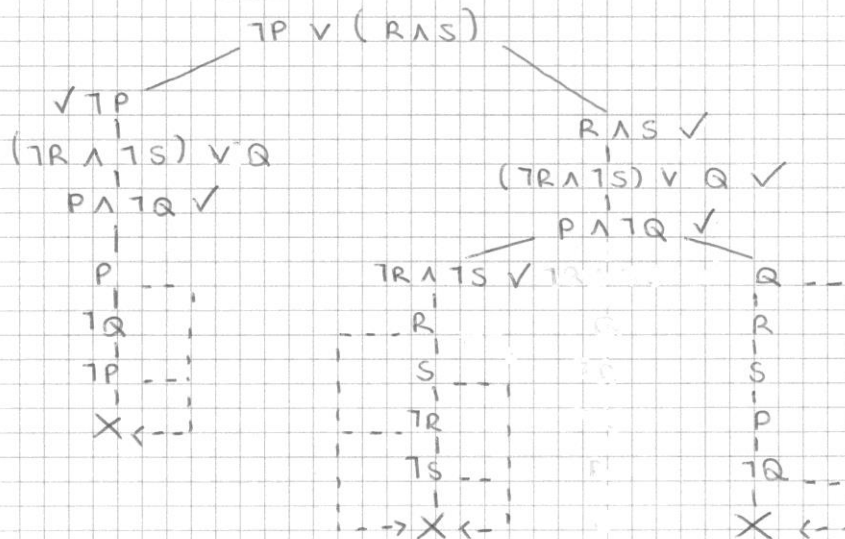
l'argomento è valido.

$$P \rightarrow (R \wedge S) \quad \checkmark$$

$$(R \vee S) \rightarrow Q \quad \checkmark$$

$$\neg(P \rightarrow Q) \quad \checkmark$$

$$P \rightarrow Q : \neg P \vee Q \rightarrow P \wedge \neg Q$$



INFERENZA

$P, Q \rightarrow R, P \rightarrow Q \vdash R$

1 P

2 $Q \rightarrow R$

3 $P \rightarrow Q$

4 Q (1, 3)

5 R (2, 4) *modus ponens*

$\neg P \rightarrow (Q \rightarrow R), \neg P, Q \vdash R$

1 $\neg P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

2 $\neg P$

3 Q

4 $Q \rightarrow R$ (1, 2 $\rightarrow$ E *modus ponens*)

5 R (3, 4 $\rightarrow$ E *modus ponens*)

Conditional Elimination ($\rightarrow$ E)

Da una condizione $\phi \rightarrow \psi$ e sua antecedente possiamo fare inferenza (dedurre) il conseguente.

Negative Elimination ($\neg$ E)

Da $\neg \phi$ posso fare inferenza su ϕ .

$\neg P \rightarrow \neg \neg Q, \neg \neg P \vdash Q$

1 $\neg P \rightarrow \neg \neg Q$

2 $\neg \neg P$

3 $\neg P$ (2, $\neg$ E)

4 $\neg \neg Q$ (1, 3 $\rightarrow$ E)

5 Q (4, $\neg$ E)

Conjunctive Introduction ($\wedge I$)

Da ϕ, ψ posso fare inferenza su $\phi \wedge \psi$.

Conjunctive Elimination ($\wedge E$)

Da $\phi \wedge \psi$ posso fare inferenza su ϕ, ψ .

$$P \wedge Q \vdash Q \wedge P$$

$$1. P \wedge Q$$

$$2. P \quad (1, \wedge E)$$

$$3. Q \quad (1, \wedge E)$$

$$4. Q \wedge P \quad (2, 3, \wedge I)$$

$$P \rightarrow (Q \wedge R), P \vdash P \wedge Q$$

$$1. P \rightarrow (Q \wedge R)$$

$$2. P$$

$$3. Q \wedge R \quad (1, 2 \rightarrow E)$$

$$4. Q \quad (3, \wedge E)$$

$$5. R \quad (3, \wedge E)$$

$$6. P \wedge Q \quad (2, 4, \wedge I)$$

$$(P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S), \neg P, Q \vdash S$$

$$1. (P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S)$$

$$2. \neg P$$

$$3. Q$$

$$4. P \quad (2, \neg E)$$

$$5. P \wedge Q \quad (3, 4, \wedge I)$$

$$6. R \wedge S \quad (1, 5 \rightarrow E)$$

$$7. R \quad (6, \wedge E)$$

$$8. S \quad (6, \wedge E)$$

Disjunctive Introduction ($\vee I$)

Da ϕ posso fare inferenza su $\phi \vee \psi$

Disjunctive Elimination ($\vee E$)

$(\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow x), (\psi \rightarrow x) \vdash x$

$P \vdash (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

1 P

2 $(P \vee Q)$ ($1, \vee I$)

3 $(P \vee R)$ ($1, \vee I$)

4 $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ ($2, 3, \wedge I$)

GRAFO ORIENTATO

Un grafo orientato (o diretto) G è una coppia (V, E) dove V è l'insieme finito dato dei vertici e E è una relazione binaria su V che forma l'insieme degli archi.

Gli archi sono coppie ordinate di vertici.

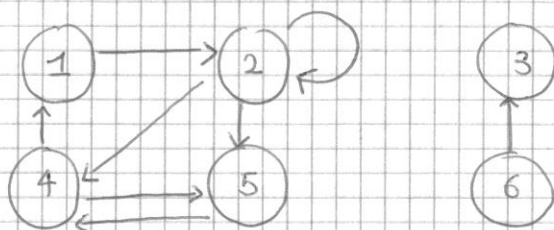


Fig. 1

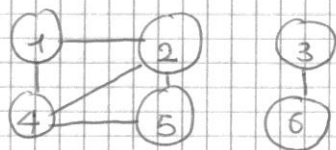
$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E = \{(1, 2), (2, 2), (2, 4), (4, 1), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$$

GRAFI NON ORIENTATI

Un grafo non orientato è un grafo in cui gli archi sono coppie non ordinate di vertici, cioè un arco fra i vertici u, v è un insieme di due elementi $\{u, v\}$ piuttosto che una coppia (u, v) .

Tuttavia si indica l'arco sempre con notazione (u, v) .



ARCO

- Sia (u, v) un arco di un grafo orientato, si dice che:
 - l'arco esce dal vertice u ;
 - l'arco entra nel vertice v ;
- un arco (u, v) di un grafo non orientato si dice che è incidente sui vertici u e v .
- si dice che v è adiacente a u
 - in un grafo non orientato la relazione di adiacenza è simmetrica;
 - in un grafo orientato v è adiacente a u , ma non è vero il contrario, si indica con $u \rightarrow v$.

GRADO

- Il grado di un vertice in un grafo non orientato è il numero di archi incidenti sul vertice;
- In un grafo orientato il grado uscente (entrante) di un vertice è il numero di archi usanti (entranti) dal vertice;



GRADO $V=5$



GRADO ENTRANTE DI $V=3$

GRADO USCENTE DI $V=2$

CAMMINO

Un cammino da un vertice a ad un vertice b in un grafo $G=(V,E)$ è una sequenza di vertici $\langle V_0, V_1, \dots, V_k \rangle$ tale che:

- $a=V_0$
- $b=V_k$
- $(V_{i-1}, V_i) \in E$ per $i=1, \dots, k$.

Cammino Valuto: $\langle 1, 2, 4, 5 \rangle$

* FIG. 1

CICLO

- La lunghezza di un cammino è il suo numero di archi;
- un cammino $\langle V_0, V_1, \dots, V_k \rangle$ è un ciclo se $V_0=V_k$;
- un grafo senza cicli si dice aciclico;

Ciclo di lunghezza 3: $\langle 1, 2, 4, 1 \rangle$

Ciclo di lunghezza 1: $\langle 2, 2 \rangle$

* FIG. 1

GRAFI CONNESSI

Un grafo non orientato è connesso se ogni coppia di vertici è collegata con un cammino.

Grafo non connesso: non c'è cammino da 3 a 2 * FIG. 1

Il tempo di esecuzione di un algoritmo su un grafo $G=(V,E)$ viene dato in funzione di $|V|$ e $|E|$.

Il tempo di calcolo è $O(E+V)$ ovvero $O(|E|+|V|)$.

La quantità di memoria necessaria per memorizzare un grafo è: $O(\max(V,E)) = O(V+E)$.

Numero archi grafo completo: $N(N-1)/2$

Numero MAX archi grafo orientato: N^2

Numero MAX archi grafo non orientato: $N(N-1)/2$

GRAFO COMPLETO RICERCA: $O(N)$

LISTE ADIACENZA

Si rappresenta un grafo con un vettore di liste, una lista per vertice del grafo.

Per ogni vertice u , la lista contiene tutti i vertici adiacenti.

MATRICI ADIACENZA

Si assume che i vertici siano numerati in sequenza e poi:

$MAT_{ij} = 1$ se $(i,j) \in E$

$MAT_{ij} = 0$ ALTRIMENTI.

ALBERO BINARIO

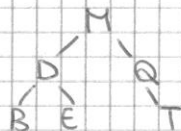
- 1) ϵ vuoto;
- 2) $T \sim \{x, L, R\}$;

ALBERO BINARIO DI RICERCA

- 1) Albero binario;
- 2) L, R sono alberi binari di ricerca;
- 3) $\forall x \in L, x < r$,
 $\forall y \in R, y > r$;

VISITE AGLI ALBERI

- ANTICIPATA : $\{r, L, R\}$: (M, D, B, E, Q, T)
- SIMMETRICA : $\{L, r, R\}$: (B, D, E, M, Q, T)
- POSTICIPATA : $\{L, R, r\}$: (B, E, D, T, Q, M)



ALBERO BILANCIATO

Ma le foglie tutte sullo stesso livello

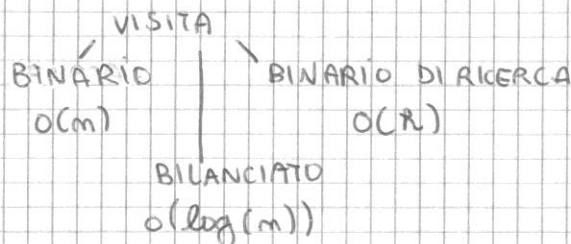
$$\text{modi} = 2^{R+1} - 1 \quad R : \text{livello}$$

$$R = \log_2 (\text{modi} + 1) - 1$$

ABR : visita di tutti i nodi : $O(m) = O(2^R)$

: operazioni più comuni : $O(R)$

: caso migliore $O(\log m)$



ABR :

visita simmetrica : $O(n)$ ricorsione

ricerca elemento : $O(R)$ ricorsione

inserimento elemento : $O(R)$

cancellazione elemento : $O(R)$