

FISICA 2

[Fotocopie di Appunti]

A CURA DI ALESSANDRO PAGHI

PROFESSORE: Valerio Biancalana (<http://www3.diism.unisi.it/people/person.php?id=9>)

LINK AL CORSO:

<http://www3.diism.unisi.it/FAC/index.php?bodyinc=didattica/inc.insegnamento.php&id=55107&aa=2015>

FREQUENTAZIONE: Consigliata.

Principio di conservazione della carica

la somma algebrica delle cariche elettriche rimane costante nel tempo, in un sistema elettricamente isolato.

Legge di Coulomb

$$\vec{F}_{coul} = K \cdot \frac{q q_0}{r^2} \cdot \vec{ur}$$

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$$

$$\begin{cases} q \cdot q_0 > 0 \Rightarrow \vec{F}_{coul} \text{ repulsiva} \\ q \cdot q_0 < 0 \Rightarrow \vec{F}_{coul} \text{ attrattiva} \end{cases}$$

$$[\vec{F}_{coul}] = \text{N}$$

Campo Elettrostatico

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{K \cdot q}{r^2} \cdot \vec{ur}$$

$$[\vec{E}] = \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$\vec{E}$ è un'applicazione: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\vec{E} = (E_x(x, y, z), E_y(x, y, z), E_z(x, y, z))$$

PROPRIETÀ

- conservativo
- centrale e generato da una singola carica
- Principio di Sovrapposizione

$$\vec{E} = K \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \vec{ur}_i$$

$$\vec{E} = K \int \frac{dq}{r^2} \cdot \vec{ur}$$

$$\begin{cases} dq = \rho \cdot dV, \text{ volume} \\ dq = \sigma \cdot dS, \text{ superficie} \\ dq = \lambda \cdot dL, \text{ linea} \end{cases}$$

Potenziale Elettrostatico

$$\vec{F}_{coul} = K \cdot \frac{qq_0}{r^2} \cdot \vec{ur}$$

$$\vec{E}_{coul} = K \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{ur}$$

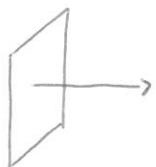
$$V_{coul} = K \cdot \frac{q}{r} \quad [V_{coul}] = V = \frac{J}{C}$$

$$U_{coul} = K \cdot \frac{qq_0}{r} \quad [U_{coul}] = J$$

IPOTESI: $V(\infty) = 0$

Casoe puntiforme: $V(r) = K \cdot \frac{Q}{r} + cost$
 $V(\infty) = 0 \Rightarrow cost = 0$

ipotesi non valida in caso di piani:


$$V = \int_0^L \vec{E} \cdot d\vec{x} = \vec{E} \cdot L$$

Se $V(\infty) = 0 \Rightarrow V(x) = 0, \forall x$.

Principio di sovrapposizione

$$V = K \cdot \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}$$

$$V = K \int \frac{dq}{r}$$

Relazione fra $\vec{E}$ e V

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot V, \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{ux} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{uy} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{uz}$$

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Teorema di Stokes

La circolazione del campo $\vec{E}$ lungo una linea chiusa C è uguale al flusso del rotore di $\vec{E}$ attraverso una qualunque superficie Σ orientata per contorno C :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{con } \text{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

Se come il campo $\vec{E}$ è conservativo: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

$$\Rightarrow \int_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

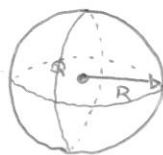
$$\text{ovvero } \text{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0.$$

Flusso del campo $\vec{E}$

$$\phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Legge di Gauss

$$\vec{E} = k \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{ur}$$



$$\phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = kq \int_{\Sigma} \frac{1}{r^2} \cdot \vec{ur} \cdot d\vec{S} \quad , \text{ con } r^2 \text{ costante per tutti i } d\vec{S}$$

$$= \frac{kq}{R^2} \int \vec{ur} \cdot d\vec{S} \quad , \quad \vec{ur} \cdot d\vec{S} = |\vec{ur}| \cdot |d\vec{S}| \cdot \cos\theta$$

$$= \frac{kq}{R^2} \cdot \int dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{poiché } \vec{ur} \parallel d\vec{S} \end{matrix}$$

$$\phi(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

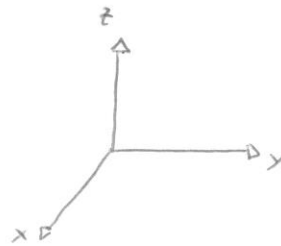
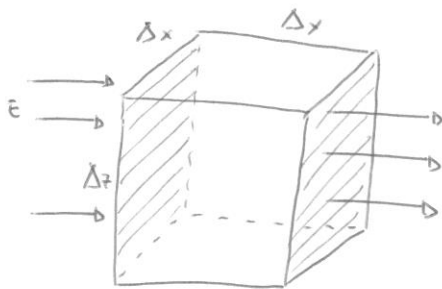
Se q è interna ad Σ :

$$\phi(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Se q è esterna ad Σ :

$$\phi(\vec{E}) = 0.$$

La Divergenza del campo $\vec{E}$



Flusso sulla superficie $\Delta x \Delta z$:

$$\begin{aligned} & -E_y(y) \cdot \Delta x \Delta z + E_y(y+\Delta y) \cdot \Delta x \Delta z = \\ & = \left[\frac{E_y(y+\Delta y) - E_y(y)}{\Delta y} \right] \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial}{\partial y} E_y \cdot \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

Su tutte le superfici:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z \right] \Delta x \Delta y \Delta z \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{T. GAUSS}}}{=} \frac{\Delta Q}{\epsilon_0}.$$

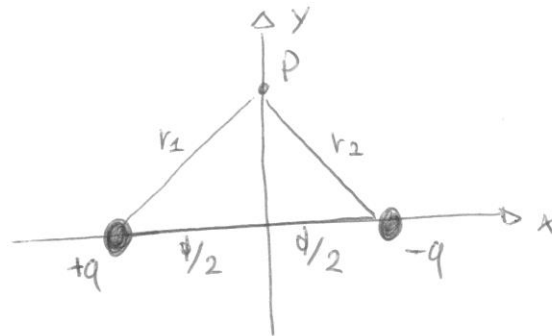
$$\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \text{div } \vec{E}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \cdot \frac{1}{\epsilon_0}, \quad \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \rho$$

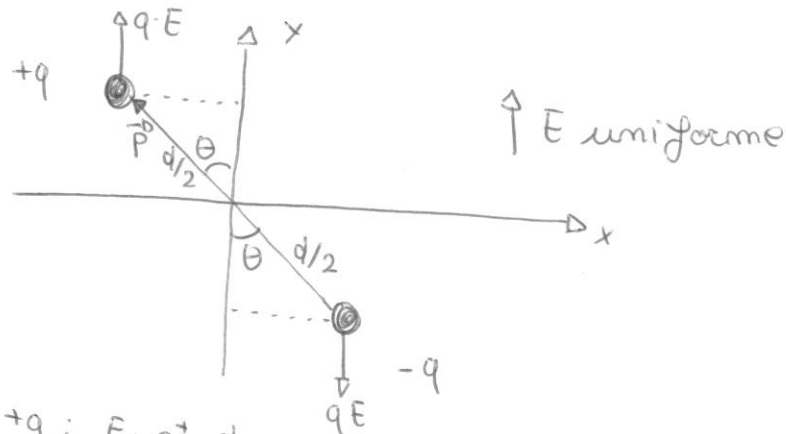
$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Dipolo



$$V(P) = k \cdot q \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Forze che agiscono su un dipolo



momento su +q : $E \cdot q \cdot \frac{d}{2} \sin \theta$

momento su -q : $E \cdot q \cdot \frac{d}{2} \sin \theta$

vettore dipolo : $\vec{p} = q \cdot \vec{d}$

$$\tau_z = 2 E q \cdot \frac{d}{2} \sin \theta = E \cdot q \cdot d \cdot \sin \theta = \vec{E} \times \vec{p}$$

$$\begin{cases} y_{q^+} = \frac{d}{2} \cos \theta \\ y_{q^-} = -\frac{d}{2} \cos \theta \end{cases}$$

$$-U_{q^+} = q \cdot y_{q^+} \cdot E = q \cdot \frac{d}{2} \cos \theta \cdot E$$

$$-U_{q^-} = -q \cdot y_{q^-} \cdot E = q \cdot \frac{d}{2} \cos \theta \cdot E$$

$$-U_{tot} = 2 q \cdot \frac{d}{2} \cdot \cos \theta \cdot E = \vec{E} \cdot \vec{p}$$

$$\begin{cases} \tau_z = \vec{E} \times \vec{p} \\ U_{tot} = -\vec{E} \cdot \vec{p} \\ \frac{d}{d\theta} U_{tot} = \tau_z \end{cases}$$

Conduttore

Materiali al cui interno è possibile il moto di alcune delle cariche che lo costituiscono.

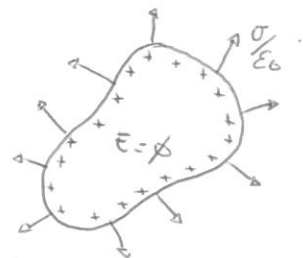
Con l'applicazione di un opportuno campo $\vec{E}$ si può provocare un moto ordinato di elettroni, ovvero dare luogo ad una corrente elettrica.

Conduttore in equilibrio elettrostatico

$E = 0$ all'interno

CONSEGUENZE:

- l'eccesso di carica si ridistribuisce solo sulla superficie
- il potenziale elettrostatico è costante su tutto il conduttore
- $\vec{E}$ in prossimità della superficie è perpendicolare alla superficie stessa e ha intensità $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$.



Avvicinando il conduttore ad un altro corpo carico, il campo al suo interno non sarebbe più nullo, ma sarebbe dato da $\vec{E}_{ext}$.

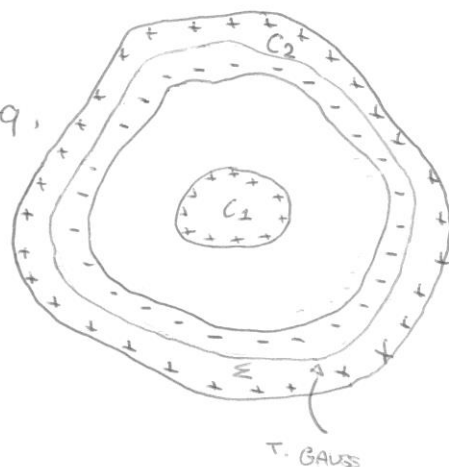
Ma se un movimento di elettroni che crea un campo elettrostatico indotto $\vec{E}_i$ che contrasta il movimento degli elettroni stessi.

Si raggiunge l'equilibrio quando: $\vec{E}_{ext} + \vec{E}_i = 0$.

Schema Elettrostatico

Consideriamo un conduttore con C_2 , isolato e privo di carica, e introduciamo un altro conduttore C_1 carico nella cavità, mantenendolo isolato da C_2 .

In condizioni di equilibrio, C_1 ha sulla superficie esterna una carica $+q$, una carica $-q$ risulta distribuita sulla superficie interna e una carica $+q$ sulla superficie esterna di C_2 .



⇒ Processo di Induzione Completa.

Conduzione Elettrica

Se metto a contatto due conduttori C_1 e C_2 isolati, a potenziali V_1 e V_2 diversi, si raggiunge una condizione di equilibrio in cui entrambi i conduttori si portano allo stesso potenziale V .

Nel processo un certo numero di elettroni passa dal conduttore a potenziale minore a quello con potenziale maggiore, sotto l'azione di $\vec{E}$ dovuta a ΔV . Questo moto ordinato costituisce una corrente elettrica ed è un esempio di conduzione elettrica.

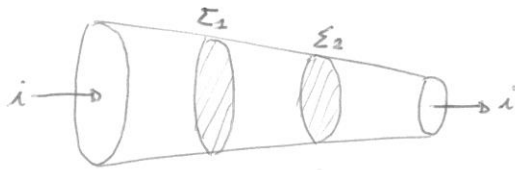
Intensità di Corrente

MEDIA: $i_m = \frac{\Delta q}{\Delta t}$

ISTANTANEA: $i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$

$$[i] = A = \frac{C}{s}$$

Corrente elettrica stazionaria



$$i_1 = \int_{\Sigma_1} \vec{J}_1 \cdot d\vec{\Sigma}_1 ; \quad i_2 = \int_{\Sigma_2} \vec{J}_2 \cdot d\vec{\Sigma}_2$$

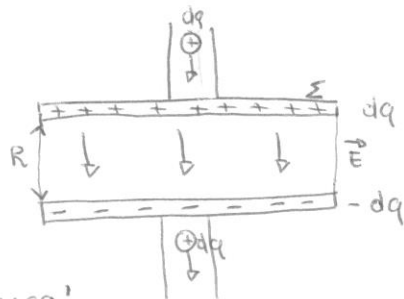
Se q non varia nel tempo all'interno del tronco di cono $\Sigma_1 \Sigma_2$, allora:

$$i_1 = i_2.$$

L'intensità di corrente è costante attraverso ogni sezione del conduttore.

Corrente di Spostamento

Nei condensatori esiste una corrente i_s non dovuta al moto delle cariche tra le armature.



Per una variazione di carica dq sull'armatura superiore, c'è una variazione $-dq$ su quella inferiore per effetto dell'induzione completa.

Per lo stesso motivo una carica dq lascia l'armatura inferiore e comincia a circolare nel circuito.

Forza Magnetica su una carica in moto

AMPERÈ: le azioni magnetiche non sono altro che la manifestazione dell'interazione tra cariche elettriche in movimento

Forza di Lorentz

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad ; \quad F = qvB \sin \theta$$

Quando una particella carica si muove in campo magnetico, la sua velocità cambia in direzione ma non in modulo.

$$\begin{cases} \vec{F}_E \parallel \vec{E} \\ \vec{F}_B \perp \vec{B} \end{cases}$$

Moto in un campo magnetico uniforme

$$F = qvB \cdot \sin \theta \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow F = qvB = m \cdot a_c = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$R: \text{raggio di curvatura} = \frac{mv}{qB}$$

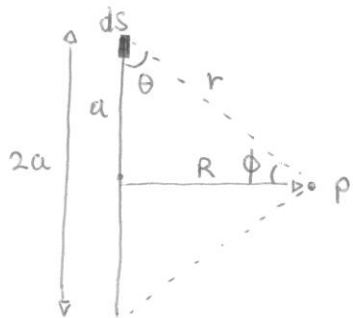
$$\omega: \text{velocità angolare} = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m}$$

Prima legge elementare di Laplace

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{s} \times \vec{ur}}{r^2}$$

Calcoli di Campi Magnetici

Filo Rettilineo. Legge di Biot-Savart



$$a = R \cdot \tan \phi$$

$$ds = R \cdot \frac{d\phi}{\cos^2 \phi}$$

$$r \cos \phi = R$$

$$r = \frac{R}{\cos \phi}$$

$$\sin \phi_{\max} = -\sin \phi_{\min}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^2}$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{ds \cdot \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{ds \cdot \cos \phi}{r^2}$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot R \cdot \frac{d\phi}{\cos^2 \phi} \cdot \cos \phi \cdot \frac{\cos \phi}{R^2}$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \cdot \cos \phi \, d\phi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_{\phi_{\min}}^{\phi_{\max}} \cos \phi \, d\phi$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \left[\sin \phi_{\max} - \sin \phi_{\min} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \cdot \sin \phi_{\max}$$

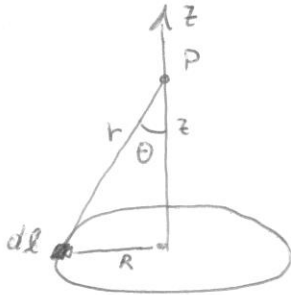
$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \cdot \sin \phi_{\max}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \cdot \sin \phi_{\max} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \cdot \frac{a}{(a^2 + R^2)^{1/2}}$$

Se il filo è infinitamente lungo ($\phi_{\max} = \frac{\pi}{2}$)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

Spira circolare, campo sull'asse.



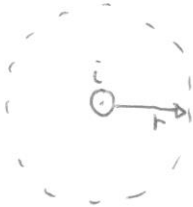
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^2}$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \cdot \sin\theta}{r^2}, \quad \sin\theta = \frac{R}{r}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{R}{r^3} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{R}{r^3} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 i R^2}{2 r^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i R^2}{2 (R^2 + z^2)^{3/2}}$$

legge di Ampere



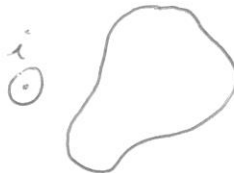
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \int ds = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \cdot 2\pi r = \mu_0 i$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$

La circolazione del campo magnetico lungo una linea chiusa è uguale alla somma delle correnti concatenate per μ_0 .



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

Forma Locale della Legge di Ampere

TEOREMA DI STOKES

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\chi = \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \int_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Legge di Gauss per il campo magnetico

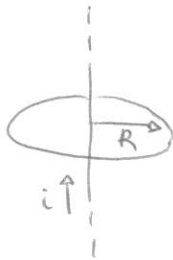
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \phi(\vec{B}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Il flusso di $\vec{B}$ attraverso una superficie chiusa è sempre nullo.

Applicazioni Legge di Ampere

Filo Infinito

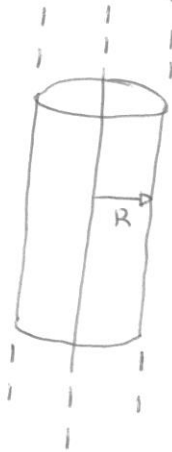


$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot i$$

$$\vec{B} \cdot 2\pi R = \mu_0 i$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

Cilindro Infinito



$$r > R$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot i$$

$$\vec{B} \cdot 2\pi r = \mu_0 i$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

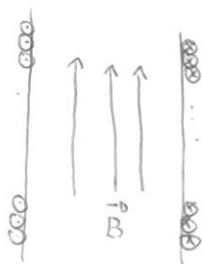
$$r < R$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot i$$

$$\vec{B} \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot J \cdot \pi r^2$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 J \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 J r}{2}$$

Solenoida

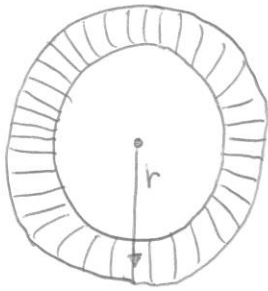


$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot i_{\text{enc}}$$

$$\vec{B} \cdot R = \mu_0 \cdot n R i$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 n i$$

Toroid



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \cdot i_{\text{cane}}$$

$$\vec{B} \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot N \cdot i$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}$$

Seconda legge di Laplace

$$d\vec{F} = i d\vec{S} \times \vec{B}$$

Forza esercitata su un tratto di filo lungo L .

$$\vec{F} = i \vec{l} \times \vec{B}, \quad F = i l B \sin \theta$$

Momento magnetico e meccanico di una Spira

magnetico: $\vec{m} = i \cdot \sum \vec{u}_m$

meccanico: $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$

Proprietà Magnetiche della materia.

Prendiamo ad esempio un solenoide. Esso genera al suo interno un campo B_0 dovuto alla corrente di conduzione i .

Inseriamo adesso all'interno del solenoide un materiale omogeneo. Si genera un nuovo campo B .

Se il campo B è cambiato allora significa che sono nate nuove correnti, dette correnti di magnetizzazione i_m .

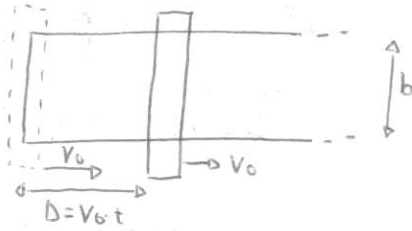
La precedente legge di Ampere non è più corretta e si trasforma in: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 (i + i_m)$.

Se $\frac{B}{B_0} < 1$, il materiale inserito è diamagnetico, significa che il campo finale è minore di quello iniziale ovvero i_m ha verso opposto ad i .

Se $\frac{B}{B_0} > 1$, il materiale inserito è paramagnetico, significa che il campo finale è maggiore di quello iniziale ovvero i_m ha verso concorde con i .

Se la sostanza è ferromagnetica il campo B orienta i dipoli all'interno di tale sostanza. Essi, orientandosi, generano un campo magnetico indotto in grado di mantenerli in tale posizione. Il materiale si è magnetizzato.

Legge di Faraday



$$\vec{F} = q \cdot \vec{v}_0 \times \vec{B}$$

$$F = q v_0 B \Rightarrow W = F \cdot b = q v_0 B b$$

$$W = -q \cdot |E|$$

$$\Rightarrow E = -v_0 B b$$

$$\Phi(\vec{B}) = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot D \cdot b = B \cdot v_0 t \cdot b$$

$$E(t) = -\frac{d}{dt} \Phi(\vec{B})$$

Equazioni di Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = ?$$

non conservatività di $\vec{E}$: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \neq 0$

$$E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \stackrel{\text{Faraday}}{=} -\frac{d}{dt} \Phi(\vec{B}) = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Stokes:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int \frac{d}{dt} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d}{dt} \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = ?$$

Se nel circuito è presente anche un condensatore viene
esiste sia l'condizionata che spostamento. Di conseguenza

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{\text{tot}} = \mu_0 \vec{J}_{\text{cond}} + \mu_0 \vec{J}_{\text{spost}}$$

$$\vec{J}_{\text{spost}} = \epsilon_0 \cdot \frac{d}{dt} \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{E} \right)$$

MAXWELL :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{d}{dt} \vec{B} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{E} \right) \end{cases}$$

Autoinduzione

Un circuito qualunque percorso da corrente produce un campo magnetico.

Il flusso di questo campo concatenato col circuito stesso, detto autoflusso, è dato da:

$$\phi(\vec{B}) = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{con } d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{S} \times \vec{ur}}{r^2}$$

$$\vec{B} = \oint \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{S} \times \vec{ur}}{r^2}$$

$$\phi(\vec{B}) = i \int \oint \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{S} \times \vec{ur}}{r^2} \cdot d\vec{S} = i \cdot L$$

L : coefficiente di autoinduzione

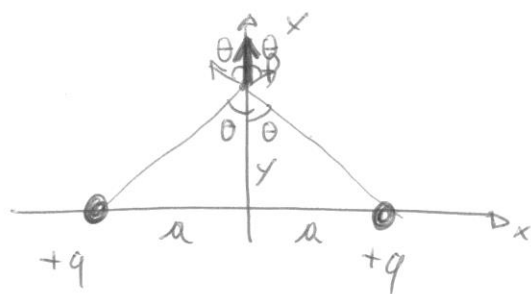
Mutua induzione

Con lo stesso ragionamento si definisce il flusso del campo magnetico prodotto da un circuito (1) attraverso un secondo circuito (2):

$$\phi_{1,2} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2$$

$$\Rightarrow \phi_{1,2} = M_{1,2} \cdot i_1$$

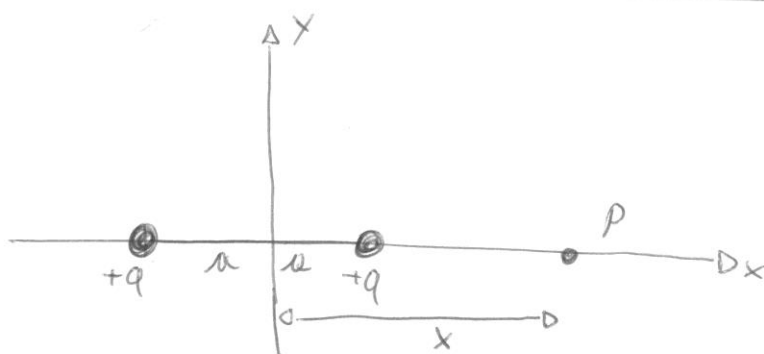
$M_{1,2}$: coefficiente di mutua induzione



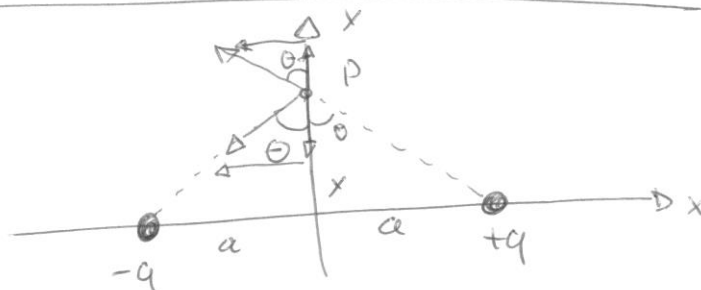
$$\cos \theta = \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

$$E_1 = \frac{k \cdot q}{y^2 + a^2} \cdot \frac{y}{(y^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$E_{\text{tot}} = \frac{2kqy}{(y^2 + a^2)^{3/2}}$$



$$E = \frac{k \cdot q}{(x+a)^2} + \frac{k \cdot q}{(x-a)^2}$$

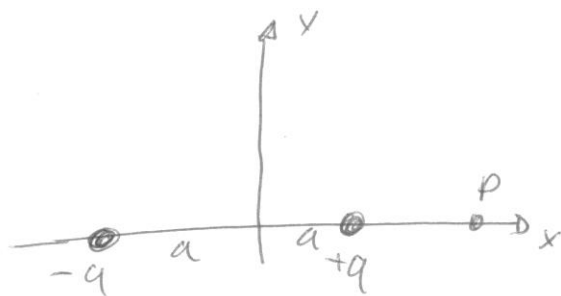


$$E_1 = \frac{k \cdot q}{a^2 + y^2} \cdot \sin \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

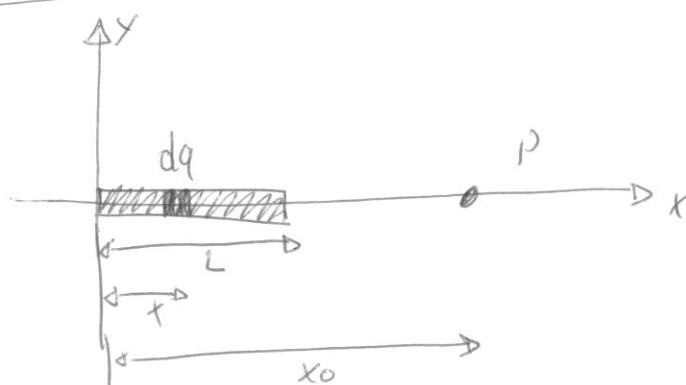
$$E_2 = \frac{-kq}{a^2 + y^2} \cdot \sin \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

...

?



$$E = \frac{k \cdot (-q)}{(x+a)^2} + \frac{k(+q)}{(x-a)^2}$$



$$dq = \lambda \cdot dx$$

$$dE = \frac{k \cdot dq}{(x_0 - x)^2}$$

$$E = \int dE = \int_0^L \frac{k \cdot dq}{(x_0 - x)^2} = k \int_0^L \frac{\lambda dx}{(x_0 - x)^2} = k\lambda \int_0^L \frac{dx}{(x_0 - x)^2}$$

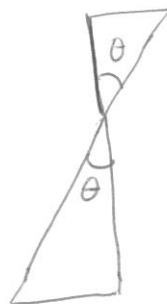
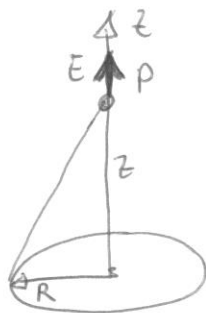
$$(x_0 - x)^{-2} dx \Rightarrow \frac{1}{-1} (-1) \cdot \frac{1}{x_0 - x}$$

$$= k\lambda \left. \frac{1}{x_0 - x} \right|_0^L = k\lambda \left[\frac{1}{x_0 - L} - \frac{1}{x_0} \right]$$

$$= k\lambda \frac{x_0 - x_0 + L}{(x_0 - L) \cdot x_0} = k\lambda \cdot \frac{L}{x_0(x_0 - L)}$$

②

ANELLO

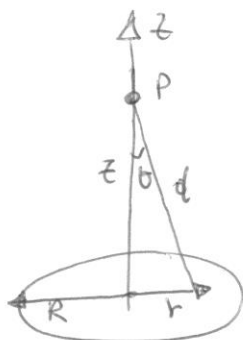


$\cos \theta = \frac{z}{\text{ipotenusa}}$

$$dE_z = \frac{k \cdot dq}{R^2 + z^2} \cdot \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{k dq \cdot z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}, \quad dq = \lambda \cdot dL$$

$$E_z = \int dE_z = \int_0^{2\pi R} \frac{k \lambda dL \cdot z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{k \lambda z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \cdot 2\pi R$$

DISCO



$$Q = \pi R^2$$

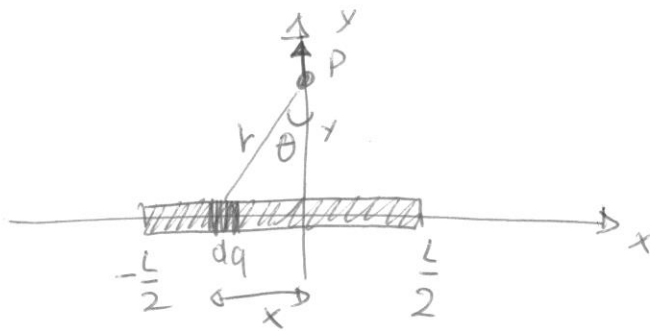
$$dq = 2\pi r dr$$

$$dE_z = \frac{k \cdot dq}{r^2 + z^2} \cdot \frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{k dq z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E_z = \int dE_z = \int_0^R \frac{k 2\pi r dr (z)}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = k z \pi \int_0^R \frac{2r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr$$

$$= k z \pi \left[\frac{1}{-\frac{3}{2} + 1} (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2} + 1} \right]_0^R \quad -\frac{3}{2} + \frac{2}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$= k z \pi \left[-2 \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_0^R = 2 k z \pi \left[-\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2}} \right] \quad (3)$$



$$\underline{\underline{\cos \theta}}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$E_y = E \cdot \cos \theta$$

$$dq = \lambda \cdot dx$$

$$dE = \frac{k \cdot dq}{r^2} = \frac{k \lambda dx}{r^2}$$

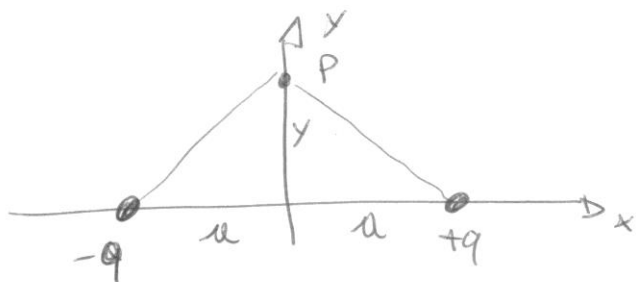
$$y = r \cdot \cos \theta \Rightarrow \boxed{r = \frac{y}{\cos \theta}}$$

$$x = y \cdot \tan \theta \Rightarrow dx = y \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

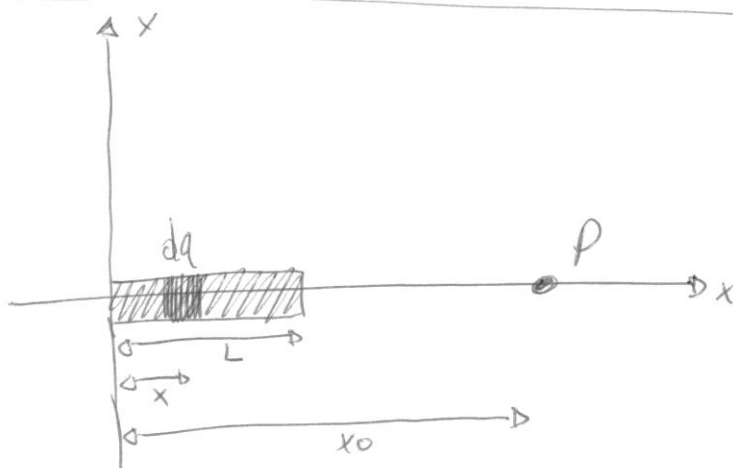
$$E_y = \int dE_y = \int k \cdot \lambda \cdot y \cdot \frac{d\theta}{\cancel{\cos^2 \theta}} \cdot \frac{1}{y^2} \cdot \cancel{\cos^2 \theta} \cdot \cos \theta$$

$$= \frac{k \lambda}{y} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \cos \theta = \frac{k \lambda}{y} \left\{ \sin \theta_{\max} - \sin \theta_{\min} \right\}$$

(4)



$$V = \frac{k \cdot (-q)}{\sqrt{a^2 + y^2}} + \frac{k(+q)}{\sqrt{a^2 + y^2}} = 0$$



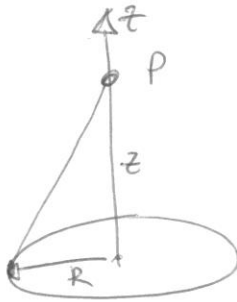
$$dq = \lambda \cdot dx$$

$$dV = \frac{k \cdot dq}{x_0 - x}$$

$$V = \int dV = k\lambda \int_0^L \frac{dx}{x_0 - x} = -k\lambda \ln\left(\frac{x_0 - L}{x_0}\right) = k\lambda \ln\left(\frac{x_0}{x_0 - L}\right)$$

5

ANELLO

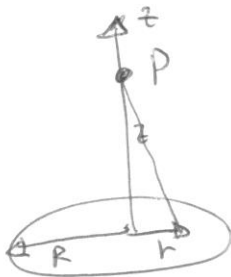


$$dq = \lambda \cdot dL$$

$$dU = \frac{K \cdot dq}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$U = \int_0^{2\pi R} \frac{K \cdot \lambda \cdot dL}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{K\lambda}{\sqrt{R^2 + z^2}} \cdot 2\pi R$$

DISCO



$$dU = \frac{K \cdot dq}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

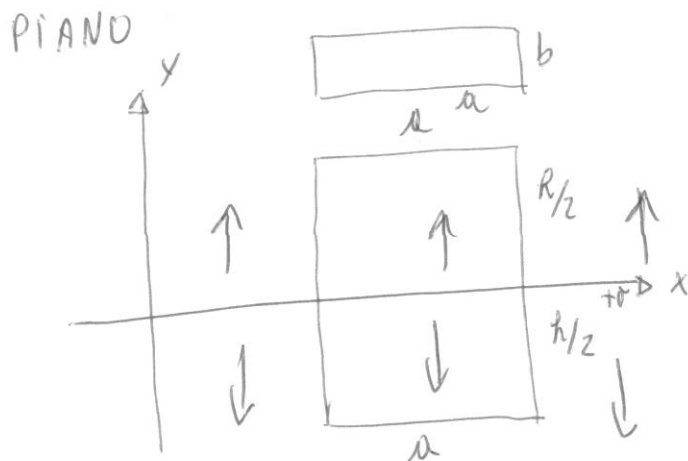
$$Q = \sigma \cdot \pi R^2$$

$$dq = \sigma \cdot 2\pi r dr$$

$$U = \int dU = \int_0^R \frac{K \sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = K \sigma \pi \int_0^R \frac{2r}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr$$

$$= K \sigma \pi \left[2 \sqrt{r^2 + z^2} \right]_0^R = 2K \sigma \pi \left[\sqrt{R^2 + z^2} - z \right]$$

6



$$\phi_1 = E \cdot ab$$

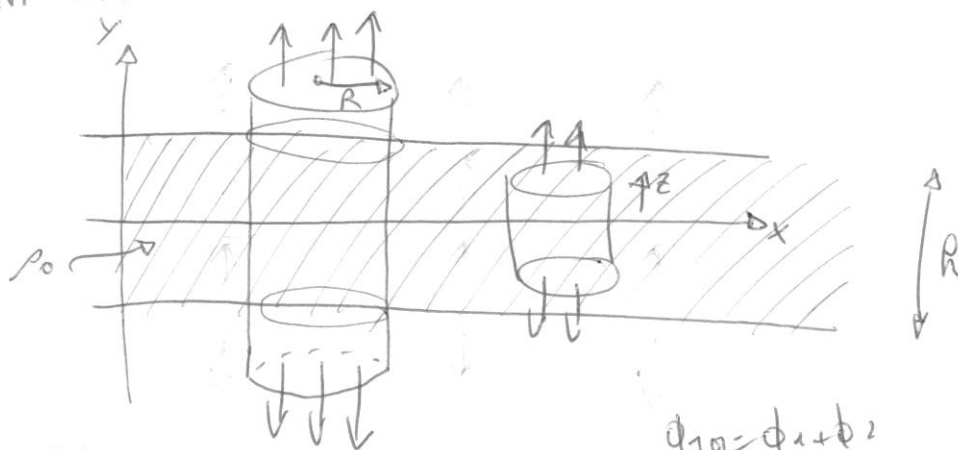
$$\phi_2 = E \cdot ab$$

$$\phi(E) = 2Eab = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{Q}{2ab \cdot \epsilon_0}, \quad Q = \sigma \cdot ab$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

PIANI PARALLELI



$$\phi_1 = E \cdot \pi R^2 \cdot h = E \cdot \pi R^2 \cdot h = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{\pi R^2 \epsilon_0}$$

$$\phi_2 = E \cdot \pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{\pi R^2 \epsilon_0}$$

$$Q_{tot} = \phi_1 + \phi_2$$

$$\Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi R^2 \cdot \epsilon_0}$$

$$Q = \rho_0 \cdot \pi R^2 \cdot h$$

$$E = \frac{\rho_0 \cdot \pi R^2 \cdot h}{2\pi R^2 \cdot \epsilon_0} = \frac{\rho_0 \cdot h}{2\epsilon_0}$$

(7)

$$\Phi_1 = E \cdot \pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{\pi R^2 \cdot \epsilon_0} =$$

$$Q = \pi R^2 \cdot 2\epsilon_0 \rho_0$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi R^2 \cdot 2\epsilon_0 \rho_0}{\pi R^2 \epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 \rho_0}{\epsilon_0}$$

SFERA



$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$Q_{int} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$E = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{3 \cdot 4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{\rho R}{3\epsilon_0} \cdot \frac{R^2}{r^2}$$

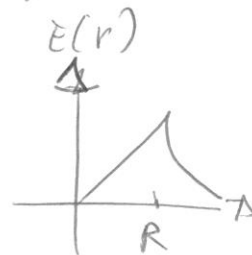
$$= \frac{\rho R^3}{3r^2 \epsilon_0} =$$

$$= K \frac{Q}{r^2} \quad \text{fuori}$$

Dentro

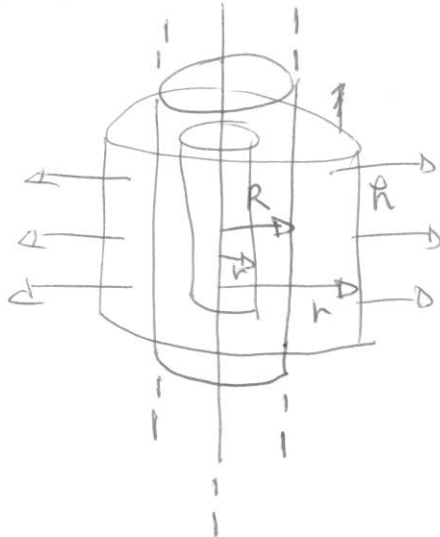
$$E = 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad \text{dentro}$$



8

CILINDRO



$$E \cdot 2\pi r \cdot h = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$Q_{int} = \pi R^2 \cdot h \cdot \rho$$

$$E = \frac{\pi R^2 \cdot h \cdot \rho}{2\pi r h \epsilon_0} = \frac{R^2 \rho}{2r \epsilon_0}$$

filo : $Q_{int} = \lambda \cdot h$

$$E = \frac{\lambda \cdot h}{2\pi r h \cdot \epsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

$$E \cdot 2\pi r h = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$Q_{int} = \pi r^2 \cdot h \cdot \rho$$

$$E = \frac{\pi r^2 \cdot h \cdot \rho}{2\pi r h \cdot \epsilon_0} = \frac{r \rho}{2 \epsilon_0}$$

BUSCO SFERICO



$$E(r) = \frac{Kq}{r^2} \quad \text{fuori}$$

$$E(r) \cdot S = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{dentro}$$

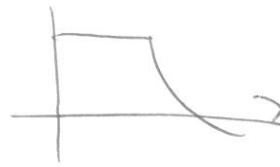
$$E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$



(9)

$$V(r) = V(\infty) - \int_{\infty}^r E(r) dr$$



Potenziale opera

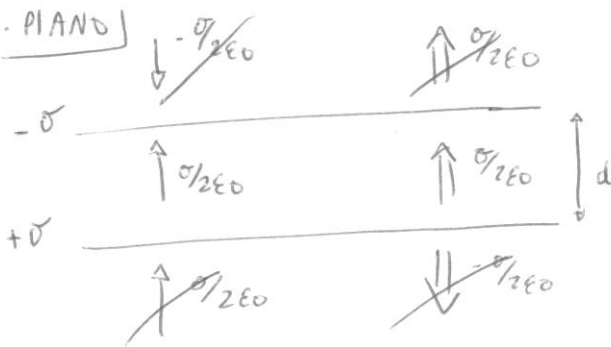
Fuori

$$V(r) = V(\infty) - \int_{\infty}^r E(r) dr$$

Dentro

$$V(r) = V(R) - \int_R^r E(r) dr$$

C. PIANO



$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$E = 2 \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \sigma = \frac{Q}{S} \Rightarrow E = \frac{Q}{S\epsilon_0}$$

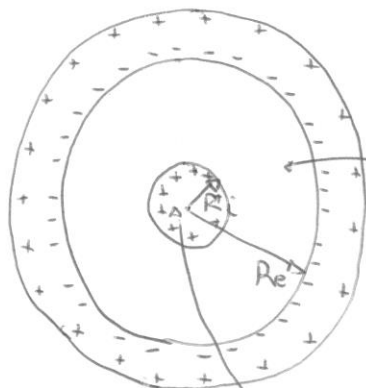
$$C = \frac{S \cdot \epsilon_0}{d}$$

$$\Delta V = + \int \vec{E} \cdot d\vec{e} = + E \cdot d = + \frac{Q d}{S\epsilon_0}$$

$$[C] = F = \frac{C}{V}$$

$$\Delta V = \frac{Q}{C} \Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q d}{S\epsilon_0}} = \frac{S\epsilon_0}{d}$$

C. SFERICO



$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{K \cdot q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

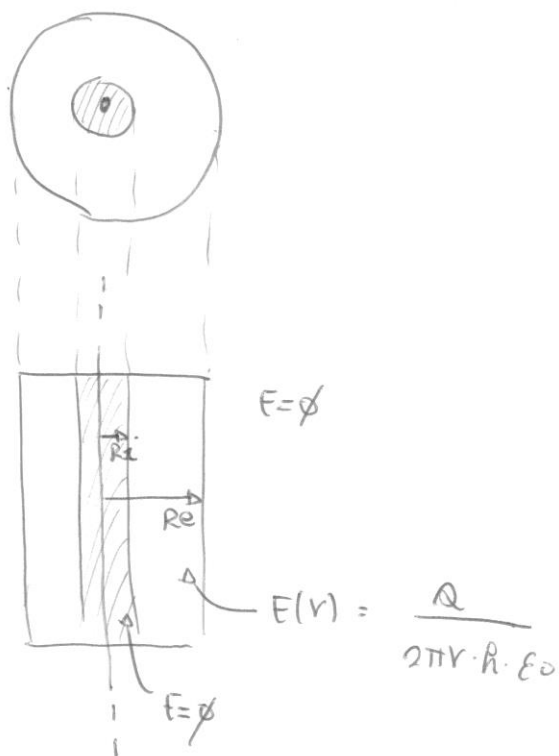
$$\Delta V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \int_{r_e}^{r_i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_i}^{r_e} r^{-2} dr$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_i}^{r_e} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r_e} + \frac{1}{r_i} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-r_i + r_e}{r_i \cdot r_e}$$

$$\Delta V = \frac{Q}{C} \Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_e - r_i}{r_i \cdot r_e}} = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{r_e r_i}{r_e - r_i}$$

(11)

C. CYLINDRICAL)



$$\Delta V = - \int \vec{F} \cdot d\vec{e} = - \int_{R_e}^{R_i} \frac{Q}{2\pi R \epsilon_0} dr = \frac{Q}{2\pi R \epsilon_0} \int_{R_i}^{R_e} \frac{1}{r} dr$$

$$= \frac{Q}{2\pi R \epsilon_0} \ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right).$$

$$\Delta V = \frac{Q}{C} \Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi R \epsilon_0} \ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} = \frac{2\pi R \epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}$$