FISICA 1

[Fotocopie di Appunti tratti dal Libro '*Elementi Di Fisica II Edizione*']

A CURA DI ALESSANDRO PAGHI

PROFESSORE: Valerio Biancalana (http://www3.diism.unisi.it/people/person.php?id=9)

LINK AL CORSO ANNO 2013/2014:
http://www3.diism.unisi.it/FAC/index.php?bodyinc=didattica/inc.insegnamento.php&id=54678&aa=2013

FREQUENTAZIONE: Consigliata.

FORZA

Grandezza fisica vettoriale che si manifesta nell'interazione di due o più corpi.

QUANTITÀ DI MOTO

In meccanica, è una grandezza vettoriale definita come il prodotto della massa dell'oggetto per la sua velocità.

IMPULSO DELLA FORZA

Nella meccanica, è una grandezza vettoriale definita come l'integrale di una forza nel tempo.

FORZA PESO

In fisica, è la forza che un campo gravitazionale esercita su una massa verso il centro della Terra.

MASSA

Proprietà intrinseca di un corpo, indipendente dalla posizione nello spazio e da altre grandezze fisiche.

PESO

Effetto prodotto su una massa dalla presenza di un campo gravitazionale.

FORZA DI ATTRITO

In fisica, è la forza che si oppone al movimento di due corpi.

FORZA ELASTICA

È una forza proporzionale allo spostamento del corpo che la subisce rispetto ad un centro, diretta verso il centro stesso.

FORZA CENTRIPETA

In meccanica, è la forza che permette ad un corpo di percorrere una traiettoria circolare.

www.alessandropaghi.it

LAVORO

In fisica, è il trasferimento di energia cinetica tra due sistemi attraverso l'azione di una forza o una risultante di forze quando l'oggetto subisce uno spostamento e la forza ha una componente non nulla in direzione dello spostamento.

POTENZA

In fisica, quantifica il trasferimento, la produzione e l'utilizzo dell'energia.
È definita come la variazione del lavoro nell'unità di tempo.

ENERGIA

È la grandezza fisica che misura la capacità di un corpo o di un sistema di compiere lavoro, a prescindere che tale lavoro sia o possa essere effettivamente svolto.

ENERGIA CINETICA

Energia che possiede un corpo in movimento che ha o che acquista.

TEOREMA DELLE FORZE VIVE

L'energia cinetica di un corpo di massa m è il lavoro necessario per portarlo da una velocità iniziale nulla ad una velocità finale v.
In effetti globale il lavoro compiuto dalla forza F quando il corpo si sposta da uno stato iniziale ad uno stato finale è uguale alla variazione di energia cinetica nel tempo.

$$W = \Delta E_K = \frac{m}{2}(v_f^2 - v_i^2).$$

ENERGIA POTENZIALE

È l'energia che un oggetto possiede a causa della sua posizione in un campo di forze.

www.alessandropaghi.it

FORZA CONSERVATIVA

Forza descritta da un campo vettoriale conservativo, cioè il suo lavoro durante un tragitto non dipende dal particolare cammino percorso ma solo dai punti di partenza e di arrivo.

ENERGIA MECCANICA

È la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale attinenti allo stesso sistema.

MOMENTO ANGOLARE

È una grandezza fisica di tipo vettoriale legata alle rotazioni spaziali.
È definito come il prodotto vettoriale del vettore posizione e del vettore quantità di moto.

MOMENTO DELLA FORZA

Esprime l'attitudine di una forza ad imprimere la rotazione ad un oggetto attorno ad un asse.

INERZIA

L'inerzia di un corpo è la proprietà che determina la resistenza alle variazioni dello stato di moto, ed è quantificata dalla sua massa inerziale.

MOMENTO D'INERZIA

Misura l'inerzia del corpo a mutare la sua velocità rotazionale

URTO

Termine fisico con il quale si identifica la collisione di due corpi che urtano.

FORZA CENTRALE

Una forza è detta centrale di centro O se in ogni punto, escluso il centro, la direzione della forza passa per il centro medesimo ed il modulo è una comune funzione della distanza tra il punto e il centro.

www.alessandropaghi.it

CAMPO GRAVITAZIONALE

È un campo definito come la deformazione dello spazio-tempo creata dalla presenza di corpi dotati di massa o energia.

www.alessandropaghi.it

UNITÀ DI MISURA

SPAZIO : m

VELOCITÀ : m/s

ACCELERAZIONE : m/s^2

TEMPO : s

ANGOLO : Radiante => Arco / Raggio = Rad

PULSAZIONE : Rad / s

FREQUENZA : Hertz => $1/s = Hz$

VEL. ANGOLARE : Rad / s

ACC. ANGOLARE : Rad / s^2

FORZA : Newton => $(Kg \cdot m)/s^2 = N$

QUANTITÀ DI MOTO : $(Kg \cdot m)/s$

MASSA : Kg

LAVORO : Joule => $J = N \cdot m$

POTENZA : Watt => $W = J/s$

ENERGIA : J

MOMENTO ANGOLARE : $(Kg \cdot m^2)/s$

MOMENTO DELLA FORZA : $N \cdot m$

DENSITÀ : Kg/m^3

VOLUME : m^3

MOMENTO D'INERZIA : $Kg \cdot m^2$

PRESSIONE : Pascal => $Pa = N/m^2$

TEMPERATURA : Kelvin => K => $T(K) = T(°C) + 273,15$

CALORE : J

CALORE SPECIFICO : $J/(Kg \cdot K)$

CAPACITÀ TERMICA : J/K

ENTROPIA : J/K

VELOCITÀ NEL MOTO RETTILINEO

$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$: VELOCITÀ MEDIA

$v = \frac{dx}{dt}$: VELOCITÀ ISTANTANEA

v = costante $\Rightarrow$ MOTO RETTILINEO UNIFORME

$x(t)$: LEGGE ORARIA

$dx = v(t) \cdot dt$

$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt$

$v_m = \frac{1}{t - t_0} \cdot \int_{t_0}^{t} v(t) \cdot dt$: La velocità media è uguale al valor medio della velocità istantanea.

MOTO RETTILINEO UNIFORME

v = costante

$x(t) = x_0 + v \int_{t_0}^{t} dt = x_0 + v(t - t_0)$

$t_0 = 0 \Rightarrow x(t) = x_0 + vt$

Lo spazio è una funzione lineare del tempo
$\Rightarrow$ in tempi uguali sono percorsi spazi uguali.

ACCELERAZIONE NEL MOTO RETTILINEO

$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$: ACCELERAZIONE MEDIA

$a = \frac{dv}{dt}$: ACCELERAZIONE ISTANTANEA

$= \frac{d^2x}{dt^2}$

$a = 0 \Rightarrow v$ = costante $\Rightarrow$ MOTO RETTILINEO UNIFORME

$dv = a(t) \cdot dt$

$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t) \cdot dt$

www.alessandropaghi.it

MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

a = costante

$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$

$t_0 = 0 \Rightarrow v(t) = v_0 + at$

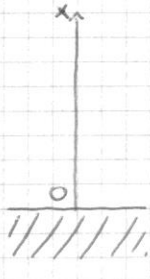
$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2$

$t_0 = 0 \Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

La velocità è una funzione lineare del tempo,
lo spazio è una funzione quadratica del tempo.

MOTO VERTICALE DI UN CORPO

Un corpo lasciato libero di cadere in vicinanza della superficie terrestre si muove verso il basso con un'accelerazione costante $g = 9{,}8\ m/s^2$



- $x_0 = R$; $v_0 = 0$ $\quad <= t = t_0 = 0$.

$v(t) = -gt$

$x(t) = R - \frac{1}{2} g t^2$

$t_c = \sqrt{\frac{2R}{g}}$; $v_c = \sqrt{2gR}$

- $x_0 = R$; $v_0 = -v_1$ $\quad <= t = t_0 = 0$

$v(t) = -v_1 - gt$

$x(t) = R - v_1 t - \frac{1}{2} g t^2$

$t_c = -\frac{v_1}{g} + \sqrt{\frac{v_1^2}{g^2} + \frac{2R}{g}}$; $v_c = \sqrt{v_1^2 + 2gR}$

- $x_0 = 0$; $v_0 = v_2 > 0$ $\quad <= t = 0$

$v = v_2 - gt$

$x = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2$

Leggi generali:

$v(t) = v_0 - gt$

$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

www.alessandropaghi.it

MOTO ARMONICO SEMPLICE

$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \phi)$

A: ampiezza del moto

$\omega t + \phi$: Fase del moto

ϕ : Fase iniziale

ω : Pulsazione

Il moto armonico è periodico, con periodo 2π.

$T = t' - t \Rightarrow x(t') = x(t) \Rightarrow \omega t' + \phi = \omega t + \phi + 2\pi$

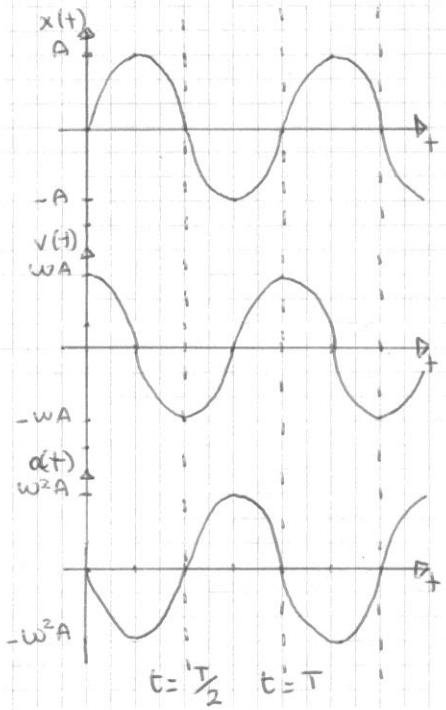
$T = \frac{2\pi}{\omega}$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Significato di ω:

- Il moto si ripete velocemente quando la pulsazione è grande;
- Il moto si ripete lentamente quando la pulsazione è piccola;

$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$: FREQUENZA (f)

Il periodo e la frequenza di un moto armonico semplice sono indipendenti dall'ampiezza del moto.



$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \phi)$

$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega t + \phi)$

$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 \cdot A \cdot \text{sen}(\omega t + \phi)$
$= -\omega^2 x(t)$

$x(0) = A \cdot \text{sen}\phi$; $v(0) = \omega A \cos\phi$

$tg\,\phi = \frac{\omega x(0)}{v(0)}$; $A^2 = x(0)^2 + \frac{v(0)^2}{\omega^2}$

www.alessandropaghi.it

VELOCITÀ E ACCELERAZIONE IN FUNZIONE DELLA POSIZIONE

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} v[x(t)] = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow a = v \cdot \frac{dv}{dx} \Rightarrow a\,dx = v\,dv$$

$$\int_{x_0}^{x} a(x)\,dx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$$v^2(x) = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

CADUTA DI UN CORPO

1) $v(x) = \sqrt{2g(R-x)}$

2) $v(x) = \sqrt{v_1^2 + 2g(R-x)}$

3) $v(x) = \pm\sqrt{v_2^2 - 2gx}$

MOTO ARMONICO SEMPLICE

$$\int_{x_0}^{x} a(x)\,dx = -\omega^2 \int_{x_0}^{x} x\,dx = \frac{1}{2}\omega^2(x_0^2 - x^2) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

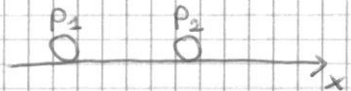
$$v^2(x) = v_0^2 + \omega^2(x_0^2 - x^2)$$

$x_0 = 0$; $v_0 = \omega A$

$$v^2(x) = \omega^2(A^2 - x^2)$$

www.alessandropaghi.it

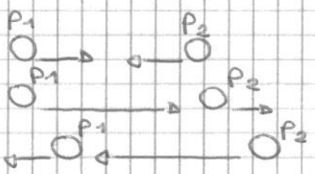
ES. 1.1



$P_1 = (x_1, v_1)$
$P_2 = (x_2, v_2)$ $\quad x_2 > x_1$

Quando si urtano P_1 e P_2 ?

1) $v_1 > 0$, $v_2 < 0$
2) $v_1 > 0$, $v_2 > 0$
3) $v_1 < 0$, $v_2 < 0$



moto ~~rettilineo~~ uniforme:

~~Legge~~: $x(t) = x_0 + v(t - t_0)$

$t_0 = 0$

$x(t) = x_0 + vt$

$x_{P_1} = x_1 + v_1 t \quad , \quad x_{P_2} = x_2 + v_2 t$

Al momento dell'urto $x_{P_1} = x_{P_2}$

$x_1 + v_1 t = x_2 + v_2 t$

$x_1 - x_2 = -v_1 t + v_2 t$

$x_1 - x_2 = t(-v_1 + v_2)$

$-x_1 + x_2 = t(v_1 - v_2)$

$t = \frac{x_2 - x_1}{v_1 - v_2}$ tempo dell'urto.

$x(t) = x_1 + v_1 \cdot \frac{x_2 - x_1}{v_1 - v_2}$

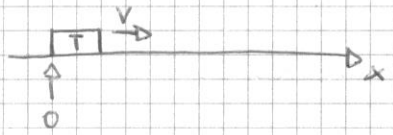
$= x_1 + \frac{v_1 x_2 - v_1 x_1}{v_1 - v_2}$

$= \frac{\cancel{x_1 v_1} - x_1 v_2 + x_2 v_1 - \cancel{x_1 v_1}}{v_1 - v_2} = \frac{v_1 x_2 - v_2 x_1}{v_1 - v_2}$

$x(t) = \frac{v_1 x_2 - v_2 x_1}{v_1 - v_2}$.

www.alessandropaghi.it

ES. 1.2



$V_0 = 0$ Km/h

$V_f = 100$ Km/h

$(0 \div 100)$ Km/h in t secondi

moto uniformemente accelerato:

$v(t) = v_0 + at$

$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$v_0 = 0$, $x_0 = 0$

$v(t) = at$ $\qquad a = \frac{v(t)}{t}$

$x(t) = \frac{1}{2} a t^2$

FATTORE DI CONVERSIONE
Km/h → m/s

$\frac{1}{3,6}$

100 Km/h = 27,8 m/s

$t_1 = 5$ s , $t_2 = 8$ s

$a_1 = \frac{27,8}{5} \frac{m}{s^2} = 5,6 \text{ m/s}^2$

$a_2 = \frac{27,8}{8} \frac{m}{s^2} = 3,5 \text{ m/s}^2$

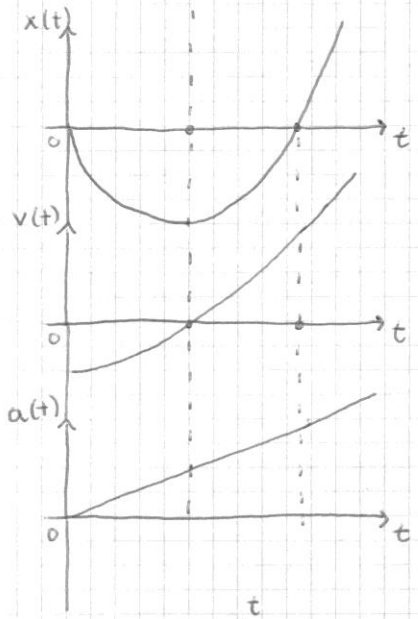
$x_1 = \frac{1}{2} \cdot 5,6 \cdot 5^2 \text{ m} = 70 \text{ m}$.

$x_2 = \frac{1}{2} \cdot 3,5 \cdot 8^2 \text{ m} = 112 \text{ m}$.

$v_m = \frac{x - x_0}{t} = \frac{70}{5} \frac{m}{s} = \frac{112}{8} \frac{m}{s} = 14 \text{ m/s} = 50 \text{ Km/h}$

www.alessandropaghi.it

ES. 1.5



$t_0 = 0 \Rightarrow V_0 = -2\ m/s$

a non costante

$a = kt$, $K = 0,1\ m/s^3$.

$v(t_1) = 0 \Rightarrow t_1 ?$

$x_1 ?$

$x(t_2) = 0 \Rightarrow t_2 ?$

$V_2 ?$

$V_m ?$

$$v(t) = -V_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt = -V_0 + \int_{t_0}^{t} kt\,dt = -V_0 + \frac{1}{2}kt^2$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} -V_0 + \frac{1}{2}kt^2\,dt = x_0 - V_0 t + \frac{1}{6}kt^3$$

$$= -V_0 t + \frac{1}{6}kt^3$$

$$v(t_1) = 0 \Rightarrow -V_0 + \frac{1}{2}kt^2 = 0$$

$$t_1 = \pm\sqrt{\frac{2V_0}{K}} \quad ; \quad t_1 = \sqrt{\frac{2V_0}{K}}$$

$$x(t_1) = -V_0 \cdot \sqrt{\frac{2V_0}{K}} + \frac{1}{6} \cdot K \left(\sqrt{\frac{2V_0}{K}}\right)^3$$

$$x(t_2) = 0 \Rightarrow -V_0 t + \frac{1}{6}kt^3 = 0$$

$$t\left(-V_0 + \frac{1}{6}kt^2\right) = 0$$

$$t_0 = 0 \quad ; \quad t_2 = \pm\sqrt{\frac{6V_0}{K}} \quad : \quad t_2 = \sqrt{\frac{6V_0}{K}}$$

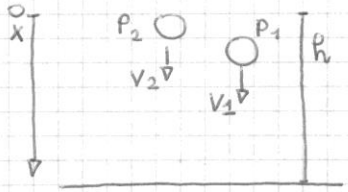
$$v(t_2) = -V_0 + \frac{1}{2}K \cdot \frac{3}{6}\frac{V_0}{K} = 2V_0$$

$$V_m = \frac{x - x_0}{t} = \frac{+V(0)\,t + (1/6)\cdot kt^3}{t} = +V(0) + \frac{1}{6}\cdot kt^2$$

$$= +V(0) + \frac{1}{3}\left(V(t) - V(0)\right) = +V_0 + \frac{1}{3}v(t) + \frac{1}{3}V(0) = \frac{+2V(0) + v(t)}{3}$$

www.alessandropaghi.it

ES. 1.6



$P_1: t=0 \Rightarrow V=0$

$P_2: t_1 > t=0 \Rightarrow V_0 > 0$

$$v(t) = v_0 + gt$$
$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

P_1)

$$V_1(t) = gt$$
$$x_1(t) = h + \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g t^2$$

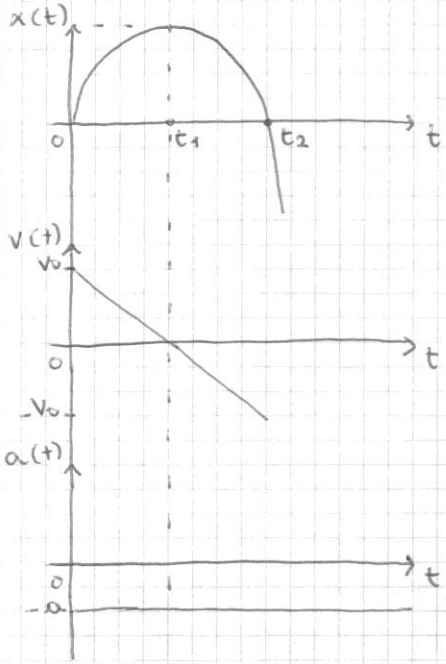
P_2)

$$x_2(t) = v_0 + g(t-t_1)$$
$$x_2(t) = h + v_0(t-t_1) + \frac{1}{2} g (t-t_1)^2 = v_0(t-t_1) + \frac{1}{2} g (t-t_1)^2$$
$$\frac{1}{2} g t^2 = v_0(t-t_1) + \frac{1}{2} g (t-t_1)^2$$
$$\cancel{\frac{1}{2} g t^2} = v_0 t - v_0 t_1 + \cancel{\frac{1}{2} g t^2} + \frac{1}{2} g t_1^2 - g t t_1$$
$$v_0 t - v_0 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2 - g t t_1 = 0$$
$$t(v_0 - g t_1) = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$$
$$t = \frac{v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2}{v_0 - g t_1} = \frac{t_1}{2} \cdot \frac{2v_0 - g t_1}{v_0 - g t_1} = \frac{t_1}{2} \cdot \left(1 + \frac{v_0}{v_0 - g t_1}\right)$$

$t > t_1 \Rightarrow 1 + \frac{v_0}{v_0 - g t_1} > 2 \Rightarrow \frac{v_0}{v_0 - g t_1} > 1 \Rightarrow v_0 > g t_1$.

www.alessandropaghi.it

ES. 1.3



$v_0 > 0$

$a < 0$ costante

t_1 ? $\rightarrow$ $v(t_1) = 0$

t_2 ? $\rightarrow$ $x(t_2) = 0$

$v(t_2)$

moto uniformemente decelerato.

$v(t) = v_0 - at$

$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$

$v(t_1) = 0$

$v_0 - a t_1 = 0 \qquad t_1 = \frac{v_0}{a}$

$x(t_1) = v_0 \cdot \frac{v_0}{a} - \frac{1}{2} \cdot a \frac{v_0^2}{a^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{a}$

$x(t) = 0$

$v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 = 0 \qquad t\left(v_0 - \frac{1}{2} a t\right) = 0$

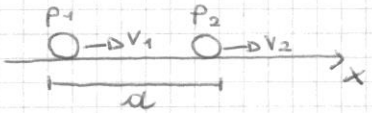
$t = 0 \; ; \; t = 2 \cdot \frac{v_0}{a} = 2 t_1$

t_0 $\qquad$ t_2

$v(t_2) = v_0 - a \cdot 2 \cdot \frac{v_0}{a} = -v_0$

www.alessandropaghi.it

ES. 1.4



$v_1 > v_2$

P_1: moto uniformemente decelerato

$v_1(t) = v_1 - at$

$x_1(t) = x_1 + v_1 t - \frac{1}{2} a t^2$

P_2: moto rettilineo uniforme

$x_{11}(t) = x_2 + v_2 t$

$v_1 - at = v_2 \Rightarrow t = \frac{v_1 - v_2}{a}$

$v_1(t) = v_{11}(t)$

$x_1 + v_1 t - \frac{1}{2} a t^2 = x_2 + v_2 t \Rightarrow (x_1 - x_2) + v_1 t - v_2 t - \frac{1}{2} a t^2 = 0$

$x_1(t) = x_{11}(t)$

$-d + t(v_1 - v_2) - \frac{1}{2} a t^2 = 0$

$t(v_1 - v_2) - \frac{1}{2} a t^2 = d$

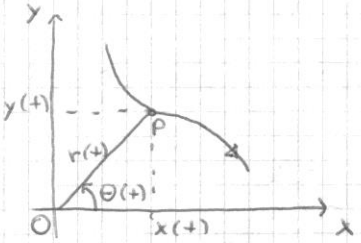
$\frac{v_1 - v_2}{a} \cdot (v_1 - v_2) - \frac{1}{2} \cdot \cancel{a} \cdot \frac{(v_1 - v_2)^2}{a^{\cancel{2}}} = d$

$\frac{(v_1 - v_2)^2}{a} - \frac{1}{2} \frac{(v_1 - v_2)^2}{a} = d = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a}$

www.alessandropaghi.it

MOTO NEL PIANO

POSIZIONE



$x = r\cos\theta$

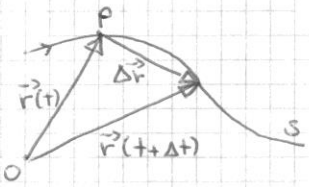
$y = r\,\text{sen}\,\theta$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\text{tg}\,\theta = \frac{y}{x}$

$\vec{r}(t) = OP = x(t)\cdot\vec{u_x} + y(t)\cdot\vec{u_y}$

VELOCITÀ

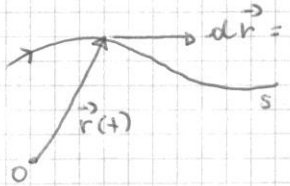


$v = \frac{ds}{dt}$: velocità istantanea.

$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$: vettore spostamento

$\vec{v_m} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$: velocità vettoriale.



$d\vec{r} = ds\cdot\vec{u_T}$ → VERSORE DELLA TANGENTE ALLA CURVA.

- $d\vec{r}$: INCREMENTO DEL RAGGIO
- ds: SPOSTAMENTO INFINITESIMO

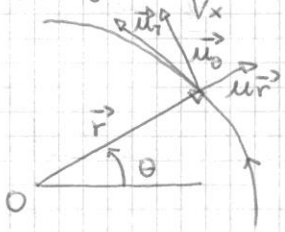
$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\cdot\vec{u_T} = v\cdot\vec{u_T}$

COMPONENTI CARTESIANE

$\vec{r} = x\,\vec{u_x} + y\,\vec{u_y}$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\cdot\vec{u_x} + \frac{dy}{dt}\cdot\vec{u_y} = v_x\,\vec{u_x} + v_y\,\vec{u_y}$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ $\quad \text{tg}\,\phi = \frac{v_y}{v_x}$



www.alessandropaghi.it

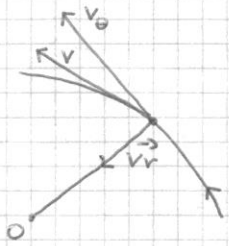
COMPONENTI POLARI

$\vec{r} = r \cdot \vec{u}_r$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \cdot \vec{u}_r + r \cdot \frac{d\vec{u}_r}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{u}_\theta = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$

$v_r = \frac{dr}{dt}$: velocità radiale

$v_\theta = r \cdot \frac{d\theta}{dt}$: velocità trasversa



$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$

$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\, dt$

ACCELERAZIONE

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$: accelerazione vettoriale

$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{u}_\tau) = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_\tau + v \cdot \frac{d\vec{u}_\tau}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_\tau + v \cdot \frac{d\phi}{dt} \cdot \vec{u}_N$

$ds = R \cdot d\theta$

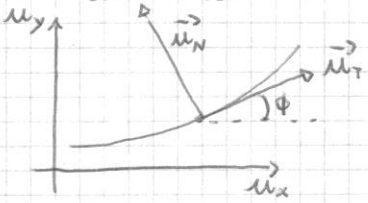
$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} \cdot v$

$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_\tau + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{u}_N = \vec{a}_\tau + \vec{a}_N$ (A. TANGENZIALE; A. CENTRIPETA)

$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}$

COMPONENTI CARTESIANE

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \cdot \vec{u}_x + \frac{dv_y}{dt} \cdot \vec{u}_y = \frac{d^2x}{dt} \cdot \vec{u}_x + \frac{d^2y}{dt} \cdot \vec{u}_y = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y$



$a_x = \frac{dv}{dt} \cdot \cos\phi - \frac{v^2}{R} \cdot \operatorname{sen}\phi$

$a_y = \frac{dv}{dt} \cdot \operatorname{sen}\phi - \frac{v^2}{R} \cdot \cos\phi$

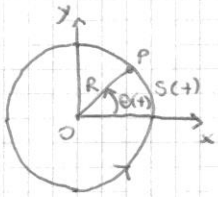
$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\, dt$

www.alessandropaghi.it

MOTO CIRCOLARE

$\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T$

$\left.\begin{array}{l} \vec{a}_T = 0 \\ \vec{a} = \vec{a}_N \end{array}\right\}$ MOTO CIRCOLARE UNIFORME



$\theta(t) = \frac{s(t)}{R}$

$x(t) = R \cdot \cos\theta(t)$

$y(t) = R \cdot \text{sen}\theta(t)$

$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$: velocità media angolare.

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$: velocità angolare istantanea.

$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$

$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$

$\vec{v}_r = 0$

$\vec{v} = \vec{v}_\theta = r \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{u}_\theta$, $v_\theta = r \cdot \frac{d\theta}{dt} = R\omega$.

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

v, ω costanti

$s(t) = s_0 + vt$

$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$

$a = a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$

$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$

$x = R \cdot \cos\theta = R \cdot \cos(\omega t + \theta_0)$

$y = R \cdot \text{sen}\theta = R \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_0)$ sfasati di $\pi/2$

MOTO CIRCOLARE NON UNIFORME

$a_T = \frac{dv}{dt} \neq 0$, a_N non costante.

$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$: accelerazione angolare media

$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{R} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{R}$

$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(t)\,dt$; $\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)\,dt$

www.alessandropaghi.it

MOTO CIRCOLARE UNIFORMEMENTE ACCELERATO

α costante $\Rightarrow$ a_T costante.

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

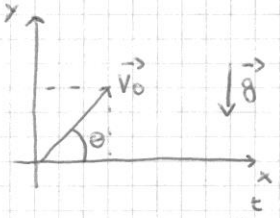
$$a_N = \omega^2 R = (\omega_0 + \alpha t)^2 \cdot R$$

NOTA $\alpha(\theta)$ AL POSTO DI $\alpha(t)$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \omega \cdot \frac{d\omega}{d\theta} \Rightarrow \alpha \cdot d\theta = \omega \cdot d\omega$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \alpha(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2$$

MOTO PARABOLICO DEI CORPI



$\vec{a} = \vec{g} = -g \cdot \vec{u_y}$

$t = 0 \Rightarrow \vec{r} = 0 \;,\; \vec{v} = \vec{v_0}$

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0} + \int_0 \vec{a}(t)\,dt = \vec{v_0} - gt \cdot \vec{u_y}$$

$$\vec{v_0} = v_0 \cos\theta \cdot \vec{u_x} + v_0 \operatorname{sen}\theta \cdot \vec{u_y}$$

$$\vec{v}(t) = v_0 \cos\theta \cdot \vec{u_x} + (v_0 \operatorname{sen}\theta - gt) \cdot \vec{u_y}$$

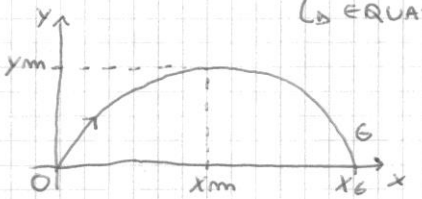
$$v_x = v_0 \cos\theta \quad ; \quad v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta - gt$$

$$x = v_0 \cos\theta\, t \quad ; \quad y = v_0 \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

x: MOTO UNIFORME; y: MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO.

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta} \Rightarrow y(x) = x \operatorname{tg}\theta - \frac{1}{2} \cdot \frac{g x^2}{v_0^2 \cos^2\theta}$$

↳ EQUAZIONE DI UNA PARABOLA.



$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tg}\theta - \frac{gt}{v_0 \cos\theta} = \operatorname{tg}\theta - \frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta} \cdot x$$

$\overline{OG}$: gittata

$y(x) = 0$

$$x \operatorname{tg}\theta - \frac{1}{2} \cdot \frac{g x^2}{v_0^2 \cos^2\theta} = 0$$

$$x\left(\operatorname{tg}\theta - \frac{1}{2} \cdot \frac{g x}{v_0^2 \cos^2\theta}\right) = 0$$

$x = 0$

$$x_G = \frac{\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta \cdot 2 v_0^2}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \operatorname{sen} 2\theta}{g} = 2 x_m$$

$$x_m = \frac{v_0^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{g}$$

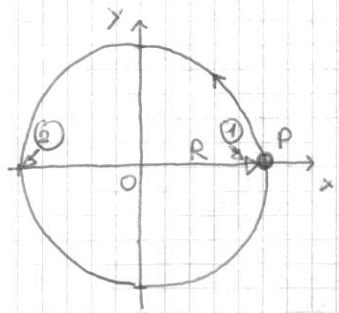
$$y(x_m) = y_m = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}$$

t_g : tempo totale di volo.

$$t_g = \frac{x_G}{v_0 \cos\theta} = \frac{2 x_m}{v_0 \cos\theta} = \frac{2 v_0 \operatorname{sen}\theta}{g} = 2 t_m$$

www.alessandropaghi.it

ES. 2.3



$R = 1,8\ m$

$\alpha_1 = 2,39\ rad/s^2$

① $t = 0 \Rightarrow \omega = 0 \ , \ \theta = 0$

② $\theta = \pi$

①

$\theta = \pi \ , \ \theta_0 = 0$

$$\int_0^{\pi} \alpha \, d\theta = \int \omega \, d\omega \Rightarrow \alpha\pi = \frac{\omega^2}{2} \Rightarrow 2\pi\alpha_1 = \omega_1^2$$

②

$\theta = 2\pi$

$\theta_0 = \pi$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \alpha \, d\theta = \int \omega \, d\omega \Rightarrow \alpha(2\pi - \pi) = \frac{\omega^2}{2} \Rightarrow \alpha\pi = \frac{\omega^2}{2}$$

$\alpha_2 < 0 \Rightarrow 2\pi\alpha_2 = -\omega_1^2$

$\alpha_2 = -\alpha_1 = -2,39\ rad/s^2$

① $\omega = \omega_0 + \alpha t$

$\omega_0 = 0$

$\omega = \alpha t \Rightarrow 2\pi\alpha_1 = \alpha_1^2 t_1^2 \Rightarrow \frac{2\pi}{\alpha_1} = t_1^2 \qquad t_1 = 1,62\ s$

$t_{TOT} = 2t_1 = 3,24\ s$

MOTO UNIFORME:

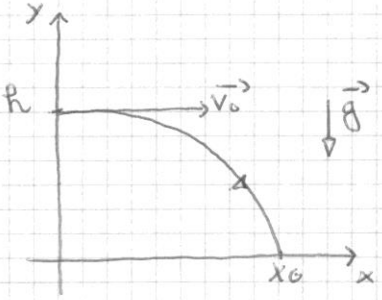
$\theta(t) = \theta_0 + \omega t \Rightarrow \theta(t) = \omega t \Rightarrow \omega = \frac{\theta(t)}{t_1} = \frac{\pi}{t_1} = 1,94\ s$.

($\theta_0 = 0$)

$a_N = \omega^2 R = 6,77\ m/s^2$

www.alessandropaghi.it

ES. 2.4



$v_x = v_0 \qquad x = v_0 t$

$v_y = -gt \qquad y = x_0 - \frac{1}{2} g t^2 = R - \frac{1}{2} g t^2$

$t = \frac{x}{v_0} \Rightarrow y(x) = R - \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2$

$y(x) = 0 \Rightarrow R - \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2 = 0 \Rightarrow x_G = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2R}{g}}$

$t_G \Rightarrow y = 0 \Rightarrow R - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \Rightarrow t_G = \sqrt{\frac{2R}{g}}$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (-g t_G)^2}$

$= \sqrt{v_0^2 + 2Rg}$

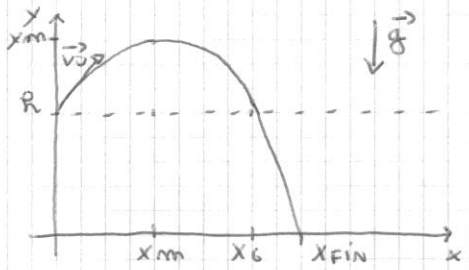
www.alessandropaghi.it

Es. 2.5

$V_0 = 50$ m/s

$\theta = 50°$

$h = 50$ m



V_0: r:

$V_x = V_0 \cos\theta \Rightarrow x = V_0 \cos\theta\, t$

$V_y = V_0 \cdot \text{sen}\theta - gt \Rightarrow y = V_0 \cdot \text{sen}\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 + h$

$y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \text{sen}\theta\, t + h = 0$

$$t_{1/2} = \frac{-V_0 \text{sen}\theta \pm \sqrt{V_0^2 \text{sen}^2\theta + 2gh}}{-g}$$

$$= \frac{V_0 \text{sen}\theta}{g} + \sqrt{\frac{V_0^2 \text{sen}^2\theta}{g^2} + \frac{2h}{g}} = 8{,}95 \text{ s}$$

$x_{FIN} = V_0 \cos\theta \cdot t_1 = 287{,}65$ m

$\theta = 0°$

$x_{FIN} = V_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 158{,}72$ m.

www.alessandropaghi.it

PRINCIPIO D'INERZIA (1° LEGGE DI NEWTON)

$\vec{F} = 0 \iff \vec{a} = 0 \Rightarrow$ costante

LEGGE DI NEWTON

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE DELLE FORZE (3° LEGGE DI NEWTON)

$$\vec{F}_{A,B} = -\vec{F}_{B,A}$$

QUANTITA' DI MOTO

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

FORMA GENERALE DELLA 2° LEGGE DI NEWTON

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{F}\,dt = d\vec{p}$$

IMPULSO DELLA FORZA (FORMA INTEGRALE DELLA 2° LEGGE DI NEWTON)

$$\vec{J} = \int_0^t \vec{F}\,dt = \int_{p_0}^{p} d\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = \Delta\vec{p}$$

TEOREMA DELL'IMPULSO

- L'impulso di una forza applicata ad un punto materiale provoca la variazione della quantità di moto;
- Se la massa m è costante:

$$\vec{J} = m(\vec{v} - \vec{v}_0) = m\,\Delta v$$

VALORE MEDIO DELLA FORZA

$$\Delta p = \int_0^t \vec{F}\,dt = \vec{F}_m \cdot t$$

$$\vec{F}_m = \frac{\Delta\vec{p}}{t}$$

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

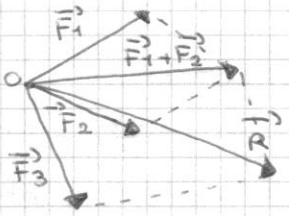
$\vec{F} = 0 \Rightarrow \Delta\vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{p} =$ costante

www.alessandropaghi.it

RISULTANTE VETTORIALE DELLE FORZE

$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_m = \Sigma_i \vec{F}_i$

$\vec{a} = \frac{\vec{R}}{m} = \Sigma_i \frac{\vec{F}_i}{m} = \Sigma_i \vec{a}_i$



Affermare che la forza agente su un punto è nulla, indica che la somma delle forze agenti su di esso, cioè la risultante, è nulla.

FORZA PESO

$\vec{P} = m\vec{a} = m\vec{g}$ $\qquad g = 9,8\ m/s^2$

FORZA DI ATTRITO RADENTE

Condizione di quiete: $F \leq \mu_s N$

Condizione di moto: $F > \mu_s N$

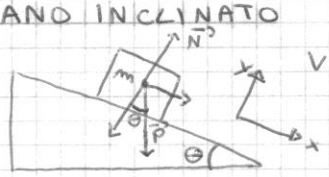
μ_s: coefficiente di attrito statico.

$F > \mu_s N \Rightarrow \mu_D : F_{ad} = \mu_D N$ $\qquad \vec{F}_{ad} = -\mu_D N \cdot \vec{u}_v$

μ_D: coefficiente di attrito dinamico.

$\mu_D < \mu_s$.

PIANO INCLINATO



Vincolo liscio: $\mu_s = 0$.

$F_y = N - mg\cos\theta = 0$

$F_x = mg\sin\theta$

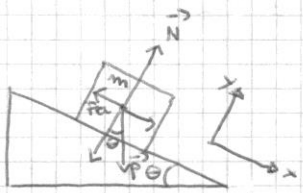
$F_x = m \cdot a \Rightarrow a = g\sin\theta < g$

[MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO.

Vincolo scabro: $\mu_s > 0$

$F_y = N - mg\cos\theta = 0$

$F_x = mg\sin\theta - F_a$



Se: $mg\sin\theta \leq F_a = \mu_s N$

$= \mu_s mg\cos\theta$

il moto non può avvenire.

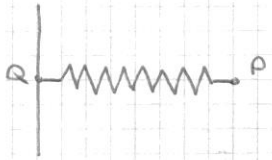
CONDIZIONE DI EQUILIBRIO STATICO: $tg\theta \leq \mu_s$

altrimenti:

$mg\sin\theta - \mu_D mg\cos\theta = F_x \Rightarrow a = (\sin\theta - \mu_D \cos\theta) \cdot g$

www.alessandropaghi.it

FORZA ELASTICA



$\vec{F} = -k x \cdot \vec{u}_x$

$k > 0$: costante elastica

$a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m} x = -\omega^2 x$

Se moto è armonico semplice:

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

Condizioni iniziali:

$x = x_0$; $v = 0$; Per $t = 0$.

Equazione del moto: $ma = -kx \Rightarrow m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$

$x = A \cdot \text{sen}(\omega t + \phi)$; $v = \omega A \cdot \cos(\omega t + \phi)$

$x_0 = A \cdot \text{sen}\phi$; $0 = \omega A \cdot \cos\phi$

↳ soluzioni:

1) $A = x_0$; $\phi = \pi/2$
2) $A = -x_0$; $\phi = 3/2\,\pi$

Legge oraria: $x = x_0 \cos\omega t$

Velocità: $v = -\omega x_0 \text{sen}\omega t$

condizioni iniziali:

$x = x_0$; $v = v_0$; Per $t = 0$.

$x = A \cdot \text{sen}(\omega t + \phi) \Rightarrow x = A \cdot \text{sen}(\phi)$

$v = \omega A \cdot \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow v_0 = \omega A \cdot \cos(\phi)$

↳ soluzioni:

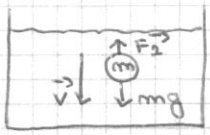
$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$; $tg\phi = \omega \cdot \frac{x_0}{v_0}$

www.alessandropaghi.it

FORZA DI ATTRITO VISCOSO

$\vec{F} = -b\vec{v}$

$\vec{a} = \frac{-b\vec{v}}{m}$





$\vec{F_1} = mg$

$\vec{F_2} = -mK\vec{v} \Rightarrow b = mK$

condizioni iniziali:

$t=0 \Rightarrow x=0 \; ; \; v=0$

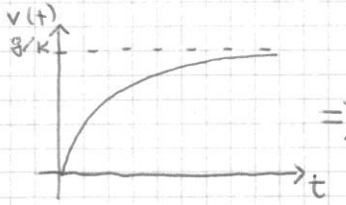
$\vec{F_1} + \vec{F_2} = m\vec{g} - mK\vec{v} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

$\frac{dv}{dt} = g - Kv \Rightarrow dt = \frac{dv}{g-Kv}$

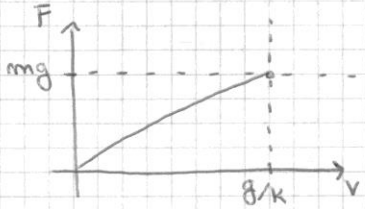
$$\int_0^v \frac{dv}{g-Kv} = \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{K}\left[\ln(g-Kv)\right]_0^v = t$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{g-Kv}{g}\right) = -Kt \Rightarrow v(t) = \frac{g}{K}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

$t \gg \frac{1}{K} \Rightarrow v = \frac{g}{K}$ $\qquad \frac{1}{K} = \tau$: costante di tempo.

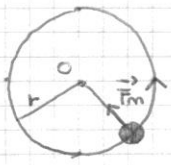


$\Rightarrow$



Quando $v = g/K$, si ha equilibrio dinamico fra attrito e peso e la loro risultante diventa nulla $\Rightarrow$ diventa un moto uniforme.

FORZE CENTRIPETE

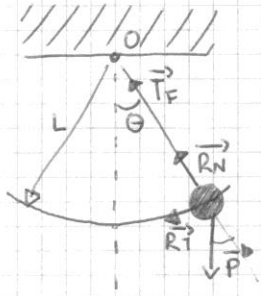


F_m determina l'accelerazione centripeta.

$F_m = m \cdot a_n = m \cdot \frac{v^2}{r}$

www.alessandropaghi.it

PENDOLO SEMPLICE



$T_F = mg$

$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T_F}$

↳ TENSIONE DEL FILO

↓ FORZA PESO

$R_T = -mg \sin\theta = m \cdot a_T$: forza di richiamo.

$R_N = T_F - mg\cos\theta = m \cdot a_N$

$a_T = L \cdot \alpha = L \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$.

$a_N = \frac{v^2}{L} \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{L} = T_F - mg\cos\theta$.

Consideriamo piccoli valori di θ.

$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots$

$\theta < 0{,}122\ \text{rad} = 7° \Rightarrow \sin\theta \cong \theta$, $\delta = 10^{-3}$

Per piccole oscillazioni l'equazione differenziale del moto del pendolo diventa:

$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\cdot\theta$

Quando l'ampiezza delle oscillazioni è piccola il moto del pendolo è oscillatorio armonico:

$\theta = \theta_0 \cdot \sin(\omega t + \phi)$ $\quad \omega^2 = g/L$

θ_0 e ϕ dipendono dalle condizioni iniziali.

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$

↳ PERIODO.

Legge oraria dello spostamento:

$S = L \cdot \theta = L \cdot \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$.

Velocità angolare:

$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega\theta_0\cos(\omega t + \phi)$

Velocità lineare:

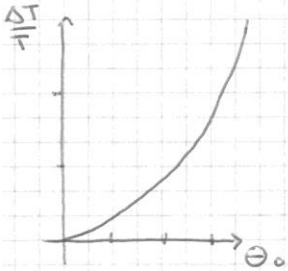
$v = \frac{ds}{dt} = L \cdot \frac{d\theta}{dt} = L \cdot \omega \cdot \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$.

www.alessandropaghi.it

Quando l'ampiezza delle oscillazioni non è piccola, il moto è sempre periodico ma non armonico.

T' dipende dall'ampiezza

$\Delta T = T' - T$

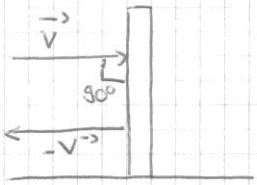


$\theta_0 = 90° \Rightarrow T' \cong 1{,}16\,T$

Tensione del filo:

$T_F = m \cdot \left[g \cdot \cos\theta(t) \cdot \frac{v^2(t)}{L} \right]$

ES. 3.1



$\vec{v}$ costante

$\vec{v} = 2\ m/s$

$m = 0{,}05\ Kg$

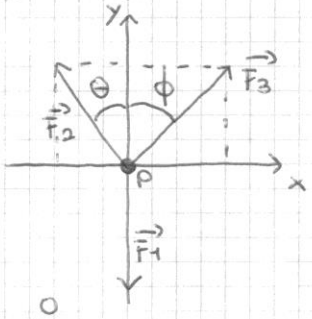
$\Delta t = 10^{-3}\ s$

$\Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p_0} = -m\vec{v} - m\vec{v} = -2m\vec{v}$

$\vec{F_m} = \frac{\Delta\vec{p}}{t} = \frac{-2m\vec{v}}{\Delta t}$

$\Delta p = 0{,}2\ Ns \quad ; \quad F_m = 200\ N$

ES. 3.2



$\theta = 30°$

$F_1 = 34\ N$

$F_2 = 25\ N$

$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = 0$

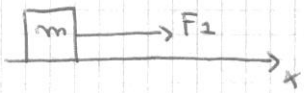
$$\begin{cases} F_{1x}^{0} + F_{2x} + F_{3x} = 0 \\ F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -F_2 \operatorname{sen}\theta + F_3 \operatorname{sen}\phi = 0 \\ -F_1 + F_2\cos\theta + F_3\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$\operatorname{sen}\phi = \frac{F_2 \operatorname{sen}\theta}{F_3}$; $\cos\phi = \frac{F_1 - F_2\cos\theta}{F_3}$

$\frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi} = \frac{F_2 \operatorname{sen}\theta}{F_1 - F_2\cos\theta}$ $\qquad \phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{F_2 \operatorname{sen}\theta}{F_1 - F_2\cos\theta}\right) = 45{,}35°$

$F_3 = \frac{F_2 \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\phi} = 17{,}57\ N$

ES. 3.3



$m = 0{,}8\ Kg$

$t_0 = 0\ s \Rightarrow V_0 = 0\ \frac{m}{s} \Rightarrow \vec{F_1} = 16\ N$

$t_1 = 3\ s \Rightarrow F_1 = 0\ N$

$t_2 = 9\ s \Rightarrow V_{FIN} = 0\ \frac{m}{s}$

$\vec{a} = \frac{\vec{F_1}}{m} = 20\ m/s^2$

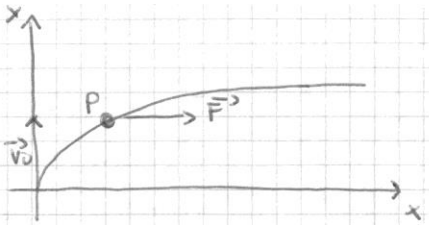
$x(t_1) = \frac{1}{2}at^2 = 90\ m \qquad V(t_1) = 60\ m/s$

$V(t_2) = V_1 + a_2(t_2 - t_1) = 0 \Rightarrow 60 + a(6) \Rightarrow a = -10\ m/s^2$

$\vec{F} = m\cdot\vec{a} = 0{,}8\cdot(-10) = -8\ N \qquad x(t_2) = 90 + 60\cdot 6 + \frac{1}{2}(-10)\cdot 36 = 270\ m$

www.alessandropaghi.it

ES. 3.4



$m = 2\,kg$

$t_0 \Rightarrow V_0 = 5\,m/s$

$\vec{F}$ costante $\Rightarrow F = 4\,N$

$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$

$V_x(t) = V_0 + at$

$x(t) = \underset{0}{x_0} + \underset{0}{V_0 t} + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2$

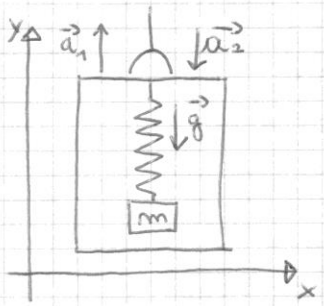
$F_y = 0 \Rightarrow a_y(t) = 0 \Rightarrow V_y(t) = \text{costante}$

$y(t) = \underset{0}{y_0} + V_0 t = V_0 t$

$x(t) = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{2}\cdot t^2 = t^2$

$y(t) = V_0 t = 5t$

ES. 3.5



$m = 4\,kg$

$a_1 = -a_2 = 2\,m/s^2$

1) ASCENSORE FERMO

$F = mg = 4 \cdot 2 = 8\,N$

2) ASCENSORE SALE

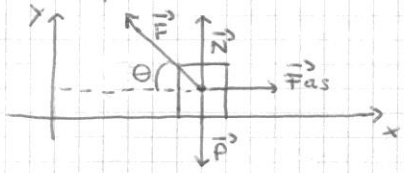
$F = a_1 \cdot m - mg = m(a_1 + g) = 4(2 + 9{,}8) = 47{,}2\,N$

3) ASCENSORE SCENDE

$\vec{F} = a_2 \cdot m - mg = m(a_2 - g) = 4(-2 + 9{,}8) = 31{,}2\,N$

www.alessandropaghi.it

ES. 3.6



$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = 0$

$\theta = 30°$

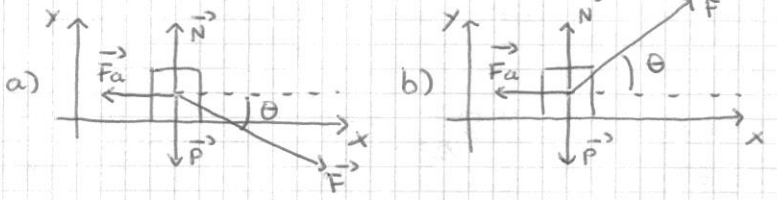
$x: -F\cos\theta + F_{as} = 0$ $\quad F\cos\theta \leq F_{as} = \mu_s \cdot N$

$y: F\sin\theta + N - P = 0$ $\quad N = P - F\sin\theta$

$F\cos\theta \leq \mu_s \cdot (P - F\sin\theta)$

CONDIZIONE DI QUIETE $\rightarrow$ $F \leq \dfrac{\mu_s (P - F\sin\theta)}{\cos\theta}$

ES. 3.7



$\theta = 60°$

$m = 2\,kg$

$\mu_s = 0,5$

$\mu_D = 0,3$

a) $F_y = N - P - F\sin\theta \Rightarrow N = P + F\sin\theta = 36,9\,N$ $\quad F = 20\,N$

$F_x = -F_a + F\cos\theta$

$\mu_s N = 18,5\,N$ $\quad F\cos\theta = 10\,N$ $\quad F\cos\theta \leq \mu_s N$

$\mu_D N = 11,07\,N$ $\quad$ il corpo rimane fermo.

b) $F_y = N - P + F\sin\theta \Rightarrow N = P - F\sin\theta = 2,3\,N$

$F_x = -F_a + F\cos\theta$

$\mu_s N = 1,15\,N$ $\quad F\cos\theta = 10\,N$ $\quad F\cos\theta > \mu_s N$

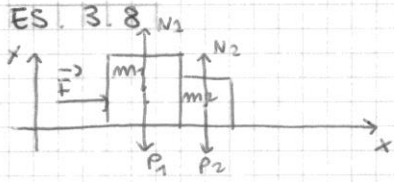
$\mu_D N = 0,7\,N$ $\quad$ il corpo si muove.

$F_x = -F_a + F\cos\theta$

$a_x = \dfrac{-F_a + F\cos\theta}{m} = 4,65\,m/s^2$

$a_y = 0$

ES. 3.8



$m_1 = 3\,kg$ $\quad F = 12\,N$

$m_2 = 2\,kg$

a) $\mu_S = 0$

---

b) $\mu_1 = 0,3$; $\mu_2 = ?$

a)

$F_y = N - P = 0.$

$\vec{F_x} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{12}{3+2} = 2,4\ m/s^2$

$F_1 = m \cdot a = 3 \cdot 2,4 = 7,2\ N.$

$F_2 = m \cdot a = 2 \cdot 2,4 = 4,8\ N$

$F_1 = F - F_2 = 7,2\ N.$

b)

$F_1 = F - F_2 - \mu_1 N_1 = m_1 a = 0$ $\quad (a=0)$

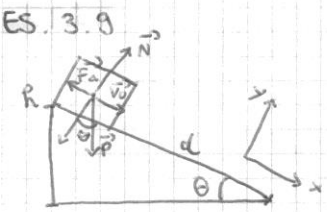
$F_2 = F_2 - \mu_2 N_2 = m_2 a = 0$

$F - \mu_1 N_1 - \mu_2 N_2 = 0$

$\mu_2 = \frac{F - \mu_1 N_1}{N_2} = 0,16$

www.alessandropaghi.it

ES. 3.9



$F_y = N - mg\cos\theta$

$F_x = mg\sin\theta - F_a$

$t=0 \Rightarrow V_0 > 0$

$R = d \cdot \sin\theta$

$d = \frac{R}{\sin\theta}$

1) $\mu_D = 0$

$F_x = m \cdot a = mg\sin\theta \Rightarrow a = g\sin\theta$

$v(t) = V_0 + g\sin\theta \cdot t$

$v^2 = V_0^2 + 2g\sin\theta \cdot d = V_0^2 + 2gR$

2) $\mu_D > 0$

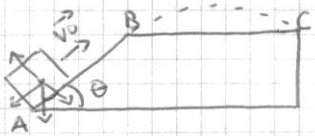
$F_x = m \cdot a = mg\sin\theta - \mu_D N$

$= mg\sin\theta - \mu_D mg\cos\theta$

$a = g(\sin\theta - \mu_D\cos\theta)$

$v^2 = V_0^2 + 2g(\sin\theta - \mu_D\cos\theta) \cdot d$

ES. 3.10



$AB = BC = d = 1,43$ m

$t=0 \Rightarrow V_0 > 0$

$\theta = 40°$

$\mu_D = 0,4$

$\overline{AB}$:

$F_y = N - mg\cos\theta = 0$

$F_x = -F_{ad} - mg\sin\theta$

$= -\mu_D mg\cos\theta - mg\sin\theta$.

$F_x = m \cdot a \Rightarrow a = -\mu_D g\cos\theta - g\sin\theta = g(-\sin\theta - \mu_D\cos\theta)$.

$V_1^2 = V_0^2 - 2g(\sin\theta + \mu_D\cos\theta)\, d$

Dal moto parabolico so che:

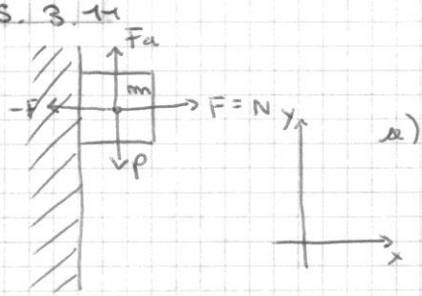
$BC = \frac{V_1^2 \cdot \sin 2\theta}{g}$

$V_1 = \sqrt{\frac{BC \cdot g}{\sin 2\theta}} = 3,77$ m/s

$V_0 = 6,39$ m/s.

www.alessandropaghi.it

ES. 3.14



$a = 11,4\ m/s^2$

a) $F_y = 0$

$P - F_a = 0$

$mg = F_a \leq \mu_s N$

$N = F = m \cdot a$

$\mu_s N = m \cdot a$

$\mu_s \geq \frac{mg}{ma} = 0,86$

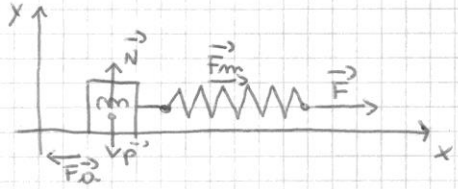
b)

$F_y \neq 0$.

$|mg| - |\mu_D ma| > 0$

$|mg| > |\mu_D ma|$ $\quad \frac{g}{a} > \mu_D \Rightarrow \mu_D < 0,86$

ES. 3.12



$F_y = -P + N = 0$

$F_x = F + F_m - F_a = Kx - F_a = Kx - \mu_D N$

$ma \quad Kx$

$\Downarrow$

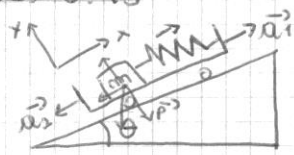
$m = 0 \rightarrow 0$

$\mu_D = 0 \Rightarrow ma = Kx \Rightarrow x = \frac{ma}{K}$

$\mu_D > 0 \Rightarrow ma = Kx - \mu_D \cdot mg \Rightarrow x = \frac{ma + \mu_D mg}{K} > \frac{ma}{K}$

www.alessandropaghi.it

ES. 3.13



$\theta = 20°$

$a_1 = 2\,m/s^2$; $a_2 = 5\,m/s^2$

$m = 0,25\,kg$

$K = 12\,N/m$

1)

$F_y = -P + N = 0$

$F_{x_1} = -P\,sen\theta + Kx$

$m a_1 = -mg\,sen\theta + Kx$

$x = \dfrac{ma_1 + mg\,sen\theta}{K} = 0,111\,m$

2)

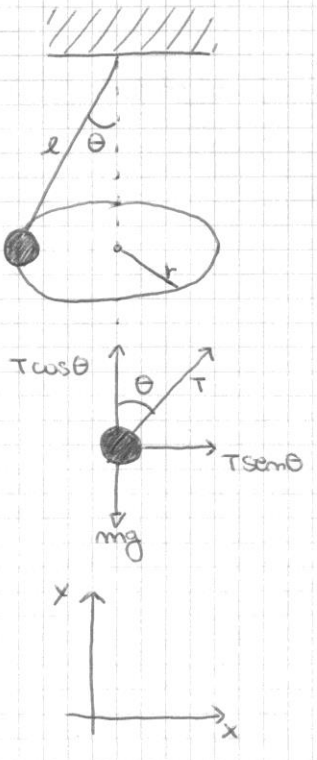
$F_{x_2} = -P\,sen\theta - Kx$

$m \cdot (-a_2) = -mg\,sen\theta - Kx$

$m a_2 = mg\,sen\theta + Kx$

$x = \dfrac{ma_2 - mg\,sen\theta}{K} = 0,034\,m.$

ES. 3.14



$F_m = P + T$

$ma = P + T$

$F_x = T\,sen\theta$

$F_N = T\,sen\theta$

$r = l\,sen\theta.$

$m \cdot a_N = T\,sen\theta$

$\bullet\ m \cdot \dfrac{v^2}{r} = T\,sen\theta$

$F_y = T\cos\theta - mg = 0$

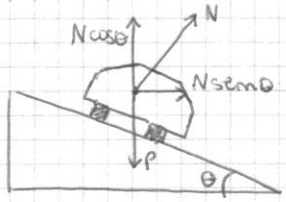
$\bullet\ T\cos\theta = mg$

$\dfrac{v^2}{r} = g\,tg\theta \Rightarrow v = \sqrt{g\,l\,sen\theta\,tg\theta}$

$T = \dfrac{mg}{\cos\theta}$

$\omega = \dfrac{v}{r} = \sqrt{\dfrac{g}{l\cos\theta}}$

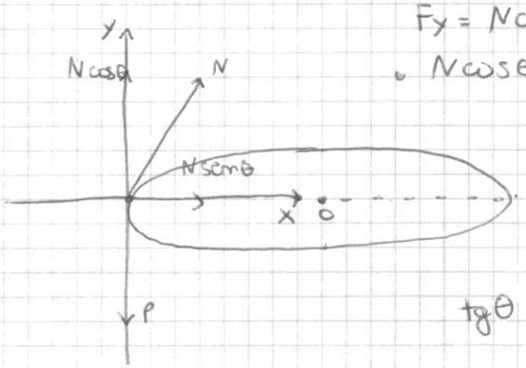
ES. 3.15



$F_x = F_N = N \sin\theta$

$m \cdot a_N = N \sin\theta$

$\cdot\ m \cdot \frac{v^2}{r} = N \sin\theta$



$F_y = N\cos\theta - P = 0$

$\cdot\ N\cos\theta = P$

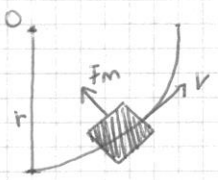
$N = \frac{mg}{\cos\theta}$

$m \frac{v^2}{r} = mg \cdot \tg\theta$

$\tg\theta = \frac{v^2}{gr} \quad \Rightarrow v = \sqrt{gr\,\tg\theta}$

$\theta = 30°$; $r = 30\ m \quad \Rightarrow v = 13\ m/s$

ES. 3.16



$F_y = -mg + N = 0 \qquad mg = N$

$F_x = F_N = A_s$

$F_m = \mu_s \cdot N \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = \mu_s \cdot mg$

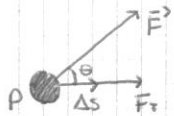
$v = \sqrt{\mu_s g r}$

$\mu_s = 0,5$

$r = 30\ m$

$v = 12,12\ m/s$

LAVORO



$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta s} = F \cdot \Delta s \cdot \cos\theta = F_T \Delta s$

$F_T = F\cos\theta$

Il lavoro dipende dalla forza, dallo spostamento e dall'angolo θ che essi formano.

$\theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow W > 0$:= LAVORO MOTORE

$\theta > \frac{\pi}{2} \Rightarrow W < 0$:= LAVORO RESISTENTE

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow W = 0$; F fa un'azione centripeta e non varia il modulo della velocità

$W_i = \vec{F_i} \cdot \vec{\Delta s_i} \Rightarrow W = \sum_{i=1}^{m} W_i$:= VALORE APPROSSIMATO DEL LAVORO.

$m \to \infty \Rightarrow \vec{\Delta s_i} \to \vec{ds}$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_A^B F\cos\theta \cdot ds = \int_A^B F_T \cdot ds$$

Lo integrale di linea della Forza F lungo il percorso $\overline{AB}$.

$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \ldots + \vec{F_m}$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_A^B (\vec{F_1} + \ldots + \vec{F_m})\vec{ds} = \int_A^B \vec{F_1} \cdot \vec{ds} + \ldots + \int_A^B \vec{F_m}\vec{ds} = W_1 + \ldots + W_N$$

Il lavoro è pari alla somma dei lavori delle singole forze agenti, ciascuno dei quali può essere positivo, negativo o nullo.

POTENZA

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_T \cdot v$$

P: POTENZA ISTANTANEA => Caratterizza la rapidità di erogazione del lavoro.

POTENZA MEDIA $= \frac{W}{t}$

www.alessandropaghi.it

ENERGIA CINETICA

$$dW = F_T \cdot ds = m \cdot a_T \cdot ds = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot ds = m \cdot \frac{ds}{dt} \cdot dv = mv\,dv$$

$$W = \int_A^B mv\,dv = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = E_{K,B} - E_{K,A} = \Delta E_K$$

$E_K = \frac{1}{2} m v^2$:= ENERGIA CINETICA

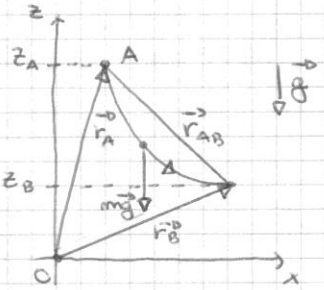
TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

Quantunque sia la forza che agisce nello spostamento di un punto materiale dalla posizione A alla posizione B, il lavoro fatto dalla forza è uguale alla variazione dell'energia cinetica del punto materiale stesso.

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2 \qquad \vec{p} = m\vec{v}$$

$$E_K = \frac{p^2}{2m} \qquad p = \sqrt{2m E_K}$$

LAVORO DELLA FORZA PESO



$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{s} = m\vec{g} \cdot \vec{r}_{AB}$$

F è costante;

$\vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{r}_{AB}$

Il peso ha solo la componente su z diversa da 0 e vale $-mg$, e la componente di $\vec{r}_{AB}$ lungo z vale $z_B - z_A$:

$$\vec{W} = (m\vec{g})_z \cdot (\vec{r}_{AB})_z = -mg(z_B - z_A)$$

$$= -(mgz_B - mgz_A) = -(E_{P,B} - E_{P,A}) = -\Delta E_P$$

$E_P = mgz$:= ENERGIA POTENZIALE DELLA FORZA PESO.

Il lavoro della forza peso è uguale all'opposto della variazione dell'energia potenziale della forza peso durante lo spostamento da A a B e pertanto non dipende dalla particolare traiettoria che collega A a B.

www.alessandropaghi.it

LAVORO DI UNA FORZA ELASTICA

$$W = \int_A^B -kx\,\vec{u}_x \cdot dx\,\vec{u}_x = -k\int_A^B x\,dx = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 = -\Delta E_p$$

$E_p = \frac{1}{2}kx^2$:= ENERGIA POTENZIALE ELASTICA

Il lavoro è espresso come l'opposto della variazione dell'energia potenziale tra la posizione finale e iniziale.

LAVORO DI UNA FORZA DI ATTRITO RADENTE

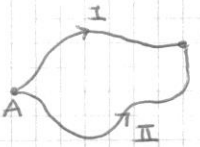
$$W = \int_A^B \vec{F}_{ad} \cdot d\vec{s} = \int_A^B -\mu_D N \vec{u}_v \cdot d\vec{s} = -\mu_D N \int_A^B ds$$

Il lavoro della forza di attrito radente dipende dal percorso e non è esprimibile come differenza dei valori di una funzione delle coordinate nei punti A e B.

Il lavoro di una forza di attrito radente è sempre negativo.

ENERGIA POTENZIALE

FORZE CONSERVATIVE: Il lavoro non dipende dal percorso.



$$\int_A^B (\vec{F}\cdot d\vec{s})_I = \int_A^B (\vec{F}\cdot d\vec{s})_{II} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

$$\circledast \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

$\overline{ABA}$:

$$\int_A^B (\vec{F}\cdot d\vec{s})_I + \int_A^B (\vec{F}\cdot d\vec{s})_{-II} = \int_A^B (\vec{F}\cdot d\vec{s})_I - \int_A^B (\vec{F}\cdot d\vec{s})_{II} = 0$$

Lungo un qualsiasi percorso chiuso, il lavoro è nullo:

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{s} = 0$$

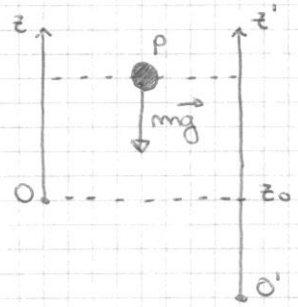
$W = E_{p,A} - E_{p,B} = -\Delta E_p$ => SOLO SE LE FORZE SONO CONSERVATIVE

$E_{p,peso} = mgz$; $E_{p,el} = \frac{1}{2}kx^2$

Da una forza conservativa non si può ricavare lavoro,

www.alessandropaghi.it

se il percorso è chiuso.



$E_p = mgz$

$E'_p = mgz' = mg(z + z_0)$

$z' = z + z_0$

$E'_p = E_p + mgz_0 = E_p + \text{costante}$.

Con ΔE_p la costante viene eliminata!
Il valore di E_p dipende dall'origine, ma non ne dipende il lavoro della forza peso.

FORZE NON CONSERVATIVE: Il lavoro dipende dal percorso.

ENERGIA MECCANICA

$W = \Delta E_K = E_{K,B} - E_{K,A}$, $W = -\Delta E_P = E_{P,A} - E_{P,B}$

$E_{K,A} + E_{P,A} = E_{K,B} + E_{P,B}$

La somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di un punto materiale che si muove sotto l'azione di forze conservative resta costante durante il moto, ossia si conserva.

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA
In presenza di forze conservative l'energia meccanica di un punto materiale si conserva.

$E_m = E_K + E_P = \text{costante}$

$W = W_C + W_{NC} = E_{K,B} - E_{K,A}$

$E_{P,A} - E_{P,B} + W_{NC} = E_{K,B} - E_{K,A}$

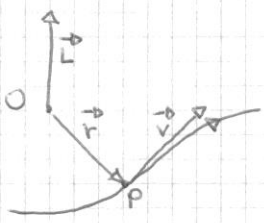
$\Rightarrow W_{NC} = (E_{K,B} + E_{P,B}) - (E_{K,A} + E_{P,A}) = E_{m,B} - E_{m,A}$

In presenza di forze non conservative l'energia meccanica non resta costante e la sua variazione è uguale al lavoro delle forze non conservative.

www.alessandropaghi.it

MOMENTO ANGOLARE . MOMENTO DELLA FORZA

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$: MOMENTO ANGOLARE



O : polo rispetto a cui è calcolato L.

$\vec{L}_{O'} = \vec{L}_O + \vec{O'O} \times m\vec{v}$

$\vec{L}^{\,\prime} = \vec{L}\,(+)$.

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$: MOMENTO DELLA FORZA

$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{F}$

$\vec{R} = \Sigma_i \vec{F}_i \Rightarrow \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \dots + \vec{r} \times \vec{F}_n = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n) = \vec{r} \times \vec{R}$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) \times m\vec{v} + \vec{r} \times m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$; $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$; $m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}$; $\vec{r} \cdot \vec{F} = \vec{M}$

TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE

La derivata temporale del momento angolare è uguale al momento della forza se entrambi i momenti sono riferiti allo stesso polo fisso in un sistema di riferimento inerziale.

Se momento angolare di un punto materiale rimane costante nel tempo, si conserva, se il momento della forze è nullo.

$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}$ costante

1) $\vec{F} = 0$

2) $\vec{r}$ e $\vec{F}$ sono parallele.

$\vec{M} \cdot dt = d\vec{L}$

$\int_0^t \vec{M} \cdot dt = \Delta\vec{L} = \vec{L}_{FIN} - \vec{L}_{IN}$

$\int_0^t \vec{M} \cdot dt = \int_0^t \vec{r} \times \vec{F}\, dt = r \times \int_0^t \vec{F} \cdot dt = \vec{r} \times \vec{J} = \Delta\vec{L}$

www.alessandropaghi.it

TEOREMA DEL MOMENTO DELL'IMPULSO

La variazione di momento angolare è uguale al momento dell'impulso applicato al punto.

$$W = \int_A^B F_T \, ds = \int_{\theta_A}^{\theta_B} r \cdot F_T \, d\theta = \int_{\theta_A}^{\theta_B} M \cdot d\theta$$

(D Riferimento al moto circolare.

ES. 4.1

VIA ENERGETICA



$W = -(mgz_B - mgz_A) = -mgh$; $h = z_B - z_A$

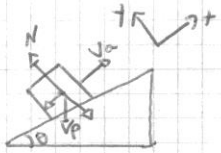
$W = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -mgh$

$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 - mgh$

Il punto si ferma quando la sua E_K è nulla:

$\frac{1}{2}mv_A^2 - mgh = 0 \Rightarrow \boxed{h} = \frac{v_A^2}{2g}$

VIA CINEMATICA



$F_y = N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$

$F_x = -mg\sin\theta \Rightarrow m(-a) = -mg\sin\theta$

$\Rightarrow a = +g\sin\theta$

$v(t) = v_0 - at$; $x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$

$t = \frac{v_0}{a}$

$x(t) = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a} = \frac{1}{2}\cdot\frac{v_0^2}{+g\sin\theta}$

$\boxed{h} = x\cdot\sin\theta = \frac{v_0^2}{+2g}$

ES. 4.2



$\vec{F} = F\cdot\vec{\mu}_x$

$W_F = F\cdot x$

$W_{EL} = -\Delta E_P = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 = -\frac{1}{2}kx^2$

$x_A = 0$ $x_B = x$

$W_F + W_{EL} = \Delta E_K$

$Fx - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2$

$v(x) = \sqrt{\frac{x}{m}(2F - kx)}$

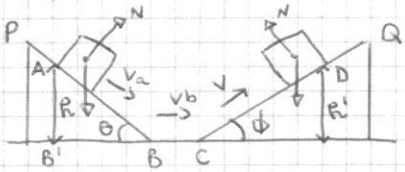
$v(x) = 0 \Rightarrow x\left(\frac{2F}{m} - \frac{kx}{m}\right) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = \frac{2F}{k}$

www.alessandropaghi.it

ES. 4.4



$V_0 = 0$ m/s

$\mu_S = 0$

A) $E_{p,A} = mgR$; $E_{k,A} = 0$ $\Rightarrow$ $E_{m,A} = mgR$

B) $E_{p,B} = 0$; $E_{k,B} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow E_{m,B} = \frac{1}{2}mV_B^2$

$E_{m,A} = E_{m,B} \Rightarrow mgR = \frac{1}{2}mV_B^2 \Rightarrow V_B = \sqrt{2gR}$

c) $V_C = V_B$

$E_{k,C} = \frac{1}{2}mV_B^2$ $\Rightarrow$ D si trova alla stessa quota di A.

D) $E_{m,D} = mgR'$

Per A, B, C, D possiamo usare la via cinematica:

$F_y = -mg\cos\theta + N = 0$ $\quad N = mg\cos\theta$

$F_x = mg\sin\theta$

$a = g\sin\theta$

$v^2 = V_0^2 + 2g\sin\theta \cdot d$ $\Rightarrow$ $d = \frac{R}{\sin\theta}$

$V_B = \sqrt{\underset{0}{V_0^2} + 2gR} = \sqrt{2gR}$

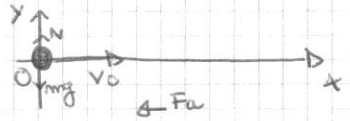
$V_C = V_B$

$V_D = V_B^2 - 2g\sin\phi \cdot d'$ $\quad d' = \frac{R'}{\sin\phi}$

$= V_B^2 - 2gR'$

$V_B^2 - 2gR' = 0$ $\quad R' = +\frac{V_B^2}{2g}$

ES. 4.3



$\vec{F_x} = -\vec{F_a} = -\mu_D \vec{N} = -\mu_D \cdot m\vec{g} = -\mu_D mg \cdot \vec{u}$

Dal teorema dell'impulso:

$mv - mv_0 = -\mu_D mgt$

$v = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{\mu_D g}$

Dal teorema dell'energia cinetica:

$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu_D mgx$

$v = 0 \Rightarrow x = \frac{v_0^2}{2\mu_D g} = \frac{1}{2}\mu_D g t^2$

Via cinematica:

$F_y = 0 \qquad N = mg$

$F_x = -F_a = -\mu_D mg$

$a = -\mu_D g$

$v = v_0 + at$

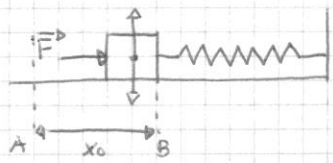
$x = \underset{0}{x_0} + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

$v = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{+\mu_D \cdot g}$

$x = v_0 \cdot \frac{v_0}{a} + \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{v_0^2}{a^2} = \frac{1}{2} v_0^2 / a = \frac{1}{2} v_0^2 / +\mu_D g$

www.alessandropaghi.it

ES. 4.5



$E_{K,A} = \frac{1}{2} m V_0^2$

$E_{P,A} = 0$

$E_{m,A} = \frac{1}{2} m V_0^2$

$E_{K,B} = 0$

$E_{P,B} = \frac{1}{2} K x_0^2$ $\quad E_{M,B} = \frac{1}{2} K x_0^2$

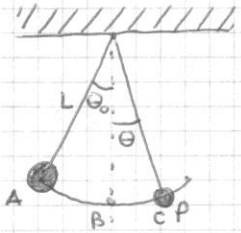
$E_{m,A} = E_{m,B}$

$x_0 = V_0 \sqrt{m/K}$

$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \phi)$

$= x_0 \cdot \text{sen}\left(\sqrt{\frac{K}{m}} \cdot t + \phi\right)$

ES. 4.6



La tensione del filo è sempre normale alla traiettoria.

altezza di P rispetto asse O:

$z = L - L\cos\theta = L(1 - \cos\theta)$

B) $E_P = 0$

$E_K = \frac{1}{2} m V^2$

A) $E_P = mgL(1 - \cos\theta_0)$, $E_K = 0$

Punto generico (C)

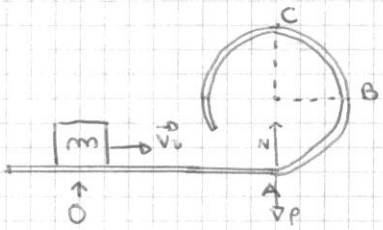
$E_P = mgL(1 - \cos\theta)$; $E_K = \frac{1}{2} m V_0^2$

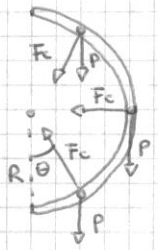
$E_{m,A} = E_{m,C}$

$mgL(1 - \cos\theta_0) = mgL(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} m V^2$

$V = \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}$

ES. 4.7





In O:

$E_K = \frac{1}{2} m v_0^2$; $E_P = 0$ $\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m v_0^2$

In A, B, C

$E_K = \frac{1}{2} m v^2$; $E_P = mgR$ $\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m v^2 + mgR$

$E_{m_O} = E_{m_A}$

$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + mgR$ $\Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2gR}$

In O: $v = v_0$

In A: $v = v_0$

In B: $v = \sqrt{v_0^2 - 2gR}$

In C: $v = \sqrt{v_0^2 - 2g(2R)} = \sqrt{v_0^2 - 4gR}$

$\vec{F_N} = \vec{N} + \vec{P} = m \cdot \frac{v^2}{R} \cdot \vec{u_N}$

In A:

$F_N = N - P = N - mg = m \cdot \frac{v_0^2}{R}$ $\Rightarrow N_A = m \cdot \frac{v_0^2}{R} + mg$

In B:

$N = m \cdot \frac{v_B^2}{R}$ $\Rightarrow N_B = m \cdot \frac{v_0^2}{R} - 2mg$

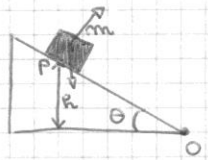
In C:

$N + mg = m \cdot \frac{v_0^2}{R}$ $\Rightarrow N_C = m \cdot \frac{v_0^2}{R} - 5mg$

$N_C = 0$ $\Rightarrow m \cdot \frac{v_0^2}{R} = 5mg$ $\Rightarrow v_0 = \sqrt{5gR} = v_{min}$

www.alessandropaghi.it

ES. 4.8



$tg\theta > \mu_S$

$W_{NC} = -\mu_D N \cdot \int_P^O ds = -\mu_D N |\vec{PO}|$

$N = mg\cos\theta$

$\vec{PO} = \frac{R}{sen\theta}$

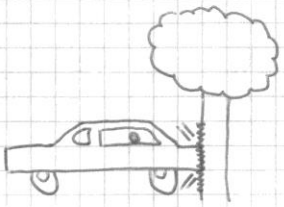
$W_{NC} = -\mu_D \cdot mg\cos\theta \cdot \frac{R}{sen\theta} = -\mu_D mg \cdot \frac{R}{tg\theta}$

$W_{NC} = E_{m,O} - E_{m,A} = \frac{1}{2} m V_0^2 - mgR$

$-\mu_D mg \cdot \frac{R}{tg\theta} = \frac{1}{2} m V_0^2 - mgR$

$\Rightarrow V_0 = \sqrt{2gR\left(1 - \frac{\mu_D}{tg\theta}\right)}$

ES. 4.9



$m = 10^3$ kg

$v = 130$ km / h

$d = 50$ cm

$E_{K_i} = \frac{1}{2} m v^2 = 6,48 \cdot 10^5$ J

$E_{K_F} = 0$ J.

$W = \Delta E_K = -6,48 \cdot 10^5$ J

$W = \vec{F}_m \cdot \vec{d} \Rightarrow \vec{F}_m = \frac{W}{\vec{d}} \Rightarrow F_m = \frac{E_K}{d} = 1,3 \cdot 10^6$ N.

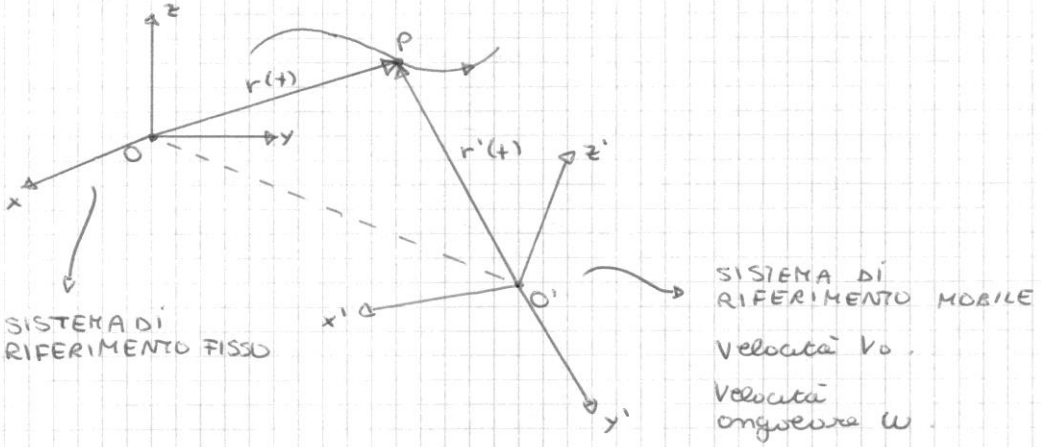
Dal Teorema delle' impulso:

$F_m \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v \qquad \Delta t \cong 28$ ms

www.alessandropaghi.it

SISTEMI DI RIFERIMENTO. VELOCITÀ E ACCELERAZIONE RELATIVE

Le leggi fisiche non dipendono dalla scelta del SISTEMA di riferimento.



$\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r'}$

TEOREMA DELLE VELOCITÀ RELATIVE:

$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}$

$\vec{v}$: VELOCITÀ ASSOLUTA; $\vec{v'}$: VELOCITÀ RELATIVA

$\vec{v}_t = \vec{v} - \vec{v'} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}$: VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO

$\vec{\omega} = 0 \Rightarrow$ Moto Relativo Traslatorio;
Moto di Trascinamento Traslatorio;

$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v}_{O'}$; $\vec{v}_t = \vec{v}_{O'}$

$\vec{v}_{O'} = 0 \Rightarrow$ Moto Relativo Rotatorio;
Moto di Trascinamento Rotatorio;

$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}$; $\vec{v}_t = \vec{\omega} \times \vec{r'}$

TEOREMA DELLE ACCELERAZIONI RELATIVE:

$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v'}$

$\vec{a}_{O'} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt}$

$\vec{a'}$: ACCELERAZIONE RELATIVA.

$\vec{a}$: ACCELERAZIONE ASSOLUTA.

$\vec{a}_t = \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'})$: ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO.

www.alessandropaghi.it

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$: ACCELERAZIONE COMPLEMENTARE (DI CORIOLIS)

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t + \vec{a}_c$$



Punto P_2 rispetto ad O: $\vec{r} = \vec{r}_2$; $\vec{v} = \vec{v}_2$; $\vec{a} = \vec{a}_2$

Punto P_2 rispetto ad O': $\vec{r}' = \vec{r}_{1,2}$; $\vec{v}' = \vec{v}_{1,2}$; $\vec{a}' = \vec{a}_{1,2}$

Punto P_1 rispetto ad O: $\vec{OO'} = \vec{r}_1$; $\vec{v}_{O'} = \vec{v}_1$; $\vec{a}_{O'} = \vec{a}_1$

$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}_{1,2} \Rightarrow \vec{r}_{1,2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{1,2} \Rightarrow \vec{v}_{1,2} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$

$\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_{1,2} \Rightarrow \vec{a}_{1,2} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$

SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI. RELATIVITÀ GALILEANA

Sistema di riferimento inerziale: Vale la legge d'inerzia; un punto non soggetto a forze lanciato con velocità arbitraria in qualunque direzione si muove di moto rettilineo uniforme o, se è in quiete, resta in quiete.

⇒ Definito un sistema di riferimento inerziale, tutti gli altri sistemi in moto rettilineo uniforme rispetto a questo sono anch'essi inerziali.

⇒ Relatività Galileana: non è possibile stabilire, tramite misure effettuate in questi sistemi di riferimento diversi, se uno di essi è in quiete o in moto.

www.alessandropaghi.it

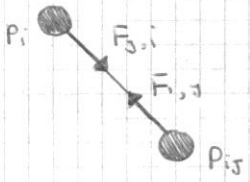
SISTEMI DI PUNTI. FORZE INTERNE E FORZE ESTERNE.

$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)}$

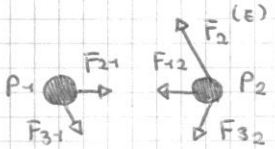
$F^{(e)}$ = Forze esterne.

$F^{(i)}$ = Forze interne.

Alle forze interne si applica il Principio di azione e reazione



$\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$.

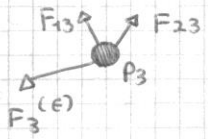


$\vec{R}^{(i)} = \sum_i \vec{F}_i^{(i)} = \sum_{i,j} \vec{F}_{i,j} = 0$

con $i = 1, 2, \ldots, n$

$j = 1, 2, \ldots, n$

$i \neq j$



Per ciascun P_i:

POSIZIONE: $\vec{r}_i$

VELOCITÀ: $\vec{v}_i$

ACCELERAZIONE: $\vec{a}_i = \vec{F}_i / m_i$

QUANTITÀ DI MOTO: $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$

MOMENTO ANGOLARE: $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$

ENERGIA CINETICA: $E_{k,i} = \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2}$

Per il sistema complessivo:

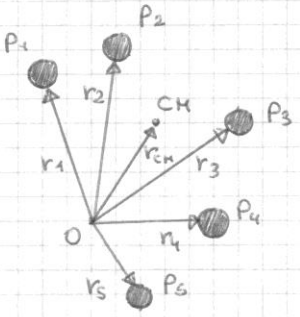
QUANTITÀ DI MOTO ANGOLARE: $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$

MOMENTO ANGOLARE TOTALE: $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$

ENERGIA CINETICA TOTALE: $E_k = \sum_i E_{k,i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2}$

www.alessandropaghi.it

CENTRO DI MASSA DI UN SISTEMA DI PUNTI



$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

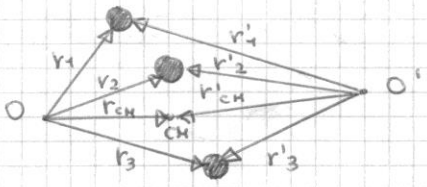
$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

$$y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}$$

$$z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{OO'}$$

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i + \vec{O'O}$$



$$\vec{r}'_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}'_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i (\vec{r}_i + \vec{O'O})}{\sum_i m_i}$$

$$= \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} + \vec{O'O} = \vec{r}_{CM} + \vec{O'O}$$

VELOCITÀ DEL CENTRO DI MASSA

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{p}}{m}$$

ACCELERAZIONE DEL CENTRO DI MASSA

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{a}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{m}$$

Il sistema di riferimento è inerziale:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)}$$

$$m \vec{a}_{CM} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i (\vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)}) = \vec{R}^{(e)} + \underbrace{\vec{R}^{(i)}}_{0} = R^{(e)}$$

$$\vec{R}^{(e)} = m \vec{a}_{CM}$$

TEOREMA DEL CENTRO DI MASSA.

Il centro di massa si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata la risultante delle forze esterne.

www.alessandropaghi.it

$\vec{R}^{(E)} = m \cdot \vec{a}_{CM} = m \cdot \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}_{CM}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$

La risultante delle forze esterne è uguale alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema.

CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Se il sistema di punti considerato è isolato oppure l'azione delle forze esterne è tale che la loro risultante $\vec{R}^{(E)}$ sia nulla:

$\vec{a}_{CM} = 0$; $\vec{V}_{CM}$ = costante ; $\vec{P}$ = costante

PRINCIPIO DELLA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

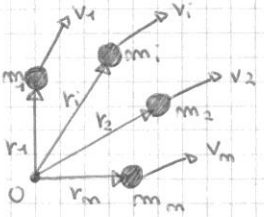
Quando la risultante delle forze esterne è nulla, la quantità di moto totale del sistema rimane costante nel tempo e il centro di massa di muove di moto rettilineo uniforme o resta in quiete.

$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \text{costante}.$

$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = 0$

$\Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$, $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

MOMENTO ANGOLARE IN UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI



$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i\vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \times m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}$

$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = v_i - V_0$

$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(i)}$

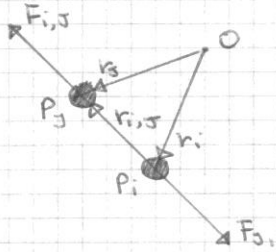
$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i (\vec{v}_i - \vec{V}_0) \times m_i\vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \times (\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(i)})$

$= \sum_i \vec{v}_i \times m_i\vec{v}_i - \sum_i \vec{V}_0 \times m_i\vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(E)} + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(i)}$

$= -\vec{V}_0 \times m\vec{V}_{CM} + \vec{M}^{(E)} + \vec{M}^{(i)}$

$\vec{M}^{(E)} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(E)}$; $\vec{M}^{(i)} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(i)}$

www.alessandropaghi.it



$$\vec{M}^{(i)}_{i,j} = \vec{r}_j \times \vec{F}_{i,j} + \vec{r}_i \times \vec{F}_{j,i} = (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \times \vec{F}_{i,j}$$
$$= \vec{r}_{i,j} \times \vec{F}_{i,j}$$

$\vec{r}_{i,j} = P_i P_j \;\; /\!/ \;\; \vec{F}_{i,j} \Rightarrow M^{(i)}_{i,j} = 0$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)} - \vec{V}_0 \times m\vec{V}_{CH}$$

Se $-\vec{V}_0 \times m\vec{V}_{CH} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)}$

Lo
- se polo O è fisso nel sistema di riferimento inerziale, $\vec{V}_0 = 0$;
- se CM è in quiete nel sistema di riferimento inerziale, $\vec{V}_{CM} = 0$;
- se polo O coincide con il CM, $\vec{V}_0 = \vec{V}_{CM}$ e $\vec{V}_0 \times \vec{V}_{CM} = 0$;
- $\vec{V}_0$ è parallelo a $\vec{V}_{CM}$

TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE

Se il polo O è fisso nel sistema di riferimento inerziale o coincide con il centro di massa, anche se quest'ultimo non è in generale un punto fisso, l'evoluzione nel tempo del momento angolare del sistema di punti è determinata dal momento delle forze esterne rispetto ad O; le forze interne non influenzano $\vec{L}$.

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

$\vec{V}_0 \times m\vec{V}_{CM} = 0$; $\vec{M}^{(E)} = 0$

$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ ovvero $\vec{L}$ = costante

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

Se è nullo il momento delle forze esterne che agiscono sul sistema il momento angolare si conserva.

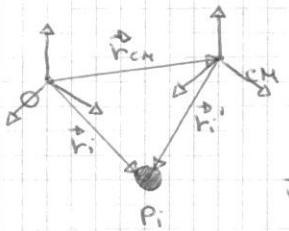
$\vec{M}^{(E)} = 0$

Lo
- non agiscono forze esterne, il sistema è isolato;
- se momento delle forze esterne è nullo rispetto ad un determinato polo, ma non rispetto a qualsiasi polo;

www.alessandropaghi.it

SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA

- L'origine è nel centro di massa;
- Gli assi mantengono sempre la stessa direzione rispetto agli assi del sistema inerziale e possono essere considerati paralleli a questi;
- Si tratta in generale di un sistema non inerziale: il moto del sistema del centro di massa è traslatorio, ma non necessariamente rettilineo uniforme; cioè avviene solo se $\vec{R}^{(e)} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{CM} = 0$;



$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{r}_{CM}$

$\omega = 0 \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{V}_{CM}$

$\vec{r}_{CM}' = 0 \; ; \; \vec{V}_{CM}' = 0.$

$\Sigma_i m_i \vec{r}_i' = 0 \; ; \; \Sigma_i m_i \vec{v}_i' = 0$

La quantità di moto totale del sistema, $\vec{p}' = \Sigma_i m_i \vec{v}_i'$, risulta nulla se misurata nel sistema di riferimento del centro di massa, anche se i singoli termini $m_i \vec{v}_i'$ sono in generale diversi da zero.

Il sistema del centro di massa non è inerziale $\Rightarrow$ agisce la forza d'inerzia $-m_i \vec{a}_i = -m_i \vec{a}_{CM}$

$\vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)} - m_i \vec{a}_{CM} = m_i \vec{a}_i'$

$\vec{R}^{(e)} - \Sigma_i m_i \vec{a}_{CM} = \vec{R}^{(e)} - m \vec{a}_{CM} = \Sigma_i m_i \vec{a}_i' = 0$

www.alessandropaghi.it

TEOREMI DI KÖNIG

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{r}_i' + \vec{r}_{CM}) \times m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM})$$

$$= \underbrace{\sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'}_{\vec{L}'} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_{CM}}_{0} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_i'}_{0} + \sum_i \vec{r}_{CM} \times \underbrace{m_i \vec{v}_{CM}}_{\vec{p}} .$$

PRIMO TEOREMA DI KÖNIG (PER IL MOMENTO ANGOLARE)

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{r}_{CM} \times m \vec{v}_{CM} = \vec{L}' + \vec{L}_{CM}$$

Il momento angolare del sistema di punti si può ottenere, nel sistema di riferimento inerziale, come somma del momento angolare dovuto al moto del centro di massa, $\vec{L}_{CM}$, e di quello del sistema rispetto al centro di massa.

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM})^2 = \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2}_{E_K'} + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2}_{\frac{1}{2} m v_{CM}^2} + \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_{CM}}_{\vec{p}' \cdot \vec{v}_{CM}}$$

$$\vec{p}' \cdot \vec{v}_{CM} = 0$$

$$E_K = E_K' + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = E_K' + E_{K,CM}$$

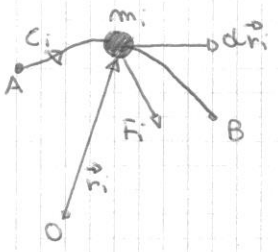
SECONDO TEOREMA DI KÖNIG (PER L'ENERGIA CINETICA)

L'energia cinetica del sistema di punti si può ottenere, nel sistema di riferimento inerziale, come la somma dell'energia cinetica dovuta al moto del centro di massa, $E_{K,CM}$, e di quella del sistema rispetto al centro di massa.

www.alessandropaghi.it

CONSIDERAZIONI SU ENERGIA CINETICA

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_i^{(E)} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_i^{(i)} \cdot d\vec{r}_i = dW_i^{(E)} + dW_i^{(i)}$$



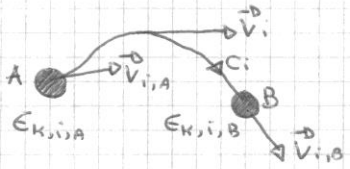
$$W = W^{(E)} + W^{(i)}$$

$$dW^{(i)} = \vec{F}_{i,j} \cdot d\vec{r}_j + \vec{F}_{j,i} \cdot d\vec{r}_i$$
$$= \vec{F}_{i,j} \cdot (d\vec{r}_j - d\vec{r}_i)$$
$$= \vec{F}_{i,j} \cdot d(\vec{r}_j - \vec{r}_i) = \vec{F}_{i,j} \cdot d\vec{r}_{i,j}$$

Il lavoro delle forze interne è legato un cambiamento delle distanze mutue tra i vari punti.

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = m_i v_i dv_i$$

$$W = \Sigma_i \frac{1}{2} m_i v_{i,B}^2 - \Sigma_i \frac{1}{2} m_i v_{i,A}^2 = E_{K,B} - E_{K,A}$$



$$W^{(E)} + W^{(i)} = E_{K,B} - E_{K,A} = \Delta E_K$$

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

Il lavoro compiuto dalle forze esterne ed interne che agiscono su un sistema di punti materiali è uguale alla variazione di energia cinetica dello stesso sistema tra la configurazione finale e quella iniziale.

Forze interne conservative: $W^{(i)} = -\Delta p^{(i)}$

Forze esterne conservative: $W^{(E)} = -\Delta p^{(E)}$

Tutte le forze conservative:

⇒ TEOREMA DI CONSERVAZIONE DELLA ENERGIA MECCANICA DEL SISTEMA.

$$W = \Delta E_K = -\Delta E_P = -(E_{P,B} - E_{P,A})$$

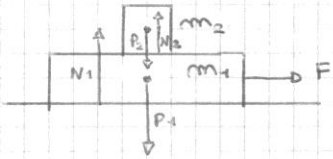
$$E_{m,A} = (E_K + E_P)_A = E_{m,B} = (E_K + E_P)_B = \text{costante}.$$

Se non tutte le forze sono conservative:

$$\Rightarrow E_{m,B} - E_{m,A} = (E_K + E_P)_B - (E_K + E_P)_A = W_{NC}.$$

www.alessandropaghi.it

ES. 6.1



$P_1 = m_1 g$

$P_2 = m_2 g$

$P_{TOT} = (m_1 + m_2) g$

$F_y = N_1 + N_2 - P_1 - P_2 = 0$

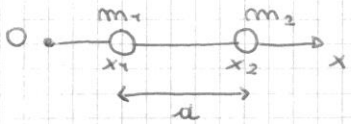
$F_{x_1} = F - \mu_D N_2$

$F_{x_2} = \mu_D N_2$

$m_1 a_1 = F - \mu_D N_2 \Rightarrow a_1 = \frac{F - \mu_D N_2}{m_1} = \frac{F - \mu_D m_2 g}{m_1}$

$m_2 a_2 = \mu_D N_2 \Rightarrow a_2 = \frac{\mu_D N_2}{m_2} = \mu_D g$

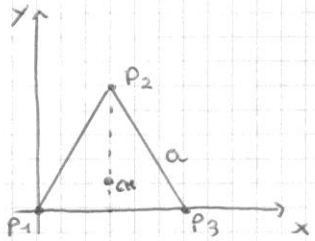
ES. 6.2



$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$

$x_2 = x_1 + d \Rightarrow x_{CM} = x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot d$

ES. 6.3

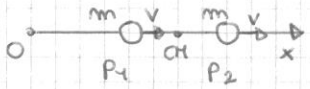


$z_{CM} = 0$

$x_{CM} = \frac{m \cdot \overset{=0}{x_1} + m \cdot x_2 + m \cdot x_3}{3m} = \frac{m x_2 + m x_3}{3m} = \frac{x_2 + x_3}{3} = \frac{a/2 + a}{3} = \frac{a}{2}$

$y_{CM} = \frac{m \cdot \overset{=0}{y_1} + m \cdot y_2 + m \cdot \overset{=0}{y_3}}{3m} = \frac{y_2}{3} = \frac{R}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} a$

ES. 6.4



$z_{CM} = 0$; $y_{CM} = 0$

$x_{CM} = \frac{m x_1 + m x_2}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$V_{CM} = \frac{mV + mV}{2m} = V$

www.alessandropaghi.it

ES. 6.5

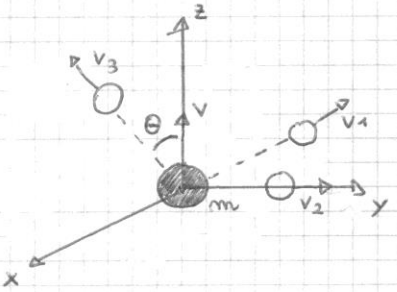
$\vec{a}_1 = \vec{g}$

$m\vec{a}_{CM} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i m_i \vec{g}$

$m\vec{a}_{CM} = \vec{R}^{(e)} = \sum_i m_i \vec{g} = m\vec{g}$

$\vec{a}_{CM} = \vec{g}$

ES. 6.8



$v_0 = 400$ m/s

$\vec{v}_1 = -300\,\vec{u}_x$

$\vec{v}_2 = 450\,\vec{u}_y$

Agiscono solo forze interne $\Rightarrow$ conservazione della quantità di moto.

$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$

$m\vec{v}_0 = \frac{m}{3}\vec{v}_1 + \frac{m}{3}\vec{v}_2 + \frac{m}{3}\vec{v}_3$

$\vec{v}_3 = 3\vec{v}_0 - \vec{v}_1 - \vec{v}_2$

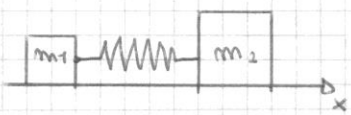
$v_3 = \sqrt{1200^2 + 300^2 + 450^2} = 1320$ m/s

$\cos\theta = \frac{p}{p_3} = \frac{3v_0}{v_3} = 0,909 \quad \Rightarrow \theta = 24,6°$

$v(t) = v_0 - gt \quad ; \quad z(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$

$v(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{g} = 40,8$ s $\qquad R = \frac{v_0^2}{2g} = 8,16$ km

ES. 6.9



$m_1 = 0,2$ kg $\qquad v_1 = 3$ m/s

$m_2 = 0,3$ kg

Agiscono solo forze interne $\Rightarrow$ Quantità di moto si conserva.

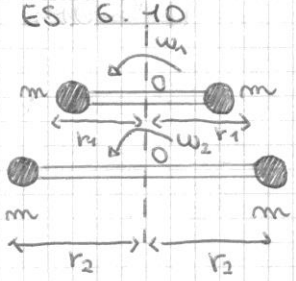
$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \qquad m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -\frac{m_1}{m_2} \cdot v = -2$ m/s

E_{TOT} si conserva:

$E_p = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 1,5$ J

www.alessandropaghi.it

ES 6.10



Assumiamo il centro O del sistema come polo.

Le forze esterne al sistema, ovvero le forze peso e le reazioni vincolari hanno momento risultante nullo. ($\vec{R}^{(e)} = 0$)

$V_1 = \omega_1 r_1$

L_{IN} è ortogonale al piano del moto.

$L_{IN} = 2 r_1 m V_1 = 2 r_1^2 m \omega_1$

$L_{FIN} = 2 r_2^2 m \omega_2$

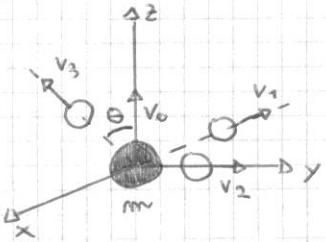
Se momento angolare si conserva

$L_{IN} = L_{FIN}$

$\cancel{2} r_1^2 \cancel{m} \omega_1 = \cancel{2} r_2^2 \cancel{m} \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} \omega_1$

a causa dell'accorciamento il sistema rallenta.

ES 6.11



$m = 9 \cdot 10^3$ Kg

$\vec{V_0} = 400$ m/s $\cdot \vec{u}_z$

$E_{K,IN} = \frac{1}{2} m V_0^2 = 0,72 \cdot 10^9$ J

$E_{K,FIN} = \frac{1}{2} \frac{m}{3} V_1^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{3} V_2^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{3} V_3^2 = 3,05 \cdot 10^9$ J

$\vec{V_1} = -300 \cdot \vec{u}_x$

$\vec{V_2} = 450 \, \vec{u}_y$

$\vec{P} = \vec{P_1} + \vec{P_2} + \vec{P_3} \Rightarrow \cancel{m} \cdot \vec{V_0} = \frac{\cancel{m}}{3} \vec{V_1} + \frac{\cancel{m}}{3} \vec{V_2} + \frac{\cancel{m}}{3} \vec{V_3}$

$\vec{V_3} = 3\vec{V_0} - \vec{V_1} - \vec{V_2}$

$\vec{V_3} = \sqrt{1200^2 + 300^2 + 450^2} = 1320$ m/s

Per il secondo teorema di Konig:

$E_{K,FIN} = E_{K,CM} + E_K'$

$E_K' = E_{K,FIN} - E_{K,CM} = E_{K,FIN} - E_{K,IN} = 2,33 \cdot 10^9$ J

Energia che si libera durante l'esplosione a causa di forze interne non conservative.

www.alessandropaghi.it

ES. 6.12

a)



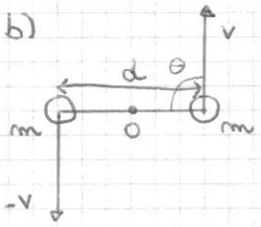
$O \equiv CM$ Se centro di massa coincide con il polo e la sua velocità è nulla.

$\vec{L} = \vec{L}' = \vec{L}_{CM} = 0 \qquad \vec{V}_{CM} = 0$

$E_{K,CM} = 0$

$E_K = E_K' = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} m v^2 = m v^2$

b)



$O \equiv CM$ Se centro di massa coincide con il polo e la sua velocità è nulla

$\vec{V}_{CM} = 0$

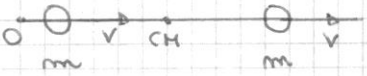
$\vec{L}_{CM} = 0 \qquad \vec{L} = \vec{L}' = 2m \vec{r} \times \vec{v}$

$L = 2m r v \operatorname{sen}\theta = d m v$

$E_{K,CM} = 0$

$E_K = E_K' = 2 \cdot \frac{1}{2} m v^2 = m v^2$

c)



$\vec{X}_{CM} = \frac{\cancel{m} x_1 + \cancel{m} x_2}{2\cancel{m}} = \frac{\vec{x_1} + \vec{x_2}}{2}$

$\vec{V}_{CM} = \frac{\cancel{m} v + \cancel{m} v}{2\cancel{m}} = \vec{v}$

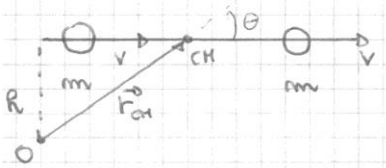
$\vec{P}_{CM} = 2m \vec{V}_{CM}$

$\vec{X}_{CM}$ e $\vec{V}_{CM}$ sono paralleli $\Rightarrow \vec{L}_{CM} = 0$.

$\vec{x_1}$ è parallelo a $\vec{v}$ $\Rightarrow \vec{L} = 0 \Rightarrow \vec{L}' = 0$.

$E_K = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} m v^2 = m v^2 = E_{K,CM} \Rightarrow E_K' = 0$.

d)



$\vec{X}_{CM} = \frac{\vec{x_1} + \vec{x_2}}{2}$; $\vec{V}_{CM} = \vec{v}$; $\vec{P}_{CM} = 2m \vec{V}_{CM}$

$\vec{L}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times 2m \vec{V}_{CM} \Rightarrow \vec{L}$

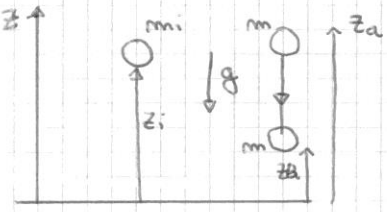
$\vec{L}' = 0$

$L = 2m R v = 2m v r \operatorname{sen}\theta$

$E_K = m v^2 = E_{K,CM} \Rightarrow E_K' = 0$.

www.alessandropaghi.it

ES. 6.13



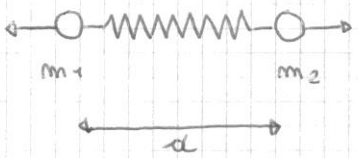
$$\epsilon_{p,i} = m_i g z_i$$

$$\epsilon_p = \sum_i \epsilon_{p,i} = \sum_i m_i g z_i = g \sum_i m_i z_i = g m \cdot z_{CM}$$

$$W_{peso} = -\Delta \epsilon_p = mgz_a - mgz_B$$

ES. 6.14

a)



$$W^{(I)} = -\Delta \epsilon_p^{(I)} = \frac{1}{2} k x_{IN}^2 - \frac{1}{2} k x_{FIN}^2$$

$$= \frac{1}{2} k (x_{IN} - x_{FIN})^2 = \frac{1}{2} k d^2 = \epsilon_{p,IN}$$

$$x_{FIN} = 0 \; ; \; x_{IN} = d.$$

$$\epsilon_{M,IN} = \epsilon_{K,IN} + \epsilon_{p,IN} = \frac{1}{2} k d^2$$

$$\epsilon_{M,FIN} = \epsilon_{K,FIN} + \epsilon_{p,FIN} = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

$$\epsilon_{M,IN} = \epsilon_{M,FIN}$$

$$\frac{1}{2} k d^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

Conservazione della quantità di moto:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2$$

$$m_1 \vec{v}_1 = m_2 \vec{v}_2$$

$$V_2 = \frac{m_1 V_1}{m_2}$$

$$k d^2 = m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 \Rightarrow V_1^2 = \frac{k d^2 - m_2 V_2^2}{m_1}$$

$$= \frac{k d^2 - m_2 \cdot \frac{m_1^2 V_1^2}{m_2^2}}{m_1} = \frac{k d^2 - \frac{m_1^2}{m_2} V_1^2}{m_1} = \frac{k d^2}{m_1} - \frac{m_1}{m_2} \cdot V_1^2$$

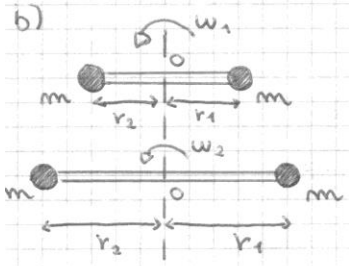
$$V_1^2 = \frac{k d^2}{m_1} - \frac{m_1}{m_2} \cdot V_1^2 \Rightarrow V_1^2 + \frac{m_1}{m_2} \cdot V_1^2 = \frac{k d^2}{m_1} \Rightarrow V_1^2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = \frac{k d^2}{m_1}$$

$$V_1^2 = \frac{\frac{k d^2}{m_1}}{\frac{m_2 + m_1}{m_2}} = \frac{k d^2 \cdot m_2}{m_1 (m_1 + m_2)} \Rightarrow V_1 = d \cdot \sqrt{\frac{k m_2}{m_1 (m_1 + m_2)}}$$

$$V_2 = d \cdot \sqrt{\frac{k m_1}{m_2 (m_1 + m_2)}}$$

www.alessandropaghi.it

b)



$$\Delta E_K = E_{K,FIN} - E_{K,IN}$$

$$= \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} m r_2^2 \omega_2^2 - \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} m r_1^2 \omega_1^2$$

$$= m r_2^2 \omega_2^2 - m r_1^2 \omega_1^2$$

$$L_{IN} = 2 r_1^2 m \omega_1$$

$$L_{FIN} = 2 r_2^2 m \omega_2$$

$$L_{IN} = L_{FIN} \Rightarrow \omega_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} \omega_1$$

$$\Delta E_K = m r_2^2 \cdot \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot \omega_1 \right)^2 - m r_1^2 \omega_1^2$$

$$= m \cancel{r_2^2} \cdot \frac{r_1^4}{r_2^{\cancel{4}2}} \cdot \omega_1^2 - m r_1^2 \omega_1^2 = m r_1^2 \omega_1^2 \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} - 1 \right)$$

($\frac{r_1^2}{r_2^2} < 1$)

$\Delta E_K < 0$.

$W^{(I)} = \Delta E_K < 0$. ...

www.alessandropaghi.it

CORPO RIGIDO: PRIME PROPRIETÀ

Un corpo rigido è definito come un sistema di punti materiali in cui le distanze tra tutte le possibili coppie di punti non possono variare.

Il lavoro delle forze interne in un sistema rigido è nullo: la variazione dell'energia cinetica di un corpo rigido è uguale al lavoro delle forze esterne.

$$\vec{R}^{(E)} = \vec{R}^{*} = m\,\vec{a}_{CM}$$

$$\vec{M}^{(E)} = \vec{M}^{*} = \frac{d\vec{L}^{*}}{dt}$$

$$W^{(E)} = W = \Delta E_K$$

CORPO CONTINUO: DENSITÀ E POSIZIONE DEL CENTRO DI MASSA

Schematizziamo un corpo rigido come un insieme di punti materiali.
Se singolo punto materiale va pensato come un piccolo volume dV contenente una massa dm.

DENSITÀ: $\rho = \frac{dm}{dV}$ → MASSA INFINITESIMA / → VOLUME INFINITESIMO

$$dm = \rho \cdot dV$$

MASSA TOTALE DEL CORPO: $m = \int dm = \int_V \rho\, dV$

Un corpo avente densità costante si dice OMOGENEO:

$$\rho = \frac{m}{V}\,; \quad m = \rho V$$

Un corpo non avente densità costante si dice non omogeneo:
DENSITÀ MEDIA: $\bar{\rho} = m / V$

DENSITÀ SUPERFICIALE: $\rho_s = \frac{dm}{dS} \Rightarrow m = \int_S \rho_s\, dS$

DENSITÀ LINEARE: $\rho_L = \frac{dm}{d\ell} \Rightarrow m = \int_\ell \rho_L\, d\ell$

www.alessandropaghi.it

VOLUME SPECIFICO: $v = \frac{1}{\rho} = \frac{dV}{dm}$

DENSITÀ: massa contenuta nell'unità di volume

VOLUME SPECIFICO: Volume occupato dall'unità di massa

DENSITÀ	DENSITÀ SUP.	DENSITÀ LIN.
Kg/m^3	Kg/m^2	Kg/m

POSIZIONE DEL CENTRO DI MASSA:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\int_V \vec{r}\,\rho\, dV}{\int_V \rho\, dV} = \frac{1}{m}\int_V \vec{r}\,\rho\, dV$$

corpo omogeneo (ρ = costante)

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\rho}{m}\int_V \vec{r}\, dV = \frac{1}{V}\int_V \vec{r}\, dV \qquad dV = dx\,dy\,dz$$

↳ INTEGRALE TRIPLO.

CORPO CONTINUO SOTTOPOSTO ALLA FORZA PESO:

$\int \vec{g}\, dm = \vec{g}\int dm = \vec{g}\, m$: RISULTANTE APPLICATA AL CENTRO DI MASSA.

$$\vec{M}^0 = \int \vec{r} \times \vec{g}\, dm = \left(\int \vec{r}\, dm\right) \times \vec{g} = m\,\vec{r}_{CM} \times \vec{g} = \vec{r}_{CM} \times m\vec{g}$$

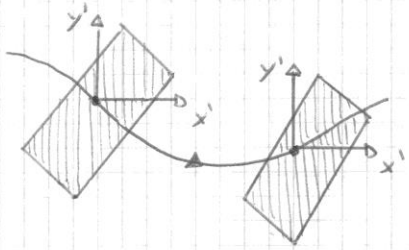
↳ MOMENTO RISULTANTE RISPETTO AD UN POLO FISSO.

$$E_P = \int g z\, dm = g\int z\, dm = m g z_{CM}.$$

www.alessandropaghi.it

MOTO DI UN CORPO RIGIDO

MOTO DI TRASLAZIONE



$\vec{L}^O = 0 \quad ; \quad E_K = 0$

$\vec{p}^O = m\,\vec{v}^O_{CM}$

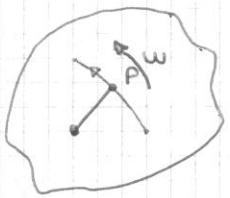
$E_K = E_{K,CM} = \frac{1}{2} m v^2_{CM}$

EQUAZIONE DI MOTO DEL CM: $\vec{R}^O = m\,\vec{a}^O_{CM}$

$\vec{\Gamma}^O = \vec{L}^O_{CM} = \vec{r}^O_{CM} \times m\vec{v}^O_{CM} = \vec{r}^O_{CM} \times \vec{p}^O$

$\vec{M}^O = \vec{r}^O_{CM} \times \vec{R}^O$

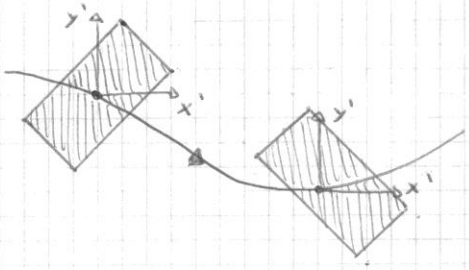
MOTO DI ROTAZIONE



$\vec{M}^O = \frac{d\vec{L}^O}{dt}$

MOTO DI ROTOTRASLAZIONE

ogni spostamento infinitesimo può essere considerato come somma di una traslazione e di una rotazione infinitesime, individuate da $\vec{v}^O$ e $\vec{\omega}^O$, variabili nel tempo.



www.alessandropaghi.it

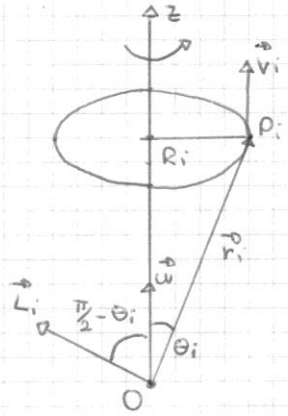
ROTAZIONI RIGIDE ATTORNO AD UN ASSE FISSO IN UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE

$\omega \Rightarrow \alpha = \frac{d\omega}{dt}$

$v_i = \omega R_i$

$\vec{a}_i = \vec{a}_T + \vec{a}_N \quad ; \quad a_T = \alpha R_i \quad ; \quad a_N = \omega^2 R_i$

CALCOLO DEL MOMENTO ANGOLARE. MOMENTO D'INERZIA



$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$

$L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i R_i \omega$

MOMENTO ANGOLARE ASSIALE:

$L_{iz} = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = L_i \operatorname{sen}\theta_i = m_i \underbrace{r_i \operatorname{sen}\theta_i}_{R_i} R_i \omega$

$= m_i R_i^2 \omega$

$\vec{L} = \Sigma_i \vec{L}_i$

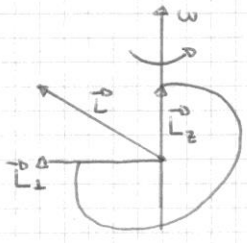
$L_z = \Sigma_i L_{iz} = (\Sigma_i m_i R_i^2)\omega = I_z \omega$

MOMENTO D'INERZIA DEL CORPO RISPETTO ALL'ASSE z: $I_z = \Sigma_i m_i R_i^2 = \Sigma_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$ (*)

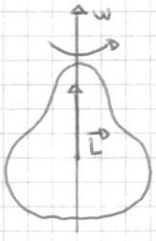
Il momento d'inerzia dipende dalle masse e dalla loro posizione rispetto all'asse di rotazione.

(*) La componente del momento angolare rispetto all'asse di rotazione è proporzionale alla velocità angolare e dipende, tramite il coefficiente I_z, dalla forma del corpo e dalla posizione dell'asse di rotazione rispetto al corpo.

MOMENTO D'INERZIA RISPETTO AD UN ASSE



$L_\perp = L_i \cos\theta_i = m_i r_i R_i \omega \cos\theta_i$



$\vec{L} = I_z \omega$

$L = L_z$

$L_\perp = 0$

N.B: asse di rotazione è un asse di simmetria.

www.alessandropaghi.it

EQUAZIONE DEL MOTO

$\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \vec{\omega}) = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z \vec{\alpha}$

$\vec{M} = I_z \vec{\alpha}$: EQUAZIONE DEL MOTO DI ROTAZIONE

$\alpha = \frac{M}{I_z} \Rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha\, dt \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega\, dt$

$M = 0 \Rightarrow \alpha = 0;\ \omega = \omega_0;\ \theta = \theta_0 + \omega t$

$M = \text{costante} \Rightarrow \alpha = \text{costante};\ \omega = \omega_0 + \alpha t;\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

M generico $\Rightarrow \alpha = \alpha(t)$

$a_{CM,T} = \alpha R_{CM}$

$a_{CM,N} = \omega^2 R_{CM}$

$v_{CM} = \omega R_{CM}$

ENERGIA CINETICA E LAVORO

$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$

$\vec{L} \parallel \vec{\omega} \Rightarrow E_K = \frac{L^2}{2I_z}$

$W = \Delta E_K = \frac{1}{2} I_z \omega_{FIN}^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_{IN}^2$

$\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

$\Downarrow$

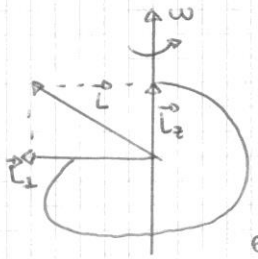
$dW = dE_K = I_z \omega\, d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} \alpha\, dt = I_z \alpha\, d\theta = M\, d\theta$

$W = \int_0^\theta M\, d\theta$

POTENZA ISTANTANEA : $\mathcal{P} \frac{dW}{dt} = M \cdot \frac{d\theta}{dt} = M\omega$

NON PARALLELISMO TRA L E ω, PRECESSIONE DEL MOMENTO ANGOLARE.

$\vec{L}$ non parallelo a $\vec{\omega}$



$\vec{M}_z = \frac{d\vec{L}_z}{dt}$; $\vec{M}_\perp = \frac{d\vec{L}_\perp}{dt}$

$M_z = I_z \alpha$; $E_K = \frac{L_z^2}{2I_z}$; $W = \int M_z\, d\theta$

Quando $\vec{L}$ non è parallelo a $\vec{\omega}$, la legge oraria e le forze dipendono dalle componenti lungo

www.alessandropaghi.it

e l'asse di rotazione del momento angolare e del momento delle forze.

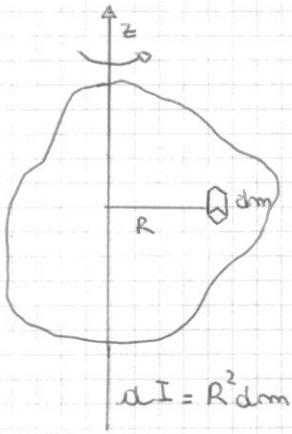
Quando un corpo rigido ruota attorno ad un asse è conveniente metterci in una situazione tale che $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ siano paralleli.

MOMENTO D'INERZIA

momento d'inerzia di un corpo continuo:

$$I = \int R^2 dm = \int_V \rho R^2 dV = \int_V \rho (x^2 + y^2) dV$$

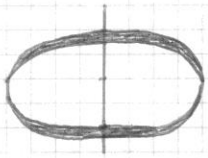
R: distanza dell'elemento di massa dm da z.



Il momento d'inerzia totale è la somma dei momenti d'inerzia parziali, calcolati tutti rispetto allo stesso asse.

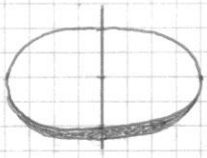
MOMENTI D'INERZIA PER CORPI RIGIDI OMOGENEI

ANELLO



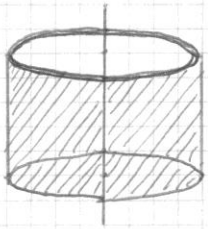
$I = mR^2$

DISCO



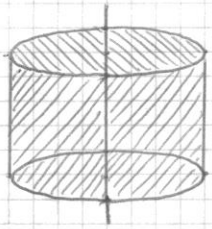
$I = \frac{1}{2} mR^2$

GUSCIO CILINDRICO SOTTILE



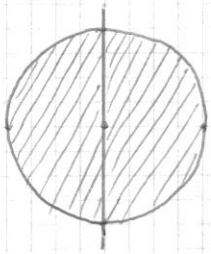
$I = mR^2$

CILINDRO PIENO



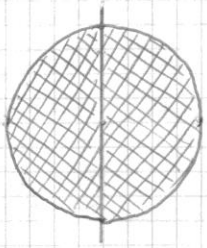
$I = \frac{1}{2} mR^2$

GUSCIO SFERICO SOTTILE



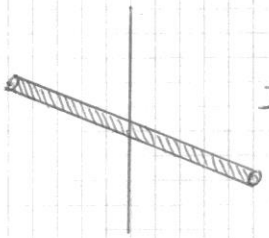
$I = \frac{2}{3} m R^2$

SFERA PIENA



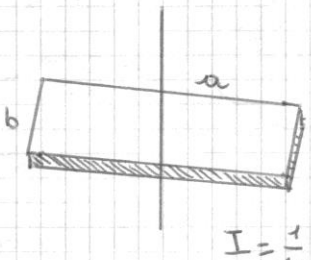
$I = \frac{2}{5} m R^2$

ASTA SOTTILE



$I = \frac{1}{12} m d^2$

LASTRA



$I = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$

$I = m K^2$; $K = \sqrt{\frac{I}{m}} \cdot d = \sqrt{\frac{I}{m}}$: RAGGIO GIRATORE

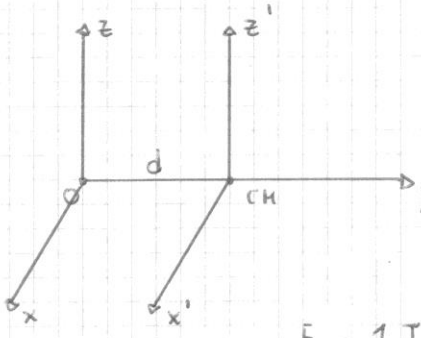
HUYGENS - STEINER

TEOREMA DI HUYGENS - STEINER

Se momento d'inerzia di un corpo di massa m rispetto ad un asse che si trova a una distanza d dal centro di massa del corpo è dato da:

$$I = I_c + m d^2$$

dove I_c è il momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse parallelo al primo e passante per il centro di massa.



$$I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$
$$= \sum_i [x_i'^2 + (y_i' + d)^2] m_i$$
$$= \sum_i \underbrace{m_i (x_i'^2 + y_i'^2)}_{I_c} + \underbrace{\sum_i m_i d^2}_{m d^2} + \underbrace{2d \sum_i m_i y_i'}_{0}$$

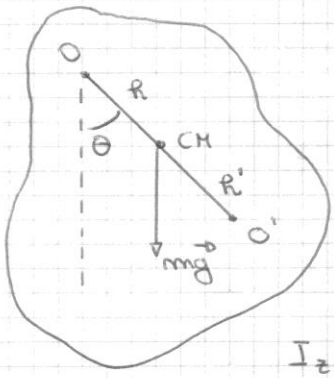
$$I_z = I_c + m d^2$$

$$E_K = \frac{1}{2} I_z \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

www.alessandropaghi.it

PENDOLO COMPOSTO

Si chiama pendolo composto ogni corpo rigido che possa oscillare, per azione del suo peso, in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale non passante per il centro di massa.



Posizione di equilibrio stabile: $\theta = 0$.

$$M = -mgR\sin\theta$$

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z\alpha = I_z\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgR\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgR}{I_z}\sin\theta = 0.$$

$$I_z = I_c + mR^2$$

Con ampiezza di oscillazione piccola: $\sin\theta \cong \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgR}{I_z}\cdot\theta = 0 \quad \Rightarrow \theta = \theta_0\sin(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{mgR/I_z} \; ; \; T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$\ell = \frac{I_z}{mR}$: LUNGHEZZA RIDOTTA DEL PENDOLO COMPOSTO.

$$R' = \frac{I_c}{mR} \Rightarrow I_c = mRR'$$

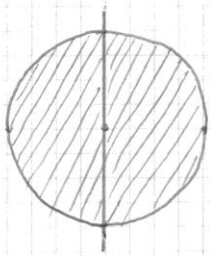
$$\ell = \frac{I_z}{mR} = \frac{I_c + mR^2}{mR} = \frac{I_c}{mR} + R = R' + R > R$$

$$\ell' = \frac{I'}{mR'} = \frac{I_c + mR'^2}{mR'} = \frac{mRR' + mR'^2}{mR'} = R + R' = \ell$$

O e O' sono assi reciproci.

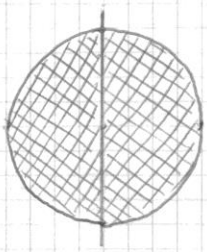
www.alessandropaghi.it

GUSCIO SFERICO SOTTILE



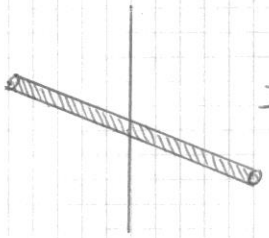
$I = \frac{2}{3} m R^2$

SFERA PIENA



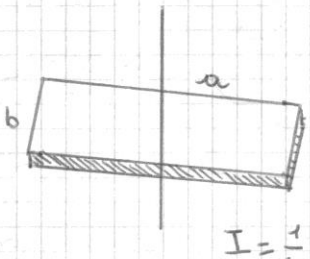
$I = \frac{2}{5} m R^2$

ASTA SOTTILE



$I = \frac{1}{12} m d^2$

LASTRA



$I = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$

$I = m K^2$; $K = \sqrt{\frac{I}{m}} \cdot d = \sqrt{\frac{I}{m}}$: RAGGIO GIRATORE

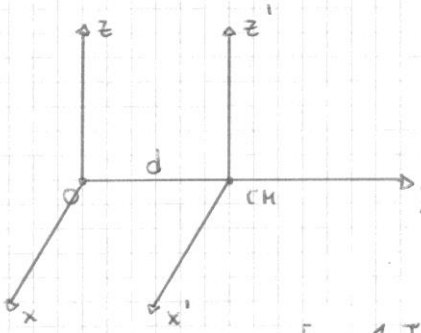
HUYGENS - STEINER

TEOREMA DI HUYGENS - STEINER

Il momento d'inerzia di un corpo di massa m rispetto ad un asse che dista a una distanza d dal centro di massa del corpo è dato da:

$$I = I_c + m d^2$$

dove I_c è il momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse parallelo al primo e passante per il centro di massa.



$$I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$
$$= \sum_i [x_i'^2 + (y_i' + d)^2] m_i$$
$$= \sum_i \underbrace{m_i (x_i'^2 + y_i'^2)}_{I_c} + \underbrace{\sum_i m_i d^2}_{m d^2} + \underbrace{2d \sum_i m_i y_i'}_{0}$$

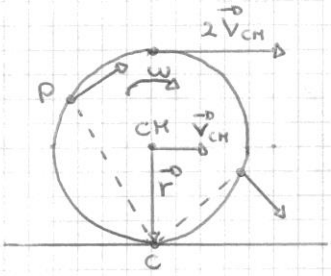
$$I_z = I_c + m d^2$$

$$E_K = \frac{1}{2} I_z \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

www.alessandropaghi.it

MOTO DI PURO ROTOLAMENTO

Un corpo di forma cilindrica o sferica si trova sopra un piano e si muove rispetto ad esso.
Se la velocità di tutti i punti sono uguali tra loro e parallele al piano abbiamo un moto di traslazione e il corpo striscia.
In generale il corpo in rotazione rotola sul piano e il punto di contatto C ha velocità non nulla rispetto al piano: si dice che il corpo rotola e striscia.
Se la velocità del punto di contatto è nulla, si ha un moto di PURO ROTOLAMENTO.



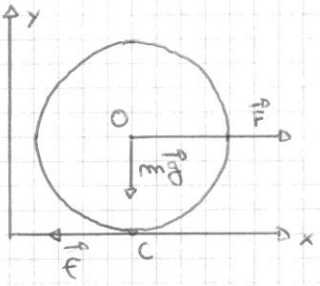
$\vec{V}_C = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{V}_C = 0$

$\vec{V}_{CM} = -\vec{\omega} \times \vec{r}$

$V_{CM} = \omega r \Rightarrow a_{CM} = \alpha r$

$V_P = \omega |PC|$



$\vec{F} + \vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a}_{CM}$

SOTTO L'AZIONE DI FORZA ESTERNA

$F_x = m \cdot a_{CM} = F - f$

$F_y = N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$

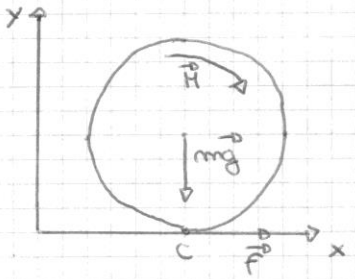
Scegliamo il CM come Polo.

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = I\vec{\alpha} \Rightarrow rf = I\alpha = I \cdot \frac{a_{CM}}{r}$

$$a_{CM} = \frac{F}{m\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} \qquad f = \frac{F}{1 + \frac{mr^2}{I}}$$

$f \leq \mu_s N = \mu_s mg \Rightarrow F \leq \mu_s mg \left(1 + \frac{mr^2}{I}\right) = F_{LIM}$

www.alessandropaghi.it



SOTTO L'AZIONE DI UN MOMENTO

$\vec{R} + m\vec{g} = m\cdot \vec{a}_{CM}$

$\vec{M} + \vec{r}\times\vec{F} = I\vec{\alpha}$

$N = mg$, $f = m a_{CM}$

$M - rf = I \cdot \frac{a_{CM}}{r}$

$$\Rightarrow a_{CM} = \frac{M}{mr\left(1+\frac{I}{mr^2}\right)} \quad , \quad f = \frac{M}{r\left(1+\frac{I}{mr^2}\right)}$$

$$f \le \mu_s N = \mu_s mg \Rightarrow M \le \mu_s mgr\left(1+\frac{I}{mr^2}\right) = M_{LIM}$$

Caso generale: azione di una forza e di un momento.

$F + f = m a_{CM}$, $M - rf = I \cdot \frac{a_{CM}}{r}$

$$\Rightarrow a_{CM} = \frac{1}{m}\cdot\frac{F+\frac{M}{r}}{1+\frac{I}{mr^2}} \quad , \quad f = \frac{\frac{M}{r}-\frac{I}{mr^2}\cdot F}{1+\frac{I}{mr^2}}$$

$f \le \mu_s N = \mu_s mg$

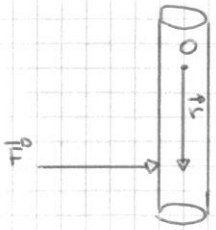
IMPULSO ANGOLARE. MOMENTO DELL'IMPULSO

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}^{\circ}\, dt = \vec{L}^{\circ}(t_2) - \vec{L}^{\circ}(t_1) = \Delta\vec{L}^{\circ} \quad : \text{IMPULSO ANGOLARE.}$$

$$\int \vec{M}^{\circ}\, dt = \int (\vec{r}^{\circ} \times \vec{F}^{\circ})\, dt$$

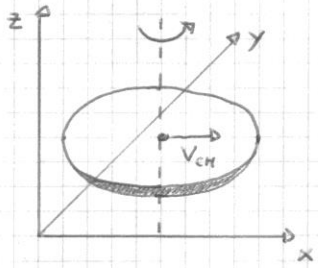
$$= \vec{r}^{\circ} \times \int \vec{F}^{\circ}\, dt = \vec{r}^{\circ} \times \vec{J}^{\circ} = \Delta\vec{L}^{\circ}$$

$\vec{J}^{\circ}$ MOMENTO DELL'IMPULSO.



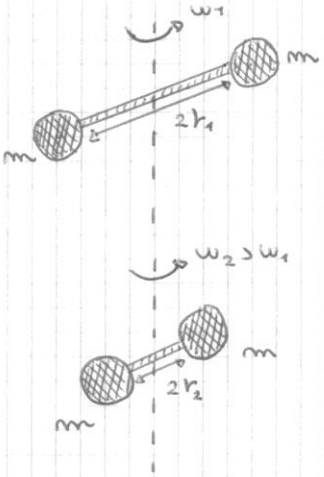
LEGGI DI CONSERVAZIONE NEL MOTO DI UN CORPO RIGIDO

Conservazione della quantità di moto: $\vec{P}^{\circ} = m\vec{V}_{CM}$



$\vec{V}^{\circ}_{CM}$ = costante

$\vec{M}^{\circ} = 0 \Rightarrow L$ = costante



$2r_1 \gg r$

$L_1 = I_1\omega_1$ = costante

$$I_1 = 2\left[\frac{2}{5}mr^2 + m(r+r_1)^2\right] \cong 2mr_1^2$$

$r_2 < r_1$

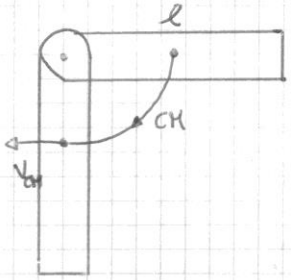
$I_2 = 2mr_2^2 < I_1$

$L_2 = L_1$

$$2mr_2^2\omega_2 = 2mr_1^2\omega_1 \Rightarrow \omega_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2}\omega_1 > \omega_1$$

$$W = \Delta E_K = E_{K,FIN} - E_{K,IN} = \frac{L^2}{2I_{FIN}} - \frac{L^2}{2I_{IN}}$$

$\Delta E_P = mg\,\Delta z_{CM}$



$$E_{IN} = mg\ell = E_{FIN} = \frac{1}{2}I\omega^2 + mg\frac{\ell}{2}$$

$$I = \frac{1}{3}m\ell^2$$

$$\omega = \sqrt{3g/\ell} \qquad V_{CM} = \omega \cdot \frac{\ell}{2} \sqrt{3g\ell/4}$$

www.alessandropaghi.it

EQUILIBRIO STATICO DEL CORPO RIGIDO

$\vec{R} = 0$; $\vec{M} = 0$ → NON SI HA MOTO ROTATORIO

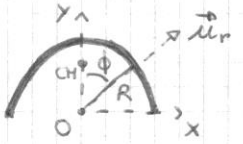
↓

EQUILIBRIO STATICO DEL CENTRO DI MASSA $\omega = 0$.

$\vec{V}_{CM} = 0$

www.alessandropaghi.it

ES. 7.1



$m = \rho_\ell \pi R$

$\vec{r} = R \vec{u}_r$

$\vec{u}_r = \sin\phi \, \vec{u}_x + \cos\phi \, \vec{u}_y$

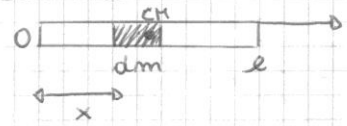
$$m \vec{r}_{CM} = \int_\ell \rho_\ell \vec{r} \, d\ell = \int_\ell \rho_\ell R \, \vec{u}_r R \, d\phi = \rho_\ell R^2 \int u_r \, d\phi$$

$$= \rho_\ell R^2 \int_\ell (\sin\phi \, \vec{u}_x + \cos\phi \, \vec{u}_y) \, d\phi$$

$$= m \vec{r}_{CM} = \rho_\ell R^2 \left[\vec{u}_x \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\phi \, d\phi}_{0} + \vec{u}_y \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\phi \, d\phi}_{2} \right]$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{2\rho_\ell R^2}{m} \vec{u}_x = \frac{2\cancel{\rho_\ell} R^2}{\cancel{\rho_\ell} \pi R} \vec{u}_y = \frac{2R}{\pi} \vec{u}_y = 0,637 \, R \, \vec{u}_y$$

ES. 7.2



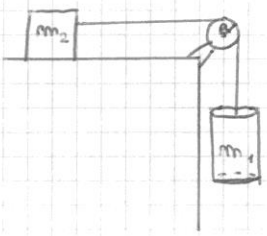
$dm = \rho_\ell \cdot dx$

$$m x_{CM} = \int_0^\ell x \rho_\ell \, dx = \rho_\ell \frac{\ell^2}{2}$$

$m = \rho_\ell \cdot \ell$

$$x_{CM} = \frac{\cancel{\rho_\ell} \cdot \frac{\ell^2}{2}}{\cancel{\rho_\ell} \cdot \cancel{\ell}} = \ell/2$$

ES. 7.3



$m_1 = 0,4$ kg

$m_2 = 0,2$ kg

$R = 2,5$ cm ; $I = 2,5 \cdot 10^{-4}$ kg m^2

$$L = m_1 v R + m_2 v R + I \underbrace{\frac{v}{R}}_{\omega}$$

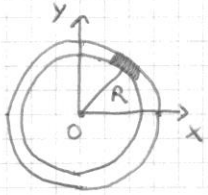
$$M = \underbrace{m_1 g R}_{F_p}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m_1 v R + m_2 v R + I \frac{v}{R} \right) = M = m_1 g R$$

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2} \right) R a = m_1 g R \Rightarrow a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} = 3,92 \text{ m/s}^2$$

www.alessandropaghi.it

ES. 7.4



$$I_z = \int R^2 \, dm = \int \rho_\ell R^2 \, d\ell = \rho_\ell R^2 \int d\ell$$

$$= \rho_\ell R^2 \, 2\pi R$$

$$m = \rho_\ell \, 2\pi R \quad \Rightarrow \quad I_z = m R^2$$

ES. 7.5



$$m = \rho_S \pi R^2$$

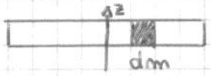
$$I_z = \int r^2 \, dm = \int \rho_S r^2 \, dS$$

$$dS = r \cdot dr \cdot d\phi$$

$$I_z = \rho_S \int_R r^2 \, r \, dr \, d\phi = \rho_S \int r^3 \, dr \, d\phi$$

$$= \rho_S \int_0^R r^3 \, dr \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \rho_S \int_0^R r^3 \, dr = \frac{1}{2} \pi \rho_S R^4 = \frac{1}{2} m R^2$$

ES. 7.6



$$I_z = \int_{-d/2}^{d/2} x^2 \, dm = \rho S \int_{-d/2}^{d/2} x^2 \, dx = \frac{1}{12} \rho S d^3$$

$$m = \rho d S \qquad dm = \rho S \, dx$$

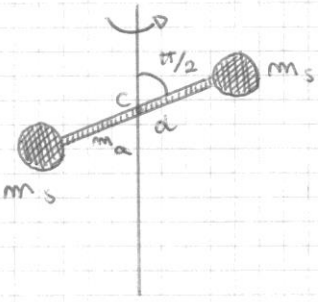
$$I_z = \frac{1}{12} m d^2$$



$$I_O I_z = \int_0^d x^2 \, dm$$

$$= \rho S \int_0^d x^2 \, dx = \frac{1}{3} m d^2$$

ES. 7.7



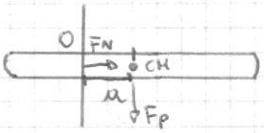
Applico Huygens - Steiner

$$I_s = \frac{2}{5} m_s R^2 + m_s \left(\frac{d}{2} + R \right)^2$$

$$I_a = \frac{1}{12} m_a d^2$$

$$I_{TOT} = 2 I_s + I_a$$

ES. 7.8



$a = 0,1$ m ; $m = 6$ Kg ; $R = 0,2$ m ; $\omega = 12$ rad/s

$t = 4$ s

$$\bar{F}_N = m \omega^2 a = 86,4 \text{ N}$$

$$M_P = mg \, a = 5,9 \text{ Nm}$$

$$I_1 = \frac{1}{2} m R^2 + m a^2 = 0,18 \text{ Kg m}^2$$

$$E_K = \frac{1}{2} I_1 \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m R^2 \right) \omega^2 + \frac{1}{2} m (\omega a)^2 = 12,96 \text{ J}$$

$$\omega = \alpha t \Rightarrow \alpha = \frac{\omega}{t} = 3 \text{ rad/s}^2 \qquad M = I \alpha = 0,54 \text{ Nm} \qquad a_{CM,T} = \alpha a = 0,3 \text{ m/s}^2$$

www.alessandropaghi.it

ES. 7.9

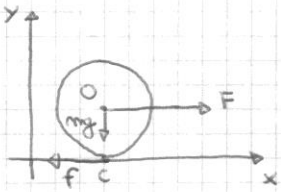
$m = 5\ kg$

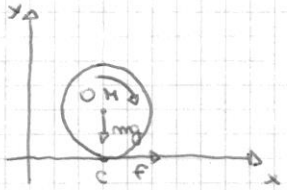
$r = 0,2\ m$

$\mu_s = 0,3$

$F = 21\ N$

$I = \frac{1}{2} m R^2$





$$a_{CM} = \frac{F}{m\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} = 2,8\ m/s^2$$

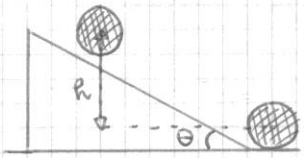
$$f_1 = \frac{F}{1 + \frac{mr^2}{I}} = 7\ N \qquad f_1 \leq \mu_s mg = 14,7\ N$$

$M = rF = 4,2\ N$

$$a_{CM} = \frac{M}{mr\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} = 2,8\ m/s^2$$

$$f_2 = \frac{M}{r\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} = 14\ N = 2f_1 \qquad f_2 \leq \mu_s mg = 14,7\ N$$

ES. 7.10



$t = 0 \Rightarrow v = 0$

$E_{M,IN} = E_P = mgR$

$E_{M,FIN} = E_K = \frac{1}{2} I_C \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2$

$E_{M,IN} = E_{M,FIN}$

$mgR = \frac{1}{2} I_C \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2$

Generico corpo rigido: $I_C = mk^2$

$\omega = \frac{v}{r}$

$mgR = \frac{1}{2} mk^2 \cdot \frac{v_{CM}^2}{r^2} + \frac{1}{2} m v_{CM}^2$

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2gR}{1 + \frac{k^2}{r^2}}} < \sqrt{2gR}$$

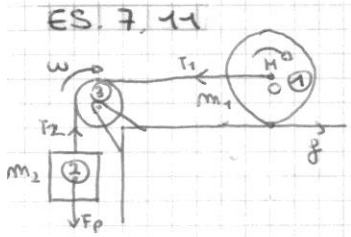
(ROTOLAMENTO) (STRISCIAMENTO)

$F_x = mg\sin\theta - f = m a_{CM}$

$M = f \cdot r = I_C \cdot \alpha = mk^2 \cdot \frac{a_{CM}}{r}$

www.alessandropaghi.it

ES. 7.11



$m_1 = 20\ kg$

$I_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2$

$r = 0,25\ m$

$M = 30\ Nm$

$m_2 = 10\ kg$

Equazioni di moto:

1) $g - T_1 = m_1 a_{CM}$

2) $T_2 - m_2 g = m_2 a_{CM}$ $\quad T_1 = T_2 = T$ $\quad T = 103,5\ N$

3) $M - rf = I \cdot \alpha = I \cdot \frac{a_{CM}}{r}$ $\quad f = 114,5\ N$

$f \leq \mu_s m_1 g \Rightarrow \mu_s \geq 0,58$.

$$a_{CM} = \frac{\frac{M}{r} - m_2 g}{\frac{3}{2} m_1 + m_2} = 0,55\ m/s^2$$

ES. 7.12

$m = 2,4\ kg$

$d = 0,4\ m$

$\Delta t = 0,2\ s$

$T = 10\ s$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 0,63\ rad/s$

$I = \frac{m d^2}{3} = 0,13\ Kg\,m^2$

$L = \Delta L = I\omega = 8,2 \cdot 10^{-2}\ kg \cdot m^2/s = M_m \Delta t$

$M_m = \frac{L}{\Delta t} = 0,41\ N/m$

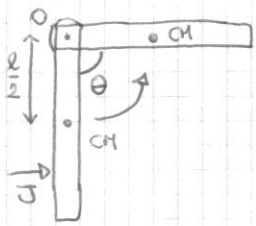
$v_{CM} = \omega r = \omega d/2 = 0,13\ m/s$

$\Delta p = p = m v_{CM} = 0,31\ Kg\,m/s = J = F_m \Delta t$

$F_m = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 1,55\ N$

www.alessandropaghi.it

ES. 7.13



$r \leq \ell$

$\theta = 90°$

$\Delta L = rJ$

$L_{IN} = 0 \; ; \; L_{FIN} = I\omega$

$\Delta L = I\omega = rJ$

$I = \frac{1}{3} m\ell^2$ $\qquad \omega = \frac{3rJ}{m\ell^2}$

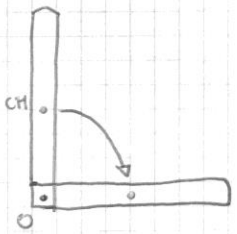
$E_{H,IN} = mg\ell/2$ $\qquad E_{H,FIN} = \frac{1}{2} I\omega^2$

$E_{H,IN} = E_{H,FIN}$

$mg\frac{\ell}{2} = \frac{1}{2} I\omega^2 \Rightarrow J = \frac{m}{r}\sqrt{\frac{g\ell^3}{3}}$

$V_{EH} = \omega \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{3}{2}\frac{rJ}{m\ell}$

ES. 7.14



$m = 4,2\ kg$

$\ell = 0,8\ m$

$M_a = 4,5\ Nm$

$M_{TOT} = mg\frac{\ell}{2} - M_a = I\alpha = \frac{1}{3} m\ell^2\alpha$

$\alpha = 13,4\ rad/s^2$

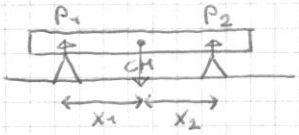
$a_{P,T} = \alpha\ell = 10,7\ m/s^2$

$E_{H,FIN} - E_{H,IN} = W_{NC} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} m\ell^2\omega^2 - mg\frac{\ell}{2} = -M_a \cdot \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \omega^2 = 21\ (rad/s)^2$

$a_{P,N} = \omega^2\ell = 16,8\ m/s^2$

ES. 7.16

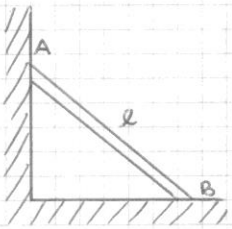


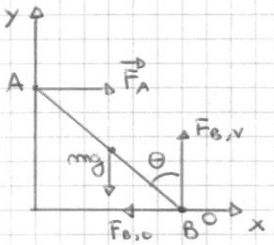
$\vec{R} = 0 \qquad F_1 + F_2 = mg$

$\vec{M}^O = 0 \qquad x_1 F_1 = x_2 F_2$

$F_1 = \frac{x_2}{x_1 + x_2} mg \qquad F_2 = \frac{x_1}{x_1 + x_2} mg$

ES. 7.17





$\vec{R} = 0 \qquad F_x = F_A - F_{B,O} = 0 \Rightarrow F_A = F_{B,O}$

$F_y = F_{B,V} - mg = 0 \Rightarrow F_{B,V} = mg$

$\vec{M} = 0 \qquad F_A \ell \cos\theta = mg\, \ell/2 \, \operatorname{sen}\theta \Rightarrow F_A = F_{B,O} = \frac{1}{2} mg \operatorname{tg}\theta$

$F_B = \sqrt{F_{B,V}^2 + F_{B,O}^2} = mg \sqrt{1 + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2\theta}$

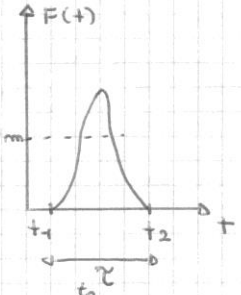
$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg}\theta\right) \Rightarrow \operatorname{tg}\phi = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\theta$

$\frac{1}{2} mg \operatorname{tg}\theta \leq \mu_S F_{B,V} = \mu_S mg \Rightarrow \operatorname{tg}\theta \leq 2\mu_S .$

www.alessandropaghi.it

URTI TRA DUE PUNTI MATERIALI

FORZE IMPULSIVE



$\tau = t_2 - t_1$

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt$$

$$F_m = \frac{1}{\tau}\int_{\tau} f(t)\,dt$$

In assenza di forze esterne si verifica, durante l'urto, la conservazione della quantità di moto.

$$\vec{P}_{IN} = m_1\vec{V}_{1,IN} + m_2\vec{V}_{2,IN} = m_1\vec{V}_{1,FIN} + m_2\vec{V}_{2,FIN} = \vec{P}_{FIN}$$

$$\vec{P} = (m_1 + m_2)\cdot\vec{V}_{CM} = \vec{P}_{IN} = \vec{P}_{FIN} = \text{costante}$$

Il moto del centro di massa non viene alterato dall'urto.

Valuto la quantità di moto di ciascun punto materiale per effetto dell'impulso della forza di interazione.

$$m_1\vec{V}_{1,FIN} - m_1\vec{V}_{1,IN} = \vec{J}_{2,1} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{2,1}\,dt$$

$$m_2\vec{V}_{2,FIN} - m_2\vec{V}_{2,IN} = \vec{J}_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{1,2}\,dt$$

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} \Rightarrow \vec{J}_{1,2} = -\vec{J}_{2,1}$$

Possiamo conservare la quantità di moto totale del sistema anche in presenza di forze esterne se la durata τ dell'urto è sufficientemente piccola e le forze esterne non sono impulsive.

$$\Delta\vec{P} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}^{(e)}\,dt = \vec{F}_m^{(e)}\,\tau$$

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,dt = \vec{F}_m\,\tau$$

Un urto può essere caratterizzato dalle seguenti proprietà:

- un urto comporta uno scambio di quantità di moto tra due punti sotto forma di impulsi dovuti alle forze interne tra gli stessi;
- nell'urto la quantità di moto si conserva;

www.alessandropaghi.it

In un urto non si può assumere a priori che l'energia cinetica si conservi:

$\Delta E_M = \Delta E_K$

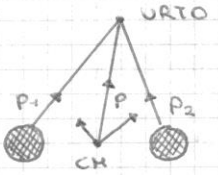
TEOREMA DI KÖNIG

$E_K = \underbrace{\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{CM}^2}_{\text{Non cambia se si conserva la quantità di moto.}} + E'_K$

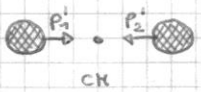
$= \underbrace{\frac{1}{2}m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2 v'^2_2}_{\text{Varia a seconda che le forze interne siá conservative o non.}}$

SISTEMI PER LO STUDIO DEGLI URTI

SISTEMA DEL LABORATORIO



SISTEMA DEL CENTRO DI MASSA



$\vec{V}_1 = \vec{V}'_1 + \vec{V}_{CM}$; $\vec{V}_2 = \vec{V}'_2 + \vec{V}_{CM}$

$\vec{P} = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V}'_1 + m_2\vec{V}'_2 + (m_1+m_2)\vec{V}_{CM} \Rightarrow m_1\vec{V}'_1 + m_2\vec{V}'_2 = 0$.

$m_1\vec{V}'_{1,IN} \quad m_2\vec{V}'_{2,IN} = m_1\vec{V}'_{1,FIN} + m_2\vec{V}'_{2,FIN}$

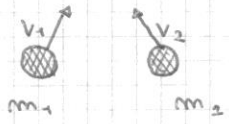
$\Rightarrow \vec{P}'_{1,IN} = -\vec{P}'_{2,IN}$; $\vec{P}'_{1,FIN} = -\vec{P}'_{2,FIN}$

$E'_{K,IN} = \frac{1}{2}m_1 V'^2_{1,IN} + \frac{1}{2}m_2 V'^2_{2,IN} \neq E'_{K,FIN} = \frac{1}{2}m_1 V'^2_{1,FIN} + \frac{1}{2}m_2 V'^2_{2,FIN}$

www.alessandropaghi.it

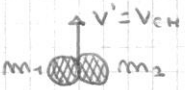
URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO

PRIMA



Quando i due punti restano attaccati dopo l'urto formando un unico corpo puntiforme di massa m_1+m_2.

DOPO



$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{v}' = (m_1+m_2)\vec{v}_{CM}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$

$$E_{K,IN} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = E_K' + \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{CM}^2$$

$$E_{K,FIN} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{CM}^2 < E_{K,IN}$$

$$\Delta E_K = E_{K,FIN} - E_{K,IN} = -E_K' = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{CM}^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

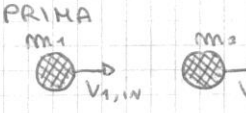
Le forze interne che si incontrano nell'urto non sono conservative.

URTO ELASTICO

Quando si conserva anche l'energia cinetica del sistema.
Le forze interne che si manifestano durante l'urto sono conservative.

SISTEMA DEL LABORATORIO

PRIMA

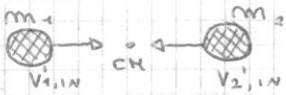


DOPO



SISTEMA DEL CENTRO DI MASSA

PRIMA



DOPO



$$\vec{P}_{IN} = \vec{P}_{FIN}$$

$$E_{K,IN} = E_{K,FIN}$$

$$\begin{cases} m_1v_{1,IN} + m_2v_{2,IN} = m_{1,FIN} + m_{2,FIN} \\ = (m_1+m_2)v_{CM} \\ \frac{1}{2}m_1v_{1,IN}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,IN}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1,FIN}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,FIN}^2 \end{cases}$$

$$v_{1,FIN} = \frac{(m_1-m_2)v_{1,IN} + 2m_2v_{2,IN}}{m_1+m_2}$$

$$v_{2,FIN} = \frac{2m_1v_{1,IN} + (m_2-m_1)v_{2,IN}}{m_1+m_2}$$

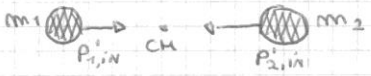
www.alessandropaghi.it

URTO ANELASTICO

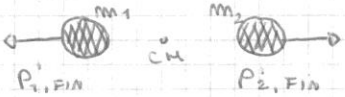
I punti ritornano separati dopo l'urto.

Si conserva la quantità di moto del sistema, se non agiscono forze esterne di tipo impulsivo, ma non l'energia cinetica.

PRIMA



DOPO



COEFFICIENTE DI RESTITUZIONE:

$$e = -\frac{P'_{1,FIN}}{P'_{1,IN}} = -\frac{V'_{1,FIN}}{V'_{1,IN}} = -\frac{P'_{2,FIN}}{P'_{2,IN}} = -\frac{V'_{2,FIN}}{V'_{2,IN}}$$

$$P' = 0 \Rightarrow P'_{1,IN} = P'_{2,IN} = P'_{1,FIN} = P'_{2,FIN}$$

$$E'_{K,FIN} = \frac{1}{2} m_1 V'^2_{1,FIN} + \frac{1}{2} m_2 V'^2_{2,FIN}$$

$$= e^2 \left(\frac{1}{2} m_1 V'^2_{1,IN} + \frac{1}{2} m_2 V'^2_{2,IN} \right)$$

$$\Rightarrow E'_{K,FIN} = e^2 E'_{K,IN}$$

$$\delta = \frac{E'_{K,FIN} - E'_{K,IN}}{E'_{K,IN}} = e^2 - 1$$

URTO ELASTICO: $e = 1$; $\delta = 0$

URTO COMPL. ANELASTICO: $e = 0$; $\delta = -1$

$$V_{1,FIN} = \frac{(m_1 - e m_2) V_{1,IN} + m_2 (1+e) V_{2,IN}}{m_1 + m_2}$$

$$V_{2,FIN} = \frac{m_1 (1+e) V_{1,IN} + (m_2 - e m_1) V_{2,IN}}{m_1 + m_2}$$

URTI TRA PUNTI MATERIALI E CORPI RIGIDI O TRA CORPI RIGIDI

Urto elastico $\Rightarrow E_K$ = costante.

{ agiscono solo forze interne
{ le forze esterne non sono impulsive $\Rightarrow \vec{P}$ = costante.

Esiste un vincolo $\Rightarrow \vec{P}$ non costante.

agiscono solo forze interne $\Rightarrow \vec{L}^O$ = costante.

$$\Delta \vec{P} = \vec{J} = \int \vec{R}\, dt \quad ; \quad \Delta \vec{L} = \int \vec{M}\, dt$$

$$\vec{P} = (P_x, P_y, P_z) \quad ; \quad \vec{L}^O = (L_x, L_y, L_z) \quad ; \quad \vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$$

www.alessandropaghi.it

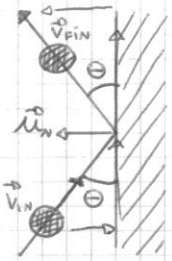
ES. 8.1

$m = 300\ g$

$V = 20\ m/s$

$\theta = 60°$

$\tau = 0,1\ s$



$\vec{V}_{FIN} = (V'_x, V'_y)$

$\vec{V}_{IN} = (V_x, V_y)$

$V'_y = V_y$

$V'_x = -V_x$

$V_x = V \sin\theta$

$V_y = V \cos\theta$

$V'_x = -V \sin\theta$

$V'_y = V \cos\theta$.

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_{FIN} - \vec{p}_{IN} = 2mV\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\vec{u}_m$$

$$= 10,4\ \vec{u}_m\ N/s$$

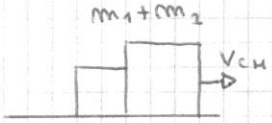
$$\vec{F}_m = \frac{\vec{I}}{\tau} = 104\ \vec{u}_m\ N/s$$

ES. 8.2

PRIMA



DOPO



$V_2 = 0$

$$m_1\vec{V}_1 = (m_1 + m_2)\vec{V}_{CM}$$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{V}_1$$

$$E_{K,IN} = \frac{1}{2}m_1V_1^2$$

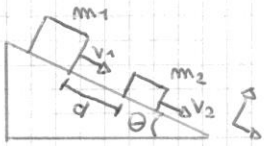
$$E_{K,FIN} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_{CM}^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{m_1^2}{m_1+m_2}\cdot V_1^2$$

$$\Delta E_K = E_{K,FIN} - E_{K,IN} = -\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}\cdot V_1^2$$

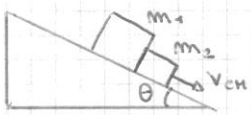
$$\frac{E_{K,FIN}}{E_{K,IN}} = \frac{m_1}{m_1+m_2}$$

ES. 8.3

PRIMA



DOPO



$t = 0 \Rightarrow V_{0,1} > V_{0,2}$

$V_1 = V_{0,1} + at$; $V_2 = V_{0,2} + at$

$F_x = mg\sin\theta$ $\quad a = g\sin\theta$

$V_1 - V_2 = V_{0,1} - V_{0,2}$

$$t^* = \frac{d}{(V_{0,1} - V_{0,2})}$$

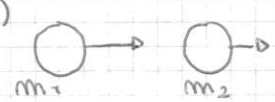
$$m_1U_1 + m_2V_2 = (m_1+m_2)V_{CM}$$

$$V_{CM} = \frac{m_1V_1 + m_2V_2}{m_1+m_2}$$

www.alessandropaghi.it

ES. 8.6

a)

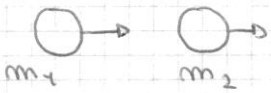


$m_1 = m_2$

$V_{1,FIN} = V_{2,IN}$

$V_{2,FIN} = V_{1,IN}$

b)

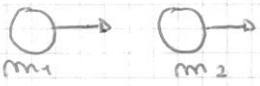


$m_1 \gg m_2$

$V_{1,FIN} = V_{1,IN}$

$V_{2,FIN} = 2V_{1,IN} - V_{2,IN}$

c)



$m_1 \ll m_2$

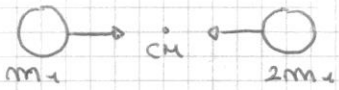
$V_{1,FIN} = 2V_{2,IN} - V_{1,IN}$

$V_{2,FIN} = V_{2,IN}$

ES. 8.8

$m_2 = 2m_1$

$V_1 = 20\ m/s$



$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \Rightarrow m_1 V_{1,IN} + m_2 V_{2,IN} = 0 \Rightarrow V_{2,IN} = -\frac{m_1}{m_2} V_{2,IN} = -10\ m/s$

$\delta = -0,36$

$e^2 = 1 + \delta = 0,8$

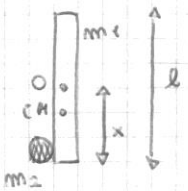
$V_{1,FIN} = -eV_{1,IN} = -16\ m/s$

$V_{2,FIN} = -eV_{2,IN} = 8\ m/s$

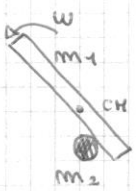
www.alessandropaghi.it

ES. 8.10

PRIMA



DOPO



$\vec{P}$ = costante.

$\vec{L}$ = costante.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_{CM}$$

$v_1 = 0$

$$v_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = (m_1 + m_2) x_{CM}$$

$x_1 = 0$

$$x_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot x_2$$

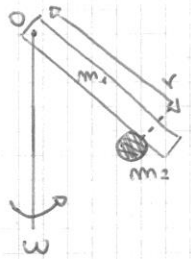
assumiamo come polo il CM:

$$(x - x_{CM}) m_2 v_2 = I\omega$$

$$I = \frac{1}{12} m_1 l^2 + m_1 x_{CM}^2 + m_2 (x_2 - x_{CM})^2$$

$$\omega = \frac{m_2 x_2 v_2}{(m_1 + m_2)\frac{l^2}{12} + m_2 x_2^2}$$

ES. 8.11



$m_1 = m_2 = m$

$\vec{P}$ = non costante.

$$L = I\omega \Rightarrow rmv = I\omega$$

$$I = \frac{1}{3} m l^2 + m r^2$$

$$\omega = \frac{L}{I} = \frac{rv}{\frac{l^2}{3} + r^2}$$

$\vec{J} = \Delta\vec{p} = \vec{P}_{FIN} - \vec{P}_{IN}$

$\vec{P}_{IN} = m\vec{v}$

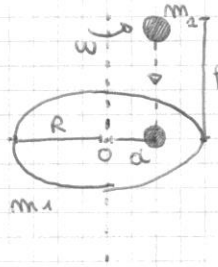
I) $\vec{P}_{FIN} = m\vec{v}_P + m\vec{v}_A = m\omega r \cdot \vec{u}_v + m\omega \frac{l}{2} \vec{u}_v = m\omega \left(r + \frac{l}{2}\right) \vec{u}_v$

II) $$x_{CM} = \frac{m \cdot \frac{l}{2} + mr}{2m} = \frac{1}{2}\left(r + \frac{l}{2}\right) \Rightarrow \vec{P}_{FIN} = 2m\vec{v}_{CM} = 2m x_{CM} \omega \vec{u}_v = m\omega \left(r + \frac{l}{2}\right) \vec{u}_v$$

$$\vec{J} = \vec{P}_{FIN} - \vec{P}_{IN} = ml v - \frac{r - \frac{l}{2}}{\frac{l^2}{3} + r^2} \cdot \vec{u}_v$$

www.alessandropaghi.it

ES 8.12



$\vec{P}$ non costante.

E_K non costante.

L_z = costante

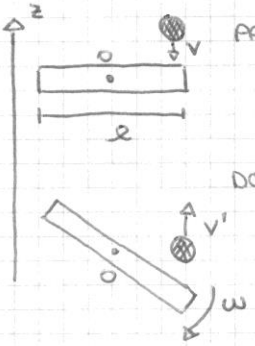
L_x = non costante

Assumiamo come polo il centro del disco.

$$L = I\omega = \left(\frac{1}{2} m_1 R^2 + m_2 d^2\right) \omega'$$

$$\omega' = \frac{\frac{1}{2} m_1 R^2}{\frac{1}{2} m_1 R^2 + 2 m_2 d^2} \cdot \omega = \frac{m_1 R^2}{m_1 R^2 + 2 m_2 d^2} \cdot \omega$$

ES 8.13



$\vec{P}$ non costante

E_K = costante

$$\frac{1}{2} m_2 V^2 = \frac{1}{2} m_2 V'^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$\vec{L}$ = costante

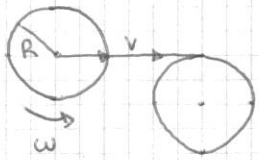
$$m_2 V \frac{\ell}{2} = -m_2 V' \frac{\ell}{2} + \frac{1}{12} m_1 \ell^2$$

$$\omega = \frac{12 m_2}{m_1 + 3 m_2} \cdot \frac{V}{\ell} \quad ; \quad V' = \frac{m_1 - 3 m_2}{m_1 + 3 m_2} \cdot V$$

www.alessandropaghi.it

ES. 8.14

PRIMA

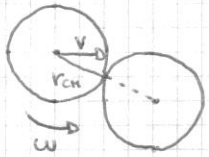


$\vec{L}$ = costante

assumiamo come Polo il CM.

$\vec{L}_{FIN} = 0 \Rightarrow \vec{L}_{IN} = 0$

DOPO



Secondo König:

$\vec{L}_{IN} = I\vec{\omega} + \vec{r}_{CM} \times m\vec{v}$

momento angolare del disco rispetto al proprio CM:

$I = \frac{1}{2} m R^2$

momento angolare del disco rispetto al CM del sistema:

$\frac{R}{2} m v$

$I\omega - \frac{R}{2} m v = 0 \Rightarrow \omega = \frac{v}{R}$

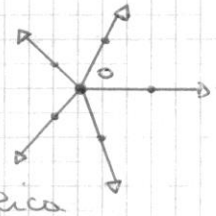
www.alessandropaghi.it

FORZE CENTRALI

Proprietà:

- In qualsiasi punto la sua direzione passa sempre per un punto fisso O;
- Il modulo è funzione soltanto della distanza dal centro stesso;

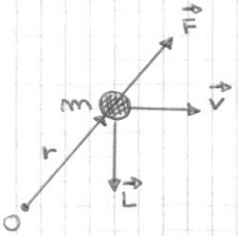
$\vec{OP} = \vec{r}$; $\vec{F} = F(r)\,\vec{u}_r$ $\begin{cases} >0 & \text{REPULSIVA} \\ <0 & \text{ATTRATTIVA} \end{cases}$



La presenza di una forza, funzione della posizione, che agisce in una certa regione dello spazio, costituisce una modifica dello spazio stesso e stabilisce un CAMPO DI FORZA.

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = r\vec{u}_r \times F(r)\,\vec{u}_r = 0$

$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ = costante



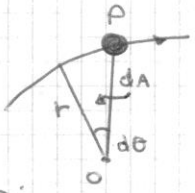
In un campo di forze centrali il momento angolare rispetto al centro della forza rimane costante nel tempo.

Nel moto curvilineo piano:

$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m(\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = r \times m\vec{v}_\theta$

$L = mrv_\theta = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$

$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m}$: VELOCITÀ AREALE



La traiettoria di un punto che si muove in un campo di forze centrali giace in un piano fisso passante per il centro ed è percorsa in modo tale che la velocità areale rimanga costante.

www.alessandropaghi.it

Se la traiettoria è chiusa:

$$\frac{dA}{dt} = C = \frac{A}{T} \Rightarrow T = \frac{2m}{L} A$$

Le forze centrali sono conservative:

$$\vec{F} = F(r) \cdot \vec{u}_r$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F(r) \underbrace{\vec{u}_r \cdot d\vec{s}}_{ds\cos\theta = dr} = \int_A^B F(r)\, dr = f(r_B) - f(r_A).$$

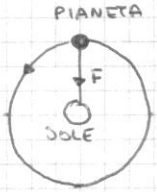
LA FORZA GRAVITAZIONALE

Leggi di Keplero sul moto dei pianeti:

I) I pianeti percorrono orbite ellittiche intorno al sole che occupa uno dei fuochi dell'ellisse;

II) La velocità areale con cui il raggio vettore che unisce il sole ad un pianeta descrive l'orbita è costante;

III) Il quadrato del periodo di rivoluzione di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse: $T^2 = K a^3$.



Immaginiamo che le orbite siano circolari:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \qquad \frac{d\theta}{dt} = \text{costante}.$$

$$F = m\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = \frac{4\pi^2}{K} \cdot \frac{m}{r^2}$$

PRIMO RISULTATO FONDAMENTALE

La forza esercitata dal sole sui pianeti, che incurva la loro orbita, è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal sole.

SISTEMA SOLE-TERRA:

$$F_{S,T} = \frac{4\pi^2}{K_T} \cdot \frac{m_T}{r^2} = F_{T,S} = \frac{4\pi^2}{K_S} \cdot \frac{m_S}{r^2} \Rightarrow m_T K_S = m_S K_T$$

$$\gamma = \frac{4\pi^2}{m_T K_S} = \frac{4\pi^2}{m_S K_T} \Rightarrow F = \gamma \cdot \frac{m_S m_T}{r^2}$$

www.alessandropaghi.it

LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

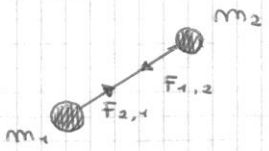
Date due masse qualsiasi, di dimensioni trascurabili rispetto alla distanza mutua, tra di esse agisce una forza attrattiva diretta lungo la retta congiungente le due masse, il cui modulo dipende direttamente dal prodotto delle masse e inversamente dal quadrato della distanza.

$$F = \gamma \cdot \frac{m_2 m_1}{r^2} \qquad \gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \ \frac{m^3}{kg\,s^2}$$

$$m_1 = 5{,}98 \cdot 10^{24} \ kg$$

CAMPO GRAVITAZIONALE

$$\vec{F}_{1,2} = -\gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \vec{u}_{1,2} \qquad \vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$$



$$\vec{F}_{1,2} = \underbrace{\left(-\gamma \cdot \frac{m_1}{r^2} \cdot \vec{u}_{1,2}\right)}_{G_1} \cdot m_2$$

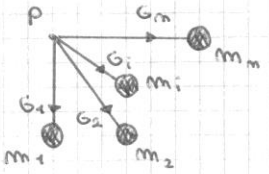
$$\vec{F}_{2,1} = \underbrace{\left(-\gamma \cdot \frac{m_2}{r^2} \cdot \vec{u}_{2,1}\right)}_{G_2} \cdot m_1$$

G : CAMPO GRAVITAZIONALE

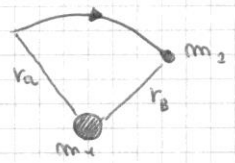
$$\vec{F}_{1,2} = m_2 \vec{G}_1$$

$$\vec{F}_{2,1} = m_1 \vec{G}_2$$

$$\vec{G}_i = -\gamma \frac{m_i}{r_i^2} \vec{u}_i \Rightarrow G(P) = \sum_1^n G_i = \sum_1^n \left(-\gamma \cdot \frac{m_i}{r_i^2} \vec{u}_i\right)$$



ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \vec{u}_1 \cdot d\vec{s}$$

$$W = \int_A^B dW = \int_{r_A}^{r_B} -\gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot dr = -\gamma m_1 m_2 \left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A} \right)$$

$$= E_{p,A} - E_{p,B} .$$

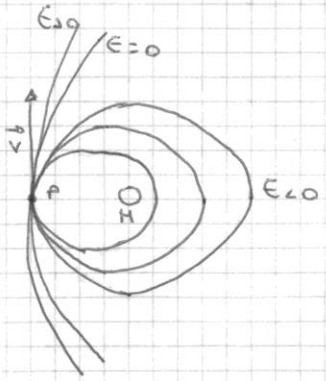
$$E_p = -\gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r}$$

ENERGIA POTENZIALE DI UNA MASSA SFERICA

$$E_p = -\frac{3}{5} \gamma \cdot \frac{m^2}{R}$$

MOTO DI UN CORPO SOTTOPOSTO ALLA FORZA GRAVITAZIONALE

moto di un corpo di massa m nel campo gravitazionale generato da una massa M.



ORBITE

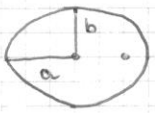
$E = E_p + E_k$

$E > 0$ => IPERBOLE $|E_p| \leq |E_k|$

$E = 0$ => PARABOLA $|E_p| \leq |E_k|$

$E < 0$ => ELLISSE $|E_p| > |E_k|$

ENERGIA E MOMENTO ANGOLARE PER ORBITE ELLITTICHE.



$\varepsilon = 0,5$ $\qquad \varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \qquad A = \pi a b = \pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}$

$\varepsilon = 0$ => CIRCONFERENZA.

$$L^2 = \gamma \cdot \frac{m^2 M^2}{m+M} a (1-\varepsilon^2) \qquad E = -\gamma \cdot \frac{mM}{2a}$$

$$T = 2 \frac{mM}{m+M} \cdot \frac{A}{L} = 2 \frac{mM}{m+M} \cdot \frac{\pi a^2}{L} \sqrt{1-\varepsilon^2}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma(m+M)} a^3 = K a^3 \qquad K = \frac{4\pi^2}{\gamma(m+M)}$$

www.alessandropaghi.it

GENERALITÀ SUI FLUIDI. PRESSIONE

Un fluido è una sostanza che assume la forma del recipiente che la contiene.

LIQUIDI

- Volume definito e superficie limite;
- Densità costante: $\rho = 10^3 \ Kg/m^3$;
- Sono incomprimibili;

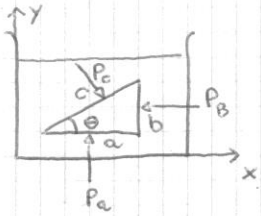
GAS

- Tendono ad occupare tutto il volume a disposizione;
- Densità bassa: $\rho = 1,3 \ Kg/m^3$;
- Comprimibili con facilità;

$dm = \rho dV$

$dF = g \, dm = g \rho dV$ FORZE DI VOLUME.

$dF = p \, dS$ FORZE DI SUPERFICIE.



$S_a = L_a$; $S_B = L_b$; $S_c = L_c$

$\vec{R} = 0$

$-p_c S_c \cos\theta + p_a S_a = 0 \Rightarrow \frac{p_a}{p_c} = \frac{c\cos\theta}{a} = 1$

$p_c S_c \operatorname{sen}\theta - p_B S_B = 0 \Rightarrow \frac{p_B}{p_c} = \frac{c\operatorname{sen}\theta}{b} = 1$

$p_a = p_B = p_c$

PRESSIONE:

Rapporto tra la forza agente su una superficie infinitesima che circonda il punto e l'area della superficie stessa:

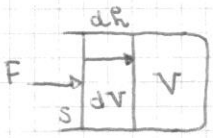
$$p = \frac{dF}{dS} \ , \ p = \frac{F}{S}$$

Se p è costante.

$1 \ Pa = 1 \ N/m^2 \Rightarrow 1 \ bar = 10^5 \ Pa$

$P_{ATM} = 1,01325 \cdot 10^5 \ Pa$

www.alessandropaghi.it

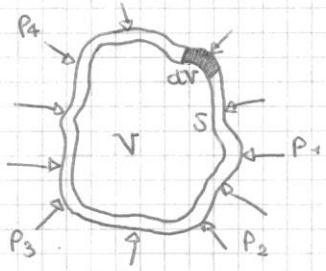


$F = pS$

$dW = F \cdot dR = pS\,dR = p\,dV$

$dV = S\,dR$

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV$$

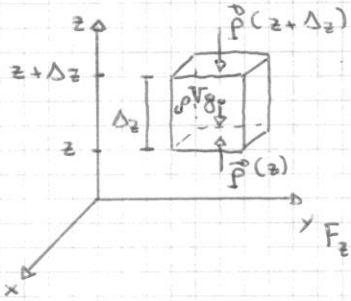


EQUILIBRIO STATICO DI UN FLUIDO IN PRESENZA DELLA FORZA PESO

EQUILIBRIO STATICO:

In un fluido in quiete tutti gli elementi hanno accelerazione e velocità nulla, in un sistema di riferimento inerziale.

$\vec{R} = 0 \Rightarrow \vec{F}_p + \vec{F}_v = 0$



$\Delta z = z_2 - z_1$; $V = S \cdot \Delta z$; $m = \rho V$

$F_x = 0$; $F_y = 0$; $F_z = -mg = -\rho V g$

$F_z = p(z_1)S - p(z_1 + \Delta_z)S = pS - (p + \Delta p)S = -\Delta p S$

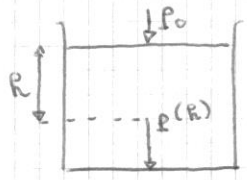
$-\Delta p S - \rho V g = -\Delta p S - \rho S \Delta_z g = 0$

$\Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta z} = -\rho g$

$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\Delta p}{\Delta y} = 0$.

$\Delta p = p(z_2) - p(z_1)$; $\Delta z = z_2 - z_1 \Rightarrow p(z_2) = p(z_1) - \rho g (z_2 - z_1)$

www.alessandropaghi.it



$z_1 = 0$

$z_2 = -R \quad (R > 0)$

$p(R) = p_0 + \rho g R$

$p(z) = p_0 + g \int_0^z \rho(z)\, dz$

$\Downarrow$

ρ = non costante.

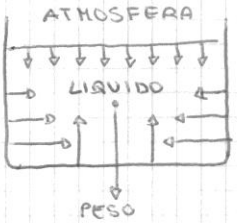
LEGGE DI STEVINO:

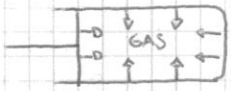
In un liquido con ρ = costante la pressione cresce linearmente con la profondità.

PRINCIPIO DI PASCAL:

$p = p_0 + \Delta p$, p_0: pressione esterna.

Ogni cambiamento della pressione esterna dà luogo a un eguale variazione di p.





SUPERFICIE ISOBARICA

z = costante $\Rightarrow p$ = costante

un piano orizzontale con p = costante è una superficie isobarica.

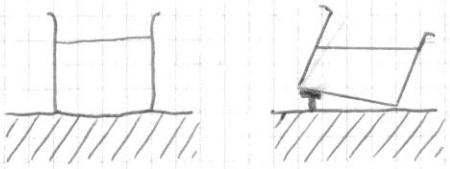
$E_{p,M} = g z$

z = costante $\Rightarrow E_{p,M}$ = costante

$p(z) = -\rho E_{p,M}(z) + \text{cost}$

p = cost ; $E_{p,M}$ = cost ; ρ = cost

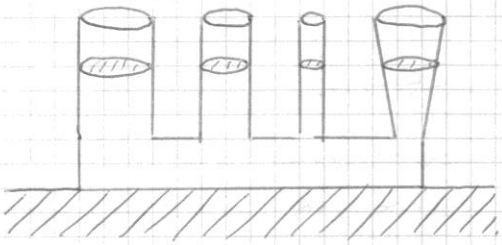
La superficie libera di un liquido in quiete deve essere orizzontale.



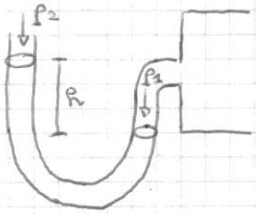
VASI COMUNICANTI

PRINCIPIO DEI VASI COMUNICANTI:

Consideriamo un sistema di recipienti in comunicazione tra loro, riempiti dello stesso liquido e aperti nello stesso ambiente.
Il liquido nei vari recipienti assume lo stesso livello rispetto al suolo.



MANOMETRO AD U



$p_1 > p_2$ $\qquad h = \frac{p_1 - p_2}{\rho g}$

www.alessandropaghi.it

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

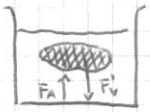
$\vec{R}^0 = 0$

$\vec{F}^0_P + \vec{F}^0_V = \vec{F}^0_P + mg = 0 \Rightarrow \vec{F}^0_P = -mg$

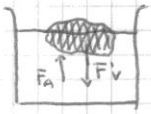
$m = \rho V_0$

$m' = \rho' V_0 \Rightarrow \vec{R}^0 \neq 0$

$\vec{F}^0_P + \vec{F}^0_V \neq 0 \Rightarrow (m' - m)\vec{g} = (\rho' - \rho) V_0 \vec{g}$



$\rho' > \rho$



$\rho' < \rho$

Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto pari al peso del volume di fluido che viene occupato dal volume di corpo immerso,

$\vec{F}_A = -\rho V_0 g$

dove ρ è la densità del fluido e V_0 il volume della parte immersa.

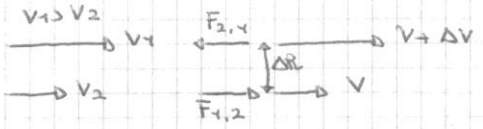
ATTRITO INTERNO, VISCOSITÀ, FLUIDO IDEALE

FORZA DI ATTRITO INTERNO

Forza tangenziale di attrito dovuta allo scorrimento tra due elementi di fluido.

$F = \eta S \frac{\Delta v}{\Delta R}$

η: VISCOSITÀ DEL FLUIDO



FLUIDO IDEALE: Non viscoso e incomprimibile

($\eta = 0$; ρ = costante)

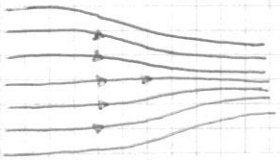
www.alessandropaghi.it

MOTO DI UN FLUIDO. REGIME STAZIONARIO. PORTATA

Descrizione Eulariana:
Fissiamo l'attenzione su un determinato punto della massa fluida $P(x, y, z)$ e sulla velocità $v(x, y, z, t)$

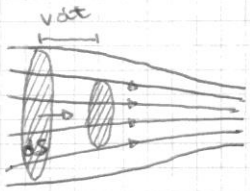
Regime stazionario: $v(x, y, z)$
Tutti gli elementi di fluido che passano in istanti diversi in P, hanno in quella posizione sempre la stessa velocità.

Linee di corrente:
Linee tangenti al vettore velocità.



In regime stazionario per un punto passa una sola linea di corrente
⇒ le linee di corrente non si incontrano mai;

Tubo di flusso:
Individuato da tutte le linee di corrente che passano attraverso una generica sezione S.



$dV = dS\,v\,dt$

$dq = \frac{dV}{dt} = v\,dS$: PORTATA
↳ volume di fluido che è passato attraverso dS nell'unità di tempo.

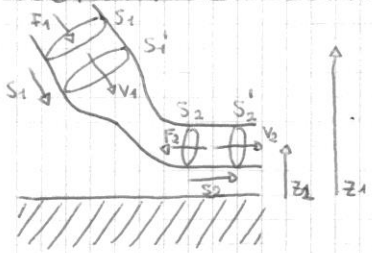
In regime stazionario se la densità è costante, è costante la portata di un tubo di flusso infinitesimo: $v\,dS$ = costante; dove la sezione aumenta la velocità diminuisce, mentre se diminuisce la sezione aumenta la velocità.

$$q = \int_S dq = \int_S v\,dS = v_m S$$
↳ NEI PUNTI DELLA SEZIONE

Per un fluido incomprimibile a regime stazionario:
$v_m S$ = costante.

www.alessandropaghi.it

TEOREMA DI BERNOULLI



$h = 0$; ρ = costante

$\Delta V_1 = S_1 s_1$

$\Delta V_2 = S_2 s_2$

$\Delta V_1 = \Delta V_2$

$$W = -\Delta E_p = -mg(z_2 - z_1) = -\rho \Delta V g (z_2 - z_1)$$

$$W_p = \vec{F_1} \cdot \vec{s_1} + \vec{F_2} \cdot \vec{s_2} = p_1 S_1 s_1 - p_2 S_2 s_2 = p_1 \Delta V_1 - p_2 \Delta V_2$$
$$= (p_1 - p_2) \Delta V$$

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2)$$

$$W + W_p = -\rho \Delta V g (z_2 - z_1) + (p_1 - p_2) \Delta V = \Delta E_K = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2)$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2$$

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = \text{costante}$$

TEOREMA DI BERNOULLI:
In un fluido ideale in moto con regime stazionario la somma della pressione, della energia cinetica per unità di volume e della energia potenziale per unità di volume è costante lungo le condotto, ovvero lungo un qualsiasi tubo di flusso.

Condotto orizzontale: $\rho g z = 0$

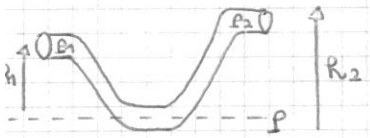
$\Rightarrow p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{costante}$.

$v = 0 \Rightarrow p + \rho g z = \text{costante}$ [LEGGE DI STEVINO]

www.alessandropaghi.it

APPLICAZIONI DEL TEOREMA DI BERNOULLI

FLUSSO IN UN TUBO A SEZIONE COSTANTE



$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2$$

$$R = z_2 - z_1$$

$$p_1 + \rho g R_1 = p = p_2 + \rho g R_2$$

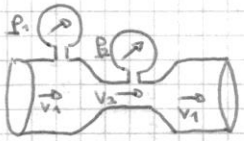
TUBO DI VENTURI

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho_{H_2O} v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho_{H_2O} v_2^2$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

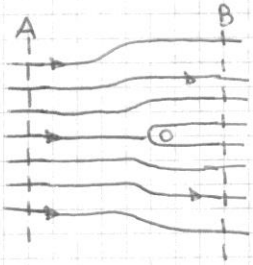
$$v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho_{H_2O}} \cdot \frac{S_1^2}{S_1^2 - S_2^2}}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho_{H_2O}} \cdot \frac{S_2^2}{S_1^2 - S_2^2}}$$



$$\Delta p = p_1 - p_2 \qquad q = v_1 S_1$$

TUBO DI PITOT



$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = p_0$$

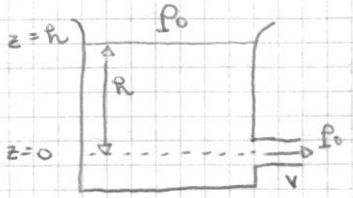
$$v_B = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_B)}{\rho}}$$

TEOREMA DI TORRICELLI

$$\left(p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z\right)_{SUP} = \left(p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z\right)_{FORO}$$

$$p = p_0$$

$$p_0 + \rho g R = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 \quad \Rightarrow v = \sqrt{2gR}$$



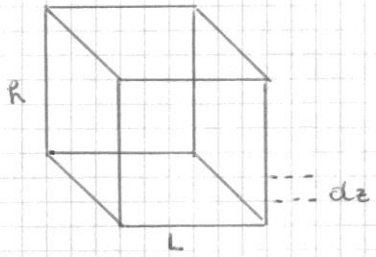
www.alessandropaghi.it

ES. 9.1

$L = 10\ m$

$R = 20\ m$

$\rho = 0,8 \cdot 10^3\ kg/m^3$



$F = PS = (p_0 + \rho g R) S$

$= 2,58 \cdot 10^7\ N$

↳ Forza esercitata dal liquido sul fondo.

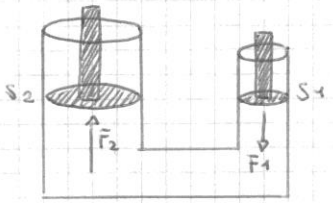
$dS = L\,dz$

$dF = p(z)\,dS$

$F_L = \int_0^R (p_0 + \rho g z) L\,dz = p_0 L R + \frac{1}{2}\rho g L R^2 = 3,6 \cdot 10^7\ N$

↳ Forza esercitata sulle pareti laterali.

ES. 9.2



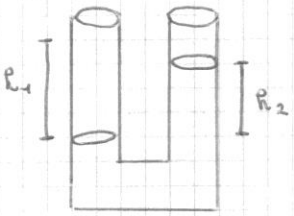
$p_1 = \frac{F_1}{S_1}$

$p_2 = \frac{F_2}{S_2}$

$p_1 = p_2 \Rightarrow F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1$

$\frac{S_2}{S_1} = \frac{R_2^2}{R_1^2}$

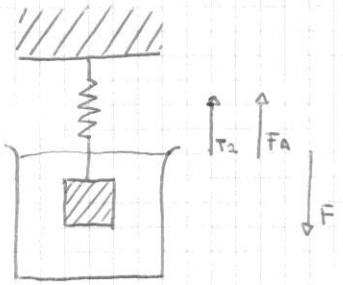
ES. 9.3



$p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2$

$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$

ES. 9.4



$T_1 = 5,88\ N$ $\quad T_1 = mg$

$T_2 = 3,70\ N$ $\quad T_2 = mg - m_a g = T_1 - m_a g$

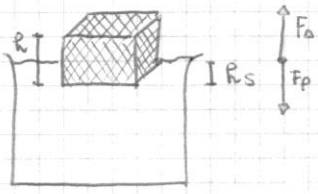
$m_a g = \rho_A V_0 g$ $\quad m = \frac{T_1}{g} = 0,6\ kg$

$V_0 = \frac{m_a}{\rho_a} = \frac{T_1 - T_2}{\rho_a g} = 2,22 \cdot 10^{-4}\ m^3$

$\rho_c = \frac{m}{V_0} = 2702\ kg/m^3$

www.alessandropaghi.it

ES. 9.5



$\rho V g = \rho_e V_s g$

$F_P = F_A$

$mg = m_e g$

$\rho_e = \rho \cdot \frac{V}{V_s} = \rho \cdot \frac{R}{R_s}$

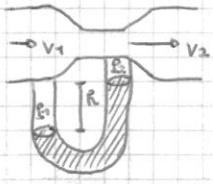
ES. 9.6

$R_1 = 10$ cm

$R_2 = 5$ cm

$\rho_{Hg} = 13,6 \cdot 10^3$ Kg/m^3

$R = 20$ cm



$p_1 + \rho g R = p_2 + \rho_{Hg} g R$

$\Rightarrow p_1 - p_2 = (\rho_{Hg} - \rho) g R = 24,7 \cdot 10^3$ Pa

$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$

$V_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho_{H_2O}} \cdot \frac{S_2^2}{S_1^2 - S_2^2}} = 3,29$ m/s

$q = V_1 S_1 = 0,103$ m^3/s

www.alessandropaghi.it

SISTEMI E STATI TERMODINAMICI

Un sistema termodinamico è spesso assimilabile, da un punto di vista meccanico, ad un sistema continuo, considerato che microscopicamente ha un numero di elementi dell'ordine del numero di Avogadro, $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$.

Un sistema termodinamico è una porzione del mondo che può essere costituita da una o più parti. Il sistema può interagire con l'ambiente circostante.



L'insieme sistema più ambiente si chiama universo termodinamico.

Se tra il sistema e l'ambiente avvengono scambi di energia e di materia il sistema è detto aperto.
Il sistema si dice chiuso se sono esclusi scambi di materia ma si hanno dei scambi di energia.
Il sistema è detto isolato se non avvengono scambi di energia e di materia con l'ambiente.

Alcune variabili termodinamiche esprimono una proprietà globale del sistema e sono perciò dette estensive: MASSA e VOLUME.
Altre variabili variano punto a punto e sono chiamate intensive: PRESSIONE, TEMPERATURA e DENSITÀ.

www.alessandropaghi.it

EQUILIBRIO TERMODINAMICO. PRINCIPIO DELL'EQUILIBRIO TERMICO

Lo stato termodinamico di un sistema è detto di equilibrio quando le variabili termodinamiche che lo descrivono sono costanti nel tempo e vengono perciò chiamate variabili di stato.

L'equilibrio termodinamico è il risultato di tre diversi equilibri:

- EQUILIBRIO MECCANICO: Equilibrio di forze e momenti;
- EQUILIBRIO CHIMICO: non avvengono reazioni;
- EQUILIBRIO TERMICO: la temperatura è la stessa ovunque.

In uno stato di equilibrio esiste una precisa relazione tra coordinate termodinamiche che si esprime sotto forma di equazione di stato.

Dati due diversi stati di equilibrio termodinamico di un certo sistema, l'eventuale evoluzione del sistema dal primo al secondo stato si chiama Trasformazione termodinamica del sistema.

Dati due sistema, A a temperatura T_A e B a temperatura T_B, si dicono in equilibrio termico quando $T_A = T_B$.

PRIMO PRINCIPIO DELL'EQUILIBRIO TERMICO

Se due sistemi A e B sono ciascuno in equilibrio con un terzo sistema C, $T_A = T_C$ e $T_B = T_C$, allora essi sono in equilibrio termico tra loro, $T_A = T_B$.

DEFINIZIONE DI TEMPERATURA. TERMOMETRI

X: Caratteristica termometrica

$\theta(X)$: Funzione termometrica.

X_{PT}: Valore al punto triplo dell'acqua

$T = 273,16 \cdot \frac{X}{X_{PT}}$ K : TEMPERATURA EMPIRICA.

$t(°C) = T(K) - 273,15$.

$t(°F) = \frac{9}{5} T(K) - 459,67$.

www.alessandropaghi.it

SISTEMI ADIABATICI. ESPERIMENTI DI JOULE. CALORE

Se sistema termodinamico passa da uno stato iniziale di equilibrio ad uno finale di equilibrio con processi diversi, ma il lavoro meccanico è sempre lo stesso.

$W_{ad} = -\Delta U = U_{IN} - U_{FIN}$

U: funzione che dipende dallo stato del sistema.

$Q = \Delta U$

$Q = -W$

EQUIVALENZA TRA CALORE E LAVORO

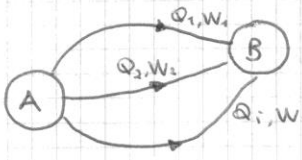
Se calore Q scambiato, senza lavoro esterno, per far variare la temperatura di ΔT di una massa d'acqua è uguale al lavoro W che deve essere speso, in condizioni adiabatiche, per ottenere la stessa variazione di temperatura.

Possiamo affermare che esiste un meccanismo di scambio di energia che non comporta movimenti macroscopici, al quale diamo il nome di scambio di calore.

PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA. ENERGIA INTERNA

Se un sistema compie una trasformazione dallo stato A allo stato B, scambiando calore e lavoro con l'ambiente, Q e W dipendono dalla trasformazione che congiunge i due stati termodinamici, mentre la differenza Q - W risulta indipendente dalla trasformazione.

$\Delta U = U_B - U_A$, $Q - W = \Delta U$, $Q = \Delta U + W$



$Q_1 - W_1 = Q_2 - W_2 = \ldots = Q_m - W_m = U_B - U_A$.

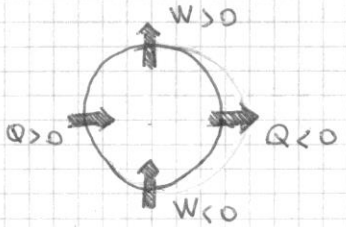
www.alessandropaghi.it

- Esiste una funzione di stato chiamata energia interna U, le cui variazioni danno gli scambi energetici del sistema con l'ambiente durante una trasformazione.
- Se durante una trasformazione si fornisce energia a un sistema, questa resta immagazzinata sotto forma di energia interna.
- Il termine energia interna indica che l'energia è legata a proprietà interne del sistema.
- Il calore è un meccanismo di scambio di energia.
  $Q = \Delta U + W$
  Il calore e lavoro sono forme di scambio di energia e perciò si parla di calore e lavoro scambiati fra sistemi.
- Una trasformazione ciclica è una trasformazione che riporta un sistema al suo stato iniziale.
  $\Delta U = 0 \Rightarrow Q = W$
- Se nella trasformazione ciclica il sistema assorbe calore $Q > 0$, esso fornisce lavoro $W > 0$ e costituisce una macchina termica.
- $dQ = dU + dW$

  $\Delta U = \int_A^B dU = U_B - U_A$ indipendentemente dalla trasformazione.

  $Q_{AB} = \int_A^B dQ \; ; \; W_{AB} = \int_A^B dW$

I) CALORE CHE ENTRE IN UN SISTEMA ($>$)
II) CALORE CHE ESCE DA UN SISTEMA ($<$)
III) LAVORO COMPIUTO DA UN SISTEMA ($>$)
IV) LAVORO SUBITO DA UN SISTEMA ($<$)



www.alessandropaghi.it

TRASFORMAZIONI DINAMICHE. LAVORO E CALORE

$Q = \Delta U + W$; $W = Q - \Delta U$

TRASFORMAZIONI ADIABATICHE

Qualsiasi trasformazione in cui $Q = 0$, in cui cioè il sistema non scambia calore con l'esterno.

$W = -\Delta U$

TRASFORMAZIONI REVERSIBILI E IRREVERSIBILI

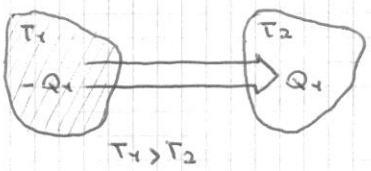
Considerando una trasformazione qualsiasi, gli stati intermedi attraverso cui passa il sistema possono essere di equilibrio o di non equilibrio.

Una trasformazione è detta reversibile se essa avviene attraverso stati di equilibrio e in assenza di forze dissipative, altrimenti è chiamata irreversibile.

CALORIMETRIA

Due corpi solidi aventi temperature diverse T_1 e T_2 sono contenuti in un contenitore adiabatico e sono in contatto termico

T_E: TEMP. DI EQUILIBRIO



$T_e < T_1$; $T_e > T_2$

$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$

$\Delta U_1 = -\Delta U_2$

$\Delta U_1 = Q_1$

$\Delta U_2 = Q_2$ $\Rightarrow$ $Q_1 = -Q_2$

$\Delta U_1 < 0$; $\Delta U_2 > 0$

$Q = m \cdot c \, (T_{FIN} - T_{IN})$

c : CALORE SPECIFICO

Rappresenta il calore che occorre scambiare con l'unità di massa di una data sostanza, alla temperatura T, per farne variare la temperatura di 1 K (1°C).

www.alessandropaghi.it

$C = m \cdot c$: CAPACITÀ TERMICA

Rappresenta il calore necessario per far variare di 1 K la temperatura di un corpo.

$dQ = m\, c\, dT \Rightarrow c = \frac{1}{m} \cdot \frac{dQ}{dT}$

$Q = \int dQ = m \int_{T_{IN}}^{T_{FIN}} c(T)\, dT$

↳ o c non costante.

$c = \frac{1}{m} \cdot \frac{dQ}{dT}$: CALORE SPECIFICO MOLARE

$dQ = m\, c\, dT$

$Q = mc\,(T_{FIN} - T_{IN})$

$Q = m \int_{T_{IN}}^{T_{FIN}} c(T)\, dT$

Una mole di sostanza è la quantità di materia di quella data sostanza che contiene $N_a = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ entità elementari.

CALORE SPECIFICO: J/KgK

CALORE SPECIFICO MOLARE: J/moleK

CAPACITÀ TERMICA: J/K

PROCESSI ISOTERMI. CAMBIAMENTI DI FASE

Temperatura costante.

I cambiamenti di fase è una classe dei processi isotermi nella quale una sostanza passa da una fase ad un'altra.

λ : CALORE LATENTE

Quantità ben definita che accompagna i cambiamenti di fase con scambi di calore.

$Q = m\lambda$

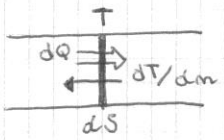
SORGENTE DI CALORE

Corpo con capacità termica infinita.

www.alessandropaghi.it

TRASMISSIONE DEL CALORE

CONDUZIONE DI CALORE



Legge di Fourier:
Se dS è un elemento di una superficie isoterma, $\frac{dT}{dm}$ è modulo del gradiente di Temperatura, il calore che passa attraverso dS nel tempo dt è:

$$dQ = -K \frac{dT}{dm} dS\, dt$$

K: CONDUCIBILITÀ

CONVEZIONE DEL CALORE

La trasmissione di calore avviene con spostamenti di materia, tramite le correnti di convezione.

IRRAGGIAMENTO

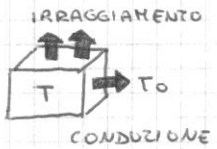
Un corpo a temperatura T irraggia energia sotto forma di onde elettromagnetiche.
Il potere emissivo del corpo E, che ha significato di energia emessa per unità di tempo e unità di superficie, è dato dalla legge di Stefan-Boltzmann:

$$E = \sigma e T^4$$

$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ J/m^2 SK^4$

e: EMISSIVITÀ $[0 \div 1]$

PASSAGGIO DI CALORE DA UN SOLIDO AD UN FLUIDO



$\Delta T = T - T_0$ non gremole.

$$Q = h(T - T_0)\, St$$

h: CONDUCIBILITÀ TERMICA ESTERNA

www.alessandropaghi.it

DILATAZIONE TERMICA DI SOLIDI E LIQUIDI

Se volume di un corpo, a pressione costante, aumenta al crescere della temperatura
=> DILATAZIONE TERMICA.

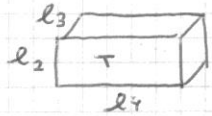
$$\Delta l = \lambda l \Delta T \qquad l + \Delta l = l(1 + \lambda \Delta T)$$

λ → COEFFICIENTE DI DILATAZIONE LINEARE.

$$\lambda = \frac{1}{l} \cdot \frac{\Delta l}{\Delta T}$$

CORPI ISOTROPI : λ ha lo stesso valore in tutte le direzioni
CORPI ANISOTROPI: λ non ha lo stesso valore in tutte le direzioni

CORPO ISOTROPO



$V = l_1 l_2 l_3$

Volume alla temperatura $T + \Delta T$:

$$V + \Delta V = l_1(1 + \lambda \Delta T)\, l_2(1 + \lambda \Delta T)\, l_3(1 + \lambda \Delta T)$$
$$= V(1 + \lambda \Delta T)^3 \approx V(1 + 3\lambda \Delta T)$$

$$\Delta V = V 3\lambda \Delta T = V \alpha \Delta T$$

α → COEFFICIENTE DI DILATAZIONE CUBICA

$$\alpha = \frac{1}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta T}$$

Nei corpi isotropi: $\alpha = 3\lambda$

LEGGE DEI GAS. EQUAZIONE DI STATO DEI GAS IDEALI

Un gas è un fluido con le seguenti caratteristiche:

- non ha forma ne volume proprio;
- È comprimibile facilmente;

Le variabili termodinamiche da considerare sono:

- Pressione p;
- Volume V;
- Temperatura T;

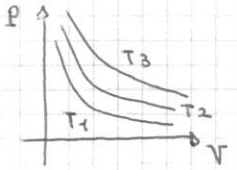
Un gas assume un comportamento ideale quando è incomprimibile e non viscoso.

LEGGE ISOTERMA DI BOYLE

a temperatura costante, la pressione è inversamente proporzionale al volume:

$$pV = \text{costante}$$

Si ha una trasformazione isoterma.



Un piano (p, V) è detto piano di Clapeyron.
Le iperboli rappresentate sono dette isoterme del gas ideale e sono il luogo dei punti che rappresentano gli stati di equilibrio di un gas a una data temperatura.

LEGGE ISOBARA DI VOLTA-GAY LUSSAC

Quando durante una trasformazione la pressione diventa costante, si parla di trasformazione isobara

$$V = V_0(1 + \alpha t)$$

α COEFFICIENTE DI DILATAZIONE TERMICA.



www.alessandropaghi.it

LEGGE ISOCORA DI VOLTA - GUY LUSSAC

Se durante una trasformazione si mantiene costante il volume si parla di trasformazione ISOCORA.

$$p = p_0(\alpha + \beta t)$$



Quando si parla di gas ideali:

$\alpha = \beta = \frac{1}{273,15}\ °C^{-1}$ $\qquad T = \frac{1}{\alpha} + t = 273,15 + t$

$V = V_0\,\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + t\right) = V_0\,\alpha T \qquad p = p_0\,\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + t\right) = p_0\,\alpha T$

LEGGE DI AVOGADRO

Volumi eguali di gas diversi, alla stessa temperatura e pressione, contengono lo stesso numero di molecole.

M: massa totale $\quad$ m: massa molecola

$N = \frac{M}{m}$

$m = A\,m_u = A \cdot 1,6604 \cdot 10^{-27}\ Kg \Rightarrow N = \frac{M}{m} = 6,0221 \cdot 10^{26}\ \frac{M}{A}$

$N = N_a = \frac{1}{m_u} = 6,0221 \cdot 10^{26}\ molecole/Kmole$

↳ NUMERO DI AVOGADRO.

$N_a = 6,0221 \cdot 10^{23}\ molecole/mole$

Una mole è la quantità di materia che contiene N_a entità elementari

Una mole di qualsiasi gas, a una data temperatura e pressione, occupa lo stesso volume.

$p_0 = 101325\ Pa$: PRESSIONE ATMOSFERICA

$T_0 = 273,15\ K = 0°C$

$V_m = 0,022414\ m^3 = 22,414$ litri

↳ VOLUME MOLARE

www.alessandropaghi.it

EQUAZIONE DI STATO DI UN GAS IDEALE

n moli di gas

p_0 , $T_0 = 273,15\ K$

$V_0 = n V_m$

$p_T = p_0 \alpha T \Rightarrow p_T V_0 = p_0 V_0 \alpha T = p_0 V_T$

$p_T V_0 = p_0 V_T = pV$

$pV = p_0 V_0 \alpha T = n p_0 V_m \alpha T$

Equazione di stato del gas ideale:

$pV = nRT$

$$R = p_0 V_m \alpha = 1,01325 \cdot 10^5 \cdot 0,022414 \cdot \frac{1}{273,15}$$
$$= 8,314\ J/mol\,K$$
$$= 8314\ J/kmol\,K$$

$$n = \frac{N}{N_a} \Rightarrow pV = \frac{N}{N_a} RT = N K_B T$$

$$K_B = \frac{R}{N_a} = \frac{8,314}{6,0221 \cdot 10^{23}} = 1,3807 \cdot 10^{-23}\ \frac{J}{K}$$

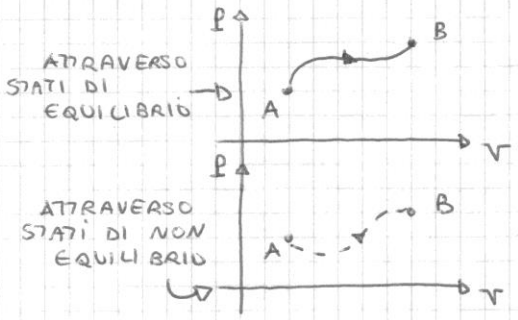
(K_B COSTANTE DI BOLTZMANN)

$$\rho = \frac{N}{V} \; ; \; K = Am \Rightarrow \frac{p}{\rho} = \frac{RT}{A}$$

Un gas diventa ideale quando è caldo e rarefatto.

TRASFORMAZIONI DI UN GAS. LAVORO

$$T_a = \frac{p_a V_a}{nR} \; ; \; T_B = \frac{p_B V_B}{nR}$$



$dW = p\,dV$

$$W = \int_A^B p(V)\,dV$$

Si conosce $p(V)$ solo se:

- la trasformazione è reversibile;
- è nota la pressione esterna;

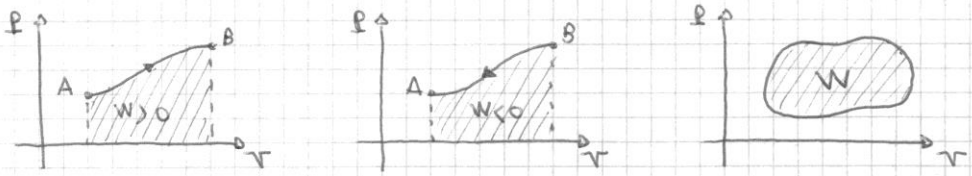
www.alessandropaghi.it

Se la trasformazione è isocora il lavoro è sempre nullo.

Se il gas si espande compie un lavoro positivo.

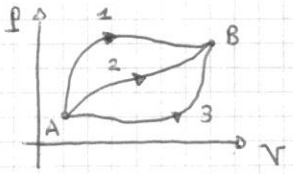
Se il gas viene compresso subisce un lavoro negativo.

nel piano (p, V) il lavoro compiuto dal gas è uguale all'area compresa tra la curva e l'asse dei volumi.



Il lavoro compiuto da un gas in una trasformazione ciclica reversibile è dato dall'area racchiusa dal ciclo stesso.

Il lavoro è positivo se compiuto in senso orario, altrimenti è negativo.



$W_1 \neq W_2 \neq W_3$

$W_{AB} = -W_{BA} \Rightarrow Q_{AB} = -Q_{BA}$

CALORE. CALORI SPECIFICI

ISOCORA: $dQ = m c_v dT$

ISOBARA: $dQ = m c_p dT$

$$c_v = \frac{1}{m}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_V$$

↳ CALORE SPECIFICO A VOLUME COSTANTE

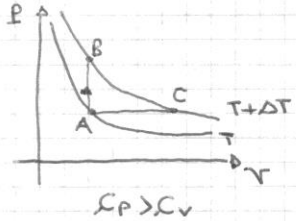
$$c_p = \frac{1}{m}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_p$$

↳ CALORE SPECIFICO A PRESSIONE COSTANTE

$\Delta T = T_B - T_A$

$Q_v = m c_v \Delta T \quad ; \quad Q_p = m c_p \Delta T$

$$Q_v = \int_{T_A}^{T_B} c_v \, dT \quad ; \quad Q_p = \int_{T_A}^{T_B} c_p \, dT$$



$c_p > c_v$

$Q = \Delta U + W$

$Q_v = m c_v \Delta T = \Delta U \Rightarrow W = 0$

$Q_p = m c_p \Delta T = \Delta U + p \Delta V \Rightarrow W = p \Delta V$

www.alessandropaghi.it

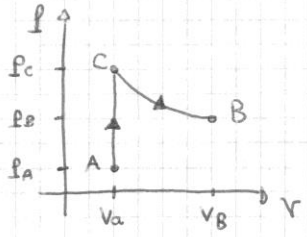
Il calore che bisogna cedere a una mole di gas ideale per far aumentare la sua temperatura di 1K è maggiore a pressione costante che a volume costante, perché a pressione costante il gas compie anche lavoro.

ENERGIA INTERNA DEL GAS IDEALE

Nell'espansione libera di un gas ideale l'energia interna non varia.

$$\Delta U = Q - W = 0$$

Si deduce che per un gas ideale, l'energia interna deve essere funzione soltanto della temperatura.



$$\Delta U = U_B - U_A = U_B - U_C + U_C - U_A = U_C - U_A$$

$U_B = U_C$

AC: ISOCORA

CB: ISOTERMA → $W = 0 \Rightarrow \Delta U = Q$

$$\Delta U = U_B - U_A = n c_v (T_B - T_A) = n c_v \Delta T$$

$$\Delta U = U_B - U_A = n \int_{T_A}^{T_B} c_v \, dT$$

$$dU = n c_v dT \Rightarrow c_v = \frac{1}{n} \cdot \frac{dU}{dT}$$

Il calore specifico a volume costante di un gas ideale dipende solo dalla temperatura.

$$dQ = n c_v dT + dW \Rightarrow Q = n \int_{T_A}^{T_B} c_v dT + W$$

$Q = n c_v \Delta T + W$ se c_v = costante.

Se la trasformazione è reversibile:

$$dQ = n c_v dT + p dV \Rightarrow Q = n \int_{T_A}^{T_B} c_v dT + \int_{V_A}^{V_B} p dV$$

$Q = n c_v \Delta T + \int_{V_A}^{V_B} p dV$ se c_v = costante.

www.alessandropaghi.it

RELAZIONE DI MAYER

trasformazione isobara:

$dQ = m c_p dT$, $dW = p dV$

$m c_p dT = m c_v dT + p dV$ $\qquad pV = mRT$

$p dV + V \underbrace{dp}_{0} = mR dT \Rightarrow p dV = mR dT$

$m c_p dT = m c_v dT + mR dT$

Relazione di Mayer: $c_p - c_v = R$

In un gas ideale c_p è funzione soltanto della temperatura.

$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ In un gas ideale: $\gamma > 1$

GAS IDEALI MONOATOMICI:

$c_v = \frac{3}{2} R = 12,47 \ J/molK$

$c_p = \frac{5}{2} R = 20,78 \ J/molK$

$\gamma = \frac{5}{3} = 1,667$

GAS IDEALI BIATOMICI:

$c_v = \frac{5}{2} R = 20,78 \ J/molK$

$c_p = \frac{7}{2} R = 29,10 \ J/molK$

$\gamma = \frac{7}{5} = 1,4$

Per qualsiasi trasformazione:

$\Delta U = m c_v \Delta T$

Per isocore:

$Q = m c_v \Delta T$

Per isobare:

$Q = m c_p \Delta T$

Ricordando che:

$pV = mRT$ in uno stato di equilibrio

$c_p - c_v = R$

STUDIO DI ALCUNE TRASFORMAZIONI

TRASFORMAZIONI ADIABATICHE

$$W_{AB} = -\Delta U = -m c_v (T_B - T_A) = \frac{1}{\gamma - 1}(p_A V_A - p_B V_B)$$

Espansione adiabatica: $W_{AB} > 0$, $\Delta U < 0$, $T_B < T_A$

Compressione adiabatica: $W_{AB} < 0$, $\Delta U > 0$, $T_B > T_A$

Se la trasformazione è reversibile:

$$dU + dW = m c_v dT + p\,dV = 0$$

$$p = \frac{nRT}{V} \Rightarrow m c_v dT = \frac{nRT}{V} dV = 0$$

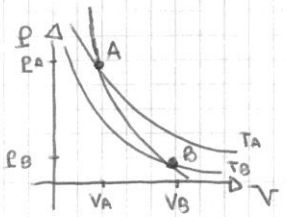
$$\frac{c_p - c_v}{c_v} \cdot \frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T} \Rightarrow (\gamma - 1)\frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T}$$

$$(\gamma - 1) \ln \frac{V_B}{V_A} = \ln \frac{T_A}{T_B} \Rightarrow \ln \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma - 1} = \ln \frac{T_A}{T_B}$$

$$T_A V_A^{\gamma - 1} = T_B V_B^{\gamma - 1} \qquad p_A V_A^{\gamma} = p_B V_B^{\gamma}$$

$T V^{\gamma - 1} =$ costante
$p V^{\gamma} =$ costante
$T p^{(1-\gamma)/\gamma} =$ costante

} EQUAZIONI DI UNA TRASFORMAZIONE ADIABATICA REVERSIBILE DI UN GAS IDEALE



$\gamma > 1$
$T_B < T_A$

TRASFORMAZIONI ISOTERME

$\Delta U = 0$, $Q = W$, $p_A V_A = p_B V_B$

Espansione isoterma: $W_{AB} > 0$, $Q_{AB} > 0$

Compressione isoterma: $W_{AB} < 0$, $Q_{AB} < 0$

Se la trasformazione è reversibile:

$$W_{AB} = \int_A^B p\,dV = \int_A^B \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_A^B \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$Q \neq 0$

www.alessandropaghi.it

TRASFORMAZIONI ISOCORE

V = costante, $W = 0$

$Q = \Delta U = m c_v (T_B - T_A)$ se c_v = costante

$$\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_B}{T_B} \Rightarrow \frac{p_A}{p_B} = \frac{T_A}{T_B}$$

Se si cede calore al gas, la sua pressione e la sua temperatura aumentano, mentre se si assorbe calore dal gas, pressione e temperatura diminuiscono.

Se la trasformazione è reversibile:

$T_1 = T_A + dT$

$T_2 = T_1 + dT$

...

TRASFORMAZIONI ISOBARE. ENTALPIA

p = costante

$$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{T_A}{T_B}$$

$Q = m c_p (T_B - T_A)$, $W = p(V_B - V_A) = p\left(\frac{mRT_B}{p} - \frac{mRT_A}{p}\right) = mR(T_B - T_A)$

$Q - W = \Delta U = m c_v (T_B - T_A)$

Se si cede calore al gas, il suo volume e la sua temperatura aumentano e il gas compie lavoro; se si assorbe calore dal gas, volume e temperatura diminuiscono, il gas subisce lavoro.

ENTALPIA: $H = U + pV$ è funzione di stato

L'entalpia di un gas ideale è funzione solo della temperatura, $H = H(T)$.

$dH = dU + d(pV) = m c_v dT + mR dT = m c_p dT$

$$\Delta H = m \int_{T_A}^{T_B} c_p \, dT \qquad \Delta H = m c_p (T_B - T_A) \text{ se } c_p = \text{costante}.$$

$Q = \Delta H$

$$c_v = \frac{1}{m} \cdot \frac{dU}{dT} \qquad c_p = \frac{1}{m} \cdot \frac{dH}{dT}$$

www.alessandropaghi.it

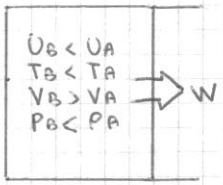
TRASFORMAZIONI GENERICHE

$dQ = dU + dW = m c_v dT + dW$

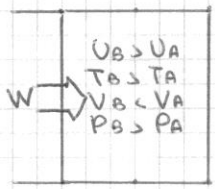
Se è reversibile:

$pV = mRT \quad ; \quad dW = p\,dV$

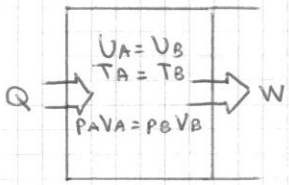
ESPANSIONE ADIABATICA



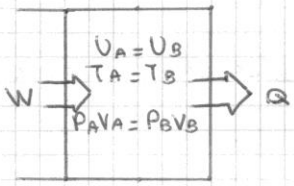
COMPRESSIONE ADIABATICA



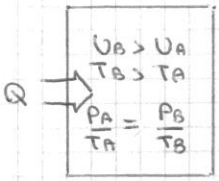
ESPANSIONE ISOTERMA



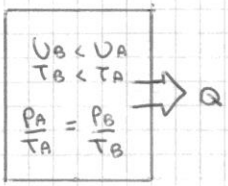
COMPRESSIONE ISOTERMA



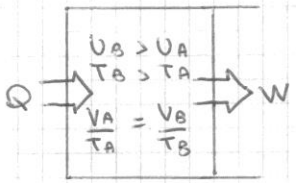
RISCALDAMENTO ISOCORO



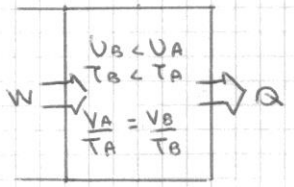
RAFFREDAMENTO ISOCORO



ESPANSIONE ISOBARA



COMPRESSIONE ISOBARA



TRASFORMAZIONI CICLICHE. CICLO DI CARNOT

In ciclo assorbito è uguale al lavoro scambiato.

CICLO TERMICO: Assorbendo calore viene prodotto lavoro
[MACCHINA TERMICA]

CICLO FRIGORIFERO: Viene richiesto lavoro estraendo calore da sorgenti fredde per cederlo a sorgenti calde.
[MACCHINA FRIGORIFERA]

$Q = Q_A + Q_C$ → CALORE CEDUTO < 0.
↳ CALORE ASSORBITO > 0

$\Delta U = 0 \Rightarrow Q = W$

$W = W_F + W_S$ → LAVORO SUBITO < 0
↳ LAVORO COMPIUTO > 0

Il rendimento η di una macchina termica è definito come il rapporto tra il lavoro fornito e la quantità di calore assorbito.

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A + Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}$$

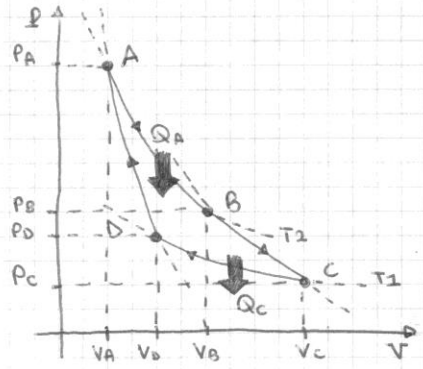
Il rendimento rappresenta la percentuale di calore assorbito trasformato in lavoro.

$0 \leq \eta < 1$

$W < Q_A$, $|Q_C| < Q_A$, $Q_C \neq 0$.

In un ciclo termico solo una percentuale del calore assorbito viene trasformata in lavoro, il resto viene sempre ceduto.

CICLO DI CARNOT



AB) Espansione isoterma reversibile;
BC) Espansione adiabatica reversibile;
CD) Compressione isoterma reversibile;
DA) Compressione adiabatica reversibile;

www.alessandropaghi.it

AB)

$$Q_A = mRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} = W_{AB}$$

BC)

$$T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1}$$

$$W_{BC} = -\Delta U_{BC} = m c_v (T_2 - T_1)$$

CD)

$$Q_C = mRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C} = W_{CD} < 0$$

DA)

$$T_2 V_A^{\gamma-1} = T_1 V_D^{\gamma-1}$$

$$W_{DA} = -\Delta U_{DA} = m c_v (T_1 - T_2) = -W_{BC}$$

$$Q = Q_A + Q_C = W = W_{AB} + \cancel{W_{BC}} + W_{CD} + \cancel{W_{DA}} = W_{AB} + W_{CD}$$

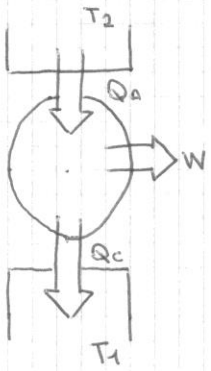
$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{\cancel{mR} T_1 \ln(V_D/V_C)}{\cancel{mR} T_2 \ln(V_B/V_A)} = 1 - \frac{T_1 \ln(V_C/V_D)}{T_2 \ln(V_B/V_A)}$$

$$\left.\begin{aligned} T_2 V_B^{\gamma-1} &= T_1 V_C^{\gamma-1} \\ T_2 V_A^{\gamma-1} &= T_1 V_D^{\gamma-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Il rendimento del ciclo di Carnot, descritto da un gas ideale con calore specifico costante, dipende solo dalle temperature a cui avvengono gli scambi isotermi di calore.

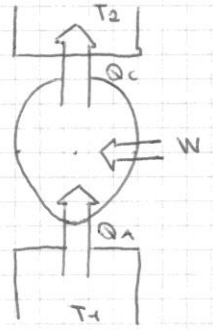
$T_1 < T_2 \Rightarrow \eta < 1 \qquad Q_A > |Q_C|$

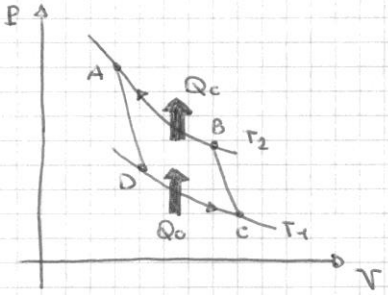


Rappresentazione simbolica

www.alessandropaghi.it

CICLO FRIGORIFERO





Il sistema assorbe lavoro e cede calore.

Rappresentazione simbolica.

Coefficiente di Prestazione: $\varepsilon = \frac{Q_0}{|W|}$

$Q_0 = nRT_1 \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)$

$Q_C = nRT_2 \ln\left(\frac{V_D}{V_B}\right)$

$W = Q_0 + Q_C$ $\qquad \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$

$$\varepsilon = \frac{Q_0}{|Q_C + Q_0|} = \frac{nRT_1 \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)}{nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) - nRT_1 \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$$

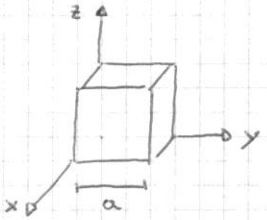
$Q_0 + |W| = |Q_C|$

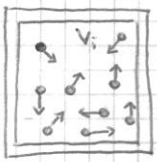
www.alessandropaghi.it

TEORIA CINETICA DEI GAS

1) Un gas è costituito da molecole uguali, in moto continuo e disordinato;
2) Gli urti tra molecole e tra molecole e pareti del contenitore sono elastici;
3) Non ci sono forze intermolecolari, se non durante gli urti;
4) Le dimensioni delle molecole sono molto piccole rispetto alle distanze medie tra di esse;

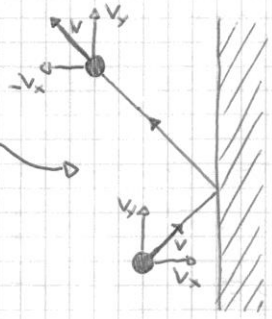
CALCOLO DELLA PRESSIONE





$$\vec{v} = v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y + v_z\vec{u}_z$$

$$\vec{v}_m = \mathcal{E}_i\,\vec{v}_i = 0$$



$$\mathcal{J} = \Delta p = 2mv_x\vec{u}_x$$

$$t = \frac{2a}{v_x}$$

$$F = \frac{1}{t} = \frac{v_x}{2a}$$

$$F_x = 2mv_x \cdot \frac{v_x}{2a} = \frac{mv_x^2}{a}$$

$$R_x = \frac{m}{a} \cdot \mathcal{E}_i\, v_{x,i}^2$$

$$S = a^2 \Rightarrow \quad p = \frac{R_x}{S} = \frac{m}{a^3}\,\mathcal{E}_i\, v_{x,i}^2 = \frac{N_m}{V} \cdot \frac{1}{N}\,\mathcal{E}_i\, v_{x,i}^2$$

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = \frac{1}{N}\,\mathcal{E}_i\,(v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2 + v_{z,i}^2)$$

↳ Velocità media quadratica.

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{\overline{v^2}}{3}$$

Equazione di Joule - Clausius - Krönig

$$p = \frac{N_m}{V} \cdot \frac{\overline{v^2}}{3} \Rightarrow pV = \frac{1}{3}\,N_m\,\overline{v^2}$$

www.alessandropaghi.it

$\bar{E}_K = \frac{1}{2} m \bar{v}^2$

↳ Energia cinetica media di traslazione

$pV = \frac{2}{3} N \bar{E}_K$

Il prodotto pressione per volume è proporzionale all'energia cinetica media di traslazione delle molecole $N\bar{E}_K$, che nel modello cinetico coincide con l'energia totale.

$pV = nRT \Rightarrow \bar{E}_K = \frac{3}{2} \frac{n}{N} RT = \frac{3}{2} \frac{R}{Na} T$

$nNa = N$

$\bar{E}_K = \frac{3}{2} k_B T$

L'energia cinetica media traslazionale di una molecola di un gas ideale è proporzionale alla temperatura del gas, espressa in Kelvin.

$\bar{v} = \sqrt{\frac{3K_BT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{A}}$

↳ massa molecolare del gas.

RIPARTIZIONE DELL'ENERGIA

$\bar{E}_K = \frac{1}{2} m \bar{v}_x^2 + \frac{1}{2} m \bar{v}_y^2 + \frac{1}{2} m \bar{v}_z^2 = \bar{E}_x + \bar{E}_y + \bar{E}_z$

$\bar{E}_x = \bar{E}_y = \bar{E}_z = \frac{1}{3} \bar{E}_K$, $\bar{E}_x = \bar{E}_y = \bar{E}_z = \frac{1}{2} k_B T$

Per un gas monoatomico che presenta 3 gradi di libertà

$\bar{E}_l = \frac{1}{2} k_B T$

gas monoatomico con 5 gradi di libertà:

$l = 5 \quad \bar{E}_K = \frac{5}{2} K_B T$

Gas biatomico con 7 gradi di libertà:

$l = 7 \quad \bar{E}_K = \frac{7}{2} k_B T$

Per un oscillatore:

$U = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{1}{2} k_x x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 + \frac{1}{2} k_z z^2$

$l = 6 \quad U = 3 K_B T$

www.alessandropaghi.it

CALORI SPECIFICI MOLARI

$U = N_a \bar{E}_K = \frac{\ell}{2} N_a K_B T = \frac{\ell}{2} RT$, $R = N_a K_B = 8{,}31\ J/mol\,K$

$c_V = \frac{dU}{dT}$

gas monoatomico: $\ell = 3$ $c_V = \frac{3}{2} R$

gas biatomico: $\ell = 5$ $c_V = \frac{5}{2} R$

Solido cristallino: $\ell = 6$ $c_V = 3R$ $U = 3 N_a K_B T = 3RT$

LEGGE DI DALTON

Per una miscela di gas ideali:

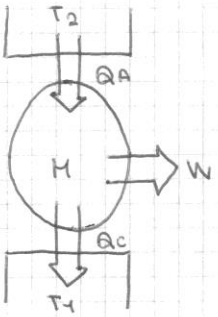
$p = \frac{RT}{V} \sum_i n_i$

$p_i = n_i \frac{RT}{V}$ $p = \sum_i p_i$

↳ PRESSIONE PARZIALE ↳ LEGGE DI DALTON

www.alessandropaghi.it

ENUNCIATI DEL SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA



$T_2 > T_1$

$Q_c < 0$

$W = Q_A + Q_c \Rightarrow W < Q_A$

ENUNCIATO DI KELVIN-PLANCK

È impossibile realizzare un processo che abbia come unico risultato la trasformazione in lavoro del calore fornito da una sorgente a temperatura uniforme.

ENUNCIATO DI CLAUSIUS

È impossibile realizzare un processo che abbia come unico risultato il trasferimento di una quantità di calore da un corpo ad un altro a temperatura maggiore.

Per un ciclo monotermo: $Q \leq 0$, $W \leq 0$.

$\Rightarrow Q = 0$, $W = 0$.

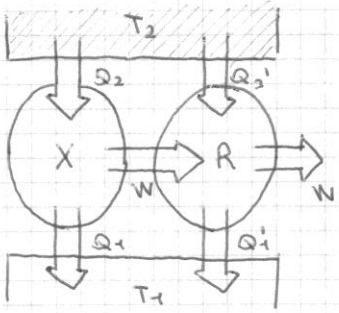
REVERSIBILITÀ E IRREVERSIBILITÀ

Una trasformazione reversibile non comporta alterazioni permanenti, nel senso che è sempre possibile riportare nei rispettivi stati iniziali il sistema e l'ambiente che con esso interagisce.

Quando avviene una trasformazione irreversibile non è più possibile ritornare allo stato di partenza senza modificare il resto dell'universo.

www.alessandropaghi.it

TEOREMA DI CARNOT

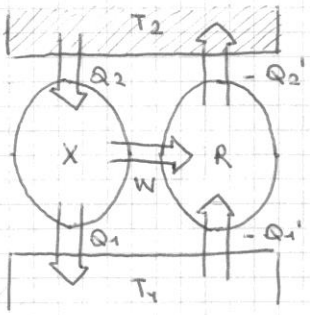


$T_2 > T_1$

assumiamo che R sia reversibile.

$\eta_X = \frac{W}{Q_2} \qquad \eta_R = \frac{W'}{Q_2'}$

$Q_2 + Q_1 = W = Q_2' + Q_1'$



$\eta_X > \eta_R \Rightarrow \frac{W}{Q_2} > \frac{W}{Q_2'} \Rightarrow Q_2 < Q_2' \Rightarrow Q_2 - Q_2' < 0$

$Q_1 - Q_1' = Q_2' - Q_2 > 0$

l'unico risultato ottenuto è il passaggio di calore da una sorgente fredda alla sorgente calda $\Rightarrow \eta_X \leq \eta_R$

Se X fosse reversibile $\Rightarrow \eta_X = \eta_R$

Tutte le macchine reversibili che lavorano tra le stesse sorgenti alle temperature T_1 e T_2 hanno rendimento uguale;
qualsiasi altra macchina che lavori tra le stesse sorgenti non può avere rendimento maggiore;
il risultato è indipendente dal particolare sistema che compie il ciclo.

CICLO DI CARNOT A GAS IDEALE:

$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$

La macchina che funziona in modo reversibile è sempre quella il cui rendimento è il limite superiore dei rendimenti possibili.

Per qualsiasi macchina reversibile: $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$

$T_2 > T_1$, per il Teorema di Carnot: $\eta_R = \eta_{MAX} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$

www.alessandropaghi.it

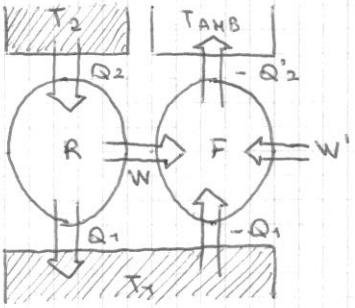
a parità di calore assorbito Q_A, la macchina reversibile è quella che fornisce il lavoro massimo:

$$W_{MAX} = Q_A \eta_R = Q_A \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = T_1 \left(\frac{Q_A}{T_1} - \frac{Q_A}{T_2}\right)$$

a parità di lavoro fornito, la macchina reversibile è quella che assorbe il minimo calore:

$$Q_{MIN} = \frac{W}{\eta_R} = \frac{W}{1 - \frac{T_1}{T_2}}$$

STUDIO DEL RENDIMENTO MASSIMO



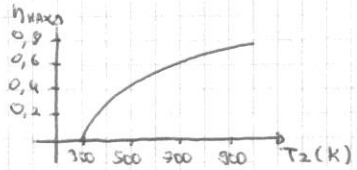
$T_1 \ll T_{AMB} < T_2$

$W + W' < W$

$$\eta = \frac{W+W'}{Q_2} = \frac{Q_1 + Q_2 - Q_1 + Q_2'}{Q_2} = \frac{Q_2 + Q_2'}{Q_2}$$

$$= 1 + \frac{Q_2'}{Q_2}$$

$T_2 \gg T_1 \cong T_{AMB}$



$T_1 = 280\ K$

$T_2 = 2T_1 \Rightarrow \eta = 0,5$

In condizioni reali:

$T_2' < T_2$; $T_1' > T_1$ $\Rightarrow$ $\eta' = 1 - \frac{T_1'}{T_2'} < 1 - \frac{T_1}{T_2} = \eta_R$

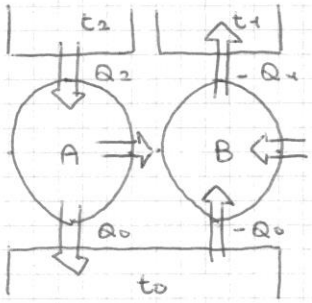
www.alessandropaghi.it

TEMPERATURA TERMODINAMICA ASSOLUTA

ciclo reversibile: $\frac{Q_2}{Q_1} = f(t_1, t_2)$

4) macchina che lavora a t_0 e t_2: $\frac{Q_2}{Q_0} = f(t_0, t_2)$

3) macchina che lavora a t_0 e t_1: $\frac{Q_1}{Q_0} = f(t_0, t_1)$



$$\frac{Q_2}{Q_1} = f(t_1, t_2)$$

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{Q_2}{Q_0} \cdot \frac{Q_0}{Q_1} \Rightarrow f(t_1, t_2) = \frac{f(t_0, t_2)}{f(t_0, t_1)}$$

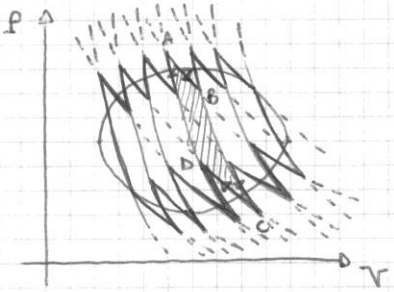
$$\Rightarrow f(t_1, t_2) = \frac{g(t_2)}{g(t_1)}$$

$g(t)$: TEMPERATURA TERMODINAMICA ASSOLUTA.

$$\frac{Q}{Q_{PT}} = \frac{g(t)}{g(t_{PT})} = \frac{g(t)}{273,16} \Rightarrow g(t) = 273,16 \cdot \frac{Q}{Q_{PT}}$$

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{g(t_2)}{g(t_1)} = \frac{T_2}{T_1}$$

TEOREMA DI CLAUSIUS



m cicli, N = 2m sorgenti di Temperatura

$$\frac{Q_{2i}}{T_{2i}} + \frac{Q_{2i-1}}{T_{2i-1}} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{2m} \left(\frac{Q_{2i}}{T_{2i}} + \frac{Q_{2i-1}}{T_{2i-1}} \right) = 0 \Rightarrow \sum_{J=1}^{N} \left(\frac{Q_J}{T_J} \right) = 0$$

Se gli scambi di calore avvengono in forma reversibile:

$$\sum_{J=1}^{N} \left(\frac{Q_J}{T_J} \right) \geq 0 \quad , \quad T_2 > T_1 \Rightarrow \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} \geq 0 \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} \leq \frac{T_1}{T_2}$$

$$\eta_{IRR} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} \geq 1 - \frac{T_1}{T_2} = \eta_{REV} \quad \text{(NO)}$$

$$\sum_{J=1}^{N} \left(\frac{Q_J}{T_J} \right) < 0$$

www.alessandropaghi.it

$$\frac{Q_i}{T_i} \Rightarrow \frac{dQ}{T} \Rightarrow \oint \frac{dQ}{T}$$

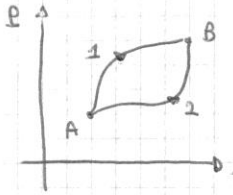
CICLO REVERSIBILE:

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{Q_j}{T_j}\right) = 0 \quad \text{oppure} \quad \oint \frac{dQ}{T} = 0$$

CICLO IRREVERSIBILE

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{Q_j}{T_j}\right) < 0 \quad \text{oppure} \quad \oint \frac{dQ}{T} < 0$$

LA FUNZIONE DI STATO ENTROPIA



Ciclo reversibile:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_1 + \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{-2}$$

$$= \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_1 - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_2$$

$$\int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_1 = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_2 = \dots = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_i$$

Se vale l'integrale $\int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{REV}$, esteso ad una qualunque trasformazione reversibile che congiunge due stati di un sistema termodinamico, è sempre lo stesso, cioè non dipende dalla particolare trasformazione reversibile scelta per eseguire il calcolo.

$$\int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{REV} = S_B - S_A = \Delta S \quad : \text{ENTROPIA} \quad (*)$$

È definita a meno di una costante additiva arbitraria.

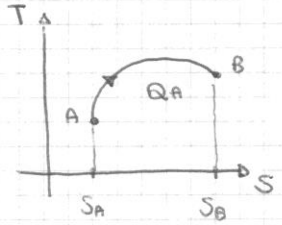
$dS = \left(\frac{dQ}{T}\right)_{REV}$. L'entropia è una quantità additiva.

Per il calcolo della variazione di entropia nella trasformazione irreversibile da A a B basta scegliere una qualsiasi trasformazione reversibile che colleghi A e B ed applicare a questa (*).

ENTROPIA: $\frac{J}{K}$

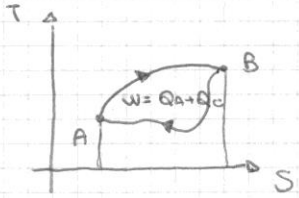
www.alessandropaghi.it

DIAGRAMMI TS



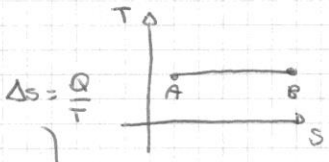
Trasformazione reversibile.

$dQ_{REV} = T\,dS \Rightarrow Q_{REV} = \int_A^B T\,dS$

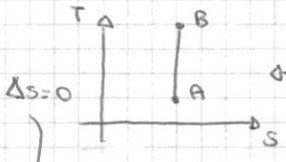


Ciclo reversibile.

$W = Q_A + Q_C \qquad \eta = \frac{W}{Q_A} < 1$

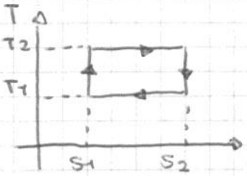


ISOTERMA REVERSIBILE



ADIABATICA REVERSIBILE

← Isoentropica: non varia l'entropia.



Ciclo di Carnot.

$Q_A = \int_{S_1}^{S_2} T\,ds = T_2 (S_2 - S_1)$

$Q_C = \int_{S_1}^{S_2} T\,ds = T_1 (S_1 - S_2)$

$Q = Q_A + Q_C = (T_2 - T_1)(S_2 - S_1) = W$

$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$

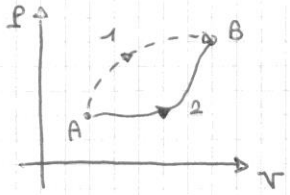
$S_2 - S_1 = \frac{Q_A}{T_2} = -\frac{Q_C}{T_1} \Rightarrow W = (T_2 - T_1)(S_2 - S_1) = \frac{(T_2 - T_1)\,Q_A}{T_2}$

ISOTERMA REVERSIBILE: $\Delta S = Q/T$.

ADIABATICA REVERSIBILE: $\Delta S = 0$.

TRASFORMAZIONE CICLICA: $\Delta S = 0$.

IL PRINCIPIO DI AUMENTO DELL'ENTROPIA



Ciclo irreversibile.

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_1 + \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{-2} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{IRR} - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{REV} < 0$$

$$S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{dQ}{dT}\right)_{REV} > \int_A^B \left(\frac{dQ}{dT}\right)_{IRR}$$

$$dS = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_{REV} > \left(\frac{dQ}{dT}\right)_{IRR} \qquad dQ = 0 \Rightarrow S_A - S_A \geq 0 \Rightarrow S_B \geq S_A$$

L'entropia di un sistema termicamente isolato non può diminuire: essa aumenta se la trasformazione è irreversibile, resta costante solo se la trasformazione è reversibile.

PRINCIPIO DI AUMENTO DELL'ENTROPIA

$S_B - S_A \geq 0 \Rightarrow S_B \geq S_A$
$dS \geq 0$
$\Big\}\ dQ = 0.$

↳ Formulazione matematica del II principio della termodinamica.

$\Delta S_U \geq 0$ con $\Delta S_U = \Delta S_{SIST} + \Delta S_{A\to B}$

Trasformazione reversibile: $\Delta S_U = 0 \Rightarrow \Delta S_{SIST} = -\Delta S_{A\to B}$
Trasformazione irreversibile: $\Delta S_U > 0 \Rightarrow \Delta S_{SIST} \neq -\Delta S_{A\to B}$

Trasformazione ciclica: $\Delta S_{SIST} = 0$
- Reversibile: $\Delta S_U = \Delta S_{A\to B} = 0$.
- Irreversibile: $\Delta S_U = \Delta S_{A\to B} > 0$.

L'irreversibilità è sempre accompagnata da un aumento dell'entropia dell'universo.

Ogni processo naturale si svolge necessariamente nel verso che determina un aumento dell'entropia complessiva del sistema e del suo ambiente.

www.alessandropaghi.it

CALCOLI DI VARIANZA DI ENTROPIA

TRASFORMAZIONI ADIABATICHE

$\Delta S_{AHB} = 0$

$\Delta S_{SIST} = \Delta S_U \geq 0$

Trasformazione reversibile: $\Delta S_{SIST} = 0$

Trasformazione irreversibile: $\Delta S_{SIST} > 0$

$dQ = 0 \not\Rightarrow dS = 0$

Due stati collegati con una adiabatica irreversibile hanno necessariamente entropia diversa e non possono quindi essere collegati con una adiabatica reversibile, che è isoentropica.

SCAMBI DI CALORE CON SORGENTI

$T_1 < T_2$

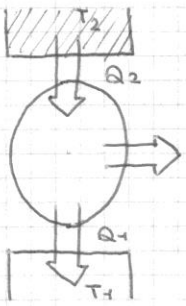
$$\Delta S_1 = \int_A^B \frac{dQ}{T_1} = \frac{1}{T_1}\int_A^B dQ = \frac{Q}{T_1}$$

$$\Delta S_2 = -\frac{Q}{T_2}$$

$$\Delta S_U = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{Q}{T_1} - \frac{Q}{T_2} = Q\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) > 0$$

$|\Delta S_2| < \Delta S_1$

} CESSIONE DI CALORE DA T_2 A T_1



$$\Delta S_U = \Delta S_{AHB} = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = -\left(\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}\right) \geq 0$$

} CESSIONE DI CALORE TRAMITE UNA MACCHINA

Processo irreversibile. [SCAMBIO DI CALORE FRA UN CORPO E UNA SORGENTE]

$T_1 + dT, T_1 + 2dT, \ldots, T_2 \qquad dQ = mc\,dT$

$$\Delta S_{SIST} = S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} mc\frac{dT}{T} = mc\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$T_1 < T_2 \Rightarrow S$ aumenta

$T_2 < T_1 \Rightarrow S$ diminuisce

$Q = mc(T_2 - T_1)$

$$\Delta S_{AHB} = -\frac{Q}{T_2} = -\frac{mc(T_2 - T_1)}{T_2}$$

$$\Delta S_U = \Delta S_{SIST} + \Delta S_{AHB} = mc\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + mc\frac{(T_1 - T_2)}{T_2} > 0$$

$T_2 > T_1 \Rightarrow dS_{SIST} = \frac{mc\,dT}{T}$, $dS_{AHB} = -\frac{mc\,dT}{T_2}$ $\qquad T_1 < T_2 \Rightarrow dS_{SIST} > |dS_{AHB}|$

www.alessandropaghi.it

$\Delta S_{SIST} = mc \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) > \frac{mc|T_2 - T_1|}{T_2} = |\Delta S_{AMB}|$

$T_1 > T_2 \Rightarrow T > T_2 \Rightarrow dS_{AMB} > |dS_{SIST}|$, $\Delta S_U > 0$

$\left(\frac{dQ}{T}\right)_{REV} = mc\frac{dT}{T}$

$\left(\frac{dQ}{T}\right)_{IRR} = mc\frac{dT}{T_2}$

$T_2 > T_1 \Rightarrow dT > 0$, $T < T_2$, $\frac{dT}{T} > \frac{dT}{T_2}$

$T_2 < T_1 \Rightarrow dT < 0$, $T > T_2$, $\frac{dT}{T} > \frac{dT}{T_2}$

SCAMBI DI CALORE TRA DUE CORPI

I) m_1 ; c_1 ; T_1 .

II) m_2 ; c_2 ; $T_2 > T_1$.

Scambio di calore irreversibile per raggiungere l'equilibrio termico:

$T_e = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$

$\Delta S_1 = m_1 c_1 \ln\left(\frac{T_e}{T_1}\right) > 0$; $\Delta S_2 = m_2 c_2 \ln\left(\frac{T_e}{T_2}\right) < 0$

$\Delta S_U = \Delta S_1 + \Delta S_2 > 0$

CAMBIAMENTI DI FASE

$\Delta S = \frac{m\lambda}{T}$

RISCALDAMENTO PER ATTRITO

$W = U_A - U_B < 0$

$Q = U_A - U_B = W$

Viene subita una trasformazione ciclica.

$\Delta S_{AMB} = -\frac{Q}{T_{AMB}} = -\frac{W}{T_{AMB}} = \Delta S_U > 0$

www.alessandropaghi.it

ENTROPIA DEL GAS IDEALE

m moli di gas

$A = (p_A, V_A, T_A) \rightarrow B(p_B, V_B, T_B)$

$dQ = m c_v dT + dW$

AB reversibile: $dW = pdV$, $pV = mRT \Rightarrow dW = mRT \frac{dV}{V}$

$$S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{REV} = \int_A^B m c_v \frac{dT}{T} + \int_A^B mR \frac{dV}{V}$$

$$S_B - S_A = m c_v \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + mR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

$$S_B - S_A = m c_v \ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right) + m c_p \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

$$S_B - S_A = m c_p \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) - mR \ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right)$$

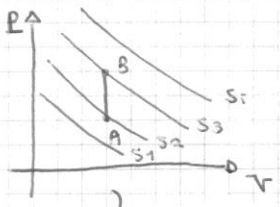
La variazione di entropia dipende dalle coordinate termodinamiche.

ISOTERMA: $S_B - S_A = mR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -mR \ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right)$

ISOCORA: $S_B - S_A = m c_v \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = m c_v \ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right)$

ISOBARA: $S_B - S_A = m c_p \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = m c_p \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$

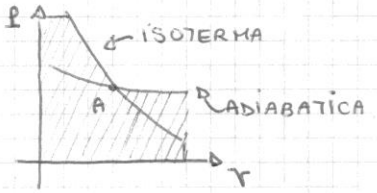
TRASFORMAZIONI ADIABATICHE



$pV^\gamma = \text{costante}$

$S_3 - S_2 = m c_v \ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right) \Rightarrow S_3 > S_2$

↳ CURVE ISOENTROPICHE, ADIABATICHE REVERSIBILI



www.alessandropaghi.it

ENERGIA INUTILIZZABILE

Con l'aumento dell'entropia dell'universo si ha la perdita di disponibilità di lavoro.

A) ESPANSIONE LIBERA.

$W = Q = 0$

$\Delta S_U = nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$

$W_R = nRT \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = T\Delta S_U$

$W_R - W = T\Delta S_U$

B) PASSAGGIO DI CALORE DA UNA SORGENTE CALDA A UNA FREDDA

$T_1 < T_2$

$W = 0$

$\Delta S_U = -\frac{Q}{T_2} + \frac{Q}{T_1}$

$W_R = Q\eta_R = Q\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = T_1\Delta S_U$

$W_R - W = T_1\Delta S_U$

C) MACCHINA IRREVERSIBILE CHE LAVORA TRA DUE SORGENTI

$W_R - W = Q_2\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) - (Q_1 + Q_2) = T_1\left(-\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2}\right)$

$W_R - W = T_1\Delta S_U$

In generale quando avviene un processo irreversibile in cui l'entropia dell'universo aumenta di ΔS_U, la grandezza $E_{IN} = T_0\Delta S_U$ è pari alla differenza tra il lavoro che si sarebbe potuto ottenere se il processo fosse stato reversibile e il lavoro effettivamente ottenuto; T_0 è la temperatura più bassa tra quelle delle sorgenti disponibili nell'ambiente.

L'energia inutilizzabile è pari al lavoro supplementare che bisognerebbe spendere per riportare in modo reversibile il sistema composto nello stato iniziale.

www.alessandropaghi.it

CONCLUSIONI TERMODINAMICHE SULL'ENTROPIA

PRINCIPIO EQ. TERMICO : Temperatura.

1° PRINCIPIO : Energia interna.

2° PRINCIPIO : Entropia.

L'aumento di entropia dell'universo è la segnale dell'irreversibilità.

TERZO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

La variazione di entropia associata ad una trasformazione reversibile di un sistema tende a 0 al tendere a 0 della temperatura termodinamica assoluta.

I calori specifici devono tendere a 0 al tendere a 0 della temperatura.

Il coefficiente di dilatazione termica di ogni sostanza tende a 0 per $T \to 0$.

Con un numero finito di processi non è possibile raggiungere lo zero assoluto.

www.alessandropaghi.it