FISICA 1

[Fotocopie di Appunti]

A CURA DI MARCO BROGI

PROFESSORE: Valerio Biancalana (http://www3.diism.unisi.it/people/person.php?id=9)

LINK AL CORSO ANNO 2013/2014:
http://www3.diism.unisi.it/FAC/index.php?bodyinc=didattica/inc.insegnamento.php&id=54678&aa=2013

FREQUENTAZIONE: Consigliata.

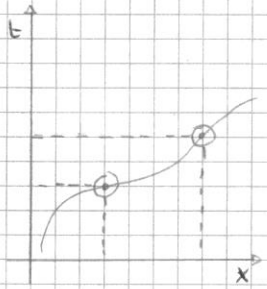
- CINEMATICA (BASI)
- GEOMETRIA + TEMPO

$\vec{S} = (x, y, z)$ $\quad \vec{S}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

↳ VETTORE ↳ COORDINATE DEL VETTORE IN FUNZIONE DEL TEMPO

TEMPO	POSIZIONE
t_1	$\vec{S}_1$
t_2	$\vec{S}_2$
t_3	$\vec{S}_3$

TEMPO	x	y	z
$t_1 \pm \Delta t_1$	$x_1 \pm \Delta x_1$	$y_1 \pm \Delta y_1$	$z_1 \pm \Delta z_1$
$t_2 \pm \Delta t_2$	$x_2 \pm \Delta x_2$	$y_2 \pm \Delta y_2$	$z_2 \pm \Delta z_2$
$t_3 \pm \Delta t_3$	$x_3 \pm \Delta x_3$	$y_3 \pm \Delta y_3$	$z_3 \pm \Delta z_3$
...	...	...	...
$t_m \pm \Delta t_m$	$x_m \pm \Delta x_m$	$y_m \pm \Delta y_m$	$z_m \pm \Delta z_m$



$\vec{x} = x(t) \quad \vec{y} = y(t) \quad \vec{z} = z(t)$

↳ IN FUNZIONE DEL TEMPO

- NOTAZIONI: DIMENSIONI E UNITÀ DI MISURA

$x(t) \longrightarrow$ x è una LUNGHEZZA e si misura in METRI $\quad x = [L]$ → lunghezza

t è un TEMPO e si misura in SECONDI $\quad t = [T]$ → tempo

esempio:

$x(t) = A \cdot \sin(t)$ (SBAGLIATO!) non si può calcolare il seno di un certo tempo, solo di un certo valore in radianti

$x(t) = A \cdot \sin(\omega t)$ → è un angolo $\quad \omega t = \frac{\text{angolo} \cdot \cancel{\text{tempo}}}{\cancel{\text{tempo}}}$

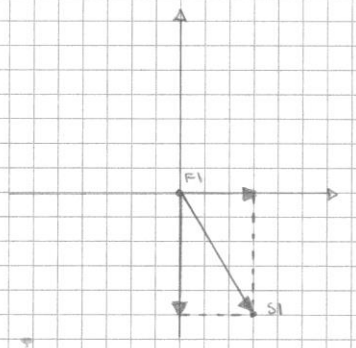
ω ha le dimensioni di un angolo / tempo; si usa sempre il radianti come unità di misura

Così facendo si evitano problemi con la derivazione.

RADIANTE = $\frac{\text{Lunghezza arco}}{\text{Lunghezza raggio}}$

$x(t) = A \cdot \sin(t)$ meno (SBAGLIATO!) non ha senso poiché A include al suo interno la lunghezza

Non tutte le grandezze fisiche sono bene rappresentate con singoli numeri (più l'unità di misura)

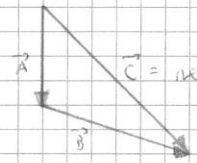


dimensione

$\vec{S} = (S_x, S_y)$ → coordinate del vettore

↳ vettore

$\vec{S} = (S_x, S_y)$ m portandoci dietro l'unità di misura in forma vettori analoghi a quelli trattati in algebra lineare.



$\vec{C}$ = vettore somma dei vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$

• Un vettore è:
Una quantità caratterizzata da: INTENSITÀ, DIREZIONE, VERSO (considerandoli come vettori non applicati)

125 cm = 1 metro, 2 decimetri, 5 centimetri non si dice nella sua MILLIMETRI

125/3 = 41,66666666... cm non ne tiene! non si comportano tutte le altre

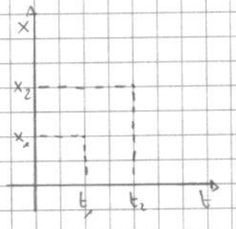
se tiene 125,2/3 = 41,7333333... cm

se tiene 124,81/3 = 41,6 cm

=> 41,666666... → 41,7 ok!

VELOCITÀ MEDIA E RAPPORTO INCREMENTALE

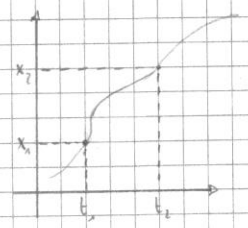




$$\text{velocità media} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \langle v \rangle$$

i valori usati sono frutto di misurazioni

Considerando la velocità media, non sappiamo mai il comportamento del corpo durante il tempo tra t_1 e t_2.



Velocità istantanea:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = v(t)$$

N.B. in questo caso, per poter fare il limite, dobbiamo conoscere la funzione in maniera teorica

esempio:

$x(t) = A + Bt + Ct^5$

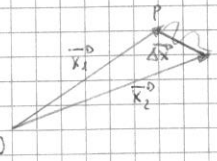
- la dim di A è una lunghezza
- la dim di B è $\frac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}}$
- la dim di C è $\frac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}^5}$

} con questi due esempi otteniamo come risultato una lunghezza

$v(t) = B + 5Ct^4$ (derivata di $x(t)$)

L'oggetto è fermo quando la velocità è 0:

$$B + 5Ct^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^4 = -\frac{B}{5C} \quad \Rightarrow \quad t = \pm\sqrt[4]{-\frac{B}{5C}}$$



$$\frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{\Delta x}}{\Delta t} \qquad OP + PP' = OP'$$

il vettore posizione è quello spiccatamente tramite la sua natura fisica

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{x}(t+\Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} = \vec{v}(t)$$

Consideriamo un vettore posizione $\vec{s} = (x, y, z)$

$\vec{s}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$\frac{(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t)) - (x(t), y(t), z(t))}{\Delta t}$$

Facendo $\lim_{\Delta t \to 0}$ di questa quantità otteniamo come risultato: $(v_1(t), v_2(t), v_3(t))$

www.alessandropaghi.it



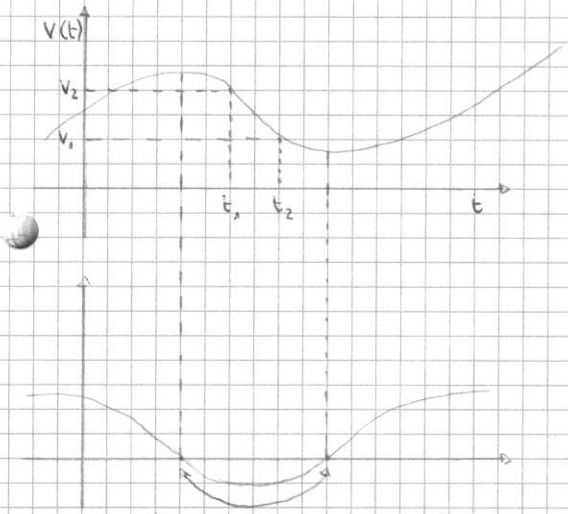
$\Delta \vec{S} = \cancel{V \cdot \Delta t}$ non lo vedremo! Perché non supponiamo quella velocità costante nel nostro calcolo

$\Delta \vec{S} = V \cdot \Delta t$ Lo vedremo nel momento in cui consideriamo intervalli di tempo molto piccoli, nei quali possiamo considerare la velocità come costante.

$dS = V \cdot dt$

$\Delta S = \int dS = \int V \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\, dt$ quello è il caso in cui $V(t)$ è una costante

$= V \cdot (t_2 - t_1)$

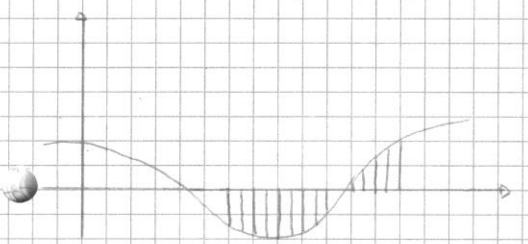


$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t}$$

ACCELERAZIONE

quando il grafico cresce, la velocità aumenta

0 in corrispondenza del massimo e del minimo



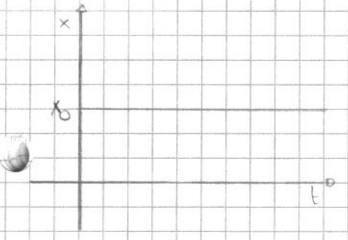
$dV = a \cdot dt$

$V(t) = V_0 + \int_{t_0}^{t} a(t')\, dt'$

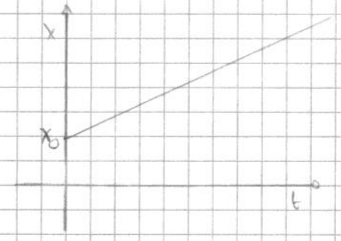
↳ questo tempo si riferisce a t

TRE CASI PARTICOLARI

- V identicamente nulla $\Delta S = \int_0^t 0\, dt' = 0$
- V costante $\Delta S = \int_{t_0}^{t} V(t')\, dt' = \int_{t_0}^{t} V\, dt' = V \int_{t_0}^{t} dt' = V(t - t_0)$
- V con andamento costante



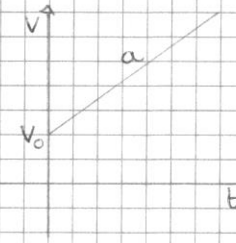
1 se conosco x_0 rimango fermo



2 se V è costante effettuo il moto uniforme dove la x cresce con il tempo t in modo proporzionale

www.alessandropaghi.it

3 membrane contrarie: moto uniformemente accelerato



$$v(t) = v_0 + \int_0^t a\,dt$$

$t_0 = 0$

$$v(t) = v_0 + at$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t')\,dt' = x_0 + \int_0^t (v_0 + at')\,dt' = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

(vale solo con accelerazione costante)

trovare $x(t)$, nota $v(t)$ e x_0

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_2} v(t')\,dt'$$

trovare $v(t)$ e $x(t)$, note x_0, v_0 e $a(t)$

$$v(t) = v(t_0) + \int_0^t a(t')\,dt'$$

$$x(t) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t} v(t'')\,dt'' = x(t_1) + \int_{t_1}^{t} \left[v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t')\,dt' \right] dt''$$

MOTO ARMONICA 1-D

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Analisi dimensionale: - dimensione di A: lunghezza

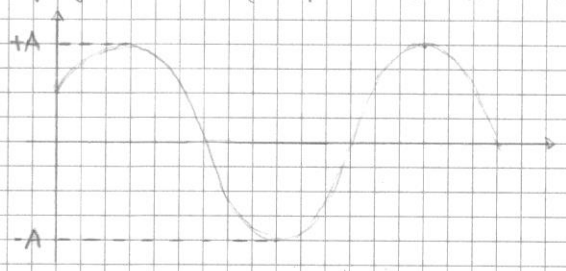
- dimensione di ω: $\frac{\text{angolo}}{\text{tempo}} \rightarrow T^{-1}$

- dimensione di ϕ: angolo (adimensionale), questa condizione serve per far diventare senso il coseno (dunque valore di $\pi/2$ ad esempio)

N.B. Definizione di radiante: $\frac{\text{arco}}{\text{raggio}}$ 

Significato dei parametri:

significato di A (ampiezza di oscillazione)



N.B



SBAGLIATO!

significato di ω (frequenza angolare, pulsazione)

ωt è un angolo $\cos x = \cos(2\pi + x)$

$\omega t \rightarrow \omega(t+T) = \omega t + 2\pi$

$$\omega t + \omega T = \omega t + 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Conoscendo ω o T, conosciamo anche la frequenza (ν)

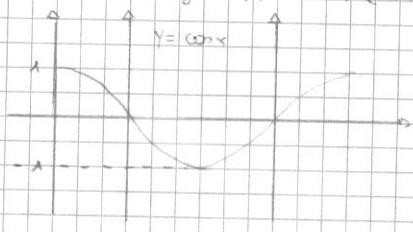
$\nu = f = \frac{1}{T}$ (la stessa lettera è "nu" ν) $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ $\omega = 2\pi\nu$

www.alessandropaghi.it

significato di ϕ (fase)

$\cos(\omega t + \varphi)$

$\cos(\omega(t - t_0) + \varphi) = \cos(\omega t - \underbrace{\omega t_0 + \varphi}_{B})$



ϕ quindi non è importantissimo (o almeno non lo è perlomeno di un solo moto armonico) ed è come sopra quello di stabilire l'origine dei tempi.

esercizio

$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

Calcolare $V(t)$

Facciamo quindi la derivata di $x(t)$: $V(t) = -A\,\text{sen}(\omega t + \phi)\cdot\omega = -\omega A \cdot \text{sen}(\omega t$

- La fase di $x(t)$ e quella di $V(t)$ hanno sfasato di $\pi/2$ in quanto una è in coseno e l'altra è in seno

Calcoliamo ora $a(t)$

Deriviamo quindi $V(t)$: $a(t) = \frac{dV}{dt} = -\omega A\cos(\omega t+\phi)\cdot\omega = -\omega^2 \cdot A\cos(\omega t+\phi) = -\omega^2 x$

Determinazione di tali parametri:

Nota $x(0)$ e $V(0)$ trovare A e ϕ

① $x(0) = 0$ e $V(0) = V_0$

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$V(t) = -\omega A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$

$$\begin{cases} A\cos(0\cdot t + \varphi) = 0 \\ -\omega A\,\text{sen}(\omega t + \varphi) = V_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\cos(\varphi) = 0 \\ -A\omega\,\text{sen}(\varphi) = V_0 \end{cases}$$

A non può mai essere 0, altrimenti anche la seconda equazione sarebbe 0; $\cos(\varphi) = 0$ per $\pm\pi/2$

consideriamo $\varphi = \pi/2$

$$\begin{cases} \varphi = \pi/2 \\ -A\omega = V_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \pi/2 \\ A = -\frac{V_0}{\omega} \end{cases}$$

consideriamo $\varphi = -\pi/2$

$$\begin{cases} \varphi = -\pi/2 \\ A\omega = V_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = -\pi/2 \\ A = \frac{V_0}{\omega} \end{cases}$$

Le soluzioni sono in realtà infinite, poiché per x lo sempre lo stesso ordine mentre il coseno è negativo con ampiezza negativa, è positivo con ampiezza positiva

② $x(0) = x_0$ e $V(0) = 0$

$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \Rightarrow V(t) = -\omega A\,\text{sen}(\omega t + \phi)$

$A\cos\varphi = x_0$ $\quad -\omega A\,\text{sen}(\varphi) = 0$

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ x_0 = A \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \varphi = \pi \\ x_0 = -A \end{cases}$$

$\Downarrow$ $\quad\quad$ $\Downarrow$

$x_0\cos(\omega t + 0)$ $\quad\quad$ $-x_0\cos(\omega t + \pi)$

www.alessandropaghi.it

3

Il caso più generale:

③ $x(0) = x_0$ e $V(0) = V_0$

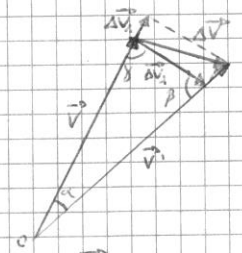
$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \Rightarrow V(t) = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ V_0 = -A\omega \operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

Risolviamo il sistema non lineare

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ -\dfrac{V_0}{\omega} = A\operatorname{sen}\varphi \quad \text{divisione per } (\omega) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{V_0}{\omega x_0} = \operatorname{tg}\varphi & \text{divisione della II equazione per la I} \\ x_0^2 + \dfrac{V_0^2}{\omega^2} = A^2 & \text{somma dei quadrati delle due equazioni} \end{cases}$$

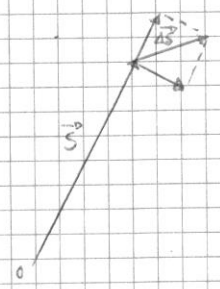
$$\begin{cases} \varphi = \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{V_0}{\omega x_0}\right) & \text{calcolando l'arctg mi dà la calcolatrice e poi devo fare che l'angolo restituito ma "sbagliato" di } \pi \\ A = \pm\sqrt{x_0^2 + \dfrac{V_0^2}{\omega^2}} & \text{per scegliere A positiva o negativa dobbiamo ragionare sul segno di } x_0 \text{ e } V_0 \end{cases}$$



Se consideriamo un $\Delta\vec{v}$ parallelo, e prendiamo in analisi solo la componente perpendicolare, se l'angolo α è simile a $0°$, β e γ sono simili a $90°$: in questo caso la componente fa cambiare solo la direzione del vettore $\vec{v}$ ma non la sua lunghezza. Se invece cambia la componente parallela fa cambiare solo la lunghezza di $\vec{v}$, ma non la sua direzione.

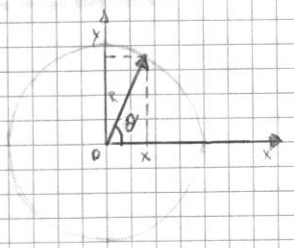
$\lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{a}$ (se $\Delta t \to 0$ e quindi è infinitesimo, lo sarà anche $\Delta\vec{v}$)

$\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}$ è accelerazione istantanea e scomposta in due componenti, una parallela e una perpendicolare a $\vec{v}$



$\lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{s}}{\Delta t} = \vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$ velocità istantanea

MOTO CIRCOLARE



$x(t) = R\cos(\vartheta(t))$

$y(t) = R\operatorname{sen}(\vartheta(t))$

$\dfrac{d\vartheta}{dt} = \dot{\vartheta}$ $\qquad \dfrac{d^2}{dt^2} = \ddot{\vartheta}$

Calcoliamo $V(t)$ e $a(t)$

www.alessandropaghi.it

$$v_y(t) = \dot{y}(t) = R\cos(\theta(t)) \cdot \dot{\theta} = \dot{\theta} R \cos(\theta(t))$$

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = -R\,\mathrm{sen}(\theta(t)) \cdot \dot{\theta} = -\dot{\theta} R\,\mathrm{sen}(\theta(t))$$

$$a_y(t) = \dot{v}_y = \ddot{y} = \ddot{\theta} R\cos(\theta(t)) + (-R\,\mathrm{sen}(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}) \cdot \dot{\theta}$$

$$a_x(t) = \dot{v}_x = \ddot{x} = -R\cos(\theta(t)) \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\theta} + \ddot{\theta}(-R\,\mathrm{sen}(\theta(t)))$$

derivata della posizione per $-\dot{\theta}^2$ = derivata della velocità per $\ddot{\theta}$

$\vec{a}$ è quindi combinazione lineare di $\vec{s}$ e $\vec{v}$

$$\vec{a} = -\dot{\theta}^2 \vec{s} + \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} \vec{v}$$

N.B. la derivata della posizione può variare solo se $\Delta s_\perp$ e $\Delta s_\parallel$ è costante

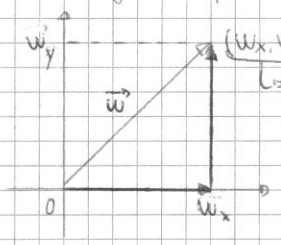
a RADIALE: quanto bene, sempre negativa e quindi a tendere al centro

a TANGENZIALE: può variare, da positiva a negativa o nulla a seconda del valore di $\ddot{\theta}$ è $\ddot{\theta}$

$\vec{a}$ è quindi $\vec{a}_c$ (+ $\vec{a}_T$) vettori componenti dell'accelerazione

- $\vec{a}_c$ → accelerazione centripeta (c'è sempre)
- $\vec{a}_T$ → accelerazione tangenziale (può essere con qualche segno)

N.B. in generale possiamo scomporre un vettore in due componenti



$(w_x, w_y) = \vec{w} = \vec{w_x} + \vec{w_y}$

- componenti del vettore
- i vettori componenti

$(\vec{w_x}, \vec{w_y})$ NO! non può essere un vettore di vettori, ma una matrice

Modulo dell'accelerazione centripeta

$$\vec{a_c} = -\dot{\theta}^2 \cdot \vec{s} \Rightarrow |\vec{a_c}| = \dot{\theta}^2 \cdot |\vec{s}| = \dot{\theta}^2 R \rightarrow \text{sempre della stessa}$$

Velocità (tangenziale) (è sempre in quanto nel moto circolare la velocità è sempre perpendicolare al raggio, quindi tangenziale)

$$v_x = -\dot{\theta} R\,\mathrm{sen}(\theta(t))$$

$$v_y = \dot{\theta} R\cos(\theta(t))$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{R^2\dot{\theta}^2} = |R\dot{\theta}|$$

scrivendo $R\dot{\theta}$, se è <0 stiamo girando in senso orario, se è >0 stiamo girando in senso antiorario

Accelerazione tangenziale

$$\vec{a}_T = \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} \vec{v} = \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} \cdot R \cdot \dot{\theta}\, \hat{u}_t = \ddot{\theta} \cdot R \cdot \hat{u}_T$$

$\hat{u}_t$ → VERSORE: vettore unitario che serve ad indicare il verso ed è quando >0 quando si gira in senso antiorario, <0 quando si gira in senso orario

nel caso in cui $\ddot{\theta} = 0$, l'accelerazione non ha la componente tangenziale

esercizio:

se $d^2\theta/dt^2 = 0$, allora $\vec{a}$ ha solo la componente centripeta

$$\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \text{costante} = \omega \Rightarrow \theta = \theta_0 + \int_0^t \omega\, dt'$$

www.alessandropaghi.it

caso particolare: $\theta(t) = \omega t + \phi$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

modulo dell'accelerazione centripeta:

$|\vec{a}_c| = \dot{\theta}^2 R = \omega^2 R$

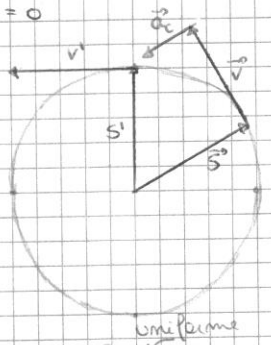
modulo della velocità (tangenziale):

$|\vec{v}_T| = |\omega R|$

$\vec{v}_T = \omega R \, \hat{u}_t$

Nel moto circolare uniforme l'accelerazione tangenziale è 0

$\vec{a}_T = 0$



l'accelerazione è perpendicolare alla velocità

uniforme

Moto circolare come composizione di moti armonici

$\theta(t) = \omega t + \phi$

$\vec{s} = (R\cos(\omega t + \phi), R\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi))$ le due componenti del moto circolare uniforme sono due moti armonici

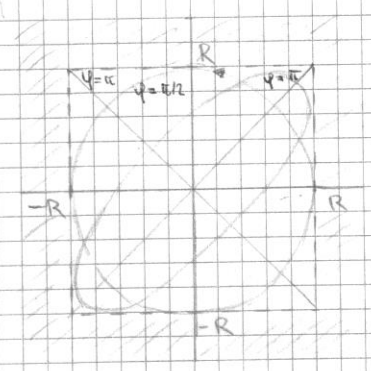
$s_x = R\cos(\omega t + \phi)$

ampiezza — pulsazione (in questo caso uguale alla velocità angolare)

$\vec{s} = \left(R\cos(\omega t + \phi), 2R\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ (moto con stessa fase, ma ampiezza diversa)

consideriamo:

$x = R\cos(\omega t)$ $\quad y = R\cos(\omega t + \varphi)$ (moto con stessa ampiezza ma con fase diversa)



$\varphi = \pi \Rightarrow$ segmenti del quadrato (ellissi degeneri)

$\varphi = \pi/2 \Rightarrow$ circonferenza (ellisse particolare)

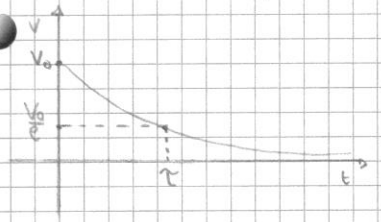
In generale con un'ampiezza ed una fase, componendo i due moti armonici che consideriamo il moto circolare uniforme si ottiene come grafico del moto un'ellisse

www.alessandropaghi.it

Esercizio:

$v(t) = V_0 \cdot e^{-t/\tau}$ ha le dimensioni di un tempo

τ dimensionalmente è un numero ma deve la dimensione alla velocità



$V(0) = V_0 \cdot e^{-0/\tau} = V_0 \cdot e^{0} = V_0$

$V(\tau) = V_0 \cdot e^{-\tau/\tau} = V_0 \cdot e^{-1} = \frac{V_0}{e}$

Calcoliamo l'accelerazione:

$a = \dot{V} = -\frac{1}{\tau} \cdot V_0 \cdot e^{-t/\tau}$ è negativa, infatti come vediamo nel grafico sopra, la velocità diminuisce nel tempo

$S = S_0 + \int_0^t v(t')\,dt' = S_0 + V_0 \int_0^t e^{-t/\tau}\,dt = S_0 + V_0(-\tau) \cdot \int_0^{-\frac{t}{\tau}} e^{-t/\tau}\,d\left(-\frac{t}{\tau}\right) =$

$= S_0 + V_0 \cdot \tau \cdot [e^{-z}]_{-\frac{t}{\tau}}^{0} = S_0 + V_0\tau\,(1 - e^{-t/\tau})$ quando $t \to +\infty$ $S = S_0 + V_0\tau$

Esercizio

Si sa che un oggetto si muove (1D) con velocità dipendente dal tempo secondo la legge:

$V(t) = V_0 + W\cos(t) \qquad V_0 - W < V(t) < V_0 + W$

a) stabilire sotto quali condizioni esistono istanti in cui l'oggetto è fermo

$V_0 - W < V(t) < V_0 + W$

b) stabilire sotto quali condizioni è limitata e sotto quali diverge nel tempo

$x_1(t) = x_0 + \int_0^t V_0\,dt' + \int_0^t W\cos(\omega t)\,dt$

è limitata quando $\int_0^t V_0\,dt' = 0$, cioè $V_0 = 0$

diverge quando $t \to +\infty$

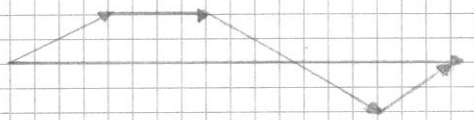
c) calcolare l'accelerazione e la posizione ad un istante generico

$x(t) = x_0 + V_0 t + \frac{W}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t)$ non possiamo calcolare però $x(t)$ in quanto non conosciamo x_0

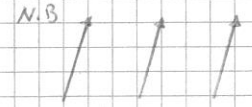
$a(t) = -W\,\mathrm{sen}(\omega t) \cdot \omega = -W\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)$

Richiami generali sui vettori

- somma fra vettori (permane a vettori spostamenti)



N.B



questi tre vettori sono uguali, cambia solo direzione ed intensità

L'intensità è la lunghezza del vettore, la direzione è la retta alla quale appartiene ed il verso è ovviamente da tale retta. Per sommare i vettori non si usa il metodo del parallelogramma, ma umendoli con il metodo punta-coda e

www.alessandropaghi.it

troncando il vettore che va dalla coda del primo alla punta dell'ultimo

- Se i vettori sono dati per componenti

$$(a,b,c) + (d,e,f) = (a+d, b+e, c+f)$$

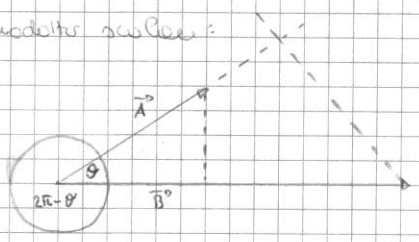
Prodotto del vettore per uno scalare

$$\underset{m\in\mathbb{N}}{m}(a,b) = (\underbrace{a+a+a+\dots a}_{m\text{-volte}}, \underbrace{b+b+b+\dots b}_{m\text{-volte}}) = (ma, mb)$$

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{x}(a,b) = (xa, xb)$$

Prodotto tra due vettori:

prodotto scalare:



$(\vec{A}, \vec{B})$

$\vec{A} \times \vec{B}$

$\langle \vec{A} \mid \vec{B} \rangle$

$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cos\vartheta$

NB $\cos\vartheta = \cos(-\vartheta) = \cos(2\pi - \vartheta)$

Se $\vartheta = \pi/2$ il prodotto scalare si annulla

Se $\vartheta = 0$ il risultato è massimo e positivo

Se $\vartheta = \pi$ il risultato è massimo in modulo, ma negativo

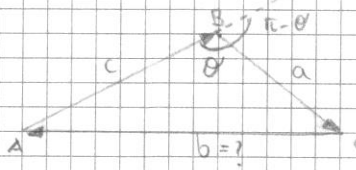
Il senso di ritorno di una circonferenza fornisce prodotto scalare omogeneo nullo e prodotto scalare con se stesso unitario:

$\langle \vec{u}_x, \vec{u}_x \rangle = 1 = \langle \vec{u}_y, \vec{u}_y \rangle = 1 = \langle \vec{u}_z, \vec{u}_z \rangle = 1$

$\langle \vec{u}_x, \vec{u}_y \rangle = 0 = \langle \vec{u}_y, \vec{u}_z \rangle = 0 = \langle \vec{u}_x, \vec{u}_z \rangle = 0$

quindi: $\langle (1,2,3), (6,5,6) \rangle = \langle (1\vec{u}_x, 2\vec{u}_y, 3\vec{u}_z), (6\vec{u}_x, 5\vec{u}_y, 6\vec{u}_z) \rangle =$

$= 1 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$



$\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$

$b^2 = \vec{b} \cdot \vec{b} = \langle (\vec{a}, \vec{c}), (\vec{a}, \vec{c}) \rangle = a^2 + c^2 + 2\langle a, c \rangle =$

$= a^2 + c^2 + 2ac\cos(\pi - \vartheta) = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\vartheta)$

prodotto vettoriale

Si chiama così in quanto ha come risultato un vettore

$\vec{A} \wedge \vec{B} = AB \operatorname{sen}\vartheta \, \vec{u}_{\perp}$ perpendicolare al piano su cui giacciono i vettori di partenza

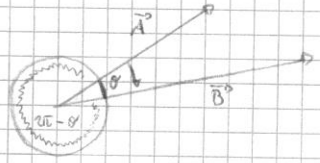
Questo prodotto è univocamente determinato se i due vettori non sono paralleli (o antiparalleli)

Da notare che il seno è una funzione dispari:

$\operatorname{sen}\vartheta = -\operatorname{sen}(-\vartheta) = -\operatorname{sen}(2\pi - \vartheta)$

www.alessandropaghi.it

Quindi dobbiamo fare attenzione a quale angolo scegliamo per il prodotto vettoriale; la convenzione vuole che gli angoli positivi siano quelli percorsi in senso antiorario. Normalmente l'angolo da considerare è quello che va dal primo vettore al secondo per la via più breve.
(NB: il verso di un vettore è positivo se è uscente dal foglio)



Prodotto vettoriale tra gli elementi della base

$\hat{x} \wedge \hat{x} = 0$ $\quad \hat{x} \wedge \hat{y} = \hat{z}$ $\quad \hat{x} \wedge \hat{z} = -\hat{y}$
$\hat{y} \wedge \hat{x} = -\hat{z}$ $\quad \hat{y} \wedge \hat{y} = 0$ $\quad \hat{y} \wedge \hat{z} = \hat{x}$
$\hat{z} \wedge \hat{x} = \hat{y}$ $\quad \hat{z} \wedge \hat{y} = -\hat{x}$ $\quad \hat{z} \wedge \hat{z} = 0$

} abbiamo come risultato una matrice antisimmetrica

$x\ y\ z\ x\ y\ z$ $\quad$ $x\ y\ z$
$\hat{x} \wedge \hat{y} = \hat{z}$ $\quad$ $\hat{z} \wedge \hat{y} = -\hat{x}$

esempio:

$(1,2,3) \wedge (4,5,6) = (1\vec{u}_x, 2\vec{u}_y, 3\vec{u}_z) \wedge (4\vec{u}_x, 5\vec{u}_y, 6\vec{u}_z) = 5\vec{u}_z - 6\vec{u}_y - 8\vec{u}_z + 12\vec{u}_x + 12\vec{u}_y - 15\vec{u}_x$
$= -3\vec{u}_x + 6\vec{u}_y - 3\vec{u}_z = (-3, 6, -3)$

$(4,0,1) \wedge (5,6,7) = (0\cdot 7 - (1\cdot 6),\ 1\cdot 5 - (4\cdot 7),\ 4\cdot 6 - (5\cdot 0)) = (-6, -23, 24)$

$\hat{x}\ \hat{y}\ \hat{z}$

$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$: il prodotto tra due vettori può essere trovato anche calcolando il determinante

$x: \begin{matrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{matrix} = -6$ $\quad$ $y: \begin{matrix} 4 & 1 \\ 5 & 7 \end{matrix} = -(+23)$ $\quad$ $z: \begin{matrix} 4 & 0 \\ 5 & 6 \end{matrix} = 24$

Natura vettoriale delle quantità angolari

θ, $\omega = d\theta/dt$ e $\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$ sono vettori?

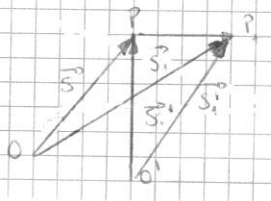
$\vec{d\theta}_2 + \vec{d\theta}_1 = \vec{d\theta}_1 + \vec{d\theta}_2$ questa uguaglianza vale solo per rotazioni infinitesime

$\frac{\vec{d\theta}}{dt}$ è un vettore $\quad$ $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ non è un vettore perché non lo è $\Delta\theta$

$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ = un vettore in quanto lo diventa facendo il limite

$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \vec{\alpha}$

Due osservatori misurano la posizione da origini diverse, cosa dicono degli spostamenti di un certo oggetto?



$\vec{\Delta S} = \vec{OP}_2 - \vec{OP}_1$
$\vec{\Delta S'} = \vec{O'P}_2 - \vec{O'P}_1$
$\vec{S} = \vec{OO'} + \vec{S}_1$
$\vec{S}_2 = \vec{OO'} + \vec{S}'_2$ $\Rightarrow \Delta S' = \Delta S$

www.alessandropaghi.it

$\vec{s} = \vec{OO'} + \vec{s'}$

$\vec{v} = \dot{\vec{s}} = \dot{\vec{OO'}} + \dot{\vec{s'}} = \dot{\vec{OO'}} + \vec{v'}$ → velocità di O rispetto ad O'

* La velocità percepita dai due osservatori dipende da $\dot{\vec{OO'}}$, la velocità relativa. Il sistema se sono fermi o uno rispetto all'altro

$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{OO'}} + \ddot{\vec{s'}} = \ddot{\vec{OO'}} + \vec{a'}$

$\vec{a} = \vec{v}_{relativa} + \vec{a'}$

L'accelerazione percepita dai due osservatori sarà la stessa nel caso in cui si muovano sempre accelerati e uno rispetto all'altro

↳ accelerazione di O rispetto ad O'

* c'è un errore, in quanto così facendo sembra che ci sia un unico tempo condiviso a cui fanno riferimento i due osservatori, pertanto così è giusto solo nel caso in cui ci troviamo in fisica a velocità costanti

LE 3 LEGGI DELLA DINAMICA

I legge: principio d'inerzia

$\vec{F}(forza) = 0 \iff \vec{a}(accelerazione) = 0$

II Legge:

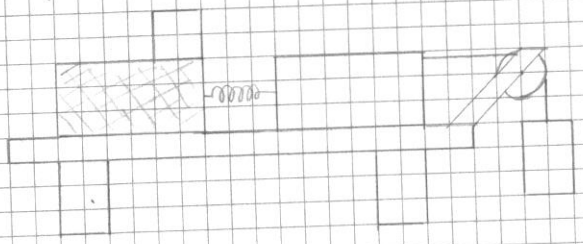
$\vec{F} = m(massa) \cdot \vec{a}$ ipotesi di linearità

La massa ha la proprietà di essere additiva

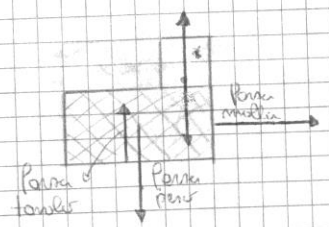
III legge: principio di azione e reazione

$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

MB: queste non sono formule, sono LEGGI



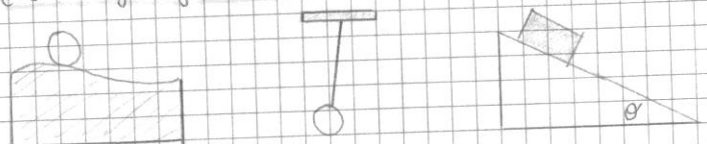
Un situazioni di questo tipo dobbiamo prendere in considerazione con oggetti alla volta



* queste due forze non sono necessariamente uguali alla forza peso del blocco inserito se quella giusta; lo sono nel caso in cui i due corpi sono fermi

Vincoli

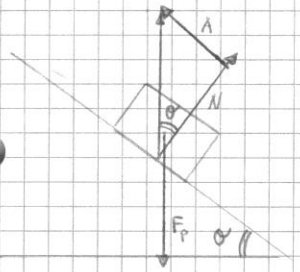
È una regola geometrica che dice cosa può e non può succedere



Consideriamo il caso del blocco sul piano inclinato



www.alessandropaghi.it



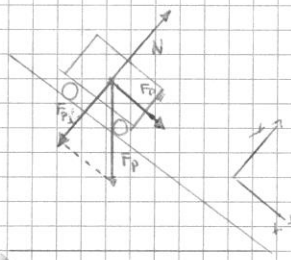
F_p = forza peso

N = reazione vincolare (reazione normale)

A = attrito

Calcoliamo:

$N = F_p \cos\theta$ $\qquad$ $A = F_p \sin\theta$



$F_x = F_p \sin\theta = m \cdot a_x = m \cdot \ddot{x}$ Forza lungo l'asse x

$F_y = -F_p \cos\theta + N = 0$ Forza lungo l'asse y

$\vec{F}_p = m\vec{g}$

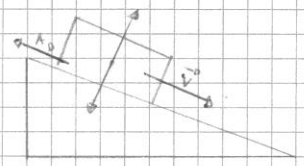
$m\vec{g}\sin\theta = m \cdot a_x \Rightarrow a_x = \vec{g}\sin\theta$

massa gravitazionale — massa inerziale

nella pratica hanno la stessa identica unità

Attriti radenti:

Attrito radente DINAMICO (c'è strisciamento tra le due superfici)



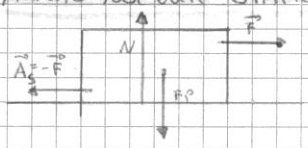
$\vec{v}$ = velocità

A_D = attrito dinamico

$\vec{F}_A = -\mu_D N \hat{u}_v$ (nei compiti va bene $F_A = \mu_D N$)

Il segno meno è dovuto al fatto che l'attrito ha verso opposto a quello della velocità (la direzione è la stessa)

Attrito radente STATICO (le due superfici non strisciano)



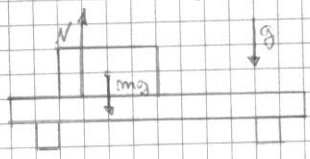
$A_S < \mu_S N$

Nel momento in cui il blocco comincia a muoversi non ha più l'attrito STATICO, ma quello DINAMICO

$F = ma \Rightarrow [F] = \overset{\text{massa}}{(M)}\ \frac{(L)\ \text{lunghezza}}{(T^2)\ \text{tempo}}$

$= Kg\ \frac{m}{s^2} = (N) \rightarrow$ Newton

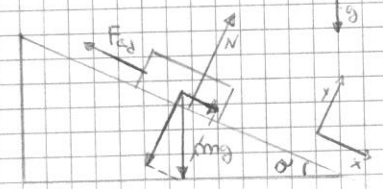
$$F = m\vec{a} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \dot{m}\vec{v} + m\dot{\vec{v}} = m\vec{a}$$



Qui sopra la forza peso del libro, ma il tavolo impedisce che esso sprofondi.
Il modulo di $\vec{N}$ è uguale al modulo di $m\vec{g}$ con verso di segno.

Non possiamo sapere quanto misura l'attrito statico a priori, possiamo dire solo il massimo: $A_S = max\{\mu_S N\}$

ATTRITO RADENTE DINAMICO



Scomponiamo le forze rispetto a x e y; per la forza peso otteniamo:

$y = -mg\cos\theta \qquad X = mg\sin\theta$

$-mg\cos\theta + N = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$

$mg\sin\theta - F_{a_d} = ma_x$ cioè $mg\sin\theta - \mu_D N = ma$

$\Rightarrow mg\sin\theta - \mu_D mg\cos\theta = ma$

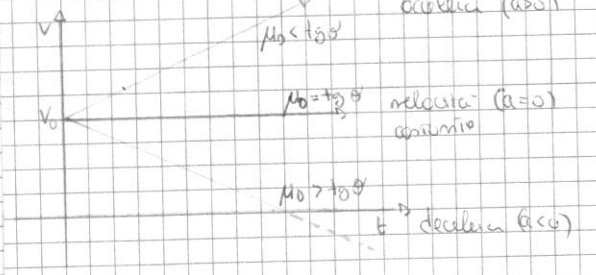
$a = g\sin\theta - \mu_D g\cos\theta$

$g\sin\theta - \mu_D g\cos\theta > 0 \Rightarrow -\mu_D g\cos\theta > -g\sin\theta \Rightarrow \mu_D\cos\theta < \sin\theta$ (sempre positivo)

con $\sin\theta\cos\theta > 0 \Rightarrow \mu_D < \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = tg\theta$ $\qquad \mu_D = tg\theta$ moto uniforme

NB: l'accelerazione è sempre positiva perché $0 < \theta < \pi/2$

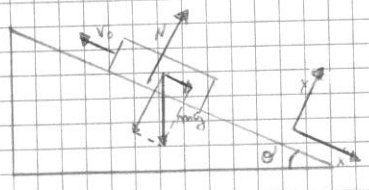
grafico di V(t)



NOTA CHE:
Se $\mu_D > tg\theta$ abbiamo una decelerazione, quindi una retta con coefficiente negativo; poiché ad un punto tocchiamo l'asse del tempo, ma non continuiamo a scendere in quanto l'oggetto si ferma.

In condizione statiche infatti: $F_{a_S} = mg\sin\theta \le \mu_S N = \mu_S mg\cos\theta \Rightarrow \mu_S > tg\theta \Rightarrow \mu_S \ge \mu_D$

ATTRITO RADENTE STATICO



Se il libro si muove inizialmente verso l'alto; quando e dove si ferma? Dopo che si è fermato torna a muoversi scendendo, oppure rimane fermo?

$N = mg\cos\theta$

$ma = mg\sin\theta + \mu_D N = mg\sin\theta + \mu_D mg\cos\theta >$ attrito dinamico

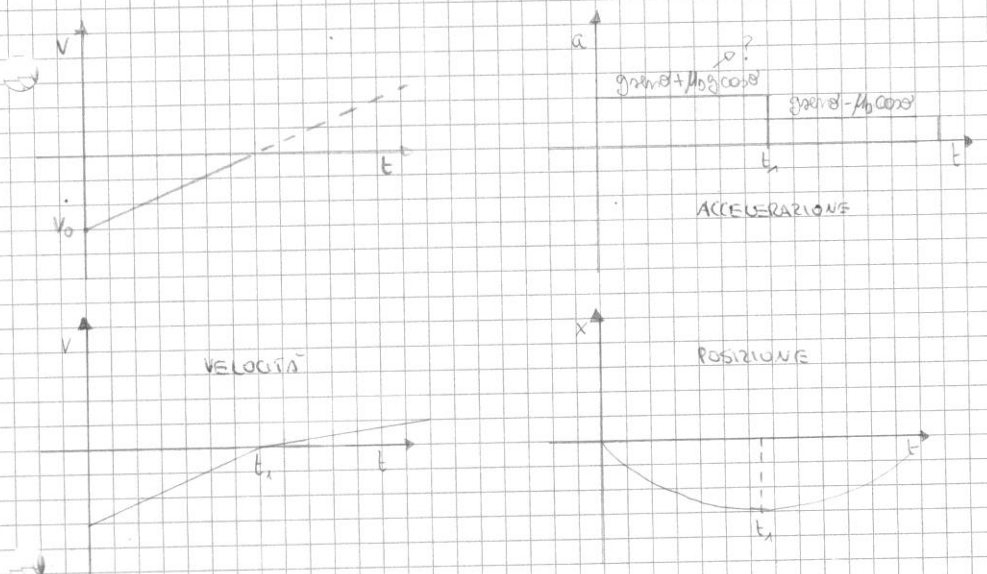
$V(t) = V_0 + \int_0^t a\,dt = V_0 + \int_0^t (g\sin\theta + \mu_D g\cos\theta)\,dt$

$V_0 + (g\sin\theta + \mu_D g\cos\theta)t = 0 \Rightarrow t = \frac{-V_0}{\ldots}$

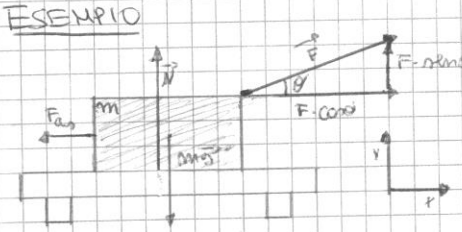
www.alessandropaghi.it

N.B. Dopo la salita c'è la discesa. Questa è garantita dal fatto che:

$\mu_D < \mu_S < tg\vartheta$



ESEMPIO



$N = mg - F\sin\vartheta$

$N = \max\{mg - F\sin\vartheta, 0\}$

x) $F\cos\vartheta - F_{a_s} = m\ddot{x}$

y) $F\sin\vartheta + F_p + N = m\ddot{y}$

se non vola:

$N = mg - F\sin\vartheta$

se $F\sin\vartheta > mg$ (vola)

$m\ddot{y} = F\sin\vartheta - mg$

se vola:

$N = 0$

$F_{a_s} < \mu_S N = \mu_S(mg - F\sin\vartheta)$ $\quad F_{a_s} \le \mu_S(mg - F\sin\vartheta)$

Quand'è che sta fermo?

CONDIZIONE DI STATICITÀ

x) $F\cos\vartheta - F_{a_s} < 0 \Rightarrow F\cos\vartheta < F_{a_s}$

$F\cos\vartheta - \mu_S(mg - F\sin\vartheta) < 0 \Rightarrow F\cos\vartheta < \mu_S(mg - F\sin\vartheta) \Rightarrow \mu_S > \dfrac{F\cos\vartheta}{mg - F\sin\vartheta}$

y) $F\sin\vartheta + N - mg \le 0$

$N \le mg - F\sin\vartheta$

Sappiamo che: $F_{a_s} < \mu_S N$

$F\cos\vartheta < \mu_S N \Leftrightarrow F\cos\vartheta < \mu_S(mg - F\sin\vartheta)$

$F\cos\vartheta < \mu_S \cdot mg - \mu_S F\sin\vartheta$

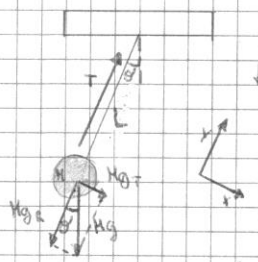
$F\cos\vartheta + \mu_S F\sin\vartheta < \mu_S mg \Leftrightarrow F(\cos\vartheta + \mu_S\sin\vartheta) < \mu_S mg$

$\Rightarrow F < \dfrac{\mu_S mg}{\cos\vartheta + \mu_S\sin\vartheta}$ CONDIZIONE DI STATICITÀ

www.alessandropaghi.it

$F\cos\vartheta - \mu_D (mg - F\sin\vartheta) = ma$

PENDOLO SEMPLICE (in piccole oscillazioni)



Mg_T = tangenziale

Mg_R = radiale

$\bar{T}$ = tensione

EQUAZIONE VETTORIALE : $\begin{cases} -mg\sin\vartheta = m\ddot{x} \\ -mg\cos\vartheta + \bar{T} = m\frac{\dot{x}^2}{T} \end{cases}$

Moto in direzione radiale

$M_{a_c} = M \cdot L \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = ML\dot{\vartheta}^2 = T - Mg_R = T - Mg\cos\vartheta$

velocità angolare al quadrato

$T = ML\dot{\vartheta}^2 + \underbrace{Mg\cos\vartheta}_{\text{max. quando } \vartheta = 0}$

Moto in direzione tangenziale

$M_{a_T} = M \cdot L \cdot \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = ML\ddot{\vartheta} = F_T = Mg_T = -Mg\sin\vartheta$

$ML\ddot{\vartheta} = -Mg\sin\vartheta \Rightarrow \ddot{\vartheta} = -\frac{g}{L}\sin\vartheta \Rightarrow \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\vartheta$

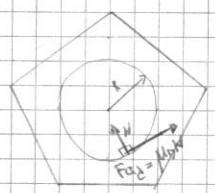
$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{L}\vartheta \rightarrow$ perdo più angoli molto piccoli, con Taylor, $\sin\vartheta = \vartheta$ EQUAZIONE DIFFERENZIALE

$\frac{d}{dt}(e^{\alpha t}) = \alpha e^{\alpha t} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\alpha e^{\alpha t}) = \alpha^2 e^{\alpha t}$ $\quad \frac{d}{dt}(\cos(\omega t+\varphi)) = -\omega\sin(\omega t+\varphi) \Rightarrow \frac{d}{dt}(-\omega\sin(\omega t+\varphi)) = -\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$

$\Rightarrow -\omega^2 = -\frac{g}{L} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

$\vartheta(t) = \vartheta_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \varphi\right)$; $\quad \vartheta_0 \ll 1$

Esercizio:



c'è attrito dinamico sulla moneta

→ forza normale ⇒ accelerazione centripeta

→ forza d'attrito dinamico (tangenziale)

$V_0 \Rightarrow a_c = V_0^2/R$ in quanto $a_c = \dot{\vartheta}^2 R$, $V = \dot{\vartheta}R \Rightarrow \dot{\vartheta} = \frac{V}{R} \Rightarrow a_c = \frac{V^2}{R^2} \cdot R = \frac{V^2}{R}$

$N = Ma_c = MV_0^2/R$ diretta verso il centro

quindi l'attrito dinamico $\Rightarrow A = \mu_D N = \mu_D M V_0^2/R$ $\quad F_{tt} = \sqrt{A^2+N^2} = \frac{MV_0^2}{R}\sqrt{1+\mu_D^2}$

$A = \mu_D N V^2(t)/R$

$A = M_{a_t} = -MV$

$\frac{dV}{dt} = -\mu_D V^2/R$

$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{\mu_D}{R}\right)V^2$ EQUAZIONE DIFFERENZIALE VARIABILI SEPARABILI

www.alessandropaghi.it

dividiamo per V^2 e moltiplichiamo per dt

$$\frac{dV}{V^2} = -\left(\frac{\mu_0}{R}\right)dt$$

integrando

$$\int_{V_0}^{V_t} \frac{1}{V^2}\,dV = -\frac{\mu_0}{R}\int_0^t dt$$

$$\left[-\frac{1}{V}\right]_{V_0}^{V_t} = -\frac{\mu_0}{R}t$$

$$-\frac{1}{V(t)} + \frac{1}{V_0} = -\frac{\mu_0}{R}t$$

$$\frac{1}{V(t)} = \frac{1}{V_0} + \frac{\mu_0}{R}t = \frac{R+\mu_0 t}{V_0 R} \Rightarrow V(t) = \frac{V_0 R}{R+\mu_0 t}$$ poi dividendo per R

$$\Rightarrow V(t) = \frac{V_0}{1+\frac{\mu_0 V_0 t}{R}}$$ → quanti giri ha fatto dopo n secondi?

$$\Delta S = \int_0^{t_1} V(t)\,dt = V_0 \int_0^{t_1} \frac{1}{1+\alpha t}\,dt \qquad \alpha \to \frac{\mu_0 V_0}{R}$$

$$\Delta S = \frac{V_0}{\alpha}\cdot \ln(1+\alpha t)$$

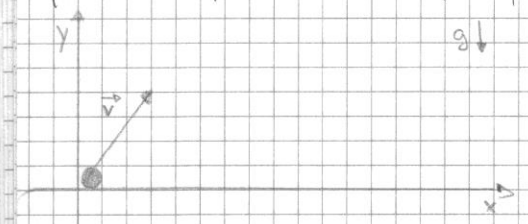
$$\Rightarrow \text{n° di giri} = \frac{\Delta S}{2\pi R}$$

www.alessandropaghi.it

COMPOSIZIONE DI MOTI

Esercizio: moto di proiettile.

Un oggetto di massa M viene lanciato con velocità $\vec{V} = (V_x, V_y)$. Come si muove? Per quanto tempo resta in volo? A quale distanza cade a terra?



$\vec{V} = (V_x, V_y)$ $\quad \vec{V_0} = (V_{0x}, V_{0y})$

$\dot{\vec{V}} = \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ $\quad \vec{F} = (0, -mg)$

$a_y = \frac{F_y}{m} = -g$ $\quad a_x = \frac{F_x}{m} = 0$

$V_x(t) = V_{x0} + \int a_x\,dt = V_{x0}$

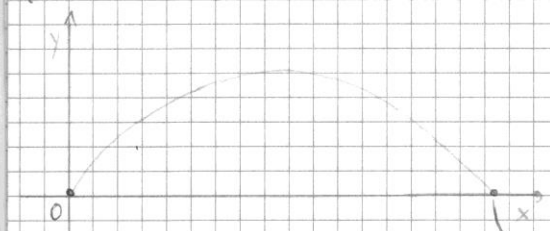
$x(t) = x_0 + \int_0^t V_x(t)\,dt' = x_0 + V_{x0}t$

$V_y(t) = V_{y0} + \int_0^t (-g)\,dt = V_{y0} - gt$

$y(t) = y_0 + \int_0^t V_y(t)\,dt' = y_0 + V_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$

$x_0 = 0$ $\quad y_0 = 0$

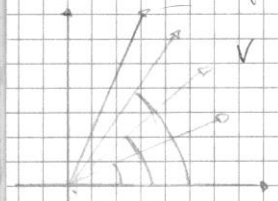
$$\begin{cases} x(t) = V_{ox}t \\ y(t) = V_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Rightarrow t(x) = \frac{x}{V_{ox}} \Rightarrow y(x) = V_{oy}\cdot\frac{x}{V_{ox}} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{V_{ox}}\right)^2$$



questo è il grafico di $y(x)$:
- parte lì è dove un qualsiasi moto ha termine noto;
- è ricetta perché il termine davanti il termine in x^2 è negativo;

$y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\frac{g}{V_{ox}^2}x^2 + \frac{V_{oy}}{V_{ox}}x = 0 \Rightarrow (x) = 2\frac{V_{oy}}{V_{ox}}\frac{V_{ox}^2}{g}$

Introduciamo quindi la GITTATA: $D = 2\frac{V_{oy}V_{ox}}{g}$



$V_{ox} = V\cos\theta$

$V_{oy} = V\sin\theta$

$D = \frac{2V\cos\theta V\sin\theta}{g} = \frac{V^2 2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{V^2\sin 2\theta}{g} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{gD}{V^2}\right)$

N.B. a parità di tutto, un pianeta da attrito, un corpo può percorrere più lontano di uno più leggero.

Tempo di salita

Tempo necessario per annullare V_y. A quale t $V_y(t) = 0$?

$t_{salita} = \frac{V_{oy}}{g}$ $\quad -gt + V_{oy} = 0$

Il tempo di discesa è identico $\Rightarrow t_{volo} = 2t_{salita}$

In x il moto è uniforme, per cui la gittata è $D = V_{0x} \cdot t_{volo}$

(angoli complementari hanno gittate identiche, ma tempi di volo diversi)

N.B. Normalmente è data necessaria a descrivere la traiettoria NON sono grafici di funzioni

$y(t) = f(t)$ $\quad y = f'(y^{-1}(x))$

$x(t) = g(t)$ $\quad t = g^{-1}(x)$

Attrito viscoso e velocità limite + VEDI PAGINA

Modulo $F = F(v)$, direzione di $\vec{v}$ e verso opposto

intensità dipendente da v (funzione crescente con v)

$m\dot{v} = -F(v) = -\alpha v^3$ (x esempio)

$\dot{v} = -\frac{1}{m}\alpha v^3$

$v(t)$ $\quad \dot{v} = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{m} v^3 \Rightarrow v = 0$

Consideriamo un corpo immerso in una sostanza viscosa e sul quale agisce anche la forza di gravità

$m\dot{v} = -\alpha v^3 + mg \iff v^3 = \frac{mg}{\gamma} \Rightarrow v = \sqrt[3]{\frac{mg}{\gamma}}$

NATURA DELLE EQUAZIONI CHE DISCENDONO DA $\vec{F} = m\vec{a}$

$F = -kx$ non c'è una dipendenza esplicita dal tempo, ma c'è una dipendenza implicita in quanto dipende dal tempo tramite la x



Questo è un sistema in cui il tutto è immerso in un liquido viscoso

$F = ma = m\ddot{x} = \underbrace{-kx - \gamma\dot{x}}_{\text{equazione lineare}} \quad (-mg)$ (massa, Peso per)

Il peso in più compare nel caso in cui il sistema non poggi su un piano, ma sia posto in verticale

Eq. lineare $\rightarrow ma = -\gamma v - kx$

Eq. non lineare $\rightarrow \alpha v^2 + \beta v x + \gamma x^2 + \varepsilon \operatorname{sen}(kx)$

equazioni differenziali lineari

ORDINE: la derivata più alta che compare = (numero di soluzioni indipendenti)

OMOGENEITÀ: una equazione è omogenea se non ha il termine noto

(l'equazione $m\ddot{x} = -kx$ è lineare, omogenea e di II ordine)

CONDIZIONI NECESSARIE INIZIALI (= ordine): elementi che servono a risolvere una data equazione

COEFFICIENTI: possono essere costanti o dipendenti dal tempo:

Esempi:

CORPO IN CADUTA LIBERA: $m\ddot{x} = mg$ eq. differenziale con incognita x di II ordine

$\Vert$

$m\dot{v} = mg$ eq. differenziale con incognita v di I ordine

$\Vert$

$ma = mg$ non è eq. differenziale se l'incognita è a

www.alessandropaghi.it

$m\ddot{x} = mg$ $\quad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$

$m\dot{v} = mg$ $\quad v = v_0 + gt$

MOTO ARMONICO: $m\ddot{x} = -kx$ $\quad x = A\cos(\omega t + \varphi)$ $\quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Lineare, omogenea, ordine II

MOTO ARMONICO DI UNA MASSA SOSPESA: $m\ddot{x} = -kx + mg$

Lineare, non omogenea, ordine II

MOTO IN UN MEZZO VISCOSO: $F = -\gamma v \Rightarrow m\ddot{x} = -\gamma \dot{x}$

Lineare, omogenea, ordine II, (2 condizioni da sapere)

ma anche: $m\dot{v} = -\gamma v$

Lineare, omogenea, ordine I (1 condizione da sapere)

CADUTA IN UN MEZZO VISCOSO: $m\ddot{x} = -\gamma \dot{x} + mg$ Lineare, non omogenea, ordine II

$m\dot{v} = -\gamma v + mg$ // , // , ordine I

Teoremi: (x equazioni differenziali lineari)

- due soluzioni di un'equazione differenziale non omogenea differiscono per una funzione che risolve l'equazione omogenea associata

$m\ddot{x} = -kx + mg$ $\quad x_1(t)$ $\quad x_2(t)$ Le soluzioni sono funzioni, non numeri, quindi non sappiamo quanto valgono ma come si comportano

1 $m\ddot{x}_1 = -kx_1 + mg$

2 $m\ddot{x}_2 = -kx_2 + mg$

$\Rightarrow m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -k(x_1 - x_2)$

infatti sottraendo 1 e 2 membro a membro otteniamo $m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -k(x_1 - x_2) + mg - mg$

Otteniamo questa equazione in quanto la derivata della differenza è uguale alla differenza delle derivate

- le soluzioni dell'omogenea costituiscono uno spazio lineare

$m\ddot{x} = -kx$ $\quad x_1$ $\quad x_2$ risolvono l'equazione

$m\ddot{x}_1 = -kx_1$ $\quad a x_1 + b x_2 = x_3$ risolve l'equazione

$m\ddot{x}_2 = -kx_2$

$a(m\ddot{x}_1 = -kx_1)$

$b(m\ddot{x}_2 = -kx_2)$ $\Rightarrow am\ddot{x}_1 + bm\ddot{x}_2 = -akx_1 - bkx_2 \Rightarrow m(a\ddot{x}_1 + b\ddot{x}_2) = -k(ax_1 + bx_2)$

$\Rightarrow m(a\ddot{x}_1 + b\ddot{x}_2) = -k(ax_1 + bx_2)$

- se sommo ad una soluzione particolare di un'equazione non omogenea una combinazione lineare delle soluzioni dell'omogenea associata, trovo una nuova soluzione della non omogenea

$m\ddot{x}_{NO} = -kx_{NO} + mg$ $\quad x_{NO}$ la risolve

$m\ddot{x}_{OM} = -kx_{OM}$ $\quad x_{OM}$ la risolve

www.alessandropaghi.it

sommando ordine qui membro a membro:

$m(\ddot{x}_{x0} + \ddot{x}_{OM}) = -k(x_{x0} + x_{OM}) + mg$

$\Rightarrow m(\ddot{x}_{x0} + \ddot{x}_{OM}) = -k(x_{x0} + x_{OM}) + mg$

- tutte e sole le soluzioni della non omogenea si trovano sommando a una soluzione particolare della non omogenea combinazioni lineari di soluzioni dell'omogenea

Esempio 1: paracadute

$ma = mg - \gamma V$

$m\dot{V} = -\gamma V + mg$

soluzione stazionaria ($\dot{V} = 0$)

$V(t) = ? \Rightarrow 0 = mg - \gamma V \Rightarrow V = \frac{mg}{\gamma}$ questa è la velocità alla quale forza peso e attrito sono uguali e in verso opposto

- consideriamo ora l'eq. omogenea $m\dot{V} = -\gamma V$

$\dot{V} = -\frac{\gamma}{m} V$

$V_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t} = V_{OM}(t)$ (soluzione omogenea) → scelta in quanto derivando otteniamo se stesso per una costante, come $\dot{V} = -\frac{\gamma}{m} V$

$\Rightarrow V(t) = \frac{mg}{\gamma} + V_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t}$

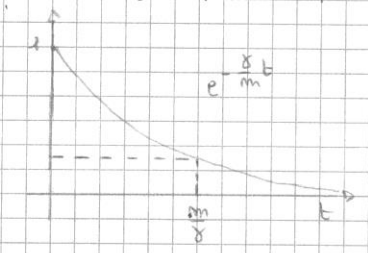
↳ è l'unica incognita da determinare, quindi serve mettere una nella condizione iniziale

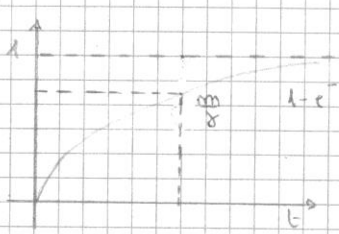
$V(0) = W \Rightarrow W = \frac{mg}{\gamma} + V_0 e^{-\frac{\gamma}{m}\cdot 0}$

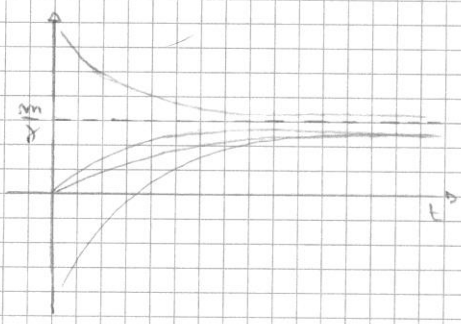
$\Rightarrow W = \frac{mg}{\gamma} + V_0$

$\Rightarrow V_0 = W - \frac{mg}{\gamma}$

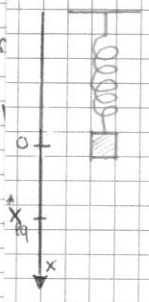
$V(t) = \frac{mg}{\gamma} + \left(W - \frac{mg}{\gamma}\right) e^{-\frac{\gamma}{m}t} = \frac{mg}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) + We^{-\frac{\gamma}{m}t}$







Esempio 2: moto armonico in presenza della gravità



$m\ddot{x} = -kx + mg$ quindi g positiva

$m\ddot{x} = 0 \Rightarrow 0 = -kx + mg \Rightarrow x = \frac{mg}{k}$ (situazione di equilibrio)

con $x_{eq} = \frac{mg}{k} > 0$ $V = 0$ e $a = 0$ in quanto x è costante in questo caso, quindi deduciamo che è la soluzione cercata

$kx_{eq} = mg$

consideriamo l'eq. omogenea $m\ddot{x} = -kx$

$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$

$x = A\cos\left(\underbrace{\sqrt{\frac{k}{m}}}_{\omega} t + \varphi\right) = A[\cos(\omega t)\cos\varphi - \operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}\varphi] =$ ← ridefinisco $t = 0$

↳ scelta in quanto deduciamo che sia nulla ottenendo un sistema moltiplicato per una costante

$= A\cos(\omega t)\cos\varphi - A\operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}\varphi = b\cos(\omega t) - c\operatorname{sen}(\omega t)$

$\Rightarrow x(t) = \frac{mg}{k} + b\cos(\omega t) - c\operatorname{sen}(\omega t) = x_{eq} + A\cos(\omega t + \varphi)$

Esempio 3: moti armonici in presenza di attrito viscoso



$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + kx + \gamma\dot{x} = 0$

$x = Ae^{\alpha t}$ $x \neq 0$ solo quando $A = 0$ Poi Ae mentre per poi avere una congruenza

$\dot{x} = \alpha Ae^{\alpha t}$

$\ddot{x} = \alpha^2 Ae^{\alpha t}$

$\Rightarrow m\alpha^2 Ae^{\alpha t} + \gamma\alpha Ae^{\alpha t} + kAe^{\alpha t} = 0$

$(m\alpha^2 + \gamma\alpha + k)\cancel{Ae^{\alpha t}} = 0$

↳ Lo tagliamo perché se $A = 0$ sarà tutto 0, mentre $e^{\alpha t}$ non può mai essere 0 quindi non sono influenzati

$\alpha = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m}$

$x(t) = A \cdot e^{-\frac{\gamma}{m}t} e^{\pm\frac{\sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m}t}$

Consideriamo ora $\gamma = 0$

$m\ddot{x} + kx = 0$; $A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$

$x(t) = A \cdot e^{0} e^{\pm\frac{\sqrt{-4km}}{2m}t} = A \cdot e^{\pm\sqrt{\frac{k}{m}}t}$ quindi compare un numero immaginario

Partiamo dallo sviluppo di Taylor di e^x

$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots$

$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$

che somiglia a $\cos x$ per i termini reali

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

e con i termini immaginari somiglia a:

www.alessandropaghi.it

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

$\Rightarrow e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Esercizio: $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = \cos(\alpha+\beta) + i \sin(\alpha+\beta) = ($

ENERGIA E LAVORO

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ modulo del vettore velocità

$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$

$\Delta v^2 = ?$

$\Delta v^2 = 2v\Delta v$? ☐ SI ☒ NO

$y = x^2 \Rightarrow \Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 \cong 2x\Delta x$



$(\vec{v}+\Delta\vec{v})(\vec{v}+\Delta\vec{v}) - \vec{v}\cdot\vec{v} = \vec{v}\vec{v} + \vec{v}\Delta\vec{v} + \Delta\vec{v}\vec{v} + \Delta\vec{v}\Delta\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{v} \cong 2\vec{v}\Delta\vec{v}$

$dv^2 = 2\vec{v}\cdot d\vec{v} = 2v\,dv\cos\vartheta$

Prima di passare al limite:

$\Delta v^2 = 2\vec{v}\cdot\Delta\vec{v} + \Delta\vec{v}\cdot\Delta\vec{v}$

moltiplichiamo per $1 = \Delta t/\Delta t$

$\Delta v^2 \cong 2\vec{v}\cdot\Delta\vec{v}\cdot(\Delta t/\Delta t) \cong 2\underbrace{\vec{v}\Delta t}_{\Delta\vec{s}}\cdot\underbrace{\Delta\vec{v}/\Delta t}_{\vec{a}} \cong 2\Delta\vec{s}\cdot\vec{a}$

quando $\Delta t \to 0$

Quindi per compiere il modulo quadro della velocità dobbiamo aver un'accelerazione che aziona dunque uno spostamento

Moltiplichiamo l'equazione ottenuta per $\frac{1}{2}m$. Facendo il $\lim_{\Delta t \to 0}$

$d[(1/2)mv^2] \overset{?}{=} 1/2\,m\,2\,d\vec{s}\cdot\vec{a} = \vec{F}\cdot d\vec{s} = (dL) \rightarrow$ SCALARE

$dL = \vec{F}\cdot d\vec{s}$ e $E_K = 1/2\,mv^2$

$dE_K = dL$

L si chiama LAVORO
E_K si chiama ENERGIA CINETICA
} Grandezze scalari

$L = \int dL = \int E_K = \Delta E_K$

quindi $\Delta E_K = L$ per modificare l'energia cinetica occorre del lavoro

Per lavorare occorre applicare una forza ed un punto che si sposti, lo spostamento deve avere una componente parallela alla forza, altrimenti il prodotto scalare si annulla.

Un lavoro negativo (forza opposta a $d\vec{s}$) fa diminuire E_K

$dL = \vec{F}\cdot d\vec{s} = F\,ds\cos\vartheta > 0$ per $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ ϑ è l'angolo tra ds e la forza

$L = \int dL = \int \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int F\cos\vartheta\,ds$

Esempio 2: moto

Gli estremi di integrazione di $\int F \cos\theta \, ds$ sono due posizioni

Questo è un integrale di linea, qui il dominio non è un intervallo ma un tratto di curva

Per vedere quando si lavora velocemente, notiamo dL/dt

$dE_k/dt = dL/dt = \vec{F} \cdot d\vec{s}/dt = (\vec{F} \cdot \vec{v})$

questa quantità si chiama POTENZA

$F = m \cdot a$ dove $[a] = L/T^2$ $[F] = (MLT^{-2})$ in MKS → $Kg \cdot m/s^2$ si chiama Newton, simbolo N

$[\text{lavoro}] = ML^2T^{-2} = (M(L/T)^2)$ in MKS → $Kg\,m^2s^{-2}$, si chiama Joule, simbolo J

$[\text{potenza}] = (ML^2T^{-3})$ in MKS → $Kg\,m^2s^{-3}$, si chiama Watt, simbolo W

Nella pratica spesso si usa l'energia rapportandola come prodotto tra potenza in tempo:

Unità tipica kWh kilowatt ora $= 3.6 \cdot 10^6$ J

Calcolo del lavoro in alcuni casi semplici e/o importanti

1) Lavoro di una forza uniforme e costante (esempio il peso)

NB UNIFORME = non dipende dalla posizione
COSTANTE = non dipende dal tempo

$L = \int dL = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = (\vec{F}) \int d\vec{s} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}$

(si possono fare anche prodotti e sottrazioni)

In questo caso troviamo una quantità che non dipende dal particolare percorso, ma solo dalla posizione relativa agli estremi della curva che descrive tale percorso

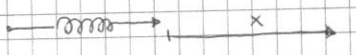
2) Lavoro di una forza costante in modulo che agisce in direzione opposta allo spostamento

($\cos\theta = -1$) (attrito radente dry) $\rightarrow$ è la lunghezza del vettore infinitesimo, non il vettore stesso

$L = \int dL = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int -F \cdot ds = -F \int ds = -F\sigma$ dove σ è la lunghezza del percorso, cioè della traiettoria

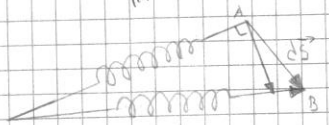
$F\,ds \cos\theta = F\,ds(-1)$

3) Lavoro di una forza elastica



$L = \int dL = \int \vec{F}\, d\vec{x} = \int -k\vec{x}\, d\vec{x} = (\text{nel caso unidimensionale}) = -k \int x\,dx = -[(1/2)kx^2]_{x_{in}}^{x_{fin}} =$

$= -1/2\,k[x_{fin}^2 - x_{in}^2]$ è valido per ogni molla, dove x è l'allungamento



La componente tangenziale influisce solo sulla posizione della molla, quella radiale sull'allungamento

4) Lavoro di una forza che si mantiene sempre perpendicolare allo spostamento (questo è il caso della forza di Lorentz, $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{F} \perp \vec{v}\,dt$)

$L = \int dL = \int \vec{F} \cdot d\vec{v} = 0$

È il caso della forza di Lorentz, dove $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, infatti v e $d\vec{s} = v\,dt$ sono vettori paralleli e il prodotto vettoriale ____ (manca)

Precisazione IMPORTANTE

Il lavoro è definito come prodotto tra forza e spostamento del punto in cui la forza è applicata. Se corpi puntiformi, il punto di applicazione coincide con la posizione del punto,

www.alessandropaghi.it

ma per corpi estesi non è così.

(N.B.) Non sempre la forza che lavora è la stessa che produce accelerazione

Riprendiamo un vecchio esercizio

$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$

abbiamo visto che le soluzioni dell'equazione sono:

$\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma}{2m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2 - 4km}{2m}} = \frac{-\gamma}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}$

per $\gamma = 0$ $e^{\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$ due, come visto, e come $\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \pm i\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$

chiamo nuova omega ω

$x = Ae^{i\omega t}$ $\quad x_+ = A\cos(\omega t) + iA\,\mathrm{sen}(\omega t)$

$x_- = A\cos(\omega t) - iA\,\mathrm{sen}(\omega t)$

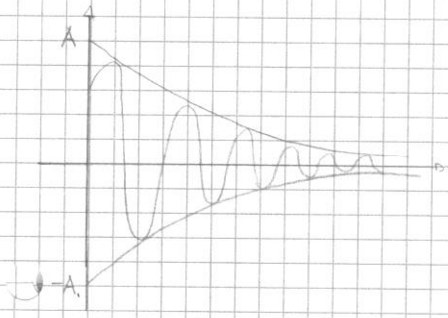
$\frac{x_+ + x_-}{2} = A\cos(\omega t)$

$\frac{x_+ - x_-}{2i} = A\,\mathrm{sen}(\omega t)$

le soluzioni saranno allora:

$x = Ae^{-\frac{\gamma}{2m}t} \cdot e^{\pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}t} =$

$= Ae^{-\frac{\gamma}{2m}t} \cdot \underbrace{\cos(\omega t + \varphi)}_{\text{parte oscillatoria}}$ dove $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}$



Quindi c'è un oscillazione tra A e -A che si smorzano

OSCILLATORE SMORZATO

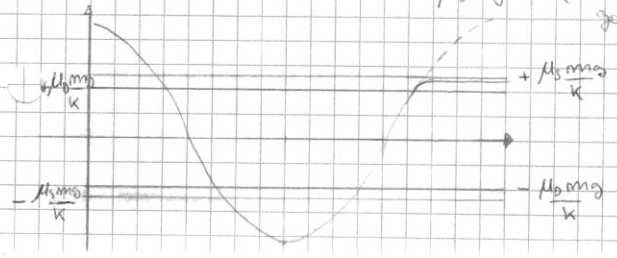
Esercizio



$-Kx \pm \mu_D Mg = M\ddot{x}$

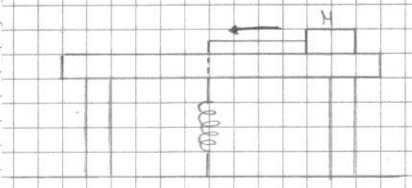
$Ma = -Kx - \mu_D Mg\,\mathrm{sign}(\dot{x})$ dove $\mathrm{sign}(y) = \frac{|y|}{y} \begin{cases} 1 & \text{se } y > 0 \\ -1 & \text{se } y < 0 \end{cases}$

consideriamo $M\ddot{x} = -kx - \mu_D Mg$ (che per $\mu_D = 1$ vediamo è come del corpo collegato ad una molla sospesa)



www.alessandropaghi.it

UNA CLASSE DI FORZE: FORZE CENTRALI



- La molla e fissata al tavolo
- Il filo non è attaccato con il tavolo
- La forza elastica è nulla quando il corpo si trova esattamente sopra il foro

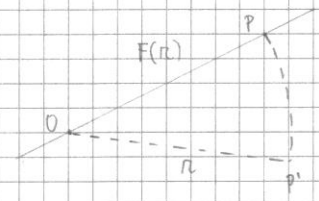
In un campo di forze centrali il momento angolare rispetto al centro rimane costante nel tempo

Forza elastica:

$F = -k(x - x_0)$ o $F = -kx$

Questo è un esempio di forza centrale, una forza diretta sempre lungo la congiungente ad un punto (centro), verso di esso (attrattiva) o ad allontanarsi da esso (repulsiva). Il modulo di tale forza dipende solo dalla distanza di tale centro attrattore.

Una forza centrale può essere scritta nella forma $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\,\vec{u}_r$, dove $\vec{u}_r$ è il versore della posizione $(\vec{r})$ rispetto al centro attrattore.



La presenza di forze centrali conservative come modulo, direzione e verso un campo di forze, la conservazione di un corpo che si muove nel campo giace su un piano ortogonale per il centro e la velocità areolare è costante

Forza gravitazionale e Coulombiana

- $\vec{F}_{grav}(\vec{r}) = -G \dfrac{M_2 m_2}{r^2}\,\vec{u}_r$ è una forza sempre attrattiva e con quantitativo modulo

(r^2: prodotto dei corpi; $\vec{u}_r$: versore della posizione)

nel caso della terra e di un oggetto su di esso:

$-G \dfrac{M_T \cdot m}{R_T^2}\,\vec{u}_r$ il segno meno ci dice che la forza è diretta verso il centro della terra

R_T: raggio terrestre

$-m\vec{g} = \left[-mG\dfrac{M_T}{R_T^2}\,\vec{u}_r\right] \to \dfrac{10^{24}}{10^{20}}$ $\quad G \cong 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ unità MKS

k; $9{,}81$

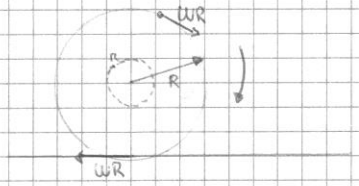
- $\vec{F}_{coul} = k\dfrac{q \cdot q}{r^2}\,\vec{u}_r$

(k: positiva $3 \cdot 10^9$; prodotto cariche positive o negative)

La forza in questione può essere sia positiva che negativa

Non ha senso dire che la forza coulombiana è molto più potente di quella gravitazionale a causa della differenza tra la costante k e G, in quanto il valore della forza dipende dalle masse e dalle cariche che stiamo considerando.

Esercizio



Studiare il moto come composizione di un moto di traslazione e uno di rotazione.

www.alessandropaghi.it

Il punto a contatto con il terreno non striscia, quindi $V = \omega R$ (condizione necessaria del moto di puro rotolamento)

$\theta = \omega t$

rispetto alla bicicletta $x = R\cos(\omega t)$

$y = -R\sin(\omega t)$

$\omega R t = x_{bici}$

rispetto al terreno $\begin{cases} x = \omega R t + R\cos(\omega t) \\ y = -R\sin(\omega t) \end{cases}$

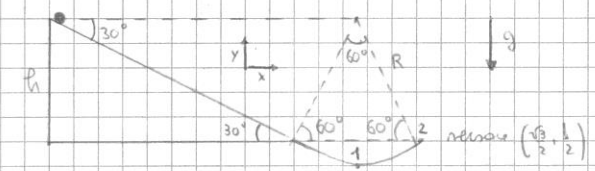
$\begin{cases} V_x = \omega R - R\omega\sin(\omega t) \\ V_y = -\omega R\cos(\omega t) \end{cases}$

$V_x = \omega(R - R\sin(\omega t)) \in [\omega(R-R), \omega(R+R)]$



Questi sono i vari grafici che possono essere descritti dal "punticino" che si muove sulla ruota.

Esercizio



Determinare la velocità che ha il corpo nel punto più basso della guida e quando sta per abbandonarla

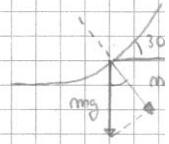
$L = \int \vec{F}\cdot d\vec{s} = mg\int d\vec{s} = \begin{cases} mgR & \text{nel punto più basso} = \frac{1}{2}mV_1^2 \Rightarrow V_1 = \sqrt{2gR} \\ mgR\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{alla fine della guida} = \frac{1}{2}mV_2^2 \Rightarrow V_2 = \sqrt{\sqrt{3}gR} \end{cases}$

$\vec{V_1} = V_1(1,0) \quad \vec{V_2} = V_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$a_c = \omega^2 R \quad V = \omega R$

Forza centripeta $F_{c_1} = ma_{c_1} = m\frac{V_1^2}{R} = m\frac{2gR}{R} = 2mg = N_1 - mg \Rightarrow N_1 = 3mg$

$F_{c_2} = m\cdot a_{c_2} = m\frac{V_2^2}{R} = m\frac{\sqrt{3}gR}{R} = \sqrt{3}mg = N_2 - mg\cos 30° \Rightarrow N_2 = mg\left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



Determiniamo per quanto tempo vola l'oggetto dopo aver percorso la guida fino a che non torna a quota 0

$\vec{V_2} = \sqrt{\sqrt{3}gR}\left(\sqrt{3}/2, 1/2\right)$

$ma = mg \Rightarrow$ moto uniformemente accelerato

$t_{volo} = ?$

$0 = V = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3}gR} - gt \Rightarrow gt = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3}gR} \Rightarrow t_{volo} = \frac{1}{2g}\sqrt{\sqrt{3}gR}$

$V = 0$ quando il corpo arriva all'apice della volta

in quanto consideriamo la componente y della velocità

$t_{volo} = t_{discesa} \Rightarrow t_{volo} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}gR}}{g}$

www.alessandropaghi.it

UNA CLASSE DI FORZE: FORZE CENTRALI

$\Delta x = v_{x2} \cdot t_{volo} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\sqrt{3}gR} \cdot \frac{1}{g}\sqrt{\sqrt{3}gR} = \frac{3}{2}R$ Ci calcoliamo ora il volo considerando il volo in assenza di attrito, quindi la velocità è costante

Una importante classificazione delle forze

Il lavoro può dipendere o meno dal percorso. Tra tutti, quelli in cui il lavoro non dipende dal percorso, sono quelli della forza peso, della forza elastica (anche la forza di GRAVITÀ, attrito statico, reazioni vincolari) e di tutte le forze costanti. Tra quelli ATTIVI, quindi dove il lavoro dipende dal percorso, sono l'attrito radente dinamico, l'attrito viscoso ecc... (in questi ultimi casi il lavoro non solo dipende dal percorso, ma anche dalla velocità con cui viene coperto).

Le forze buone, in cui il lavoro non dipende dalla traiettoria o dalla velocità, sono chiamate FORZE CONSERVATIVE, le altre sono invece dette FORZE NON CONSERVATIVE

Per le forze conservative è possibile definire una funzione della posizione U tale che

$(\Delta U) = -L$ → (le dimensioni di un'energia (e non è cinetica, ma come ora si misura in Joule) è l'ENERGIA POTENZIALE

Consideriamo un corpo sotto posto solo a forze conservative

Esaminiamo la quantità $E_{mec\,tot} = U + E_k$

e la sua variazione $\Rightarrow \Delta E_{mec\,tot} = \Delta U + \Delta E_k$

Per il teorema delle forze vive $\Delta E_k = L$

in conclusione $\Delta E_{tot} = 0$ perché abbiamo considerato forze ~~non~~ conservative

Nel caso in cui ci siano anche forze non conservative, ΔE_k è fatta di due parti, il lavoro conservativo L_c e quello non conservativo, L_{nc}. In tal caso i due termini che costituiscono ΔE_{tot} non si annullano del tutto:

$\Delta E_{tot} = \Delta U + \Delta E_k = -L_c + L_c + L_{nc} = L_{nc}$ $\quad N.B.: L_c + L_{nc} = \Delta K \Rightarrow -\Delta U + L_{nc} = \Delta K$ (vedi problemi tabella)

Quando una forza non compie lavoro si dice che si conserva; le forze conservative si chiamano così in quanto fanno conservare l'energia meccanica totale $E_{mec\,tot}$

Notiamo che quando nella U non ci interessa: l'unica cosa che ha significato fisico è il lavoro che è la variazione di U: quindi U è sempre definita a meno di una costante additiva. Calcolare U come $-L_c$ spesso è facile, anche qualora perché l'integrale di linea che da L_c dipende solo dagli estremi del percorso

$\vec{F}(\vec{r})$ → campo: indica la forza $\vec{F}$ in ogni posizione $\vec{r}$

$F_x(x,y,z)$ → $U(\vec{r})$

$F_y(x,y,z)$ → $U(x,y,z)$ dalle nove componenti riusciamo una sola U, ma non perdiamo nessuna informazione

$F_z(x,y,z)$

Possiamo, al contrario, ricavare F a partire da U

www.alessandropaghi.it

$U = U(x,y,z)$, $\vec{F} = ?$

$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ $\quad \nabla$ è l'operatore NABLA, applicato a una scalare è il gradiente

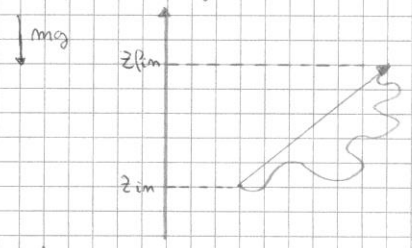
$\vec{\nabla} \stackrel{def}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ usiamo quindi le derivate parziali

$\frac{\partial U}{\partial x} = -\vec{F}_x$

In una dimensione, il modo coincide con la derivata prima, e quindi, in 1-D, $F = -dU/dx$

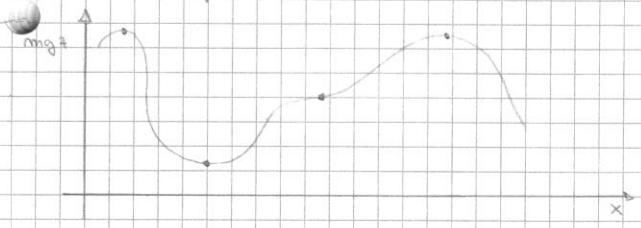
$U(x) \Rightarrow F = F_x = -\frac{dU}{dx}$

Interpretazione grafica nel caso 1-D



$L = -mg(z_{fin} - z_{in})$ il lavoro è negativo, in quanto la forza peso è diretta verso il basso, ma il corpo è spostato verso l'alto

$\Rightarrow U = mgz$



Moltiplicando z per mg otteniamo un grafico che rispecchia il profilo della montagna russa, e ci permette di studiare l'energia potenziale ad una particolare posizione x

i punti sono punti di equilibrio (massimi, minimi e punti a tangente orizzontale), i minimi sono quelli di equilibrio più stabile

$F_x = -\frac{dU}{dx}$

PUNTO DI EQUILIBRIO: punto sul quale il corpo è sottoposto a forze che si annullano, pertanto non si muove se nella posizione (forze che lo riportano in posizione).

PUNTO DI EQUILIBRIO (STABILE): punto in cui la risultante delle forze sul corpo è nulla, ma il sistema corpo si muoverebbe con una minima perturbazione

Se ci si mette in un punto estremale per U, la derivata prima si annulla, se la derivata seconda non si annulla, lo sviluppo di Taylor si può arrestare al II ordine: la situazione è quella di un potenziale parabolico (potenziale elastico). Se l'equilibrio è stabile, il punto è di minimo per U e quindi la parabola ha concavità verso l'alto.

$U(x_0)$ $\quad x_0$ è di minimo

$U'(x_0) = 0$ $\quad U''(x_0) > 0$

$U(x_0 + \Delta x) = U(x_0) + U'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}U''(x_0)\cdot\Delta x^2 + o(\Delta x^2)$

$= 0$ $\qquad = \frac{1}{2}k\Delta x^2 + \dots$

tagliamo il delta e lo semplifichiamo dopo lo spostamento da 0

$-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}k(x)^2\right) = -\frac{1}{2}k\,2x = -kx = F_x$

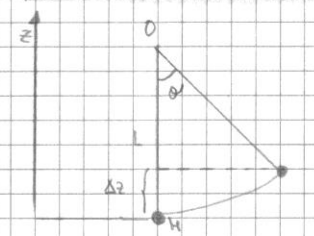
pensiamo trascurare quello che c'è dopo nel caso in cui ci spostiamo relativamente poco

In un punto di equilibrio stabile, il corpo, se è soggetto a piccoli spostamenti, si muove di moto armonico.

$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{M}}$

www.alessandropaghi.it

PENDOLO IN PICCOLE OSCILLAZIONI: DESCRIZIONE ENERGETICA



È un sistema conservativo in quanto su di esso agiscono solo forze conservative: forza peso e tensione (che è una forza vincolare)

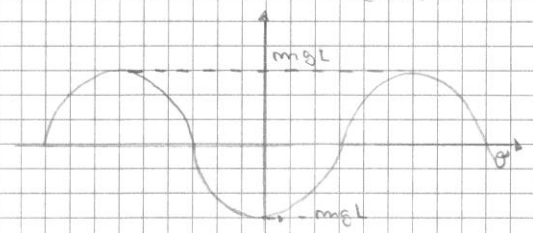
$$\frac{1}{2} m v^2 + mgz = E_{mec.tot} = \text{costante}$$

$$\frac{1}{2} m (L\dot{\theta})^2 + mg(l - l\cos\theta)$$

$$U(\theta) = mgl - mgl\cos\theta$$

$$\rightarrow U(\theta) = -mgl\cos\theta$$

Possiamo togliere la costante mgl in quanto è una costante che dipende esclusivamente a seguire della scelta della quota 0 per l'asse z



$$U(\theta) \cong -mgl\left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 \dots\right)$$ fermiamoci al II ordine

$$\frac{1}{2} mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mgL\theta^2 \cong E_{mec\,tot}(\theta)$$ ($-mgl$ non è stata inclusa in quanto è una costante)

N.B.



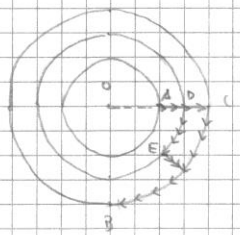
$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 = E_{mec\,tot}$$ con pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Quindi $\omega_{pendolo} = \sqrt{\frac{mgL}{mL^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$ sostituendo $k = mgl$ e $m = ml^2$

L'ω del pendolo è stata ottenuta con adeguate semplificazioni, dopo aver notato che c'erano delle evidenti analogie tra le due formule dell'energia totale

Le forze centrali sono conservative

Forza centrale: $\vec{F} = F(r)\vec{u}$



Calcoliamo il lavoro per andare da A a B

$$L = \int_{P_{AE}} \vec{F}\cdot\vec{ds} + \int_{ECB} \vec{F}\vec{ds} = \int_{r_A}^{r_B} F_r\, ds$$

III

0 in quanto F e ds sono perpendicolari

Quindi l'integrale di linea è diventato integrale semplice

Consideriamo un altro percorso

www.alessandropaghi.it

$L = \int_{R_A}^{R_B} F_{nc}\, ds + \int_{R_B}^{R_P} F_{nc}\, ds$ $\qquad L = \int_{R_A}^{R_P} F_{tot}\, ds \longrightarrow \int_{R_A}^{R_C} F_{nc}\, ds$

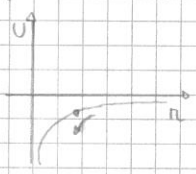
Calcoliamo ora il lavoro della forza gravitazionale

$\vec{F} = -G\frac{Mm}{R^2}\hat{u}_R$

$-\int_{R_i}^{R_f} G\frac{Mm}{R^2}\, dR = U(R_f) - U(R_i) = +GMm\int_{R_i}^{R_f}\frac{1}{R^2}\, dR = -GMm\left[\frac{1}{R}\right]_{R_i}^{R_f}$

posizione finale — posizione iniziale

$U(R) = -\frac{GMm}{R}$



SISTEMA FORMATO DA PIÙ PARTICELLE: DOVE È IL CENTRO?

$\vec{r}_i$ = posizione della particella i-esima

m_i = massa della particella i-esima

$M_{TOT} = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n$ massa del sistema

$\vec{R}_{CM} = (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \dots + m_n\vec{r}_n)/M_{TOT}$: POSIZIONE DEL CENTRO DI MASSA

$M_{TOT} = \sum_{i=1}^{n} m_i$

$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M_{TOT}}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i$

Estensione al caso di distribuzione continua (corpi non discreti) — continua da elementi infinitesimi

$\rho\, dV \Rightarrow M_{TOT} = \iiint_{VOLUME}\rho\, dV \Rightarrow \vec{R}_{CM} = \iiint_{VOLUME}\vec{r}\,\rho\, dV$ — continua da elementi infinitesimi

densità — dm — volume infinitesimo

massa infinitesima

$dm = \rho V \Rightarrow \sigma\, dS$ per distribuzione superficiale

$\Rightarrow \lambda\, dl$ per distribuzione lineare

Infine abbiamo: $\rho\,\pi\,d^2\,\ell$

costante: λ

Per distribuzione discreta di massa:

Torniamo alla dinamica:

$\frac{d\vec{R}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M_{TOT}}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i\right) = \frac{1}{M_{TOT}}\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d}{dt}\vec{r}_i = \frac{1}{M_{TOT}}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \vec{V}_{CM}$ velocità esima

La velocità del centro di massa è la media pesata della velocità delle particelle

$\frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M_{TOT}}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{V}_i\right) = \frac{1}{M_{TOT}}\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d}{dt}\vec{V}_i = \frac{1}{M_{TOT}}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i = \vec{a}_{CM}$ accelerazione i-esima

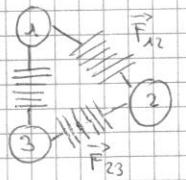
L'accelerazione del centro di massa è la media pesata dell'accelerazione delle particelle

Il sistema accelera come se fosse un unico centro di massa M_{TOT} sottoposto a una forza complessiva data dalla somma di tutte le forze agenti su tutte le particelle

www.alessandropaghi.it

$\vec{F}_i$ = è la forza risultante => su ogni particella possono agire più forze

$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \vec{F}_{ij} \right) \rightarrow \vec{F}_i = M_{TOT} \cdot \vec{a}_{CM}$



Sulla particella 1 agiscono 3 forze:
- una interagente con 2;
- una interagente con 3;
- il peso;

$\vec{F}_1 = \vec{F}_{1\leftarrow 2} + \vec{F}_{1\leftarrow 3} + M_1 g$

$\vec{F}_2 = \vec{F}_{2\leftarrow 1} + \vec{F}_{2\leftarrow 3} + M_2 g$

$\vec{F}_3 = \vec{F}_{3\leftarrow 1} + \vec{F}_{3\leftarrow 2} + M_3 g$

$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (M_1 + M_2 + M_3)\, \vec{a}_{CM}$

Grazie al III principio della dinamica:

$\vec{F}_{1\leftarrow 2} = -\vec{F}_{2\leftarrow 1}$, $\vec{F}_{1\leftarrow 3} = \vec{F}_{3\leftarrow 1}$, $\vec{F}_{2\leftarrow 3} = -\vec{F}_{3\leftarrow 2}$

Quantità di moto: $\vec{p} = m\vec{v}$ (momento lineare)

per un sistema di particelle: $\vec{P}_{TOT} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$

$\frac{d\vec{P}_{TOT}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{(EXT)\,i} = \vec{F}_{TOT}$

$\vec{M}_{TOT} \cdot \vec{a}_{CM} \equiv \frac{d\vec{P}_{TOT}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{EXT\,i}$

Prima equazione cardinale della dinamica

dipende dalla massa

~~costante~~

~~$m(t)\vec{a} = \vec{F}$~~ (ERRATA!)

$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$

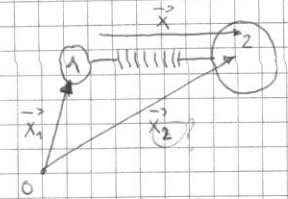
$\dot{m}\vec{v} + m\dot{\vec{v}} = \dot{m}\vec{v} + m\vec{a}$ formula esatta a massa variabile

$\vec{F} = m\vec{a}$ solo se m costante, altrimenti serve forza per mantenere $\vec{v}$ costante

Prima equazione della dinamica dedotta dalla prima equazione cardinale

La quantità di moto totale di un sistema si conserva se è nulla la somma delle forze esterne agenti sul sistema. In particolare $\vec{P}_{TOT}$ costante per tutti i sistemi isolati

URTI E DINAMICA INTERNA DI SISTEMI DI DUE PARTICELLE



$\vec{x}_1, \vec{v}_1 = \frac{d\vec{x}_1}{dt}$; $\vec{a}_1 = \frac{d\vec{v}_1}{dt}$

$\vec{x}_2, \vec{v}_2 = \frac{d\vec{x}_2}{dt}$; $\vec{a}_2 = \frac{d\vec{v}_2}{dt}$

$\vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ POSIZIONE RELATIVA

$\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ ($= \dot{\vec{x}}$) VELOCITÀ (ACCELERAZIONE) RELATIVA

$\vec{a} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$ ($= \ddot{\vec{x}}$) ACCELERAZIONE RELATIVA

Se il sistema è isolato, le particelle subiranno le forze che ciascuna esercita sull'altra

www.alessandropaghi.it

$$\vec{a} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_{2\leftarrow 1}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{1\leftarrow 2}}{m_1} = \frac{\vec{F}_{2\leftarrow 1}}{m_2} + \frac{\vec{F}_{2\leftarrow 1}}{m_1} = \vec{F}_{2\leftarrow 1}\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right) = \vec{F}_{2\leftarrow 1}\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\right)$$

poiché il sistema è isolato la forza 2 viene da 1

$$\vec{F}_{2\leftarrow 1} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\cdot\vec{a}$$

$$\vec{F}_2 = \mu\vec{a}$$

massa ridotta

- $m_1 = m_2 \Rightarrow \mu = m/2$
- $m_1 \gg m_2 \Rightarrow \mu = m_2$



$$\mu = \frac{5}{6}M \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{6}{5}\frac{k}{M}}$$



(?)

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{5M\cdot\rho}{5M + M} = \frac{5}{6}\rho \Rightarrow x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$



$$\frac{Mm}{M+m} = \mu \qquad \frac{Mm}{M+m}\vec{a} = \vec{F}_{GRAV} = -\frac{GMm}{r^2}\cdot\hat{r}$$

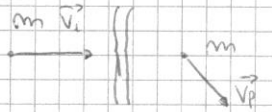
URTI TRA DUE CORPI

$\vec{p} = m\vec{v}$: quantità di moto

$\Delta\vec{p} = \int \vec{F}\,dt = \int d\vec{p}$

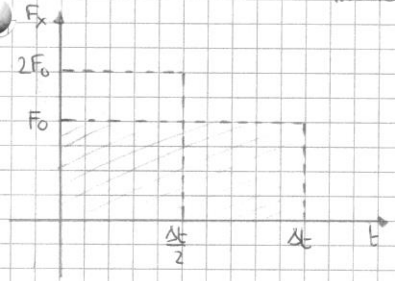
$\Delta E_k = L = \int dL = \oint_C \vec{F} = d\vec{s}$

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$



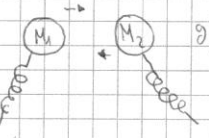
$\int \vec{F}\,dt$: si chiama IMPULSO

$\Delta p_x = \int_0^{\Delta t} F_x\,dt$ è l'impulso è quindi pari alla variazione della quantità di moto del corpo su cui agisce



La presenza di forze impulsive, permette di trascurare l'effetto di altre forze durante la breve durata dell'urto.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{esterne}$$



$M_1\vec{v}_1 + M_2\vec{v}_2 \overset{?}{=} M_1\vec{v}_1' + M_2\vec{v}_2'$ questa uguaglianza è vera nel caso in cui non esistano forze esterne

ciò è molto, due le forze però non hanno influenza durante il tempo dell'urto

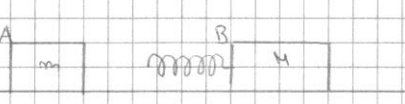
www.alessandropaghi.it

$\Delta \vec{p} = \int_{\Delta t} \vec{F}\, dt = 0 \iff$ non agiscono forze esterne (o la loro somma è 0)

Un urto si dice ISTANTANEO se $\Delta \vec{p} = 0$

Una forza si dice IMPULSIVA quando ha valore infinito in un intervallo infinitesimo

ESERCIZIO 20 LUGLIO 2006



- A si muove con velocità V_0
- Dopo l'urto con la molla, A si rimane attaccato

Un questo caso l'urto non è ISTANTANEO, infatti durante il momento del contatto con la molla non succede niente.

CORPO A: su x non agiscono forze esterne
su y agisce la forza peso e la reazione vincolare, che però si compensano
$\Rightarrow$ si conserva la quantità di moto

CORPO B: ragionamento analogo al A
$\Rightarrow$ si conserva la quantità di moto

Questo è la situazione prima dell'urto. Dopo l'urto la quantità di moto non è più costante.

Prendiamo per considerare il sistema formato dai corpi A e B: in tal caso la quantità di moto del sistema è costante

Analizziamo l'energia meccanica totale: qui agiscono le seguenti forze:
- forza peso che non compie lavoro in quanto compensata dalla reazione vincolare
- (non c'è attrito)
- attrito dinamico $\rightarrow$ FORZA CONSERVATIVA

$\Rightarrow$ l'energia meccanica totale è costante

Troviamo la quantità di moto del sistema:

Lungo l'asse x: $mV_0 = (m+M)(V_{CM})$ per la conservazione della quantità di moto già enunciata
velocità centro di massa

$V_{CM} = \frac{m}{m+M} V_0$ (è costante)

Calcoliamo la compressione massima della molla:

Energia cinetica iniziale: $\frac{1}{2} m V_0^2$

Energia cinetica finale: $\underbrace{\frac{1}{2} m V_A^2}_{E_{K_A}} + \underbrace{\frac{1}{2} M V_B^2}_{E_{K_B}} + \underbrace{\frac{1}{2} k \Delta x^2}_{P_{molla}}$ (en. cinetica)

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{1}{2} m V_A^2 + \frac{1}{2} M V_B^2 + \frac{1}{2} k \Delta x^2 \\ m V_0 = m V_A + M V_B \quad \text{perché la quantità di moto è costante} \end{cases}$$

La massima compressione si ha quando $V_A = V_B$ e in tal caso

$V_{CM} = \frac{m V_A + M V_B}{m+M} = V_A = V_B = \frac{m}{m+M} \cdot V_0$

www.alessandropaghi.it

Ora il sistema è diventato risolvibile:

$$\frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{1}{2}(m+M) V_{CM}^2 + \frac{1}{2} K \Delta x^2$$

$$m V_0^2 = \frac{(m+M)}{(m+M)^2} m^2 V_0^2 + K \Delta x^2$$

$$\left(m - \frac{m^2}{m+M}\right) V_0^2 = K \Delta x^2$$

$$\frac{m^2 + mM - m^2}{m+M} V_0^2 = K \Delta x^2$$

$$\Rightarrow \mu V_0^2 = K \Delta x^2 \Rightarrow \Delta x = \pm \sqrt{\frac{\mu}{K}} V_0$$

(μ: massa ridotta (?))

il $\pm$ è dovuto al fatto che questo vale sia per la massima estensione che per la massima compressione della molla

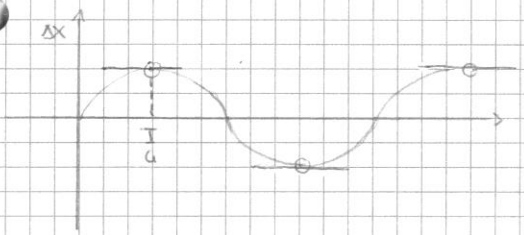
ovvero

$$\Delta x = \pm \frac{1}{\omega} V_0$$

metà armonica

Determiniamo ora l'istante in cui la molla è massimamente compressa

$$T = 2\pi \cdot \frac{1}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{K}}$$



$$\Rightarrow t_{\text{max compr}} = \frac{T}{4} + nT \qquad n = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

$$t_{\text{molle ripose}} = k\frac{T}{2} \qquad k = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

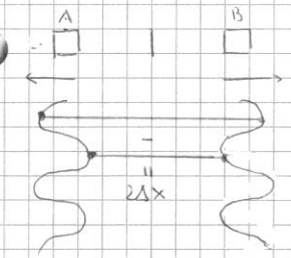
$$t_{\text{max allung}} = \frac{3T}{4} + aT \qquad a = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

Per determinare la posizione di B all'istante delle molle a riposo:

$$x_{\text{molle ripose}} = V_{CM} \, t_{\text{molle ripose}}$$

(ottenuta dalla prima equazione)

Scrivere la velocità del corpo A rispetto al tavolo ad un istante generico dopo l'urto



queste due linee rosse i grafici del moto di A e B che oscillano e contemporaneamente scorrono sul tavolo

$$\begin{cases} 2\Delta x = 2\Delta x_A + 2\Delta x_B \\ m \Delta x_A = M \Delta x_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x = \Delta x_A + \Delta x_B \\ m \Delta x_A = M(\Delta x - \Delta x_A) \end{cases}$$

$$m \Delta x_A = M \Delta x - M \Delta x_A$$

$$(m+M) \Delta x_A = M \Delta x \Rightarrow \Delta x_A = \frac{M \Delta x}{m+M}$$

Pos. A rispetto al centro di massa: $\Delta x_A \cos(\omega t + \varphi)$ $\omega = \sqrt{\frac{K}{\mu}}$

$V_A = -\omega \Delta x \sin(\omega t + \varphi)$ rispetto al centro di massa

$V_A = V_A + V_{CM} = \frac{m}{m+M} V_0 - \omega \frac{M}{m+M} \Delta x \sin(\omega t + \varphi)$ rispetto al tavolo

www.alessandropaghi.it

ESERCIZIO 2 21 LUGLIO 2007

$U(x) = 2Bx^3 - 3Ax^2 \qquad A>0$

$U'(x) = -F = 6Bx^2 - 6Ax$

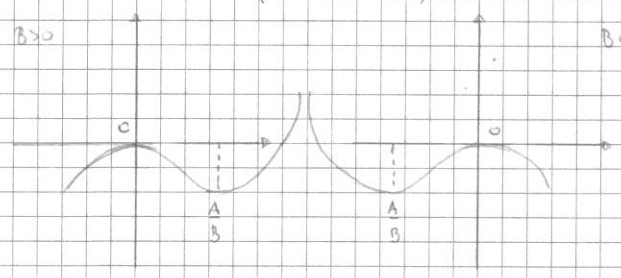
Troviamo i punti di equilibrio (a)

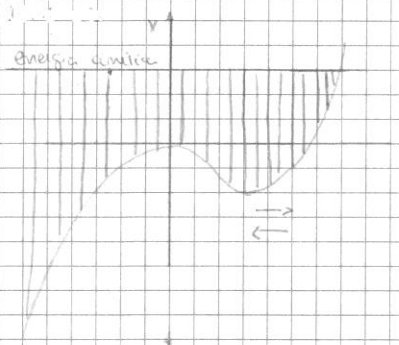
$U'(x) = 0 \Rightarrow 6Bx^2 - 6Ax = 0$

$x(Bx - A) = 0 \Rightarrow x \begin{cases} 0 \\ \frac{A}{B} \end{cases}$ punti di equilibrio

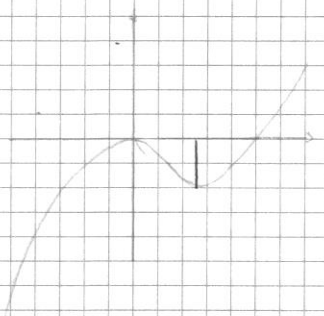
$U''(x) = 12Bx - 6A$

$U''(0) = -6A \qquad U''\left(\frac{A}{B}\right) = 12B\frac{A}{B} - 6A = 6A \Rightarrow$ 0 è punto di equilibrio instabile in quanto la concavità passa da negativa a positiva, A/B è invece punto di equilibrio stabile infatti la concavità passa da positiva a negativa





con quanta energia cinetica si può uscire dal livello di energia negativa



Come uscire dal punto di equilibrio stabile? (b)

$U = 2Bx^3 - 3Ax^2$

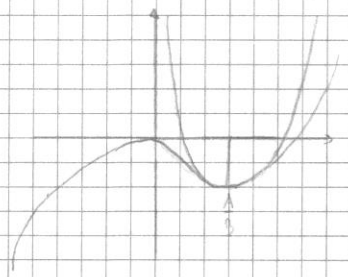
$U(0) = 0$

$U\left(\frac{A}{B}\right) = 2B\frac{A^3}{B^3} - 3A\frac{A^2}{B^2} = -\frac{A^3}{B^2}$

$\frac{1}{2}MV^2 = E_K > \frac{A^3}{B^2} \iff \left[E_{mec\ tot} > U(0)\right]$?

$\hookrightarrow V^2 = \frac{2A^3}{MB^2}$

(c) determinare l'oscillazione attorno al punto di equilibrio stabile



$U'(x) = U\left(\frac{A}{B}\right) + U'\left(\frac{A}{B}\right)\left(x - \frac{A}{B}\right) + \frac{1}{2!}U''\left(\frac{A}{B}\right)\left(x - \frac{A}{B}\right)^2 + \dots =$

$= -\frac{A^3}{B^2} + 0 + \frac{1}{2}6A\left(x - \frac{A}{B}\right)^2 + \dots$

meccanica importante in quanto costante	$\frac{1}{2}k\Delta x^2$	come una molla con costante elastica $6A$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{6A}{M}}$

www.alessandropaghi.it

L'energia potenziale viene approssimata con Taylor in quanto data un'energia approssimata ad una parabola, la quale è descritta da un'equazione di II grado, e perciò lo sviluppo di Taylor si ferma al II grado

URTI E LEGGI DI CONSERVAZIONE (quantità di moto) (vedi anche slide)

Consideriamo la I equazione cardinale a proposito degli urti

- P_{TOT} = costante $\Leftrightarrow \sum \vec{F}_{ext} = 0$

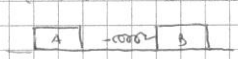
Per urti istantanei (dove giocano forze impulsive) la somma delle forze esterne si può restringere alle sole forze impulsive: l'impulso impresso dalle forze non impulsive nella breve durata dell'urto si può trascurare:

- P_{TOT} = costante $\Leftrightarrow \sum F_{ext-impulsive} = 0$

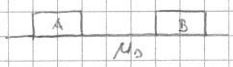
Esempio:

(1) (2) $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$

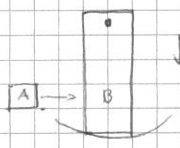
La quantità di moto nel caso di queste due monete che si scontrano si conserva nell'urto, e meglio la quantità di moto del sistema prima dell'urto è uguale a quella del sistema immediatamente dopo l'urto



In questo caso in assenza di attrito la quantità di moto del sistema si conserva, ma in presenza di attrito la quantità di moto non si conserva (urto non istantaneo)



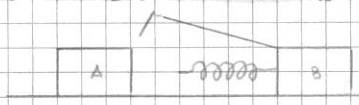
Anche in presenza di attrito la quantità di moto si conserva

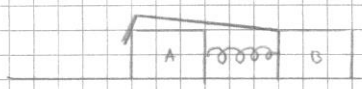


Qui la quantità di moto non è detto che si conservi, infatti c'è un vincolo che genera una forza impulsiva

URTI E LEGGI DI CONSERVAZIONE (energia)

NB: URTO ELASTICO: si manifestano forze interne conservative
URTO ANELASTICO: si manifestano forze interne non conservative





Dopo che A urta B e rimane bloccato dal gancio, parte della sua energia cinetica si trasmette a B, ed un altra parte diventa energia potenziale della molla. L'energia totale però non si conserva in quanto l'energia potenziale accumulata nella molla non può essere restituita, quindi è come se fosse andata perduta

URTI ELASTICI $E_{tot\,fin} = E_{tot\,in}$ se $\Delta U = 0$ $E_{k\,fin} = E_{k\,in}$

URTI ANELASTICI $E_{tot\,fin} \neq E_{tot\,in}$ $E_{k\,fin} \neq E_{k\,in}$

Spesso, ma non sempre, in un urto anelastico $E_{tot\,fin} \leq E_{tot\,in}$

www.alessandropaghi.it

Quando un urto anelastico si accade con i due corpi che si sono uniti in un unico corpo, si dice perfettamente anelastico

Un urto perfettamente anelastico si perde la quantità di energia meccanica massima possibile (che non è tutta quella iniziale, a meno che uno dei due corpi abbia massa infinita)

Negli urti anelastici ~~massa~~ si conserva la quantità di moto

Consigli x esercizi

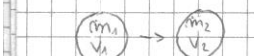
Per vedere se si conserva o meno la quantità di moto si deve verificare se agiscono o meno forze esterne (limitatamente alle impulsive, se l'urto è istantaneo)

Per capire se si conserva o meno l'energia, si deve guardare la elasticità o meno dell'urto (elastico o anelastico)

Nei vari tipi di urti si possono conservare entrambe, una delle due, o nessuna

esempio

Due particelle si muovono in una dimensione e urtano in maniera elastica; note le masse e le velocità iniziali, determiniamo le velocità finali



$$\begin{cases} m_1\vec{V}_{1i} + m_2\vec{V}_{2i} = m_1\vec{V}_{1f} + m_2\vec{V}_{2f} & \text{SI CONSERVA QUANT. DI MOTO} \\ \frac{1}{2}m_1\vec{V}_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2V_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{V}_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{V}_{2f}^2 & \text{SI CONSERVA EN. MECCANICA} \end{cases}$$

Proiettiamo i dati della particella 1 e 2

$$\begin{cases} m_1(V_{1i} - V_{1f}) = m_2(V_{2i} - V_{2f}) \\ m_1(V_{1i}^2 - V_{1f}^2) = m_2(V_{2i}^2 - V_{2f}^2) \end{cases}$$

Scomponiamo la differenza dei quadrati

$$\begin{cases} m_1(V_{1i} - V_{1f})(V_{1i} + V_{1f}) = m_2(V_{2i} - V_{2f})(V_{2i} + V_{2f}) \end{cases}$$

Dividiamo membro a membro la II equazione per la prima

$$\begin{cases} m_1(V_{1i} - V_{1f}) = m_2(V_{2i} - V_{2f}) \\ V_{1i} + V_{1f} = V_{2i} + V_{2f} \end{cases}$$

Abbiamo effettuato la divisione in quanto la quantità per cui abbiamo diviso sono diverse da 0: $(V_{1i} - V_{1f})$ e $(V_{2i} - V_{2f})$ potrebbero essere 0 solo nel caso in cui l'urto non è forze state

$$V_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}V_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}V_{2i}$$

$$V_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}V_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}V_{2i}$$

Casi particolari

- Una massa è molto maggiore dell'altra $M_1 \gg M_2$ e si muove solo quella più piccola

• $M_1 \gg M_2$, $V_{1i} = 0$ $\quad V_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\cdot 0 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}V_{2i} \simeq 0$

$$V_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\cdot 0 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\cdot V_{2i} = -V_{2i}$$

www.alessandropaghi.it

- $M_1 \gg M_2$, $V_{2i} = 0$

$$V_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_{1i} + 0 \cong V_{1i}$$

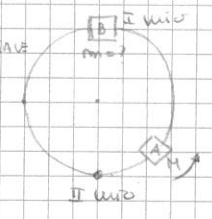
$$V_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_{1i} + 0 \cong 2V_{1i}$$

- $M_1 = M_2$

$$V_{1f} = 0 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} V_{2i} = V_{2i}$$

$$V_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_{1i} + 0 = V_{1i}$$

Esercizio 4 20 giugno 2012



Dopo il primo urto se ne è un altro in posizione diametralmente opposta; il moto è se un primo tempo, quindi non dobbiamo considerare ne la lunghezza pero ne l'altro. Determiniamo la massa di B

Possiamo distinguere due casi:

- A torna indietro, con B più veloce che si muove in senso opposto
- A non torna indietro, B comincia ad andare più veloce e raggiunge A nel punto del II urto

- I caso

Con la conservazione dell'energia e della quantità di moto otteniamo:

$$V_A = \frac{M - m}{M + m} V \qquad V_B = 2\frac{MV}{M+m}$$ (formule analoghe al caso precedente)

In questo caso i due corpi devono avere velocità uguali in modulo e opposte in verso, quindi:

$$V_A = -V_B \Rightarrow \frac{M - m}{M+m} V = -\frac{2MV}{M+m} \Rightarrow m = 3M$$

- II caso

Le velocità le troviamo come sopra

$$V_A = \frac{M - m}{M + m} V \qquad V_B = \frac{2MV}{M+m}$$

Per avere l'urto, A deve compiere mezzo giro, un giro e mezzo, due giri e mezzo e così via; B deve compiere un giro in più di A

A all'istante del secondo urto avrà percorso un arco di lunghezza $\pi R(2n+1)$ mentre B, con un giro in più, avrà percorso un arco pari a $\pi R(2n+3)$

Imponendo che A e B partano per la posizione scelta nello stesso momento otteniamo che:

$$\frac{\pi R(2n+1)}{V_A} = \frac{\pi R(2n+3)}{V_B}$$

Da qui ricaviamo che:

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{(2n+3)}{(2n+1)}$$

Conoscendo le velocità vediamo che

$\frac{V_B}{V_A} = \frac{2M}{M-m}$

Uguagliando questi due valori V_B/V_A:

$\frac{(2m+3)}{(2m+1)} = \frac{2M}{M-m} \Rightarrow 2M(2m+1) = (2m+3)(M-m)$

$4Mm + 2M = 2mM - 2m^2 + 3M - 3m$

$m(2m+3) = 2mM + 3M - 4mM - 2M$

$\Rightarrow m = \frac{1-2M}{2m+3} \cdot M$

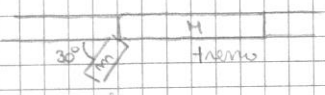
Così ammette una sola soluzione con $m>0$ per $M=0$, ed è $m = \frac{M}{3}$

Nel due casi dopo l'urto si ha rispettivamente $V_B = \frac{V}{2}$ e $V_A = \frac{3}{2}V$, per cui la guida deve rendere almeno la forza centripeta, esercita in direzione radiale una forza $\frac{mV_B^2}{R}$, queste espressioni vanno uguagliate e con il valore $\frac{3MV^2}{4R}$

Volendo tenere conto anche della forza peso, el valore trovato,

Vedi Meccanica

Esercizio 1 ottobre 2001 esercizio 1



L'urto è anelastico, quindi non si conserva l'energia meccanica totale, ma non si conserva neppure la quantità di moto in quanto i binari esercitano un vincolo, e meglio si conserva solo la componente parallela alla quantità di moto

quantità di moto lungo x

$P_x = mV\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{costante} = (m+M)V_P$

$\Rightarrow V_P = \frac{m}{m+M} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot V$

$\frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}(m+M)V_P^2 = \Delta E_K$ energia dissipata

NUOVO ARGOMENTO

Energia cinetica totale di un sistema di particelle; espressione semplificata nel caso di corpo rigido

$E_{tot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Per un corpo rigido, per il quale (dalla definizione) la distanza fra ogni coppia di particelle è fissata, le velocità non sono tutte indipendenti; la sommatoria si può scrivere in forma più compatta

Per un corpo rigido vincolato a muoversi attorno ad un asse fisso l'espressione è ancora più semplice, poiché:

www.alessandropaghi.it

$\forall i,\ v_i = \omega r_i$

$\Rightarrow E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} I \omega^2$

(r_i: distanza della particella i-esima dall'asse preposto a rotazione)

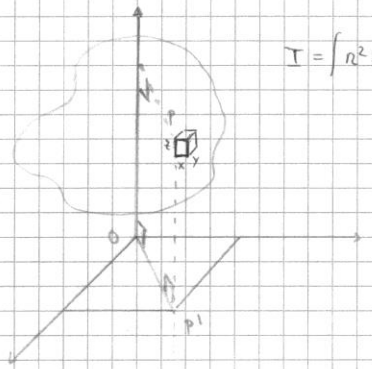
La quantità I è detta MOMENTO D'INERZIA ed ha valore che dipende dall'asse di rotazione rispetto al quale è stato calcolato

Estendiamo la definizione di I al caso di distribuzioni continue di massa

$\sum m_i r_i^2 \qquad I = \int_M R^2 (dm) \rightarrow$ massa di una particella

$M \rightarrow$ integrale su tutta la massa

$= \int_V R^2 \rho \, dV$



$I = \int R^2 \rho \, dV = \int (x^2+y^2)\, \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$

(x^2+y^2: distanza dell'asse z; ρ: densità; $dx\,dy\,dz$: dimensioni della particella)

MOMENTO D'INERZIA:

- VOLUME: $\int_V R^2 \rho \, dV$
- SUPERFICIE: $\int_S R^2 \sigma \, dS$
- LUNGHEZZA: $\int_\ell R^2 \lambda \, d\ell$

$\Big\} \int_M R^2 dm$

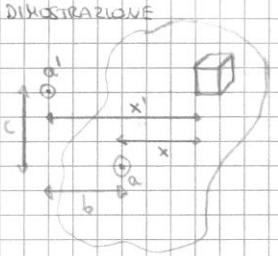
Per il calcolo del momento d'inerzia: TEOREMA DI HUYGENS-STEINER (o teorema degli assi paralleli)

Se conosco il momento d'inerzia di un corpo rigido rispetto ad un asse a passante per il suo centro di massa ($I_{a\text{-}CM}$), allora posso dedurre il valore di I rispetto a qualunque altro asse a' parallelo ad a utilizzando la seguente espressione:

$I_{a'} = I_{a\text{-}CM} + M d_{a\text{-}a'}^2$ → distanza tra le due rette a e a'

↳ massa del corpo rigido

DIMOSTRAZIONE



x = distanza del volatile da a

x' = " " " " a' $\quad (x' = x+b)$

Chiamiamo z la direzione degli assi; se b è la separazione in direzione x, allora un elemento dm a distanza x da π dista $x' = x+b$ da a'. Similmente, nella direzione y avremo $y' = y+c$. Il quadrato delle distanze degli assi è rispettivamente:

$x^2+y^2 = R^2$, $\quad x'^2+y'^2 = R'^2$ e quindi $x'^2 = (x+b)^2 = x^2+2bx+b^2$

e anche $y'^2 = (y+c)^2 = y^2+2cy+c^2$

$I_{a'} = \int_M R'^2 dm = \int_M (x'^2+y'^2)\, dm = \int (x^2+y^2)\, dm + \int (b^2+c^2)\, dm + 2\int (bx+cy)\, dm =$

$= I_{a\text{-}CM} + M d_{a\text{-}a'}^2 + 2\underbrace{\int (bx+cy)\, dm}_{0}$ vedi pag successiva

$$x_{CM} = \frac{\int x\, dm}{M} \Rightarrow \int x\, dm = (x_{CM})\, M_{tot}$$

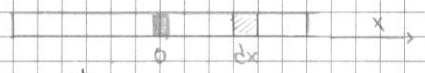
x_{CM} è la coordinata rispetto all'one a il quale devi porre per il Centro di massa i percorso $x_{CM} = 0$

$$\Rightarrow I_{a'} = I_{a-CM} + M\, d_{a-a'}^2$$

Esempi di calcolo di momenti d'inerzia per sistemi continui fatti nuovamente nella forma e nella distribuzione di densità

- Riduzione a 1-D di integrali di volume

- Sbarretta sottile omogenea $\Rightarrow \lambda = \frac{dm}{dl} = \frac{M}{L}$ (omogenea)



$$I = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} x^2 \frac{M}{L} dx = * \qquad dm = \lambda dl$$

$$* = \frac{M}{L}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} = \frac{M}{L}\frac{1}{3}\left(\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8}\right) = \frac{M}{L}\frac{1}{3}\frac{L^3}{4} = \frac{ML^2}{12}$$

- Sbarretta sottile non omogenea

$$\lambda(x) = \lambda_0 \left(\frac{x}{L}\right)^2$$



$$I = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} x^2 \lambda_0 \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = \frac{\lambda_0}{L^2}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} x^4 dx = \frac{1}{5}\frac{\lambda_0}{L^2}\left[x^5\right]_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} = \frac{1}{80}\lambda_0 L$$

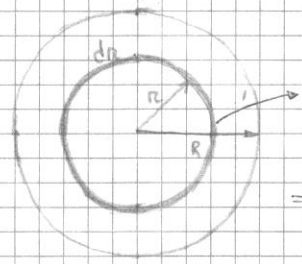
- Anello sottile omogeneo



$$dm = \lambda dL$$

$$I = \int_M R^2 dm = R^2 \int_M dm = MR^2$$

- Disco omogeneo / Cilindro omogeneo



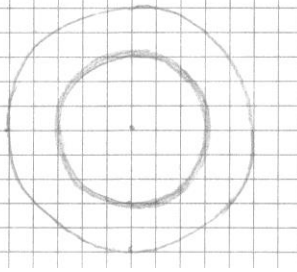
$$\sigma = \frac{M}{S}, \quad \rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{Sh} \Rightarrow \sigma = \rho h$$

$M_{anello} = \sigma\, 2\pi R\, dR$ (R e dR sono le dimensioni del rettangolo che avvolto diventa l'anello)

$$dI = (\sigma\, 2\pi R\, dR)\, R^2$$

$$\Rightarrow I = \int dI = \int \sigma\, 2\pi R^3 dR = 2\pi\sigma\frac{R^4}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\underbrace{\pi\sigma R^4}_{\pi R^2 = S} = \frac{1}{2}\underbrace{S\sigma}_{M} R^2 = \frac{1}{2}MR^2$$

- Cilindro non omogeneo con densità dipendente dalla sola distanza dall'asse $\rho(r,z,\phi) = \rho(R)$



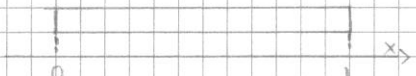
$$I = \int_M R^2 dm = \int_V R^2 \rho\, dV = \int R^2 \rho(R) 2\pi R h\, dR = 2\pi h \int R^3 \rho(R) dR$$

- Applicazione del teorema di Huygens-Steiner

$\lambda = \frac{M}{L}$

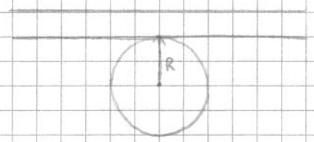
$I = I_{CM} + M d_{O-O'}^2 = \frac{1}{12} ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) ML^2 = \frac{1}{3} ML^2$

o con il calcolo diretto



$\int_0^L x^2 \lambda dx = \lambda \int_0^L x^2 dx = \frac{M}{L} \cdot \frac{1}{3} L^3 = \frac{1}{3} ML^2$

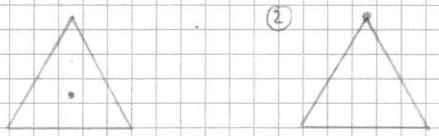
Nel caso di un disco che ruota attorno ad un one



$I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$

$I = \frac{1}{2} MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2$

- Cornice (per esempio, triangolare)



Se pensiamo è il perno attorno al quale si ruota

① $I_{Cdm} = I_{CM} + M\left(\frac{L\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{1}{12} ML^2 + \frac{3}{36} ML^2 = \frac{1}{6} ML^2$

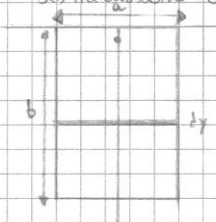
$I_{triangolo} = 3 \frac{1}{6} ML^2 = \frac{1}{2} ML^2$

② $I_{\text{retta}} = I_{\text{triangolo } CM} + M_{\text{triangolo}} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} L\right)^2 = \frac{1}{2} ML^2 + 3M \frac{1}{3} L^2 = \frac{3}{2} ML^2$

in alternativa

$2\left(\frac{1}{3} MR^2\right) + \frac{1}{12} ML^2 + M\left(\frac{\sqrt{3}L}{2}\right)^2 = \frac{2}{3} ML^2 + \frac{1}{12} ML^2 + \frac{3}{4} ML^2 = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{12} + \frac{3}{4}\right) ML^2 = \frac{8+1+9}{12} ML^2 = \frac{18}{12} ML^2 = \frac{3}{2} M$

- Distribuzione omogenea rettangolare



$\sigma = \frac{M}{ab}$ $\quad dM = \sigma a dy$

$dI_{CM} = \frac{1}{12} (\sigma a dy) a^2$

$dI = dI_{CM} + (\sigma a dy) y^2$ $\quad$ x il teorema di Huygens-Steiner

$I = \int dI = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{1}{12} \sigma a^3 + \sigma a y^2\right) dy = \frac{1}{12} \sigma a^3 b + \sigma a \frac{b^3}{3} =$

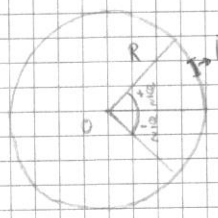
$= \frac{1}{12} \frac{M}{ab} a^3 b + \frac{M}{ab} \frac{b^3}{3} = \frac{1}{12} Ma^2 + \frac{1}{3} Mab^2$

Calcolare il momento d'inerzia in una distribuzione omogenea, ad esempio quadrata, pentagonale, esagonale ecc.

www.alessandropaghi.it

Esercizio

$M = R\vartheta\lambda$ (in questo ϑ = angolo rosso)



$I_O = MR^2 = R^3\vartheta\lambda$ $\quad I_{CM} = ?$

$x_{CM} = \frac{\lambda}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int_{-\vartheta/2}^{+\vartheta/2} R\cos\vartheta\,\lambda R\,d\vartheta = \frac{1}{R\vartheta_0\lambda} R^2\lambda \int_{-\vartheta/2}^{\vartheta/2}\cos\vartheta\,d\vartheta =$

$= \frac{\lambda}{\vartheta_0} R\, 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right)$

$I_O = I_{CM} + M_{TOT}x^2_{CM} \Rightarrow I_{CM} = I_O - M_{TOT}x^2_{CM}$

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

$\frac{1}{2}MV^2$ Energia di una particella di massa e M velocità V

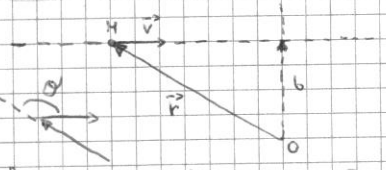
$\frac{1}{2}I\omega^2$ energia di un corpo rigido di momento d'inerzia I e velocità angolare ω

Richiamo prodotto vettoriale:

Il prodotto vettoriale tra due vettori si può trovare come il determinante di una matrice come questa:

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}$$

DINAMICA ROTAZIONALE DI UNA PARTICELLA



Quando M si muove deve ruotare per potersi vedere, e mi deve ruotare tanto più quanto la direzione del moto di M è ripida

Supponiamo che una particella di massa M e di velocità V (quindi $p = mV$) si muova su una traiettoria rettilinea distante b da un punto di riferimento O.

Consideriamo la quantità vettoriale $\vec{L} = \vec{r}\wedge\vec{p}$ dove $\vec{r}$ è la posizione di M rispetto ad O (notiamo che $L = bp$). L è il MOMENTO ANGOLARE della particella

Ci chiediamo se $\vec{L}$ cambia e cosa serve per cambiare $\vec{L}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r}\wedge\vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\wedge\vec{p} + \vec{r}\wedge\frac{d\vec{p}}{dt}$$

notiamo che:

1) poiché $\vec{p}$ e $\vec{v}$ sono parallele (e $\vec{v} = d\vec{r}/dt$) il primo prodotto vettoriale è nullo

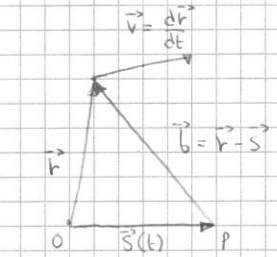
2) della prima equazione cardinale, il secondo prodotto eguaglia $\vec{r}\wedge\vec{F}$, dove $\vec{F}$ è la forza applicata alla massa M $\vec{r}\wedge\vec{F}$ si chiama MOMENTO TORCENTE

Se definiamo $\vec{\tau} = \vec{r}\wedge\vec{F}$ allora $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$

A volte è necessario studiare la dinamica rispetto a un polo mobile. Cosa cambia?

Supponiamo di calcolare la posizione $\vec{r}$ rispetto a un'origine O (fissa) e il momento rispetto a un punto diverso P, che la distanza da O pari a $\vec{s}$ (ad esempio $\vec{s} = \vec{s}(t)$)

www.alessandropaghi.it



Ora consideriamo $\vec{L} = \vec{b} \wedge \vec{p}$ dove $\vec{b}$ è la posizione di rispetto a P: momento angolare rispetto a P, che è un punto generico che potrebbe anche muovere

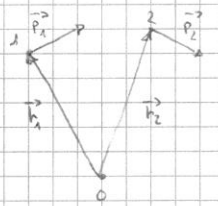
$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{b}} \wedge \vec{p} + \vec{b} \wedge \dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} - \vec{s}) \wedge \vec{p} + \vec{b} \wedge \vec{F} = 0 - \dot{\vec{s}} \wedge \vec{p} + \vec{\tau}$$

↖ o parlez è uguale alla velocità parallela a P

CASI FORTUNATI: quando il punto si muove parallelo alla mano e quindi si torna al caso di prima $\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}$

Per ora limitiamoci per semplicità al caso in cui sulle $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{b} \wedge \vec{F}$

Estendiamo il caso di un sistema di particelle (non meccanicamente, per es, un corpo rig



DINAMICA ROTAZIONALE DI UN SISTEMA DI PARTICELLE

Sommiamo i momenti angolari di tutte le particelle, avendo cura di calcolarli tutti rispetto ad un unico punto di riferimento (polo) O.

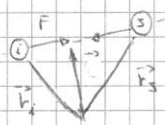
$$\vec{L}_{tot} = \sum_i^n \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i$$

Deriviamo rispetto al tempo ottenendo:

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \frac{d(\vec{r}_i \wedge \vec{p}_i)}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \left(\sum_j^{m_i} \vec{\tau}_j^{(i)} \right)$$

(la doppia sommatoria è dovuta al fatto che su una particella possono agire più forze contemporaneamente

Se le forze interne tra ogni coppia di particelle giacciono lungo la retta congiungente le due particelle della coppia (cioè due momenti interni), nella somma dei momenti torcenti si annullano tutti i momenti dovuti a forze interne



$$|\vec{r}_i \wedge \vec{F}_{i \leftarrow j}| = |\vec{r}_j \wedge \vec{F}_{j \leftarrow i}| = \vec{\tau}_{r\perp}$$

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \sum_i \tau_{i\text{-esterne}}$$ SECONDA EQUAZIONE CARDINALE

(N.B. $\vec{L}_{TOT}$ e $\vec{\tau}_i$ vanno calcolati rispetto allo stesso polo)

Quando tale polo o è fermo o deve almeno muoversi parallelamente al centro di massa, altrimenti nasce un termine aggiuntivo $-\vec{v}_p \wedge \vec{p}_{tot}$ con $\vec{v}_p$ velocità del polo

da qui si ricava anche un principio di conservazione

se $\sum_i \tau_{i\text{-esterno}} = 0$ allora $\vec{L}$ si conserva

Confrontiamo gli aspetti della prima e della seconda equazione cardinale e dei principi che da esse scaturiscono

se $\sum_i F_{i\text{-esterno}} = 0$ allora $\vec{P}$ si conserva

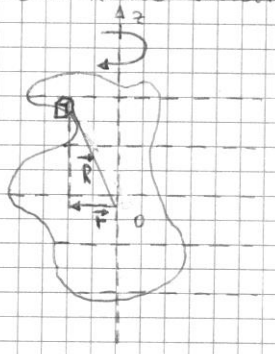
Notare che si tratta di equazioni vettoriali:

Conoscere 3+3 informazioni sulla variazione di 3 componenti della quan

www.alessandropaghi.it

di moto totale e su quella delle 3 componenti del momento angolare totale del sistema.

CORPO RIGIDO VINCOLATO A RUOTARE INTORNO AD UN ASSE FISSATO



$\vec{R} \wedge \vec{F} = R_x F_y - R_y F_x = \vec{\tau}_z$ rispetto al polo $= r_x F_y - r_y F_x$

$\vec{r}$ è la distanza del vincolo rispetto all'asse z

$\vec{R} = \vec{r} + \vec{z}$ → qui non c'è in quanto la più comoda

$L_{zi} = r_{xi}\, m_i\, v_{yi} - r_{yi}\, m_i\, v_{xi}$ $\quad L_z = r_x p_y - r_y p_x$

La velocità $\vec{v}_i$ sono tangenziali e quindi perpendicolari alla posizione $\vec{r}_i = (r_{xi}, r_{yi})$ proiettate sul piano xy (che sono proprio distanze dall'asse)

Si tratta di moti circolari: distanza dall'asse z

$L_{zi} = r_i\, m_i\, v_i = r_i\, m_i\, (\omega r_i) = m_i r_i^2 \omega$ (poiché $r \perp v$ sul piano xy)

$L_{z\text{-tot}} = \sum_i L_{zi} = \sum_i m_i r_i^2 \omega = I_z \omega_z$ questo vale solo quando il corpo rigido è vincolato a ruotare attorno a un asse fisso

Se fatto che il corpo sia rigido garantisce che I = costante

$\frac{dL_{z\text{-tot}}}{dt} = \frac{d(I_z \omega_z)}{dt} = I_z \frac{d\omega_z}{dt} = I_z \alpha_z = \tau_z$ non sempre mem. immobili di vettori in quanto si tratta qui un moto unidimensionale

questa relazione ricorda $\vec{F} = m\vec{a}$

$\tau_z = \frac{dL_{z\text{tot}}}{dt} = \frac{d(I_z \omega)}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \alpha$ questa è la forma a cui si riduce la 2ª equazione cardinale

In realtà L_z non dipende solo dalla componente z della velocità angolare ω: essa dipende da tutte le componenti di ω, ma nel caso da noi considerato il moto è solo lungo l'asse z

Dalle due equazioni cardinali si deducono due leggi di conservazione:

1ª cardinale $\Rightarrow$ $\vec{P}$ = costante se $\sum F_{ext} = 0$

2ª cardinale $\Rightarrow$ $\vec{L}$ = costante se $\sum \tau_{ext} = 0$

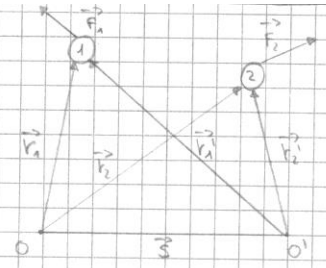
Le due leggi di conservazione applicate ad un corpo rigido che è inizialmente fermo dimostrano sotto quali condizioni il corpo rigido resta fermo: sono le condizioni per la STATICA DEL CORPO RIGIDO.

Può sorgere un dubbio: il momento dipende dalla scelta del polo, che può essere diverso a seconda dell'osservatore?

Un teorema risolve la questione affermando che:

se la condizione di momento è verificata rispetto ad un polo, allora è verificata rispetto a qualunque polo, nell'ipotesi che la condizione di momento delle forze sia verificata

www.alessandropaghi.it

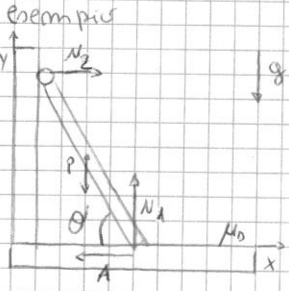


IPOTESI
$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$
$\vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2 = 0$

TESI
$\vec{r}_1' \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2' \wedge \vec{F}_2 = 0$

DIM $\sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i' \wedge \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r}_i + \vec{s}) \wedge \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i + \vec{s} \wedge \vec{F}_i) = \sum_i \vec{\tau}_i + \vec{s} \wedge \sum_i \vec{F}_i = 0 + 0 = 0$

esempio

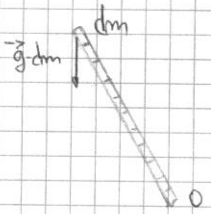


Affinché la scala sia ferma:
$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum \tau_z = 0 \quad A < \mu_S N_2$

X soluzione vedi sotto

$\frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{(est)} = M \vec{a}_{CM}$ $\quad \frac{d\vec{L}_{(tot)}}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_i^{(est)} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{(est)}$

Riprendo l'esercizio precedente



$\int \vec{g}\,dm = \vec{g} \int dm = \vec{g} \cdot M$ centro di massa x definizione

$\int \vec{r} \wedge \vec{g}\,dm = \left(\frac{\int \vec{r}\,dm}{M_{TOT}}\right) \wedge \vec{g} \cdot M_{TOT} = \vec{r}_{CM} \wedge P_{TOT}$

Avendo $\sum \vec{\tau}_i^{(est)} = \sum \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{R} \wedge \sum \vec{F}_i$ NO! in quanto la forza che agisce su ogni particella non sarà necessariamente uguale; nel nostro caso g è costante

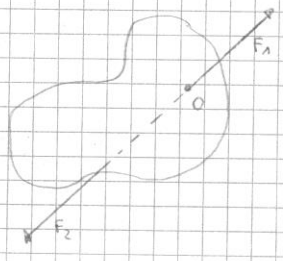
$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_2 - A = 0$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_1 - P = 0$

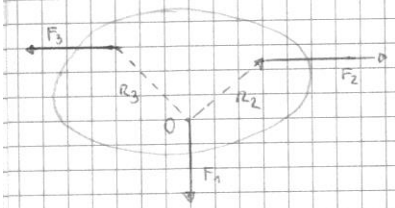
$\sum \tau_z = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cos\theta\, P - \sin\theta\, N_2 = 0$ queste considerando il polo nel punto di contatto della scala con il terreno (così facendo N_2 e A anch'essi momento torcente

$$\begin{cases} N_1 = Mg \\ N_2 = \frac{1}{2} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} Mg \\ A = \frac{1}{2} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} Mg \end{cases} \quad A \leq \mu_S N_1 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cancel{Mg} \leq \mu_S \cancel{Mg} \rightarrow \mu_S > \frac{1}{2} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$ condizione di stabilità

Consideriamo un corpo di forma irregolare

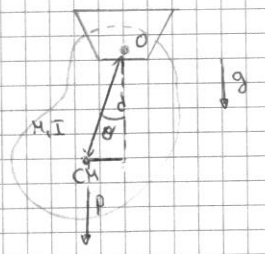


Non avendo con il momento angolare è nullo in quanto le due forze giacciono nella stessa retta sulla quale è presente il polo, quindi distanza del polo e quantità di moto (e la stessa forza) sono parallele



Ponendo F_1 e F_2 sul piano del foglio, anche F_3 dovrà stare sul foglio poiché i momenti devranno annullarsi

esercizio



$\tau_z = I_{zz} \cdot \alpha_z$

Considerando come polo il punto O, l'unica forza che ha momento è la forza peso in quanto la reazione vincolare non ha braccio

$-Mgd \sin\theta = I\ddot{\theta}$ → accelerazione angolare

N.B. dovrà avere $Mgd\sin\theta$ di modulo il segno "−" (vedi regola mnemonica destra) in quanto l'angolo è negativo

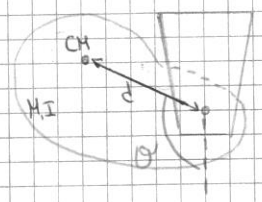
Con $\theta \ll 1$ (quindi $\sin\theta \to \theta$) $I\ddot{\theta} \cong -Mgd\theta \Rightarrow \ddot{\theta} \cong -\frac{Mgd}{I}\theta$ → ω^2

per la molla avevamo $m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}x$ → ω^2

quindi la legge oraria nel nostro caso sarà:

$\theta(t) = \theta_{max} \cos\left(\sqrt{\frac{mgd}{I}} \cdot t + \varphi\right)$

con lo stesso sistema dell'esercizio precedente, anche non con piccole oscillazioni ma con oscillazioni grandi



- La quantità di moto non si conserva in quanto agiscono forze esterne la cui somma è $\neq 0$
- Il momento angolare non si conserva, in quanto il momento torcente della forza peso non è nullo, scegliendo il polo sul cardine

- L'energia meccanica si conserva in quanto agiscono solo forze conservative

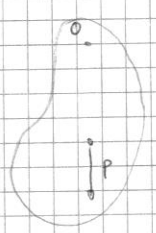
$-Mgd\sin\theta = I\ddot{\theta}$ $\quad \theta(t) = ?$

$-Mgd(\cos\theta) = -Mgd + \frac{1}{2}I\omega^2$ considerando rotazione attorno all'asse

$-Mgd\cos\theta = -Mgd + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}MV_{CM}^2$ rotazione e traslazione del CM

$-Mgd\cos\theta = -Mgd + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}M(\omega d)^2 = -Mgd + \frac{1}{2}\omega^2\underbrace{(I_{CM} + Md^2)}_{I \text{ x teorema Steiner}}$

$\omega^2 = \frac{2Mgd(1-\cos\theta)}{I}$



Per calcolare la reazione del vincolo

$\vec{R} + m\vec{g} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\cdot\vec{a}_{CM}$

$\vec{R} = M\omega^2 d\,\hat{y} - Mg$

N.B l'accelerazione tangenziale è nulla in quanto è nullo il momento angolare

www.alessandropaghi.it

FORZE CENTRALI E NON SOLO FORZE CENTRALI

Forza centrale $\Rightarrow \vec{F} = -k r \hat{r} = -k\vec{r}$

Forza coulombiana ha cariche puntiformi $\Rightarrow \vec{F} = k_0 \frac{Qq}{r^2}\hat{r}$
(o distribuzioni a simmetria sferica)

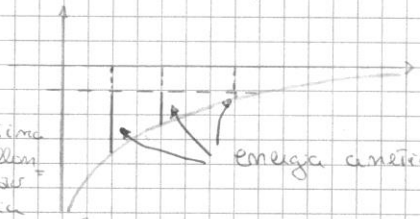
Forza gravitazionale tra oggetti puntiformi $\Rightarrow \vec{F} = -G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{r}$ (il "-" è perché la forza è attrattiva)
(o sferici)

Abbiamo dimostrato che le forze centrali sono conservative

Per la forza gravitazionale abbiamo ricavato l'espressione dell'energia potenziale

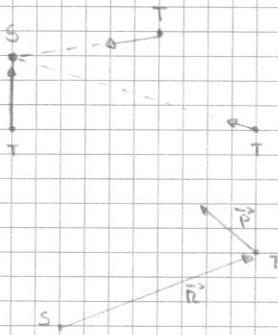
$U(r) = -\frac{GMm}{r} \sim \frac{1}{r}$

Questo grafico ci fa capire che con energia potenziale negativa ad esempio un satellite potrà allontanarsi solo per un tratto limitato in quanto vediamo che l'energia cinetica prima o poi si annulla (non può avere negativa) e con essa la velocità.



NB un corpo che come questo non può allontanarsi più di un tratto si muoverà su una circonferenza o su un'ellisse

Se si sceglie come polo il centro attrattore, la forza centrale ha sempre braccio nullo, per cui $\vec{L}$ resta costante. Considerando il sistema Terra-Sole, la forza di attrazione sarà sempre diretta verso il sole con modulo inversamente proporzionale alla distanza



$\vec{r} \wedge \vec{F} = r \cdot F \cdot \sin\pi = 0 \Rightarrow \vec{L}$ costante

questo nel caso in cui si trascurino le forze di attrazione dei altri pianeti

Il prodotto vettoriale tra questi due vettori dà sempre un vettore perpendicolare al foglio; poiché il momento angolare si conserva la traiettoria giacerà su un unico piano

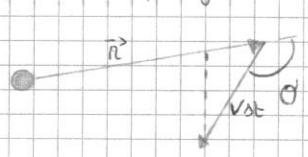
Le leggi Keplero: permettono di moto di pianeti intorno al sole.

I legge: la traiettoria assume la forma di conica

II legge: la velocità areolare è costante, ovvero il raggio vettore (congiungente tra pianeta e sole) copre aree uguali in tempi uguali

$\vec{L} = \vec{r} \wedge \hat{p}$ = costante

$L = r p \sin\theta = r m v \sin\theta$



N.B. $v\delta t$ può essere la velocità, la quantità di moto e la velocità infinitesima a seconda del valore di δt.

$\frac{r \cdot v\delta t \cdot \sin\theta}{2}$ = costante = A qui consideriamo δt infinitesimo

$\Rightarrow \frac{dA}{dt}$ = costante

III legge: per tutti i pianeti, ha un valore finito il rapporto tra il quadrato del periodo e il cubo della misura del semiasse maggiore dell'orbita

www.alessandropaghi.it

Dimostrazione limitata al caso delle ORBITE CIRCOLARI

$m \cdot \omega^2 R = F_c = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$ per la II Legge di Newton per un moto circolare uniforme

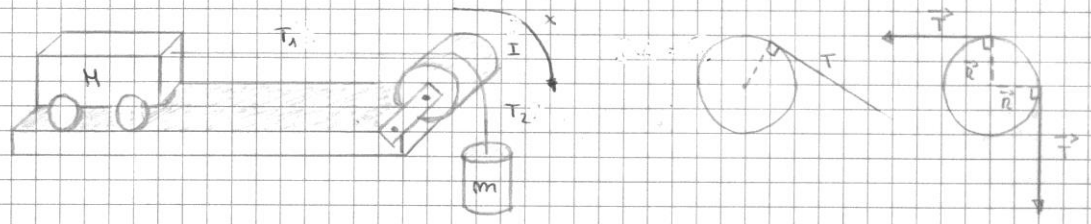
ω: velocità angolare; F_c: forza centripeta

$m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = G\frac{Mm}{R^2} \Rightarrow R^3 = \frac{GM}{4\pi^2}T^2$

massa del sole

$\frac{GM}{4\pi^2}$ → costante

Esercizi con carrucole pesanti: un esempio



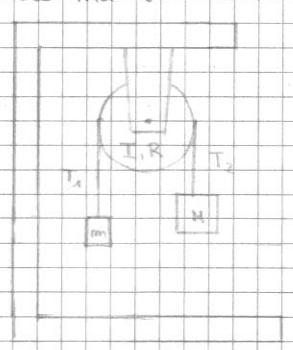
$$\begin{cases} I\alpha = \tau = T_1 R - T_2 R \\ mg - T_2 = ma \\ T_1 = Ma \\ -\alpha R = a \end{cases}$$

Sono considerati positivi i momenti che fanno ruotare la carrucola in senso orario

in quanto il filo non striscia sulla carrucola

Trovate le incognite a, α, T_1, T_2 ci accorgeremo che il moto è UNIFORMEMENTE ACCELERATO (le incognite infatti dipendevano da costanti)

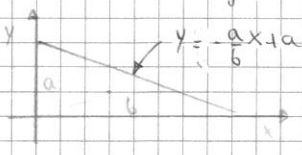
Macchina di Atwood



$$\begin{cases} Ma = Mg - T_2 \\ ma = T_1 - mg \\ I\frac{a}{R} = (T_2 - T_1)R \end{cases} \qquad I\left(\frac{a}{R}\right) = (T_1 - T_2)R \ ?$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{(M-m)gR}{I + (M+m)R^2}$$

Esercizio 2 11 Gennaio 2001



$$M = \frac{ab}{2}\cdot\sigma = \iint \sigma\, dx\,dy = \sigma \iint dx\,dy$$

$$I = \int x^2\, dm = \sigma\int_0^b x^2\left(-\frac{a}{b}x + a\right)dx = -\frac{a}{b}\sigma\frac{b^4}{4} + a\sigma\frac{b^3}{3} =$$

$$= \sigma ab^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}\sigma ab^3$$

Per trovare il momento d'inerzia è necessario trovare la distanza dell'asse del centro di massa

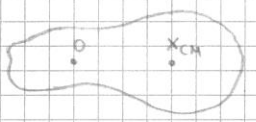
$$x_{CM} = \frac{\int x\, dm}{M_{tot}} = \frac{\sigma\int x\left(-\frac{a}{b}x + a\right)dx}{\sigma\frac{ab}{2}} = \frac{2}{ab}\cdot\left(-\frac{a}{b}\frac{b^3}{3} + \frac{ab^2}{2}\right) = \frac{2}{ab}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)ab^2 = 2\cdot\frac{1}{6}\cdot b = \frac{b}{3}$$

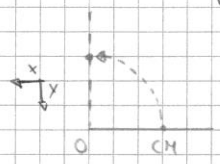
Il centro di massa è infatti nel baricentro

www.alessandropaghi.it

$I\alpha = -Mg\,\frac{b}{2}\sin\theta \Rightarrow \frac{1}{12}\sigma ab^3\alpha = -\sigma ab\,\frac{b}{2}\,g\,\frac{b}{3}\sin\theta$ se la posizione è di equilibrio stabile il momento è di richiamo

$\frac{1}{2}b\alpha = -g\sin\theta \cong -g\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{2g}{b}\theta \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g}{b}}$ ecco la pulsazione





questa è la condizione che rende stabile detto (o meglio come se fosse sdraiato o teso)

$Mg\frac{b}{3} = \frac{1}{2}I\,\Omega^2$ questa perché supponiamo che si conservi l'energia meccanica

$\Omega^2 = \frac{2Mgb}{3I} = \frac{2\sigma ab\,gb}{3\sigma\frac{1}{12}ab^3\sigma} = \frac{6g}{b}$

Nella rotazione, l'accelerazione centripeta è dentro del vincolo

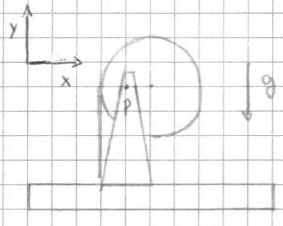
$R_x = M\Omega^2\frac{b}{3} = \sigma ab\,\frac{b}{2}\,\frac{6g}{b}\,\frac{b}{3} = \frac{2}{3}\sigma abg$

$R_y - Mg = Ma_{CM} = \sigma ab\,\frac{\alpha b}{3}$? Posso $a_T = \ddot{\theta}R$? $\alpha = ?$ $I\alpha = \tau_z$

$\frac{1}{12}\sigma ab^3\alpha = Mg\frac{b}{3} = \sigma ab\,\frac{b}{2}\,g \Rightarrow \alpha = \frac{2g}{b}$

quindi $R_y = -Mg + \sigma ab^2\alpha = -\sigma ab\,g + \sigma ab^2\,\frac{2g}{b} = \sigma abg\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{6}\sigma abg$

Esercizio 1 16 Aprile 2004



Condizioni statiche:

$\Sigma F_y = 0 \quad Mg + T = R_y$

$\Sigma\tau_z = 0 \quad Mg\frac{R}{2} = T\frac{R}{2} \Rightarrow T = Mg$

$\Rightarrow R_y = 2Mg$

$I\alpha = \tau_z = Mg\frac{R}{2}$

$I_P = I_0 + M\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}MR^2 + M\frac{R^2}{4} = \frac{3}{4}MR^2$

$\Rightarrow \alpha = \frac{Mg\frac{R}{2}}{I_P} = \frac{Mg\frac{R}{2}}{\frac{3}{4}MR^2} = \frac{2}{3}\frac{g}{R}$

Per calcolare la velocità angolare si impone la conservazione dell'energia meccanica

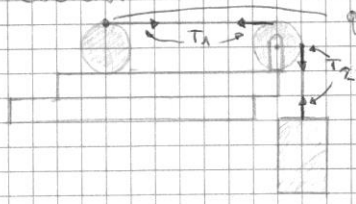
$Mg\frac{R}{2} = \frac{1}{2}I_P\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{MgR}{I_P} = \frac{Mg\,R\,4}{3MR^2} = \frac{4g}{3R}$

Calcoliamo la reazione vincolare nella posizione di equilibrio:

$R = Ma_{CM} + Mg = M\omega^2\frac{R}{2} + Mg = M\frac{4g}{3R}\frac{R}{2} + Mg = \frac{5}{3}Mg$

$R - Mg = Ma_c$

Esercizio



questo punto tutta attorno al punto di contatto con raggio pari al diametro del cilindro, oppure si può considerare che il cilindro ruota e basta

$\begin{cases} I_{pc}\alpha_1 = T_1 \cdot 2R & \text{II cardinale del cilindro appoggiato, con } I_{pc} = I + MR^2 \text{ (Steiner)} \\ \quad \hookrightarrow \text{momento d'inerzia rispetto al punto di contatto} \\ I_{CM}\alpha_2 = (T_2 - T_1)R & \text{II cardinale carrucola } I_{CM} = MR^2/2 \\ Ma = Mg - T_2 & \text{I cardinale cilindro sospeso} \\ a = \alpha_2 R & \text{moto di rotolamento del filo sulla carrucola} \\ \quad \hookrightarrow \text{accelerazione tangenziale} \\ a = \alpha_1 2R & \text{moto rotolamento del cilindro appoggiato} \end{cases}$

poiché il filo è inestensibile

Risolvendo il sistema troviamo $T_1, T_2, \alpha_1, \alpha_2, a$

Per trovare la velocità del cilindro che cade:

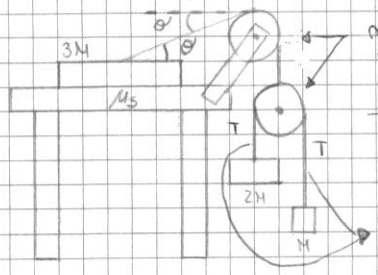
1) $a\Delta x = \frac{1}{2}\Delta v^2 \Rightarrow \Delta v = \sqrt{2a\Delta x} = V \qquad \omega_1 = V/2R, \quad \omega_2 = V/R$

2) $\begin{cases} Mg2\pi R = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_{pc}\omega_1^2 \\ V = R\omega_2 \\ V = 2R\omega_1 \end{cases}$ filo inestensibile

Per trovare il tempo:

$V = a\cdot\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{V}{a}$

Esercizio 16 Luglio 2013



carrucola trascurabile, quindi il momento di inerzia è nullo (trascurabile)

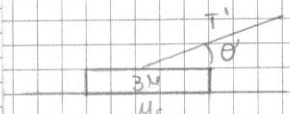
Trovare il valore minimo di μ_s e quanto tempo impiega la carrucola più in basso per ruotare di un giro completo

le due tensioni sono uguali perché la carrucola ha momento nullo

$\begin{cases} 2Ma = 2Mg - \bar{T} \\ Ma = \bar{T} - Mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2Ma = 2Mg - \bar{T} \\ 2Ma = 2\bar{T} - 2Mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2Ma = 2\bar{T} - Mg \\ 0 = 2Mg - 3\bar{T} + 2Mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{T} = \frac{4}{3}Mg \end{cases}$

$\bar{T}' = 2\bar{T} = \frac{8}{3}Mg$





All'incipio sia ferma:

$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - 3Mg + \frac{8}{3}Mg\sin\theta = 0$

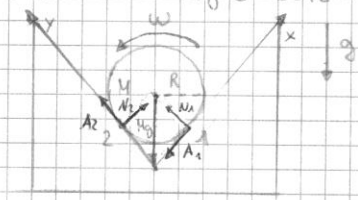
$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{8}{3}Mg\cos\theta = A$

$A \le \mu_s N \Rightarrow \mu_s \ge \frac{A}{N} = \frac{8/3\cdot Mg\cos\theta}{3Mg - 8/3\,Mg\sin\theta} = \frac{8\cos\theta}{9 - 8\sin\theta}$

$\Rightarrow \mu_s \ge \frac{8\cos\theta}{9 - 8\sin\theta}$

www.alessandropaghi.it

Esercizio 10 Luglio 2012



Consideriamo come polo il centro di massa:

$I\alpha = RA_1 + RA_2$

$A_1 = \mu_0 N_1 \quad A_2 = \mu_0 N_2$

Imponiamo che le forze su x e y siano 0.

$-A_1 + N_2 - \frac{Mg}{\sqrt{2}} = 0 \iff \sum F_x = 0$

$A_2 + N_1 - \frac{Mg}{\sqrt{2}} = 0 \iff \sum F_y = 0$

Dobbiamo quindi risolvere

$$\begin{cases} I\alpha = RA_1 + RA_2 \\ A_1 = \mu_0 N_1 \\ A_2 = \mu_0 N_2 \\ -A_1 + N_2 - \frac{Mg}{\sqrt{2}} = 0 \\ A_2 + N_1 - \frac{Mg}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases}$$

Esercizio 6 Luglio 2015



L'urto è elastico

- non si conserva la quantità di moto (ci sono forze esterne, come il peso della mano che cade)
- il momento angolare si conserva ponendo il polo nel punto di contatto con la corda, ma non bene
- si conserva l'energia meccanica

dividiamo in fasi

$4\left(\frac{1}{12}ML^2\right) + 2M\frac{L^2}{2} + ML^2 = \frac{7}{3}ML^2$ momento di inerzia con Steiner

$Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}MV^2 \Rightarrow V = \sqrt{gL}$ conserv. energia mecc. per il corpo in caduta

$\frac{1}{2}MV^2 = Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ " " " durante l'urto

$\underbrace{\frac{L}{2}MV}_{i} = \underbrace{\frac{L}{2}M\sqrt{2gL}}_{\text{momento angolare prima dell'urto}} = \underbrace{I\omega + \frac{L}{2}MV'}_{\text{momento angolare dopo l'urto}}$ conservazione momento angolare

completa sulle precedenti

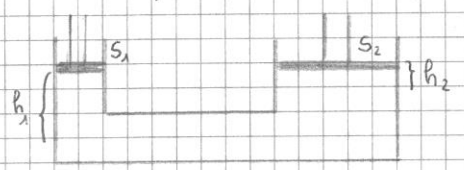
www.alessandropaghi.it

PRESSIONE NEI FLUIDI

I fluidi sono capaci di esercitare forze sulle pareti dei recipienti che li contengono.
Tali forze sono sempre perpendicolari alla superficie del contenitore

Esiste un principio, noto come principio di Pascal che afferma che la forza di pressione si distribuisce equamente sulla superficie del recipiente che contiene il fluido stesso.

Una prova del principio di Pascal funzionamento ad esempio la leva idraulica



$S_1 h_1 = S_2 h_2$ infatti il volume di liquido spostato deve essere lo stesso

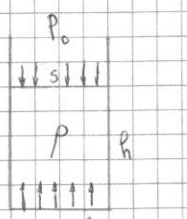
Un piccolo spostamento del pistone di sinistra comporta un piccolo spostamento di quello di destra, mentre piccoli spostamenti di quest'ultimo causano grandi spostamenti del primo pistone

$\text{PRESSIONE} = \frac{\text{FORZA}}{\text{SUPERFICIE}}$ con unità di misura $\frac{N}{m^2} = Pa$ (Pascal) in MKS

Il Pascal è un'unità molto piccola: ad esempio noi riusciamo a circa 10^5 Pa.

Ci sono poi molte altre unità di misura per la pressione: Torr o mm_{Hg}, atm, bar (1 atm = 100 Pa), kg/cm^2, Psi e mbar, PSI (Libbra/pollici)

LEGGI DI STEVIN (1)



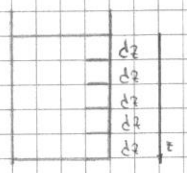
$P_0 S + Mg = P_1 S$ (I condizione) la prima delle forze sono quelle dovute al peso

$P_0 S + \rho V g = P_1 S$

$P_0 S + \rho S h g = P_1 S$

$P_0 + \rho h g = P_1$ questa formula consente di vedere di quanto aumenta la pressione con l'altezza

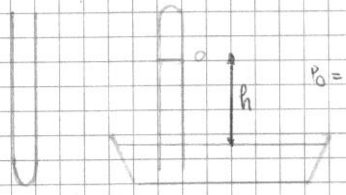
$\Rightarrow \Delta P = \rho g h$



$dp = \rho(z) g \, dz$

$\Delta P = \int dp = \int_{z_1}^{z_2} \rho(z) g \, dz$ questo nel caso in cui la densità non sia costante

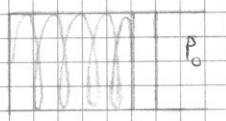
BAROMETRO DI TORRICELLI



$P_0 = \rho g h$ questa è la pressione esercitata dall'aria sul liquido nella bacinella

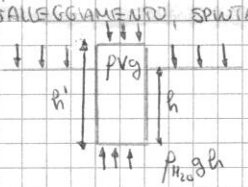
$P_{Hg} = \frac{13.6 \cdot 10^3 \, Kg}{m^3}$ pressione del mercurio

ALTRI BAROMETRI (ed altri fenomeni)



www.alessandropaghi.it

GALLEGGIAMENTO, SPINTA DI ARCHIMEDE E LEGGE DI STEVINO



La pressione dell'aria non viene considerata in quanto per il principio di Pascal essa è distribuita su tutto l'acqua, la quale la restituisce

Il corpo vive una spinta pari al peso del volume di liquido spostato

$\rho S h' g = \rho_{H_2O} S h g$

DINAMICA: approccio lagrangiano per ogni particella si considera una sola particella; le proprietà dipendono da esso e

Quindi consideriamo il fluido come scomposto in piccole porzioni di fluido del tempo

$x = x(x_0, y_0, z_0, t)$ $y = y(\ ,\ ,\ ,\ )$ $z = z(\ ,\ ,\ ,\ )$

DINAMICA: approccio euleriano più con certo numero di punti

$\vec{V} = (x,y,z,t) =$ ...

$T = (x,y,z,t) =$ ...

$p = (x,y,z,t) =$ ...

ecc.

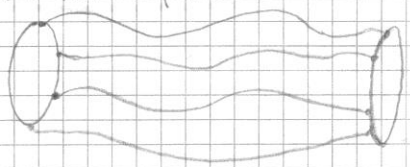
Quindi qui consideriamo non porzioni di fluido ma un insieme di punti geometrici

Sono nella definizione di campo; la proprietà del fluido viene messa in relazione con lo spazio e il tempo (non da informazioni sulla singola particella)

Condizioni di stazionarietà

$\dot{\vec{V}} = (x,y,z) = 0$ non significa che il fluido non accelera, ma che viene cioè la velocità dei punti è sempre la stessa

Linee e tubi di flusso



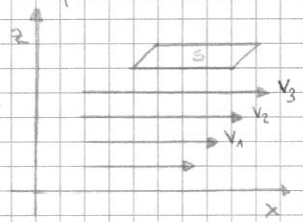
Se si ha un fluido in condizioni stazionarie, si hanno i cosiddetti TUBI DI FLUSSO, cioè delle aree dalle quali il liquido non può né entrare né uscire

FLUIDI: comprimibili e non

Di fatto i fluidi incomprimibili non esistono

FLUIDI: viscosi e non:

Un fluido è viscoso se uno strato scorre male su uno strato sottostante



dv/dz

$\frac{dF_t}{dS} = \eta \frac{dv}{dz}$

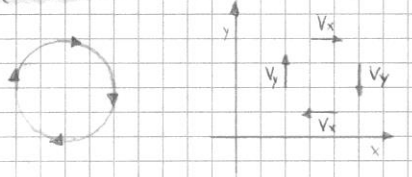
$F_t \leftarrow$ sforzo di taglio

$F_x = S(\eta)\frac{\partial V_x}{\partial z}$

η coefficiente due rotte a secondo del fluido considerato

Un moto, anche se stazionario, può essere rotazionale

Definizione di rotore:



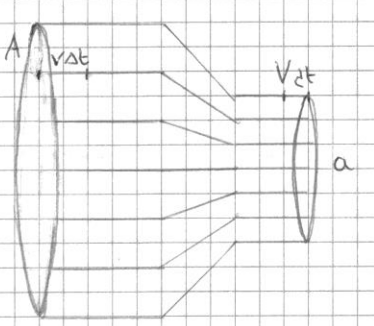
$\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}$ quando x cresce y decresce quando y cresce x cresce

$\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial y}, \frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}, \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$

$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \wedge (V_x, V_y, V_z)$ cioè $\vec{\nabla} \wedge \vec{V}$ rotore, rot o curl

www.alessandropaghi.it

Equazione di continuità



A = area sezione maggiore

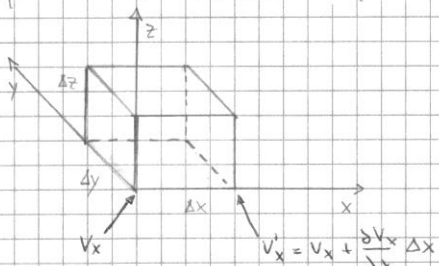
a = " " minore

v = velocità nella sez. magg

V = " " " min

$Av = aV$

Equazione di continuità: formulazione differenziale



$\Delta y \Delta z\, V_x \Delta t - \Delta y \Delta z \left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta t = -\Delta y \Delta z \frac{\partial V_x}{\partial x}\Delta x \Delta t$ volume entrato

$\rho \Delta y \Delta z\, V_x \Delta t - \rho \Delta y \Delta z \left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta t = -\rho \Delta y \Delta z \frac{\partial \Delta x}{\partial x}\Delta x \Delta t$ massa entrata

$-\rho \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) = \Delta m$ variazione di massa

$-\rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) = \frac{\Delta \rho}{\Delta t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$ derivata parziale della densità rispetto al tempo

$-\rho \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}\right) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$

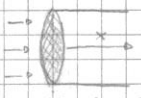
$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ → divergenza

N.B. $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} \neq 0$ (ROTORE) questo significa che la forza che genera il vettore non è conservativa in quanto compie a lungo andare lavoro

Liquido ideale → liquido incomprimibile e non viscoso (quindi c'è energia di conservata)

TEOREMA DI BERNOULLI → teorema dell'energia cinetica (e principio di conservazione dell'energia)

$L = F\Delta x = (pa)(V \cdot \Delta t) = p \cdot [A(V\Delta t)] = pV = p\Delta V$



$\Delta V = \frac{\Delta m}{\rho}$ è il volume di fluido che fluisce in un tempo Δt

Per un tubo di flusso con p_1 e p_2 ai due estremi



$L_{prom.} = p_1 V_1 A_1 \Delta t - p_2 V_2 A_2 \Delta t = (p_1 - p_2)\Delta V = (p_1 - p_2) \cdot \Delta m / \rho$

se il tubo parte da h_1 a h_2 (meno in altezza) faccio anche la forza peso:

$L_{peso} = \Delta m (h_1 - h_2) g$

Il fluido è ideale e quindi non viscoso

www.alessandropaghi.it

Ipotesi: moto è irrotazionale: tutta l'energia cinetica è in V_1, V_2

$L_{prem.} + L_{peso} = \Delta E_K$

cioè $(P_1 - P_2)\frac{\Delta m}{\rho} + \Delta m (h_1 - h_2) g = \frac{1}{2}\Delta m (V_2^2 - V_1^2)$

* È costante lo somma delle pressioni, dell'energia cinetica e potenziale per unità di volume lungo il condotto, di una particella di fluido

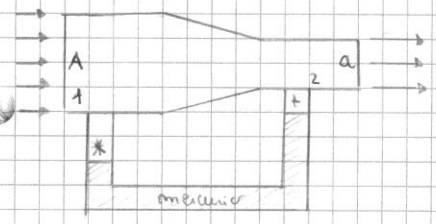
moltiplicando per ρ e separando 1 e 2

$P_1 + \rho h_1 g + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = P_2 + \rho h_2 g + \frac{1}{2}\rho V_2^2 = \text{costante} = P + \rho g h + \frac{1}{2}\rho V^2$

Questa vale considerando il liquido NON VISCOSO, poiché se fosse viscoso ci sarebbe delle resistenze di velocità, e INCOMPRIMIBILE, poiché se fosse comprimibile ci sarebbe del lavoro per comprimere il liquido.

Esempi di applicazioni

- Tubo di Venturi



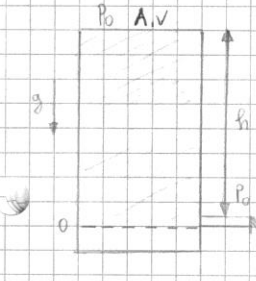
$P + \cancel{\rho g h} + \frac{1}{2}\rho V^2 = 0$

↳ non c'è variazione di altezza

$* \; P_1 + \rho_{H_2O} g h = P_2 + \rho_{Hg} g h +$

$P_1 - P_2 = (\rho_{Hg} - \rho_{H_2O}) g h$

$$\begin{cases} (\rho_{Hg} - \rho_{H_2O}) \cdot g h = \frac{1}{2}\rho_{H_2O}(V_2^2 - V_1^2) \\ A V_1 = a V_2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} P_0 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho V^2 = P_0 + \cancel{\rho g h} \; \frac{1}{2}\rho V^2 \\ AV = aV \end{cases}$$

$\cancel{\rho} g h = \frac{1}{2}\cancel{\rho}\left(V^2 - \frac{a^2}{A^2}V^2\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right)V^2$

$\Rightarrow V^2 = \frac{2gh}{1 - \frac{a^2}{A^2}} \simeq 2gh$ nel caso in cui il peso di colonna sia molto più piccolo rispetto a quello di entrata

quindi con $a \ll A \Rightarrow V = \sqrt{2gh}$

Togliendo il fondo del bicchiere, quanto tempo impiega a svuotarsi?

$V = \sqrt{2gh} \qquad V(h)$

$v(h) = \frac{a}{A} V(h) = \frac{a}{A} \cdot \sqrt{2gh} = -\dot{h}$ il segno "-" è dovuto al fatto che $v(h)$ è una velocità di discesa

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = -\frac{a}{A}\sqrt{2g} \cdot \sqrt{h} \\ h(0) = h_0 \end{cases}$$

$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{a}{A}\sqrt{2g}\, dt$

$\int_{h(0)}^{h(t)} \frac{dh}{2\sqrt{h}} = \int_0^t -\frac{a}{2A}\sqrt{2g}\, dt$

www.alessandropaghi.it

$$\sqrt{h(t)} - \sqrt{h_0} = -\frac{a}{2A}\sqrt{2g}\,t$$

$$\Rightarrow \sqrt{h(t)} = \sqrt{h_0} - \frac{a}{2A}\sqrt{2g}\,t \Rightarrow h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{a}{A}\sqrt{2g}\,t\right)^2$$

Esercizio: MOTI KEPLERIANI 2 ottobre 2002

Una cometa di massa m che ottorna al sole (massa M) su un'orbita ellittica. La distanza massima dal sole D e la sua minima distanza d.

Rispondere alle domande usando solo i dati a disposizione; ammettendo $M \gg m$ e che non ci siano impatti di altri corpi celesti.

a) Quali grandezze del moto sono costanti?

b) Variazione E_c, punto di max e di min

c) ΔE meccanica tot

a) Si conserva la quantità di moto e il momento angolare in quanto non agiscono forze esterne. L'unica forza interna è quella di attrazione gravitazionale, che è centrale e quindi conservativa (quindi si conserva l'energia meccanica totale e il momento angolare della cometa rispetto al sole due sono considerate forze perché $M \gg m$)

b) $E_{mecc} = U + K \Rightarrow |\Delta K| = |\Delta U|$

$$U = -G\frac{Mm}{r^2}$$

quindi $|\Delta K| = |\Delta U| = GMm\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D}\right) = \frac{9}{D}GMm$

c) Considerando che il momento angolare si conserva e che in pericelio e afelio la velocità e il raggio vettore (distanza cometa-sole) sono perpendicolari, abbiamo:

$L_{afelio} = L_{perielio}$ cioè $(mv)\,D = mv_0 \sin 90° \cdot d = mv_{max}\,d$ e quindi $v_{max} = 10\,v_{min}$

Per la conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}m\left(v_{max}^2 - v_{min}^2\right) = \frac{9}{D}GMm$$

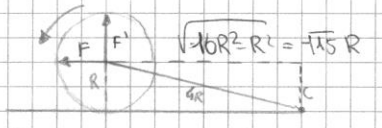
sostituendo otteniamo $v_{min}^2 = \frac{2GM}{11D} \Rightarrow K_{afelio} = \frac{1}{2}mv_{min}^2 = \frac{GMm}{11D}$

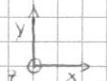
sommando con $U_{afelio} = -\frac{GMm}{D} \Rightarrow E_{tot} = K + U = -\frac{10}{11}\frac{GMm}{D}$

N.B. È anche chiusa perché energia meccanica negativa!

www.alessandropaghi.it

Esercizio





$$\begin{cases} (A=)\ \mu_D N = F & (\Sigma F_{x,z}=0) \\ FR = F'R\sqrt{15} & (\Sigma \tau_z = 0) \\ N = Mg + F' & (\Sigma F_{y,z}=0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} FR - F'\sqrt{15}R = 0 \\ -\mu_D N + F = 0 \\ -Mg + N - F' = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{troviamo } F, F', N$$

$$\mu_D N R = I\alpha = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\alpha \Rightarrow (\alpha)$$

$$\vartheta = \cancel{\vartheta_0} + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$\omega = \omega_0 - \alpha t \Rightarrow (t) \rightarrow$ sostituendo sopra troviamo ϑ e dividendo per $2\pi R$ si trova il numero di giri fatti prima di fermarsi

Esercizio 1 ultimo appello 2013 22/01/13



$$I\ddot{\vartheta} = -Mgd\sin\vartheta \Rightarrow I\ddot{\vartheta} = -Mgd\vartheta \ (\text{per } \vartheta \ll 1)$$

equazione moto armonico con $\omega^2 = \frac{Mgd}{I}$

$$I = \frac{1}{3}\underbrace{\lambda b}_{M_b} b^3 + \frac{1}{3}\underbrace{\lambda a}_{M_a} a^2 = \frac{1}{3}\lambda(a^3+b^3)$$

$$M = L\lambda$$

$$d = \frac{\lambda b\, b/2 + \lambda a\, a/2}{\lambda L} = \frac{a^2+b^2}{2L}$$

$\rightarrow$ distanza del centro di massa dei centri di massa

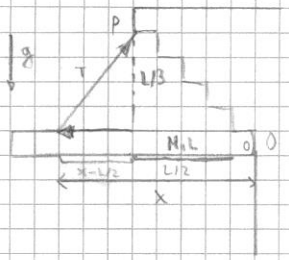
$$\gamma = \omega^2 = \frac{L\lambda g\,(b^2+a^2)/2L}{\frac{1}{3}\lambda(b^3+a^3)} = \frac{3}{2}g\,\frac{b^2+a^2}{b^3+a^3}$$

$a = xL \quad b = (1-x)L \quad x$ è il rapporto tra a e b

$$\gamma = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\,\frac{(1-x)^2+x^2}{(1-x)^3+x^3} \Rightarrow \gamma = \frac{1-2x+2x^2}{1-x+x^2}$$

da studiare in $[0,1]$ o meglio tra $[0,\frac{1}{2}]$ in quanto, ricordando della simmetria del centro a dx e a sx si ottengono risultati analoghi

Esercizio 13/03/13



$$Mg\frac{L}{2} = T_y x \Rightarrow T_y = \frac{MgL}{2x}$$

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{L/3}{x-L/2} \Rightarrow T_x = \frac{x-L/2}{L/3}\cdot\frac{MgL}{2x}$$

$$\Rightarrow T_x \propto \frac{x-L/2}{x}$$

$\rightarrow$ iperbolico

$$T = MgL\sqrt{\left(\frac{1}{2x}\right)^2 + \left(\frac{x-L/2}{L/3(2x)}\right)^2}$$

$$\gamma = \frac{1}{4x^2} + \frac{x^2 - xL + L^2/4}{L^2/9 \cdot 6x^2} = \frac{L^2/9 + x^2 - xL + L^2/4}{L^2/9 \cdot 6x^2}$$

va studiata questa funzione per $x \in [0,L]$ per vedere quando x minimizza T

www.alessandropaghi.it

Esercizio



$Mg\frac{L}{2} = mgL \Rightarrow m = \frac{M}{2}$ $(\Sigma \tau_z = 0)$

$\Delta U = \Delta K$

$Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad I = \frac{1}{12}M(3L)^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = ML^2$

$\Rightarrow Mg\frac{x}{2} = \frac{1}{2}ML^2\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{L}$

$\begin{cases} \frac{1}{2}I\omega^2 = MgL = \frac{1}{2}I\omega'^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{2}v^2 & \text{conservazione energia} \\ I\omega = I\omega' + 2L\frac{M}{2}v & \text{conservazione mom. angolare} \end{cases}$

$M\omega\frac{L}{2} = P_x$

$I\omega'\frac{L}{2} + \frac{M}{2}v = P'_x$

$\vec{\Delta P} = (\Delta P_x, 0) \qquad \Delta P_x = P'_x - P_x$

$\frac{1}{2}I\omega'^2 \qquad h = \frac{L}{2}(1-\cos\vartheta)$

$\frac{1}{2}I\omega'^2 = Mgh = Mg\frac{L}{2}(1-\cos\vartheta)$



per piccole se la guardi a piccole oscillazioni

TEMPERATURA E "PRINCIPIO ZERO"

Effetti della temperatura $\Rightarrow$ principi di funzionamento di termometri

Quando è stabilito lo stato di equilibrio termico fra due corpi. Ha le proprietà di una relazione d'equivalenza

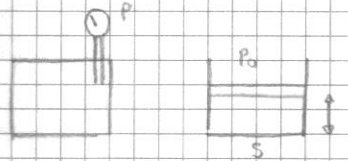
(A è all'equilibrio con B + B è all'equilibrio con C) $\Rightarrow$ A è all'equilibrio con C

$T_A = T_B \quad + \quad T_B = T_C \quad \Rightarrow \quad T_A = T_C$

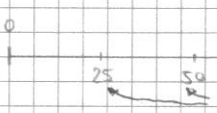
Cito e fenomeni di riferimento per la definizione delle scale termometri a gas

A volume costante, $\Delta p \propto \Delta T$ variazione di pressione direttamente proporzionale alla variazione di temperatura

A pressione costante, $\Delta V \propto \Delta T$ variaz. volume proporzionale a variaz. temperatura



In entrambi i casi definisco la stessa scala termica



strumenti indirettamente e valori intermedi ottenuti dalle misurazioni

Ora è facile realizzare termometri a gas, quindi si sono cercati altri materiali da usare, in particolare dei liquidi; l'acqua non è adatta in quanto a 100° bolle ed evapora ed inoltre ha volume minimo non a 0° ma a 4°. Ye liquidi più adatti è il mercurio i solidi hanno una variazione di volume troppo limitata)

dilatazione termica con liquidi

$\Delta V = \gamma_{Hg} V \Delta T \Rightarrow h = \frac{\gamma V \Delta T}{S}$ (S piccolo, grande)

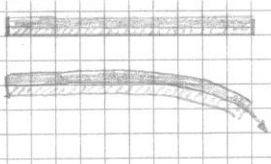
$\Delta V = S\Delta h$

per fare un termometro che misura il centimetro di grado o si aumenta il volume o si diminuisce la sezione del tubo

www.alessandropaghi.it

$\Delta L = \alpha L \Delta T$

costante che varia con il materiale

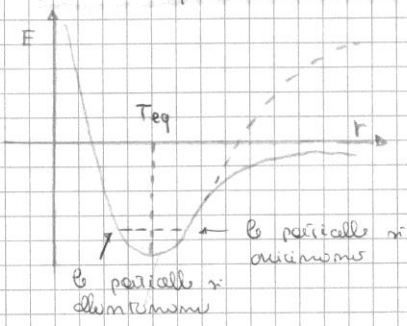


due barrette di materiali diversi attaccate

alla stessa temperatura, una dei due materiali si dilata più dell'altro, reagendo così

Termometri basati sulla dilatazione termica di liquidi e solidi

Perché i liquidi e i solidi si dilatano?



Le particelle di un solido fanno una posizione di equilibrio; allontanandole o avvicinandole esse tenderanno sempre di riassumere la posizione di equilibrio

Quando scaldiamo un corpo le particelle tenderanno ad allontanarsi, mentre a minore due fenomeni più energia

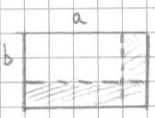
r è la distanza tra le particelle

- $\Delta r = r' \Delta E$

$R(E) = R(E_0) + R'(E_0)\Delta E + \frac{1}{2!} R''(E_0) \Delta t^2$ poiché consideriamo piccole minime posizioni ci fermiamo al primo ordine

$R(t) \cong R(t_0) + R'(t_0)\Delta T$

$\Rightarrow L = L_0 + \alpha L \Delta T$ dilatazione di lunghezza di un corpo (α dipende dal materiale)



$\Delta S = \beta S \Delta T$

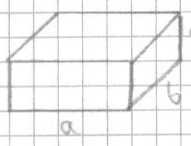
$\Delta S = b\Delta a + a\Delta b + \Delta a \Delta b$

$b\Delta a$: infinitesimo del primo ordine; $a\Delta b$: infinitesimo del primo ordine; $\Delta a \Delta b$: infinitesimo del secondo ordine

$\Delta S \cong b\Delta a + a\Delta b$

$\Delta S \cong b\alpha a \Delta T + a\alpha b \Delta T = ab\, 2\alpha \Delta T$

$\Delta S \cong 2\alpha S \Delta T \Rightarrow \beta = 2\alpha$ per la superficie



$V = Sh$

$\Delta V = S\Delta h + h\Delta S + \Delta S \Delta h$ → inf II ordine

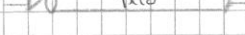
$S\Delta h$: lunghezza (α); $h\Delta S$: superficie (β)

$\Delta V \cong S\alpha h \Delta T + h\beta S \Delta T$

$\Delta V \cong Sh(\alpha + \beta)\Delta T$

$\Delta V \cong V\gamma\Delta T \Rightarrow \gamma = 3\alpha$ per il volume

CONDUZIONE IN UN MEZZO OMOGENEO



dQ/dt proporzionale a ΔT → alla temperatura → diff temperatura tra gli estremi

Considerando due fili ponendo una quantità di calore doppia

Se i due fili sono in serie ponendo una quantità di calore dimezzata

www.alessandropaghi.it

dQ/dt è direttamente proporzionale alla superficie S e inversamente proporzionale alla lunghezza

$\frac{dQ}{dt} = K \frac{\Delta T S}{L}$ K grande appartiene ad un buon conduttore
K piccola appartiene ad un conduttore non buono

questa formula è simile alla legge di Ohm $i = \frac{V}{R}$, $R = \rho \frac{L}{S} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{L}{S}$

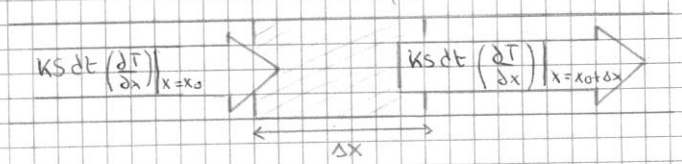
K = conducibilità termica

σ = conducibilità elettrica

$Q = C dT$ dove C è la capacità termica

$\Delta T = \frac{dT}{dx} \Delta x \Rightarrow \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{dT}{dx}$
↳ se infinitesimamente piccoli sono come la derivata

Attraverso una sezione del filo in posizione x pone in un tempo dt una quantità di calore $dQ = KS dt \left(\frac{\Delta T}{L}\right) = KS dt \frac{\partial T}{\partial x}$ EQUAZIONE DEL CALORE IN UNA DIMENSIONE
↳ infinitesimi



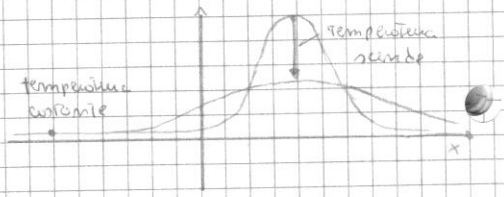
Ammettiamo che sia $C = c\Delta x$ dove c è la capacità termica per unità di lunghezza
La quantità di calore scambiata dal tratto Δx nel tempo dt comporta una variazione nel tempo della temperatura di tale tratto:

$\Phi(x) - \Phi(x_0 + \Delta x) = KS dt \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Big|_{x=x_0} - KS dt \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Big|_{x=x_0+\Delta x}$

$dQ = KS dt \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Delta x$

$C dT = c \Delta x dT \Rightarrow c dT = KS dt \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

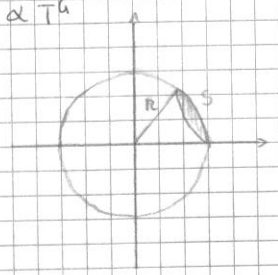
$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{KS}{c} \cdot \frac{\partial^2 T}{x^2}$



IRRAGGIAMENTO

Legge di Stefan - Boltzmann

$P \propto T^4$



ANGOLO SOLIDO steradiante $= \frac{S}{R^2}$

$dP = dS \, d\Omega + \sigma T^4$
↳ COSTANTE di Boltzmann
potenza irradiata
angolo solido

questo vale solo per un corpo ideale detto CORPO NERO

Esercizio

temp sole = 6000° K

raggio sole? $\frac{2^1}{6\pi \cdot 2\pi} = 0{,}5 \simeq 0{,}01$ rad

raggio orbita terrestre $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m

www.alessandropaghi.it

CAPACITÀ TERMICA E CALORE SPECIFICO

Proporzionalità fra calore scambiato da un corpo e variazioni della sua temperatura

$Q = C \cdot \Delta T$ C capacità termica (dipende dal materiale e dalla quantità di materia contenuta nel corpo)

C è proporzionale alla massa $C = mc$ → calore specifico per unità di massa (dipende dal materiale e in due modi niente riscaldato)

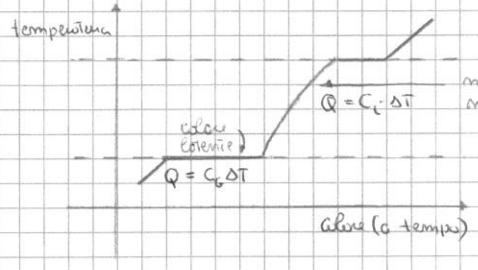
$Q = mc \cdot \Delta T$

* Vuol dire: a quale temperatura? A V costante? A p costante? Sotto qualche altra condizione?

CALORE LATENTE E TRANSIZIONI DI FASE

$Q_{lat} = L \cdot m$

In una transizione di fase si scambia calore (in quantità ritevante) senza che la temperatura aumenti: il calore serve solo a far compiere le stato del materiale.



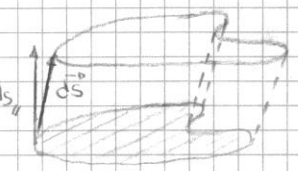
non sono nelle stesse condizioni

N.B. i passaggi di stato avvengono a temperature diverse in presenza di pressioni diverse

LAVORO DELLE FORZE DI PRESSIONE (RICHIAMO)

$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F\, ds \cos\vartheta = F \cdot ds_{\parallel}$

$F = p \cdot A$ diretta perpendicolarmente ad A



$d\vec{s}$ è uno spostamento infinitesimo

$ds_{\parallel}$ è in realtà la componente perpendicolare, ma è comunque parallela in quanto è parallela alla forza F

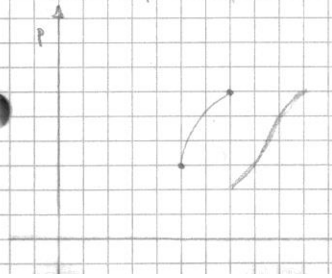
* la superficie non è piana se ne considerano porzioni sufficientemente piccole da approssimare una superficie piana

$dL = p \cdot A\, ds_{\parallel} = p \cdot \Delta V$

Spesso conviene riconoscere ad A la sua natura vettoriale: un elemento infinitesimo di superficie dA ha tutte le caratteristiche di un vettore:

- il suo modulo è dA
- la sua direzione è quella perpendicolare al piano di dA (o al piano tangente all'area in dA)
- il verso è a scelta (per le superfici chiuse il verso è entrante o uscente)

PIANO pV (O PIANO DI CLAPEYRON)



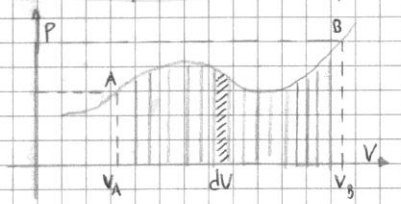
punti → stati di equilibrio

curve → trasformazioni quasi statiche: costituite da successioni di stati di (quasi) equilibrio

Posso conoscere i conti in ogni punto se la pressione me è molto bassa

www.alessandropaghi.it

Lavoro e piano di Clapeyron



$L = \int dL = \int_{V_A}^{V_B} p\,dV$ = Area sottesa al grafico

Se il volume aumenta il gas sta facendo un lavoro positivo.
se diminuisce compie lavoro negativo.

Lavoro fatto dal gas (da A a B)

COSTANTE DI AVOGADRO

mole particelle = consegnato numero di particelle

Se le particelle sono persone prendendone un certo numero si ottiene una quantità di molecole persone, se sono più oggetti, la quantità di molecole corrispondente a una mole sarà anch'essa più grossa.

Questo numero consegnato è molto grande perché si usa per passare dalla scala atomica alla scala umana.

In un grammo di idrogeno ci sono (circa) $6{,}022 \cdot 10^{23}$ atomi di idrogeno H

In due grammi di idrogeno ci sono (circa) $6{,}022 \cdot 10^{23}$ molecole di idrogeno H_2

In 16 grammi di ossigeno ci sono (circa) $6{,}022 \cdot 10^{23}$ atomi di ossigeno

In 16 grammi di acqua ci sono (circa) $6{,}022 \cdot 10^{23}$ molecole di H_2O

$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ si chiama COSTANTE DI AVOGADRO

Per misurare la quantità di molecole nella scala umana non si possono contare le particelle: si usa la massa. Se è nota la massa atomica o molecolare, invece di misurare la massa si possono "contare" le particelle

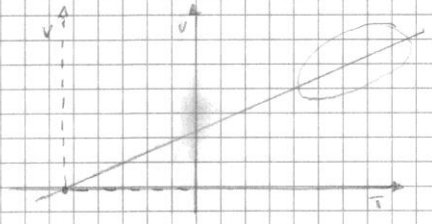
Nei gas (in condizioni estreme) si osserva che:

se T costante, $p \propto \frac{1}{V}$; se V costante, $V \propto T$

se p e T sono finite, $V \propto$ quantità di gas

La quantità si misura attraverso la sua massa. Se tutto si riassume dicendo che:

$PV = mRT$ R è una costante che ha valore diverso per ogni sostanza



V e T proporzionali
Se diminuisco e faccio andare il volume si comporta come stesso modo che si può trovare la retta analitica per cui $V \propto T$ si deve porre l'origine degli assi cioè $V=0$ quindi: $V = aT + b$
Con facendo attenzione troviamo che 0 Kelvin, cioè $-273°$ Kelvin

La formula sopra vale per T che non sono troppo basse e p troppo elevate

Se per definire la quantità di molecole invece della massa si usa il numero di moli, la relazione scritta sopra diventa:

$PV = nRT$ Legge di stato dei gas perfetti

n numero di moli (n° molecole / n° Avogadro)

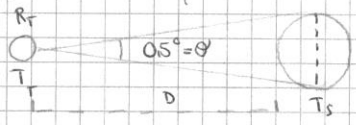
$R = 8{,}31$ J/K

www.alessandropaghi.it

$pV = \frac{mRTN_A}{N_A} \Rightarrow pV = N\left(\frac{R}{N_A}\right)T = NK_BT$ (n° molecole; $K_B = 1{,}1 \cdot 10^{-23}$; costante di Boltzmann (gas microscopici))

quantità (numero) è da usare se si vuole quantità macroscopiche

Esercizio
temperatura di equilibrio della terra e distanza dal sole



$\frac{2R_S}{D} = \theta$ $\left(\frac{\text{arco}}{\text{raggio}} = \text{radianti}\right) \Rightarrow \frac{R_S}{D} = \frac{\theta}{2} \simeq 0{,}25°$

$P_S = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4$

$P_{T\text{-}IN} = \frac{4\pi R_S^2 \sigma T_S^4}{4\pi D^2} \pi R_T^2$ potenza della terra in ingresso

$P_{T\text{-}OUT} = 4\pi R_T^2 \sigma T_T^4$ potenza della terra in uscita

$\frac{\pi R_S^2 \sigma T_S^4 R_T^2}{D^2} = 4\pi R_T^2 \sigma T_T^4$ uguagliamo quindi potenza in entrata e uscita

$T_T^4 = \frac{R_S^2}{4D^2} T_S^4 = \frac{1}{16}\theta^2 T_S^4 \Rightarrow T_T = \frac{1}{2}\sqrt{\theta}\, T_S = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3{,}5} T_S$

$\Rightarrow T_T = \frac{1}{7} T_S$

Per i gas è più opportuno indicare la quantità di molecole in termini di numero di moli, e non di massa:

$Q = mc\Delta T$

Per i gas il modello in cui viene trascurato il calore è molto importante per definire il valore molto di c: poiché i gas possono espandersi molto quando vengono riscaldati, il lavoro $p\Delta V$ che possono fare può essere molto grande, così che il calore fornito per aumentare la temperatura può essere convertito in lavoro in quantità notevoli:

$Q = n C_V \Delta T$ ISOCORA (V costante)

$Q = n C_P \Delta T$ ISOBARA (P costante) $\quad C_P > C_V$

PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Conservazione dell'energia termica del principio di conservazione dell'energia

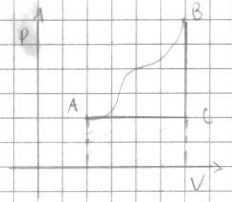
La molecola ha, oltre alle forme meccaniche di energia, un'energia interna.

Per cambiare l'energia interna di un corpo, si può lavorare su questo corpo, o fornirgli calore:

$\Delta E_{int} = Q + L$ spesso anche è da fornire calore a un corpo oltre che di ottenere lavoro da quel corpo. Una convenzione dei segni prende due i positivi il calore fornito al corpo e il lavoro svolto dal corpo

$\Rightarrow \Delta E_{int} = Q - L$ $\quad L \rightarrow dL = p\,dV$

www.alessandropaghi.it



$L = \int dL = \int p\,dV$

Per andare da A a B ci sono infiniti modi, tra cui quello di passare da A a C con una trasformazione a pressione costante e poi da C a B con una trasformazione a volume costante
Il lavoro in questo caso dipende dal percorso

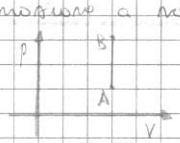
Lavoro in una trasformazione a pressione costante

$L_{isobara} = \int_A^B p\,dV = p\int_A^B dV = p\int_{V_A}^{V_B} dV = p(V_B - V_A) = p\cdot\Delta V_{AB}$



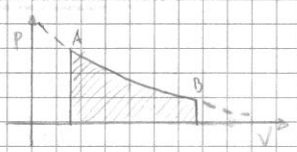
Lavoro in una trasformazione a volume costante

$L_{isocora} = \int_A^B p\,dV = 0$



Lavoro in una trasformazione a temperatura costante

$L_{isoterma} = \int_A^B p\,dV$



$pV = nRT \Rightarrow p(V) = \frac{nRT}{V} \sim y = \frac{1}{x}$

$L = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V}\,dV = nRT\,(\ln(V_B) - \ln(V_A)) = nRT\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$ questo quoziente è positivo quando $\frac{V_A}{V_B} > 1$, negativo altrimenti

Nelle isocore $\Delta V = 0$, $dV = 0$, e quindi $L = 0$

Nelle isocore quindi $\Delta E_{interna} = Q = n c_V \Delta T$

Allora in generale (non solo nelle isocore)

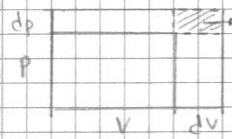
$\Delta E_{int} = n c_V \Delta T$ perché si tratta di sistemi in cui l'energia interna dipende solo da T e non da p né da V

In particolare, per i gas perfetti, in QUALUNQUE tipo di trasformazione, $\Delta E_{int} = n c_V \Delta T$

~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~

Affermo detto che si ipotizza che $c_p > c_V$, perché in riscaldamenti isobari parte di Q viene spesa subito come lavoro, così che il ΔT che ne risulta è minore

Vediamo ora possiamo dire per c_p e c_V nei gas perfetti (e sistemi chiusi, cioè con n costante)



trasformabile (II ordine)

$pV = nRT$

differenziando $p\,dV + V\,dp = nR\,dT$

nelle isobare $dp = 0$ quindi $p\,dV = nR\,dT = \delta L$

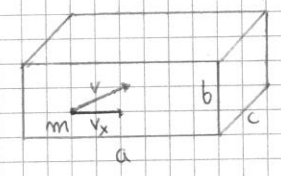
$dE_{int} = n c_V dT = \delta Q - \delta L = n c_p dT - nR\,dT$

non sono differenziali esatti

quindi $n c_p\,dT = n c_V dT + nR\,dT \Rightarrow c_p = c_V + R$

MODELLO MECCANICO DI GAS PERFETTO

Con le molecole siamo considerando di non interagire



"I gas si comportano come gas perfetti a temperatura alta e se i gas sono rarefatti"

Impulso scambiato con la parete di lati b-c in seguito ad un urto:

$$\Delta p_x = 2mv_x$$

Tempo tra due urti su b-c:

$$\Delta t = \frac{2a}{v_x}$$

La forza media esercitata su b-c:

$$\langle F \rangle = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{1} \cdot \frac{v_x}{2a} = \frac{mv_x^2}{a}$$

Pressione media sulla parete (per ciascuna particella)

$$P = \frac{\langle F \rangle}{S} = \frac{\langle F \rangle}{bc} = \frac{mv_x^2}{a} \cdot \frac{1}{bc} = \frac{mv_x^2}{abc}$$

Pressione totale (dovuta a N particelle)

$$P = NP = \frac{Nm\langle v_x^2 \rangle}{abc} \rightarrow \text{valore quadratico medio} \quad NB: \langle v_x^2 \rangle \neq \langle v_x \rangle^2$$

Modulo quadro della velocità delle particelle:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Consideriamo il valore medio (in assenza di direzioni privilegiate)

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3\langle v_x^2 \rangle \Rightarrow \langle v_x^2 \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{3}$$

$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$ è l'energia cinetica media $\Rightarrow \langle v^2 \rangle = \frac{2E_K}{m}$

$$\Rightarrow \langle v_x^2 \rangle = \frac{2}{3}\frac{E_K}{m}$$

quindi $pV = NP(abc) = Nm\langle v_x^2 \rangle = N\cancel{m}\frac{2}{3}\frac{E_K}{\cancel{m}} = \frac{2}{3}NE_K = \frac{2}{3}E_{int}$

{ l'energia interna è solo cinetica considerando particelle piccole che non interagiscono tra di loro

E_K = energia cinetica media di ogni particella

$E_{int} = NE_K$ = energia totale di tutte le particelle = energia interna di tutto il gas

In sede MACROSCOPICA: $pV = nRT = \frac{2}{3}E_{int} \Rightarrow E_{int} = \frac{3}{2}nRT \Rightarrow \Delta E_{int} = \underbrace{\frac{3}{2}nR}_{C_V}\Delta T$

In sede MICROSCOPICA: $pV = NK_BT = \frac{2}{3}NE_K \Rightarrow E_K = \frac{3}{2}K_BT$

Quindi:

$$\frac{1}{2}M\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2}M\langle v_y^2 \rangle = \frac{1}{2}M\langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{2}K_BT$$

Molecole monoatomiche: tre gradi di libertà, $E_{int} = \frac{3}{2}nRT$, come descritto $\Rightarrow C_V = \frac{3}{2}R$

Molecole biatomiche: cinque gradi di libertà (3 di traslazione più 2 di rotazione)

$$\Rightarrow E_{int} = \frac{5}{2}nRT \Rightarrow C_V = \frac{5R}{2}$$

www.alessandropaghi.it

Cosa si può dire quando il calore complessivo in un isoterma di un gas perfetto?

Partiamo dal primo principio della Termodinamica e dal fatto che per i gas perfetti $\Delta E \propto \Delta T$

ISOTERMA $\Delta T = 0 \Rightarrow \Delta E = 0$

I PRINCIPIO $\Delta E = Q - L$

$\Rightarrow L = Q \qquad Q = mRT \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right)$

Ora vediamo un altro tipo di trasformazione: cosa succede se un gas perfetto compie una trasformazione quasi statica in condizione di isolamento termico?

P, V, T

$\Delta E = Q - L$

(1) $dE = \delta L + \delta T$ (2) $dE = m c_v dT$

$pV = mRT$ mi serve il differenziale $\Rightarrow p dV + V dp = mR dT$ (3)

Se $Q = 0$ non è detto che $\Delta T = 0$ (Q e T sono come differenziali)

I principio per un'adiabatica

$\Delta E_{int} = Q - L = -L \Rightarrow dE = -\delta L$

per gas perfetti $\Delta E_{int} = m c_v \Delta T \Rightarrow dE = m c_v dT$

$\Rightarrow$ per adiabatiche in gas perfetti abbiamo $m c_v dT = -p dV$

$p dV + V dp = mR \underbrace{dT}_{*} = -\frac{R}{c_v} p dV$ $\Downarrow$ $\frac{dT}{*} = -\frac{p dV}{m c_v}$ dT in funzione di dV

$V dp = -p dV - \frac{R}{c_v} p dV = -p dV\left(1 + \frac{R}{c_v}\right) = -p dV \left(\frac{(c_v + R)}{c_v}\right) = -p dV \cdot \frac{c_p}{c_v}$

$\frac{dp}{p} = -\left(\frac{c_p}{c_v}\right)\frac{dV}{V} = -\gamma \frac{dV}{V}$ Compito di stato con aumento di volume

$\int_{p_A}^{p_B} \frac{dp}{p} = -\gamma \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V}$ integriamo cioè fra gli stati A e B

$\Rightarrow \ln\left(\frac{p_A}{p_B}\right) = -\gamma \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma} \Rightarrow \frac{p_A}{p_B} = \frac{V_A^{\gamma}}{V_B^{\gamma}}$

$\Rightarrow p_B V_B^{\gamma} = p_A V_A^{\gamma}$ EQUAZIONE DI POISSON dove $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_v + R}{c_v} > 1$

$pV = \text{costante}$

$pV = mRT$ facciamo il rapporto

$V^{\gamma - 1} = \frac{\text{costante}}{mRT} = \frac{\text{Costante}}{T} \qquad \underline{TV^{\gamma-1} = \text{costante}} \qquad \gamma - 1 > 0 \Rightarrow T$ decresce con V

$pV = \text{costante}$

$pV = mRT$

$(pV^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}} = \text{costante}^{\frac{1}{\gamma}} = K$

$p^{\frac{1}{\gamma}} V = K \Rightarrow p^{\frac{1}{\gamma} - 1} = \frac{K}{mRT} \Rightarrow \underline{T p^{\frac{1}{\gamma} - 1} = \text{costante}}$

$pV = mRT$

$pV^{\gamma} = \text{costante} \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_v + R}{c_v}$

GAS MONOATOMICI $c_v = \frac{3}{2}R \Rightarrow c_p = R + \frac{3}{2}R = \frac{5}{R} \Rightarrow \gamma = \frac{5}{3}$

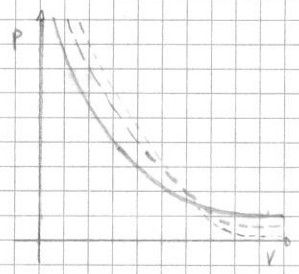
www.alessandropaghi.it

GAS BIATOMICO $C_V = \frac{5}{2}R \Rightarrow C_p = \frac{7}{2}R \Rightarrow \gamma = \frac{7}{5}$

in realtà non è sempre così: i gradi di libertà potrebbero essere 6 considerando le rotazioni lungo particolari

$pV = \text{costante}$ $\quad p = \frac{\text{costante}}{V^\gamma} \sim p = \frac{nRT}{V}$

↳ non più retta ma infinito



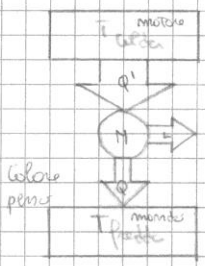
— isoterma

- - - adiabatica $\gamma = \frac{7}{5}$

-·-·-· adiabatica $\gamma = \frac{5}{3}$

MACCHINA TERMICA CICLICA

Ciclo diretto



Calore prima

Scopo di questa macchina è produrre lavoro:

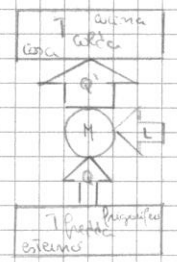
$\Delta E \overset{1^\text{a} \text{ prin}}{=} Q' - Q - L$

$= 0$ questo succede quando finisce un ciclo

$\eta = \frac{L}{Q'}$ rendimento

$= \frac{\text{ciò che ottengo}}{\text{ciò che mi costa}}$

Ciclo inverso



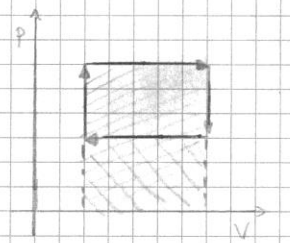
Scopo di questa macchina può essere:

a) raffreddare la sorgente inferiore che è già fredda (frigorifero)

b) trasferire calore alla sorgente fredda a quello data per riscaldare quest'ultima (pompa di calore)

$\eta = \frac{Q}{L}$ frigorifero

$\eta = \frac{Q'}{L}$ pompa di calore



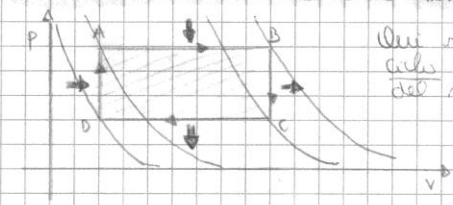
Lavoro dell'andata

Lavoro del ritorno

Lavoro nella > 0 percorrendo in senso orario (ciclo diretto)

< 0 percorrendo in senso antiorario (ciclo inverso)

CICLI TERMODINAMICI E LORO RAPPRESENTAZIONE SUL PIANO pV



Un ciclo che compie più lavoro all'andata che al ritorno, il ciclo è diretto e il lavoro totale corrisponde all'area del rettangolo ABCD

Le linee che sono le isoterme che ci permettono di capire le temperature, e quando di capire anche se una macchina è trasformazione a cedere o sottrae calore

MACCHINE TERMICHE CICLICHE

Un ciclo $\Delta E_{\text{int}} = 0$ $\quad \Delta E = Q + L$ con 1° I principio

$L = Q_{\text{andata}} + Q_{\text{ritorno}} = \sum_i Q_i$

Ciclo diretto: motore

$\eta = \frac{L}{Q_{\text{ass}}} \overset{1^\text{a} \text{ prin}}{=} \frac{Q_{\text{ass}} - Q_{\text{ced}}}{Q_{\text{ass}}} = 1 - \frac{Q_{\text{ced}}}{Q_{\text{ass}}} < 1$

www.alessandropaghi.it

Ciclo inverso: pompa di calore

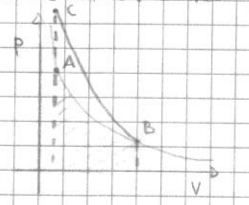
$\eta = \frac{Q_{ced}}{L}$

Ciclo inverso: frigorifero

$\eta = \frac{Q_{ass}}{L}$

Poiché $L = Q_{ass} - Q_{ced} = \sum_i Q_i$, nelle celle deve $Q_{ced} = 0$. Costruiamo un motore che sviluppi il massimo lavoro possibile: non vogliamo una calore senza lavoro né massimo non la pompa (spontaneamente) da un corpo a una altra a temperatura più bassa

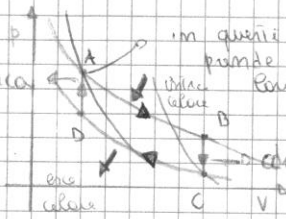
- Poniamo di considerare un gas ideale a contatto con l'esterno; il gas compiendo calore dall'esterno, si espande e quindi produce lavoro, senza però far cambiare la temperatura dell'esterno. Quindi gas e esterno sono sempre alla stessa temperatura



Volendo tornare da B ad A usando una sola sorgente si dovrà compiere tutto il lavoro generato andando da A a B e quindi il lavoro totale sarà $L = 0$

Se torniamo da B a C con un'adiabatica (scambio di calore infinitesimo) e da C ad A un'isoterma ottenendo una curva più alta di quella dell'isoterma, quindi il lavoro totale sarà maggiore di quello generato dall'andare, quindi il lavoro totale sarà $L < 0$

- 2 sorgenti: le sorgenti hanno T omogenea; devono scambiare calore solo mentre la macchina subisce una trasformazione isoterma alla T della sorgente con cui sta scambiando calore



in questi punti la macchina prende calore una non sta lavorando

CICLO di CARNOT

Non bisogna chiudere con un'isocora. Quando i due corpi raggiungono la temperatura intermedia non ci deve essere scambio di calore, ovvero deve esserci una trasformazione adiabatica

$\eta = \frac{L}{Q_{ass}}$

$Q_{ass} = L_{AB}$

$|Q_{ced}| = L_{CD}$

$\Delta E_{int} = Q - L = 0$ nelle isoterme dei gas perfetti

$\Delta E_{int} = Q - L = 0$ in tutti i cicli ($Q = |Q_{ass}| - |Q_{ced}|$)

$|Q_{ass}| - |Q_{ced}| - L = 0$

CICLO DIRETTO

$\eta = \frac{L}{Q_{ass}} = \frac{Q_{ass} - Q_{ced}}{Q_{ass}} = 1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}}$ $\forall$ cicli

www.alessandropaghi.it

Nel ciclo di Carnot il calore Q è assorbito nella isoterma a T alta (AB) e ceduto nella isoterma a T bassa (CD)

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{CD}|}{Q_{AB}} = 1 - \frac{|L_{CD}|}{L_{AB}} = 1 - \frac{nRT_{CD}\ln(V_C/V_D)}{nRT_{AB}\ln(V_B/V_A)} = 1 - \frac{T_{CD}}{T_{AB}}\frac{\ln(V_C/V_D)}{\ln(V_A/V_B)}$$ quanto vale?

Sfruttiamo il fatto che BC e DA sono adiabatiche reversibili (vale la relazione di Poisson):

$p_A V_A^\gamma = p_D V_D^\gamma$ e $p_C V_C^\gamma = p_B V_B^\gamma$

che equivale a (dividendo membro a membro $pV^\gamma = \cost$ e $pV = nRT$):

$T_D V_D^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}$ e $T_C V_C^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$ con $T_C = T_D$ e $T_A = T_B$

dividendo membro a membro si ottiene:

$$\left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{(\gamma-1)} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{(\gamma-1)} \Rightarrow \frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A}$$ quindi il rapporto tra i due logaritmi non forma più 0

e quindi $\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_{CD}}{T_{AB}}$ simile a η degli altri cicli, ma questo rendimento vale per il ciclo di Carnot

Quello del ciclo di Carnot con due sorgenti è il rendimento migliore



Con 3 sorgenti si applicano 2 cicli di Carnot e il rendimento varia pari a:

$$\eta = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}}$$



$\frac{dQ}{dt} = \frac{\Delta T}{R}$ δ $L = \int p\,dV$

Forma da A a B avendo a disposizione infinite sorgenti (cosa ideale) e forma inversa da B ad A (irreversibile)

REVERSIBILITÀ

a) Processi teorici quasi statici, con p, V, T sempre definiti. In questa condizione abbiamo che $L = p\,dV$

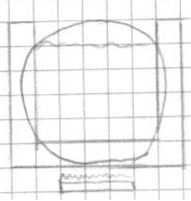
b) Non ci deve essere scambio termico tra corpi a T diverse

Controesempi

1) Esplosione: non rispetta né a) né b)

2) Espansione libera di un gas: non rispetta a) * quando qua un pistone il gas continua con la velocità che aveva lì

3) Riscaldamento di acqua in una pentola su un fornello: non rispetta b)



Se consideri tutto è irreversibile, se consideri il calore fra pentola e fornello reversibile perché hanno temperatura simile (l'acqua deve salire gradualmente)

* perché bolla fornello alto

www.alessandropaghi.it

Con il ciclo di Carnot abbiamo visto che la cessione di Q_H da una sorgente a T_H, se c'è possibilità di calore cessione a T_C, è compagnata dalla produzione di lavoro

$dS = \frac{\delta Q}{T}$ dove il dS ceduto in una trasformazione reversibile è uguale a quello acquistato (con la stessa T, dS ceduto è uguale a quello acquistato)

Con T diversa

$dS_C = + \frac{dQ}{T_C}$ ← più freddo

$dS_H = - \frac{dQ}{T_H}$ ← più caldo

Quindi prendo il dS a seconda che la sorgente sia calda o fredda

La somma dei dS è > 1

ma calore $|dS_C| > |dS_H|$

dS si dice grado di irreversibilità: se > 1 allora la trasf. è irreversibile

se $= 0$ " " " " reversibile

Continuo così

$\Delta S > \oint \frac{dQ}{T}$ → integrale di Clausius $\frac{dQ}{T} = dS$ se la trasformazione è reversibile

$dS = \frac{\delta Q}{T}$ se la trasformazione è reversibile

$dS \geq \frac{\partial Q}{T}$ se la trasformazione è irreversibile

perdiamo rappresentatività del ΔS (Clausius)

In un processo reversibile la somma dei ΔS è uguale a 0

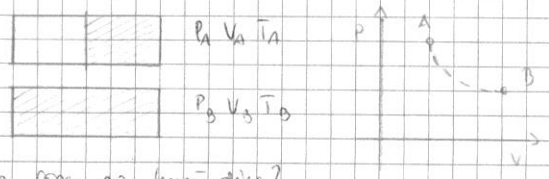
In un processo irreversibile la somma dei ΔS è positiva

FUNZIONE DI STATO = ENTROPIA se su integrale e finale posso trovare ΔS

∂Q non è un differenziale esatto, in quanto quello se so il punto di partenza e il punto di arrivo posso sapere ΔQ, non ∂Q

dS è un differenziale esatto perché S è una funzione di stato

Esempio:



non so come rappresentare la trasformazione

Ma cosa si può dire?

I principio $\Delta E_{int} = Q - L = 0 + 0 = 0$ (Q = non ho tempo; L = gas non fanno lavoro per nessuno)

per i gas perfetti $\Rightarrow \Delta T = 0$

quindi posso immaginare di disegnare = Esiste la curva che mi contiene A e B

$\Delta S \geq \int \frac{\partial Q}{T} = 0 \rightarrow \Delta S \geq 0$ (non ho tempo di sommare calore)

ma da una sottostima del ΔS ma dico che è una funzione di stato e ci vado con un isoterma

$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$ isoterma + reversibile

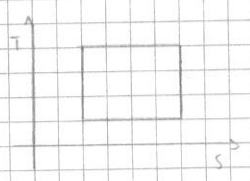
$dE_{int} = \partial Q - \partial L = 0$ ho lo isoterma

$\Delta S = \int \frac{dL}{T} = \int_A^B \frac{P dV}{T} = \int_A^B \frac{nR}{V} dV = nR \int_A^B \frac{dV}{V} = nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$ V_B non è mai più piccolo di V_A

www.alessandropaghi.it

quanto scritto fin'ora è reversibile $dS \leq 0$ e questo non può succedere

In trasformazioni adiabatiche $dQ = 0$. In adiabatiche reversibili $dS = 0$; quindi le adiabatiche reversibili sono ISOENTROPICHE



Ciclo di Carnot nel piano TS

SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA E SUA RELAZIONE CON IL CONCETTO DI S.
ENUNCIATI DI CLAUSIUS E DI KELVIN

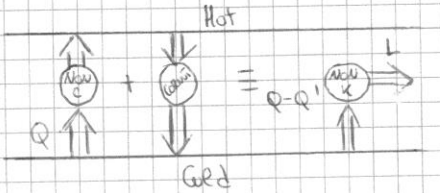
Clausius: non si ottiene due flussi calore da una sorgente a una certa T ed una altra sorgente a T maggiore senza due, nel frattempo, non si verifichi qualche altro

Kelvin: non è possibile costruire una macchina ciclica che sia in grado di convertire (completamente) in lavoro il calore estratto da una unica sorgente

Le due formulazioni di Clausius e di Kelvin sono equivalenti
Dire che $C \Leftrightarrow K$ è come dire $non\,C \Leftrightarrow non\,K$
infatti $C \Rightarrow K$ equivale a $non\,K \Rightarrow non\,C$
e $K \Rightarrow C$ equivale a $non\,C \Rightarrow non\,K$

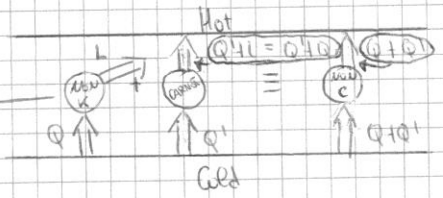
$non\,C \Rightarrow non\,K$

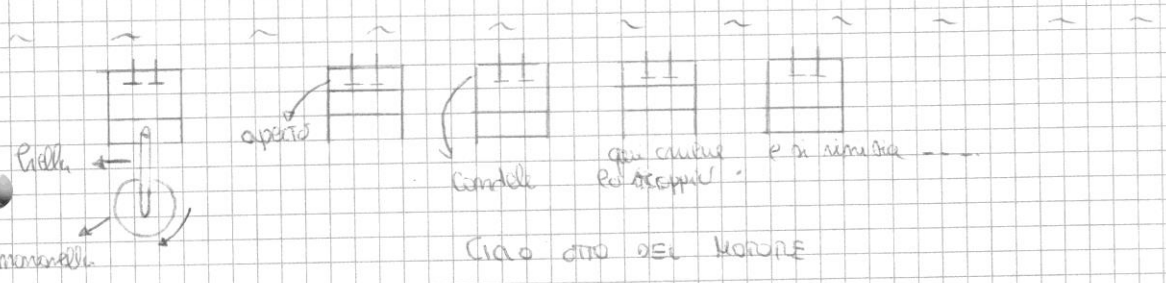
è ciclica



$non\,K \Rightarrow non\,C$

non è possibile infatti è la negazione di K



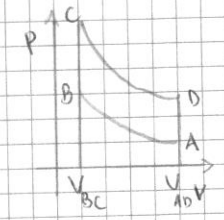


CICLO OTTO DEL MOTORE A BENZINA

www.alessandropaghi.it

Con il ciclo di Carnot ideale

Nel piano pV



Il pistone non è supersonico; quindi la trasformazione è quasi statica e quasi adiabatica

da CB ci è la particella, da CB non scambia calore con (pareti) (o poco)

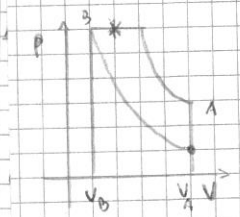
a D si apre il foro pressione e poi torna ad A, ma quando apertu non c'è lavoro ma non si deve fare con un'incognita.

Alla fine il ciclo è descritto con due incognite e due adiabatiche

$$\frac{L}{Q_{ASS}} = \frac{Q_{ASS} - Q_{CED}}{Q_{ASS}} = \eta = 1 - \frac{Q_{CED}}{Q_{ASS}} = 1 - \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}}$$ → calcolo su due isocore

Dobbiamo che il problema che il gas non scappi

$TV^{\gamma-1}$ = costante con V piccolissimo, T è altissimo e il gas si brucia



* nella prima isoterma vogliamo raggiungere il minimo della pressione e poi si cerca di mantenerla - lecito di mantenere la pressione più alta perché fatica più lavoro

η maggiore → rapporto tra A e B maggiore

Il motore a benzina non può comprimere troppo perché si accende da solo; anche a gas con benzina si accende prima del dovuto.