FISICA 1

[Appunti di Esercizi]

A CURA DI MARCO BROGI

PROFESSORE: Valerio Biancalana (http://www3.diism.unisi.it/people/person.php?id=9)

LINK AL CORSO ANNO 2013/2014:
http://www3.diism.unisi.it/FAC/index.php?bodyinc=didattica/inc.insegnamento.php&id=54678&aa=2013

FREQUENTAZIONE: Consigliata.

ESERCIZIO 1 7 MARZO 2012

$V_0 = 0$
$F(t) = F_0 t / t_0$
F_0, t_0 costanti assegnate

$$F = M a \Rightarrow a = \frac{F}{M} = \frac{F_0 t}{t_0} \cdot \frac{1}{M}$$

$$V = V_0 + \int a\, dt = 0 + \int \frac{F_0 t}{t_0} \cdot \frac{1}{M}\, dt = \frac{F_0}{M t_0} \int t\, dt = \frac{F_0}{t_0 M} \cdot \frac{t^2}{2}$$

$$X = X_0 + \int V dt = \frac{F_0}{t_0 M} \cdot \frac{t^3}{6}$$

$$x(t_0) = \frac{F_0}{\cancel{t_0} M} \cdot \frac{t_0^{\cancel{3}2}}{6} = \frac{F_0}{M} \cdot \frac{t_0^2}{6}$$ punto in cui avviene l'urto

$$V(t_0) = \frac{F_0}{\cancel{t_0} M} \cdot \frac{t_0^{\cancel{2}}}{2} = \frac{F_0 t_0}{2 M}$$ velocità di A al momento dell'urto

$$E_{KAi} = 0 \qquad E_{KA(t_0)} = \frac{1}{2} M V(t_0)^2 = \frac{1}{2} \cancel{M} \frac{F_0^2}{4 M^{\cancel{2}}} t_0^2 = \frac{F_0^2}{8 M} t_0^2$$ energia cinetica di A all'istante t_0

$$\Delta E_k = L \Rightarrow L = \frac{F_0^2}{8 M} t_0^2 - 0 = \frac{F_0^2}{8 M} t_0^2$$ Lavoro compiuto da F in $[0, t_0]$

Poiché si tratta di un urto elastico e non agiscono forze impulsive, imponiamo la conservazione dell'energia e della quantità di moto

$$\begin{cases} \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} M V_{Ai}^2 + \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} 2M V_{Bi}^2 = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} M V_{Af}^2 + \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} 2M V_{Bf}^2 \\ M V_{Ai} + \underbrace{2M V_{Bi}}_{=0} = M V_{Af} + 2M V_{Bf} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M (V_{Ai}^2 - V_{Af}^2) = 2M V_{Bf}^2 \\ M (V_{Ai} - V_{Af}) = 2M V_{Bf} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M (V_{Ai} - V_{Af})(V_{Ai} + V_{Af}) = 2M V_{Bf}^2 \\ M (V_{Ai} - V_{Af}) = 2M V_{Bf} \end{cases}$$

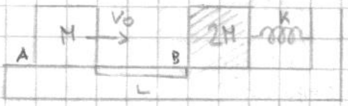
$$\Rightarrow \begin{cases} V_{Ai} + V_{Af} = V_{Bf} \\ M (V_{Ai} - V_{Af}) = 2M V_{Bf} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{Af} = V_{Bf} - V_{Ai} \\ M V_{Ai} - M V_{Bf} + M V_{Ai} = 2M V_{Bf} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{Bf} = \frac{2 \cancel{M} V_{Ai}}{3 \cancel{M}} = \frac{2}{3} V_{Ai} \\ V_{Af} = \frac{2 V_{Ai}}{3} - V_{Ai} = -\frac{V_{Ai}}{3} \end{cases}$$

$$V_{Af} = -\frac{F_0}{6 M} t_0 \qquad V_{Bf} = \frac{F_0}{3 M} t_0$$ velocità dei due corpi dopo l'urto

A questo punto A e B si muovono di moto uniforme; A impiega t_0 per giungere nella posizione $X(t_0)$ e per tornare all'origine impiegherà $X(t_0)/V_A = t_0$ pertanto il tempo totale trascorso dalla partenza di A al suo ritorno all'origine è pari a $2t_0$. A questo istante la posizione del corpo B sarà:

$$X(2t_0)_B = V_{Bf}\, t_0 = \frac{F_0}{3 M} t_0^2$$

ESERCIZIO 1 24 APRILE 2012



Dopo l'urto i due blocchi rimangono incollati

$t_1 = \frac{V_0}{L}$ questo è istante in cui avviene l'urto tra i due blocchi, dato che A si muove con velocità costante

Poichè l'urto avviene in assenza di forze impulsive che agiscono sul sistema, la quantità di moto prima e dopo l'urto si conserva; il suo valore è quindi pari a quella del corpo A in movimento: MV_0

$V = \frac{P}{M} \Rightarrow V_1 = \frac{MV_0}{3M} = \frac{V_0}{3}$ questa è la velocità con cui si muovono i due blocchi non appena si sono attaccati in seguito all'urto

$\Delta E = E_{fin} - E_{in} = \frac{1}{2}MV_0^2 - \frac{1}{2}3MV_1^2 = \frac{1}{2}MV_0^2 - \frac{1}{2}3M\frac{V_0^2}{9} = \frac{1}{3}MV_0^2$ è l'energia dissipata nell'urto

$E_{fin} = P_{molla} = \frac{1}{6}MV_0^2 = \frac{1}{2}K\Delta x^2 \Rightarrow \Delta x_{max} = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{MV_0^2}{K}} = V_0\sqrt{\frac{M}{3K}}$ energia potenziale della molla

Possiamo fare questo in quanto dopo l'urto l'energia del sistema è data dall'energia cinetica dei blocchi e da quella potenziale della molla, la quale però sarà nulla immediatamente dopo l'urto; quando la molla sarà massimamente compressa l'energia totale sarà la stessa, ma questa volta sarà l'energia cinetica ad essere nulla, quindi l'energia potenziale della molla sarà uguale a quella cinetica immediatamente dopo l'urto

La legge del moto dopo l'urto sarà quindi $3M\frac{dx^2}{d^2t} = -Kx$

Dopo l'urto ci sarà quindi un moto armonico con pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{K}{3M}}$

Sappiamo da invece la legge oraria considerando che all'istante t_1:

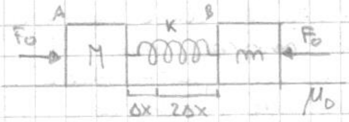
$x(t_1) = 0$ questa è la posizione di riposo della molla

$V(t_1) = \frac{V_0}{3}$ questa è la velocità dei due blocchi immediatamente dopo l'urto

Quindi la legge sarà:

$x(t) = \Delta x_{max} \operatorname{sen}(\omega t) = V_0\sqrt{\frac{M}{3K}} \operatorname{sen}(\omega(t-t_1))$ dove ricordiamo che t_1 era l'istante in cui avveniva l'urto tra i due blocchi

ESERCIZIO 1 10 LUGLIO 2012



$\mu_D = 0.5$

$N_A = -Mg \qquad N_B = -mg$

$F_A = Ma = F_0 - Mg\mu_D - K\Delta x \qquad F_B = ma = K\Delta x - mg\mu_D$ queste sono le forze nel caso in cui F_0 è esercitata sul corpo A

$F'_A = Ma' = 2K\Delta x - Mg\mu_D \qquad F'_B = ma' = F_0 - 2K\Delta x - mg\mu_D$ queste sono le forze nel caso di F_0 su B

Poiché la forza non fa oscillare la molla, le due accelerazioni a e a' sono le stesse per A, per B e per il centro di massa del sistema A+B

$F_{TOT} = F_A + F_B = Ma + ma = (M+m)a = F_0 - Mg\mu_D - \cancel{K\Delta x} + \cancel{K\Delta x} - mg\mu_D = F_0 - (M+m)g\mu_D$

$F'_{TOT} = F'_A + F'_B = Ma' + ma' = (M+m)a' = \cancel{2K\Delta x} - Mg\mu_D + F_0 - \cancel{2K\Delta x} - mg\mu_D = F_0 - (M+m)g\mu_D$

Notiamo che la forza totale nei due casi è la stessa, pertanto vediamo che:

$F_{TOT} = F'_{TOT} \Rightarrow (M+m)a = (M+m)a' \Rightarrow a = a'$ le due accelerazioni sono pertanto uguali.

Sostituiamo allora a' con a e confrontiamo F_A e F'_A, poi F_B e F'_B

$F_A = Ma = F'_A \Rightarrow F_0 - \cancel{Mg\mu_D} - K\Delta x = 2K\Delta x - \cancel{Mg\mu_D} \Rightarrow F_0 = 3K\Delta x$

$\Rightarrow K = \frac{F_0}{3\Delta x}$ questa è la costante elastica della molla

Considerando F'_A e F_B, ricaviamo $K\Delta x$ per poi ottenere m:

$F_B = ma = K\Delta x - mg\mu_D \Rightarrow K\Delta x = m(a+g\mu_D)$

$F'_A = Ma = 2K\Delta x - Mg\mu_D \Rightarrow K\Delta x = \frac{M(a+g\mu_D)}{2}$

$\Rightarrow m\cancel{(a+g\mu_D)} = \frac{M\cancel{(a+g\mu_D)}}{2} \Rightarrow m = \frac{M}{2}$

Le due accelerazioni a e a', come già visto, sono uguali tra loro. Determiniamo ora l'accelerazione, chiamiamola a'', che subirebbe B qualora F_0 venisse rimossa

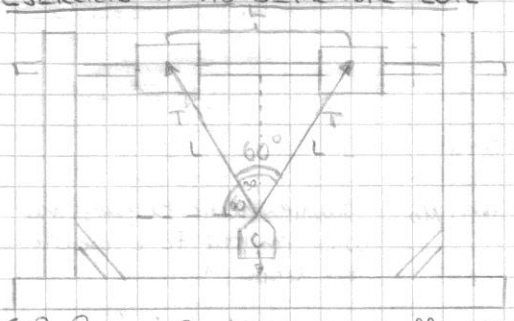
$F'' = m\,a'' = F'_B - F_0 = \cancel{F_0} - 2K\Delta x - mg\mu_D - \cancel{F_0}$

$\Rightarrow m\,a'' = -2K\Delta x - mg\mu_D \Rightarrow a'' = \frac{-2K\Delta x - mg\mu_D}{m}$

o anche $a'' = -2 \cdot \frac{F_0}{3\cancel{\Delta x}} \cdot \cancel{\Delta x} \cdot \frac{1}{m} - \cancel{m}g\mu_D \cdot \frac{1}{\cancel{m}} = -\frac{2F_0}{3m} - g\mu_D$

Poiché $a'' < 0$, B decelera

ESERCIZIO 1 19 SETTEMBRE 2012



I due manicotti ed il corpo sospeso C hanno la stessa massa pari a M. Considerando la lunghezza della corda e la distanza dei manicotti, si forma un triangolo equilatero perciò l'angolo formato tra la corda e la sbarra e tra le due parti della corda è di 60°

Calcoliamo la tensione nelle due parti della corda:

$$\frac{Mg}{2} = T\cos 30° \Rightarrow T = \frac{Mg}{2\cos 30°} = \frac{Mg}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{Mg}{\sqrt{3}}$$

ho considerato $Mg/2$ in quanto in condizioni statiche il peso è bilanciato dalle tensioni delle due metà del filo, così facendo ho calcolato la tensione in una metà

In condizioni di staticità le componenti parallele delle due tensioni sono bilanciate dagli attriti statici dei manicotti

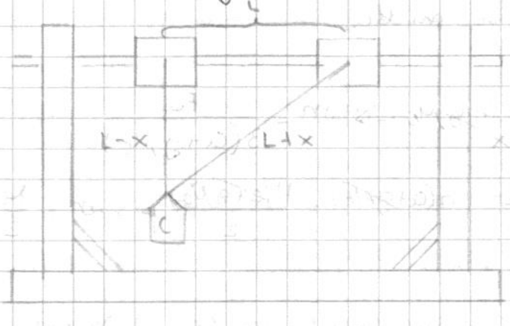
$$A = T\cos 60° = T\cdot\frac{1}{2} = \frac{T}{2} \quad \text{dove } A < \mu_S N \qquad N = Mg + T\,\text{sen}\,60° = Mg + \frac{\sqrt{3}T}{2}$$

quindi $\frac{T}{2} < \mu_S\left(Mg + \frac{\sqrt{3}T}{2}\right)$ o anche $\frac{T}{2} < \mu_S\left(Mg + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{Mg}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \frac{T}{2} < \mu_S \frac{3}{2} Mg$

Perciò per avere una condizione di staticità è necessario che:

$$\mu_S > \frac{T}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1}{Mg} \Rightarrow \mu_S > \frac{\cancel{Mg}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{Mg}} \Rightarrow \mu_S > \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

→ valore min. di μ_S che garantisce l'equilibrio



Il caso limite si ha quando la corda con la sbarra forma un triangolo rettangolo

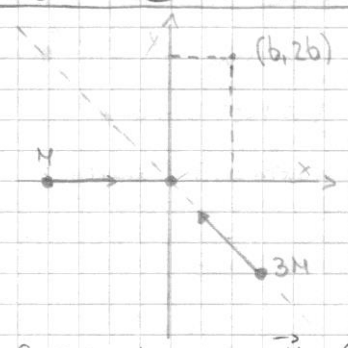
Partendo da questo caso limite possiamo scrivere la condizione affinché entrambe le parti della corda rimangano tese:

$(L+x)^2 = (L-x)^2 + L^2$ CONDIZIONE LIMITE

$(L+x)^2 < (L-x)^2 + L^2$ CONDIZIONE TENSIONE CORDE

$$\cancel{L^2} + \cancel{x^2} + 2Lx < \cancel{L^2} + \cancel{x^2} - 2Lx + L^2 \Rightarrow 4\cancel{L}x < L^{\cancel{2}} \Rightarrow x < \frac{L}{4}$$

ESERCIZIO 2 15 SETTEMBRE 2012



All'istante $t=0$ i due corpi urtano in maniera perfettamente anelastica e $(b,2b)$ è il punto in cui passano all'istante $t_1>0$

Poiché si tratta di un urto perfettamente anelastico, dove non agiscono forze impulsive, si conserva energia e quantità di moto

Per il primo corpo $\vec{V} = (V_x, 0)$ e per il secondo $\vec{W} = (W_x, W_y)$
Consideriamo la quantità di moto:

$$P_x = MV_x + 3MW_x \qquad P_y = 0 + 3MW_y \implies P_{TOT} = (MV_x + 3MW_x, 3MW_y) = M(V_x + 3W_x, 3W_y)$$

La velocità del centro di massa è la media pesata delle velocità dei due corpi:

$$V_{CM} = \frac{P_{TOT}}{M_{TOT}} = \frac{\cancel{M}(V_x + 3W_x, W_y)}{(\cancel{M}+3M)} = \frac{1}{4}(V_x + 3W_x, 3W_y)$$ tale velocità si mantiene costante

$$\implies S = V \cdot t \implies (b, 2b) = \frac{t_1}{4}(V_x + 3W_x, W_y) \implies \frac{4b}{t_1} = V_x + 3W_x \quad e \quad \frac{8b}{t_1} = 3W_y$$

Poiché il corpo di massa $3M$ si muove lungo la bisettrice del II e IV quadrante, ovvero la retta di equazione $y=-x$ abbiamo che $W_y = -W_x$
Pertanto scriviamo il sistema:

$$\begin{cases} W_y = -W_x \\ \frac{4b}{t_1} = V_x + 3W_x \\ \frac{8b}{t_1} = 3W_y \end{cases} \implies \begin{cases} W_y = \frac{8b}{3t_1} \\ W_x = -\frac{8b}{3t_1} \\ V_x = \frac{4b}{t_1} + \cancel{3} \cdot \frac{8b}{\cancel{3}t_1} \end{cases} \implies \begin{cases} V_x = \frac{12b}{t_1} \\ W_x = -\frac{8b}{3t_1} \\ W_y = \frac{8b}{3t_1} \end{cases} \implies \text{con } \frac{b}{t_1} = V \quad \begin{cases} V_x = 12V \\ W_x = -\frac{8}{3}V \\ W_y = \frac{8V}{3} \end{cases}$$

Calcoliamo ora l'energia dissipata nell'urto:

$$E_{in} = \frac{1}{2}M(12V)^2 + \frac{1}{2} \cdot 3M \Bigg(\underbrace{\sqrt{\left(-\frac{8V}{3}\right)^2 + \left(\frac{8V}{3}\right)^2}}_{\text{modulo di } W}\Bigg)^2 = \frac{1}{\cancel{2}} M \cancel{144}^{72} V^2 + \frac{3M}{\cancel{2}} \frac{\cancel{128}^{64}}{\cancel{9}\,3} V^2 = \frac{216MV^2 + 64MV^2}{3} = \frac{280}{3}MV^2$$

$$E_{fin} = \frac{1}{2} 4MV^2 = 2MV^2$$

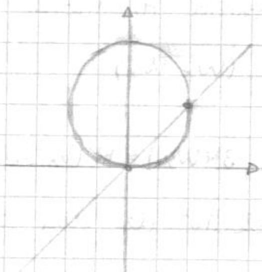
$$\Delta E = E_{in} - E_{fin} = \frac{280}{3}MV^2 - 2MV^2 = \frac{274}{3}MV^2$$

ESERCIZIO 1 4 SETTEMBRE 2012

M occupa la posizione descritta dalla relazione $\vec{S}_1 = (A\cos(\omega t+\phi), A(1+\text{sen}(\omega t+\phi))$
massa
2M " " " " " " $\vec{S}_2 = (Bt+Ct^2, Bt+Ct^2)$

a) Affinché le relazioni precedenti siano dimensionalmente corrette:
- A deve essere una lunghezza $([A] = L)$
- B deve essere una velocità $([B] = L/T)$
- C deve essere un'accelerazione $([C] = L/T^2)$

b)



Il corpo che si muove di moto rettilineo passa nell'origine (0,0) quando $Bt+Ct^2 = 0$, quindi:

$$t(B+Ct) = 0 \Rightarrow t=0 \vee t = -\frac{B}{C}$$

Il secondo corpo transita invece nell'origine se $A(1+\text{sen}(\omega t+\phi)) = 0$ pertanto:

$$A(1+\text{sen}(\omega t+\phi)) = 0 \Rightarrow \text{sen}(\omega t+\phi) = -1 \Rightarrow \omega t+\phi = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

$\Rightarrow \phi = -\omega t + \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ considerando i due diversi istanti in cui può avvenire l'urto nell'origine distinguiamo due casi

per $t=0$ $\phi = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ per $t = -\frac{B}{C}$ $\phi = +\frac{B\omega}{C} + \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

c) Calcoliamo il lavoro sui due corpi nell'intervallo $[-2\pi/\omega, 2\pi/\omega]$ senza considerare eventuali urti. Nel caso del corpo di massa M non si compie alcun lavoro, infatti il corpo si muove di moto circolare uniforme ed è soggetto alla forza centripeta, la quale è perpendicolare allo spostamento: quindi abbiamo $\int \vec{F}\, d\vec{S} = 0$. Per il corpo di massa 2M, che si muove di moto rettilineo uniforme consideriamo che $\Delta E_k = L$.

$$\vec{S}_2 = (Bt+Ct^2, Bt+Ct^2) \Rightarrow \vec{S}'_2 = \vec{V}_2 = (B+2Ct, B+2Ct) \Rightarrow V = \sqrt{(B+2Ct)^2+(B+2Ct)^2}$$

$$\Delta E_k = E_{k\,fin} - E_{k\,in} = \frac{1}{2}2M\Delta V^2 = \frac{1}{\cancel{2}}2M\cdot\cancel{2}\left(B+\frac{2\pi}{\omega}C\right)^2 - \frac{1}{\cancel{2}}2M\,\cancel{2}\left(B-\frac{2\pi}{\omega}C\right)^2$$

$$\Rightarrow L = 2M\left(\left(B+\frac{2\pi}{\omega}C\right)^2 - \left(B-\frac{2\pi}{\omega}C\right)^2\right)$$

d) Considerando un urto anelastico nell'origine, sappiamo che si conserva la quantità di moto. Analizziamo il caso dell'urto per $t=0$

$$\vec{S}_1 = (A\cos(\omega t+\phi), A(1+\text{sen}(\omega t+\phi))) \Rightarrow \vec{S}'_1 = \vec{V}_1 = (-A\,\text{sen}(\omega t+\phi)\,\omega, A\cos(\omega t+\phi)\cdot\omega)$$

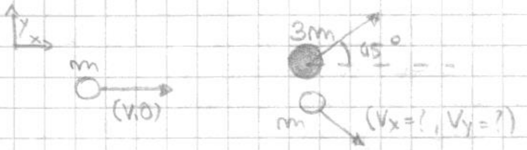
Quindi all'istante $t=0$: $\vec{V}_1 = \left(-\omega A\,\text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi\right), \omega A\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right) \Rightarrow \vec{V}_1 = (\omega A, 0)$ $\vec{V}_2 = (B, B)$

$P_x = M\omega A + 2BM$ $P_y = 2BM$ $\Rightarrow \vec{P}_{TOT} = (M(\omega A+2B), 2BM)$

$\vec{V}_{CM} = \frac{P_{TOT}}{M_{TOT}} = \left(\frac{\cancel{M}(\omega A+2B)}{3\cancel{M}}, \frac{2B\cancel{M}}{3\cancel{M}}\right)$ tale velocità si mantiene costante poiché si è detto che dopo l'urto cessano tutte le forze sui due corpi

$$\vec{S}_{CM} = \vec{V}_{CM}\cdot t = \left(\frac{(\omega A+2B)t}{3}, \frac{2Bt}{3}\right)$$

ESERCIZIO 1 10 FEBBRAIO 2011



Il corpo di massa 3m è inizialmente fermo, quello di massa m si muove con velocità V; l'urto avviene in modo elastico

a) Poiché si tratta di un urto elastico e nel sistema non agiscono forze impulsive, abbiamo la conservazione della quantità di moto e dell'energia. Si nota inoltre che, poiché il corpo di massa 3m dopo l'urto ha velocità diretta a 45° rispetto all'asse x, le componenti del vettore velocità saranno uguali.

$\vec{V_1} = (V,0)$ $\quad \vec{V_1 f} = (V_x, V_y)$ $\quad \vec{V_2 f} = (V_2, V_2)$

$$\frac{1}{2} m V_1^2 = \frac{1}{2} m V_1 f^2 + \frac{1}{2} 3m V_2 f^2 \Rightarrow mV^2 = mV_x^2 + mV_y^2 + 6mV_2^2$$ conservazione en. cinetica

$$V_2 f = \sqrt{V_2^2 + V_2^2} \Rightarrow V_2 f^2 = 2V_2^2$$

$mV = 3mV_2 + mV_x$ conservazione quantità di moto lungo x

$0 = 3mV_2 + mV_y$ " " " " y

$$\begin{cases} \cancel{m}V^2 = \cancel{m}V_x^2 + \cancel{m}V_y^2 + 6\cancel{m}V_2^2 \\ \cancel{m}V = 3\cancel{m}V_2 + \cancel{m}V_x \\ 3\cancel{m}V_2 + \cancel{m}V_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V^2 = V_x^2 + V_y^2 + 6V_2^2 \\ V = 3V_2 + V_x \\ 3V_2 + V_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3V_2 = -V_y \\ V = V_x - V_y \\ \cancel{V_x^2} + \cancel{V_y^2} - 2V_xV_y = \cancel{V_x^2} + \cancel{V_y^2} + 6V_2^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3V_2 = -V_y \\ V = V_x - V_y \\ -\cancel{2}V_x(\cancel{3V_2}) = \cancel{6}V_2^{\cancel{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_2 = V_x \\ V = V_2 + 3V_2 = 4V_2 \\ 3V_2 = -V_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_2 = V/4 \\ V_x = V/4 \\ V_y = -3V/4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{V_1 f} = \left(\frac{V}{4}; -\frac{3V}{4}\right) \qquad V_2 f = \sqrt{\left(\frac{V}{4}\right)^2 + \left(\frac{V}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{V^2}{16} + \frac{V^2}{16}} = \sqrt{\frac{V^2}{8}} = \frac{V}{2\sqrt{2}}$$

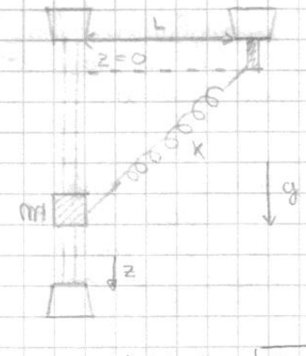
questa componente è negativa in quanto diretta verso il basso

b) A questo punto manca da calcolare l'impulso dell'urto; sappiamo che esso è pari alla variazione della quantità di moto del corpo sul quale agisce. Considerando il corpo di massa 3m, il quale era inizialmente fermo e pertanto dotato di quantità di moto nulla, sarà sufficiente calcolare la quantità di moto in seguito all'urto

$$\Delta p = p_{fin} - p_{in} = 3m \cdot \frac{V}{2\sqrt{2}} - 0 = \frac{3}{2\sqrt{2}} mV$$ variazione della quantità di moto per il corpo di massa 3m

$$\Rightarrow I = \Delta p = \frac{3}{2\sqrt{2}} mV$$

ESERCIZIO 1 6 MARZO 2011



La lunghezza L_0 della molla a riposo è trascurabile rispetto alla distanza L che ne separa l'estremo fisso dalla guida

a) Il manicotto raggiunge la posizione di equilibrio nel momento in cui la risultante delle forze dirette lungo la guida è nulla; lungo di essa agisce la forza peso e la componente y della forza elastica della molla; quindi:

$$mg - K\Delta x\, z \cdot \sqrt{z^2+L^2} = 0 \Rightarrow mg = K\Delta x\, z \sqrt{z^2+L^2}$$

$\Delta x = \sqrt{z^2+L^2} - L_0 \cong \sqrt{z^2+L^2}$ in quanto L_0 si è detto trascurabile

quindi $mg = K\sqrt{z^2+L^2} \cdot z \cdot \sqrt{z^2+L^2} \Rightarrow Kz^3 + KL^2z - mg = 0$ la soluzione è la pos. di equilibrio

b) La reazione della guida avrà lo stesso modulo, ma verso opposto, della componente x della forza elastica, quindi

$$R_x = K\Delta x \cdot \frac{L}{\sqrt{z^2+L^2}} = K \cdot \sqrt{z^2+L^2} \cdot \frac{L}{\sqrt{z^2+L^2}} = KL$$

c) Volendo calcolare l'energia potenziale in funzione della quota z del manicotto dobbiamo considerare l'energia potenziale del manicotto ma anche quella della molla:

$U_{Manic} = -mgz$ il segno "−" è dovuto al fatto che l'asse z è orientato verso il basso

$$U_{molla} = \frac{1}{2}K\Delta x^2 = \frac{1}{2}K\left(\sqrt{z^2+L^2}\right)^2 = \frac{1}{2}K(z^2+L^2)$$

$$\Rightarrow U(z) = -mgz + \frac{1}{2}K(z^2+L^2)$$

d) Controlliamo se il manicotto può compiere piccole oscillazioni di tipo armonico intorno alla posizione di equilibrio

$$U(z) = -mgz + \frac{1}{2}K(z^2+L^2)$$

$$U'(z) = -mg + \frac{1}{2}K2z = 0 \Rightarrow z = \frac{mg}{K} = z_{equilibrio}$$

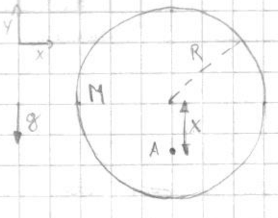
$$U''(z) = K$$

Con lo sviluppo di Taylor:

$$U(z) = U(z_{eq}) + \underbrace{U'(z_{eq})}_{0}(z-z_{eq}) + \underbrace{\frac{1}{2!}U''(z_{eq})(z-z_{eq})^2}_{\frac{1}{2}K\Delta x^2} - \dots = \text{costante} + \frac{1}{2}K\Delta z^2$$

$\Rightarrow$ c'è moto armonico con pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

ESERCIZIO 1 5 APRILE 2011



Il disco di massa M ruota su un piano verticale senza attrito attorno ad un asse orizzontale posto a distanza x dal centro, il disco compie mezzo giro.

Durante la rotazione, si conserva l'energia totale del corpo, pertanto

$$E_{k_i} + U_i = E_{kf} + U_f \Rightarrow 0 + Mgx = -Mgx + \frac{1}{2} I\omega^2 \Rightarrow \frac{1}{2} I\omega^2 = 2Mgx$$

Quindi l'energia cinetica finale è uguale alla variazione di energia potenziale. Calcoliamo quindi il momento di inerzia attraverso il teorema di Huygens-Steiner dato che l'asse attorno a cui il disco ruota è parallelo a quello di potenza

$$I_A = I_{CM} + M d_{A-CM} \Rightarrow I_A = \frac{MR^2}{2} + Mx^2 = M\left(\frac{R^2}{2} + x^2\right)$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} M\left(\frac{R^2}{2} + x^2\right)\omega^2$$

Uguagliando questa quantità a ΔU possiamo ottenere il valore di ω

$$2Mgx = \frac{1}{2} M\left(\frac{R^2}{2} + x^2\right)\omega^2 \Rightarrow 2gx = \frac{1}{2}\left(\frac{R^2+2x^2}{2}\right)\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = 4gx\left(\frac{2}{R^2+2x^2}\right) = \frac{8gx}{R^2+2x^2}$$

$$\Rightarrow \omega = \pm\sqrt{\frac{8gx}{R^2+2x^2}}$$ questo è il valore della velocità angolare

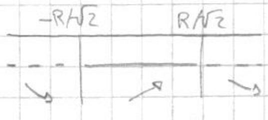
Volendo calcolare la reazione vincolare R, dobbiamo tener conto non solo della forza peso ma anche della forza centripeta generatasi con la rotazione, dunque:

$$R = F_P + F_C = Mg + Ma_c = Mg + M\omega^2 x = M(g + \omega^2 x) = M\left(g + \frac{8gx^2}{R^2+2x^2}\right) = Mg\left(1 + \frac{8x^2}{R^2+2x^2}\right)$$

Calcoliamo ora i valori della x che rendono massime la velocità angolare ω e la reazione vincolare R (nel calcolo dei massimi trascuro le costanti)

$$\omega^2 = \frac{8gx}{R^2+2x^2} \Rightarrow y_1 = \frac{x}{R^2+2x^2} \Rightarrow y_1' = \frac{R^2+2x^2-4x^2}{(R^2+2x^2)^2} = \frac{R^2-2x^2}{(R^2+2x^2)^2} > 0 \quad N>0 \Rightarrow x^2 < \frac{R^2}{2} \Rightarrow -\frac{R}{\sqrt{2}} < x < \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$(R^2+2x^2)^2 > 0 \ \forall x$



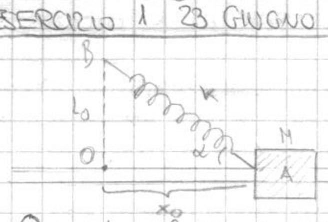
$x = R/\sqrt{2}$ è punto di max per la velocità angolare

$$R = Mg\left(1 + \frac{8x^2}{R^2+2x^2}\right) \Rightarrow y_2 = 1 + \frac{8x^2}{R^2+2x^2} \Rightarrow y_2' = \frac{16x(R^2+2x^2) - 4x \cdot 8x^2}{(R^2+2x^2)^2} = \frac{16R^2x + \cancel{32x^3} - \cancel{32x^3}}{(R^2+2x^2)^2}$$

$$\Rightarrow y_2' = \frac{16R^2x}{(R^2+2x^2)^2} > 0 \ \forall x$$

$\Rightarrow$ perché y_2 è una funzione monotona crescente, il massimo della reazione vincolare si avrà per il valore massimo che può assumere x, ovvero per $x = R$

ESERCIZIO 1 23 GIUGNO 2011



"Il corpo viene abbandonato con velocità nulla nel punto A

a) Quando il corpo viene lasciato in A esso comincerà a muoversi di moto armonico, con centro nel punto O dove la velocità sarà massima; per calcolare quest'ultima dobbiamo tenere conto che nella situazione iniziale l'energia del sistema corrisponderà a quella potenziale della molla, mentre quando il corpo transiterà in O l'energia potenziale della molla sarà nulla, mentre sarà presente quella cinetica del blocco

$$\frac{1}{2}K\Delta x^2 = \frac{1}{2}MV_0^2 \Rightarrow \frac{1}{2}K\left(\sqrt{x_0^2+L_0^2}-L_0\right)^2 = \frac{1}{2}MV_0^2$$

dove x_0 è l'ampiezza del moto armonico originatosi

$$\Rightarrow V_0^2 = \frac{K}{M}\left(\sqrt{x_0^2+L_0^2}-L_0\right)^2 \Rightarrow V_0 = \left(\sqrt{x_0^2+L_0^2}-L_0\right)\cdot\sqrt{\frac{K}{M}}$$

b) Per calcolare l'accelerazione in funzione della distanza x da O innanzitutto è necessario stabilire la presenza di un asse x lungo la quale calcolarla; supponiamo tale asse avente origine in O e con verso uguale a quello di OA. Passiamo poi a calcolare la forza lungo tale asse x per poi ricavarne l'accelerazione, in quanto noi sappiamo che $F_x = m\cdot a_x$

$$F_x = -K\Delta x\cos\alpha = -K\left(\sqrt{x_0^2+L_0^2}-L_0\right)^2\cdot\frac{x}{\sqrt{x_0^2+L_0^2}}$$

questa è la componente lungo x della forza elastica

$$F_x = m\cdot a_x \Rightarrow a_x = \frac{F_x}{m} \Rightarrow a_x = -\frac{K}{M}\left(\sqrt{x_0^2+L_0^2}-L_0\right)^2\cdot\frac{x}{\sqrt{x_0^2+L_0^2}}$$

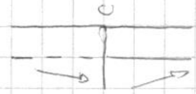
così trovata l'accelerazione in funzione della distanza x da O

c) Procediamo ora con il calcolo di eventuali posizioni di equilibrio stabilendo, nel caso in cui ci siano, se si trattino di punti di equilibrio stabile o instabile

$$U(x) = \frac{1}{2}K\left(\sqrt{x_0^2+L_0^2}-L_0\right)^2$$

$$U'(x) = \frac{1}{\cancel{2}}K\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x_0^2+L_0^2}}\cdot\cancel{2}x_0 = K\cdot\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+L_0^2}} > 0$$

$N>0 \Rightarrow x>0$
$D>0 \Rightarrow \forall x$



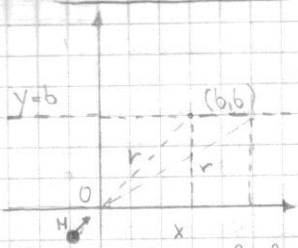
$U'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ che è punto di equilibrio, stabiliamo ora se si tratta di equilibrio stabile o instabile

$$U''(x) = K\,\frac{1\left(\sqrt{x_0^2+L_0^2}\right)-\frac{1}{2\sqrt{x_0^2+L_0^2}}\cdot 2x_0\cdot x_0}{(x_0^2+L_0^2)} = \frac{\cancel{2x_0^2}+2L_0^2-\cancel{2x_0^2}}{2\sqrt{x_0^2+L_0^2}}\cdot\frac{1}{(x_0^2+L_0^2)}$$

$$U''(0) = \frac{+\cancel{2}L_0^2-}{\cancel{2}\sqrt{0+L_0^2}}\cdot\frac{1}{(0+L_0^2)} = \frac{\cancel{L_0^2}}{L_0}\cdot\frac{1}{\cancel{L_0^2}} = \frac{1}{L_0} > 0$$

Dal momento che $U''(0)>0$, concludiamo che il punto di equilibrio $x=0$ sarà punto di equilibrio stabile

ESERCIZIO 13 LUGLIO 2011



Il corpo di massa M si muove sotto l'effetto di una forza centrale associata ad un'energia potenziale pari a $U(r) = Ar^2/(b^2+r^2)$ dove r è la distanza da O, A è costante e positiva

a) Per poter calcolare l'accelerazione nel punto (b,b) dobbiamo prima trovare il valore della forza:

$$\vec F = -\nabla \vec U \Rightarrow \vec F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{2Ar(b^2+r^2) - 2r(Ar^2)}{(b^2+r^2)^2} = -\frac{2Ab^2r + \cancel{2Ar^3} - \cancel{2Ar^3}}{(b^2+r^2)^2} = -\frac{2Ab^2r}{(b^2+r^2)^2}$$

Poiché r è la distanza dal centro, quando il corpo si troverà in (b,b) tale distanza sarà $r = \sqrt{b^2+b^2} = \sqrt{2b^2} = b\sqrt2$ e quindi:

$$\vec a = \frac{\vec F}{m} = \frac{2Ab^2\cdot b\sqrt2}{(b^2+(b\sqrt2)^2)^2}\cdot\frac{1}{m} = \frac{2\sqrt2\, b^3 A}{(b^2+2b^2)^2 m} = \frac{2\sqrt2 A \cancel{b^3}}{9b^4\, m} = -\frac{2\sqrt2}{9}\frac{A}{bm}$$

Questo è il modulo dell'accelerazione nel punto (b,b) ed i versori dell'accelerazione saranno $(\sqrt2/2, \sqrt2/2)$ in quanto il corpo si muove lungo la retta $y=x$

b) Consideriamo ora il caso in cui il corpo sia vincolato a muoversi lungo la retta $y=b$; in questa situazione $r = \sqrt{x^2+b^2}$.

$$U(r) = \frac{Ar^2}{(b^2+r^2)} \Rightarrow U(x) = \frac{A(x^2+b^2)}{(b^2+x^2+b^2)} = \frac{A(x^2+b^2)}{(x^2+2b^2)} = \frac{Ax^2+Ab^2}{(x^2+2b^2)}$$

$$U'(x) = \frac{2Ax(x^2+2b^2) - 2x(Ax^2+Ab^2)}{(x^2+2b^2)^2} = \frac{\cancel{2Ax^3}+4Ab^2x-\cancel{2Ax^3}-2Ab^2x}{(x^2+2b^2)^2} = \frac{2Ab^2x}{(x^2+2b^2)^2}$$

$U'(x) = 0 \Rightarrow x=0$ è punto di equilibrio

$$U''(x) = \frac{2Ab^2(x^2+2b^2)^2 - 2(x^2+2b^2)2x\cdot 2Ab^2x}{(x^2+2b^2)^2} = \frac{Ab^2(x^4+4b^4+4b^2x^2) - (x^2+2b^2)(8Ab^2x^2)}{(x^2+2b^2)^2}$$

$$= \frac{Ab^2x^4 + 4Ab^6 + 4Ab^4x^2 - 8Ab^2x^4 - 16Ab^4x^2}{(x^2+2b^2)^2} = \frac{-7Ab^2x^4 + 4Ab^6 - 12Ab^4x^2}{(x^2+2b^2)^2} =$$

Visto che la derivata II è piuttosto noiosa consideriamo F(x):

$F(x) = -\frac{2Ab^2x}{(x^2+2b^2)^2}$ che per $x \to 0 \cong -Ax$ $\quad \underset{-U''(x)}{\underset{\parallel}{F'(x)}} = -A \Rightarrow U''(x) = A$

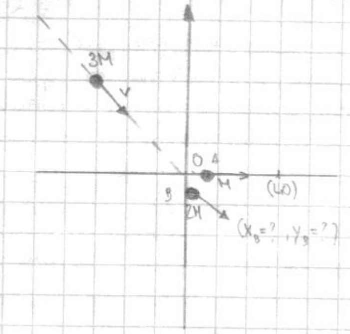
quindi $x=0$ è punto di equilibrio stabile (se $A>0$ e $b\neq0$)

$$U''(0) = U(0) + \underset{0}{\underset{\parallel}{U'(0)}}(x-0) + \frac12 \underbrace{U''(0)}_{K}(x-0)^2$$

Quindi avremo $\omega = \sqrt{\frac{U''(0)}{M}}$ che è la pulsazione del moto armonico

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{M}{U''(0)}}\,2\pi$$

ESERCIZIO 1 6 SETTEMBRE 2011



Il corpo di massa 3M si muove con velocità V lungo la bisettrice del secondo quadrante e giunto all'origine esplode dividendosi in due parti: A di massa M che all'istante t_1 si trova in (L, 0) e B di massa 2M

Dopo l'esplosione le due masse A e B si muovono di moto uniforme, pertanto:

$$V_A = \frac{\Delta x_A}{t} = \frac{L}{t_1}$$

Inoltre poiché non ci sono forze esterne, sappiamo che si conserva la quantità di moto e dunque

$$3MV = MV_A + 2MV_B \Rightarrow 3MV_x = MV_{Ax} + 2MV_{Bx} \quad e \quad 3MV_y = MV_{Ay} + 2MV_{By}$$

Tenendo conto che i versori di V sono $(\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2)$:

$$3\cancel{M}V\frac{\sqrt{2}}{2} = \cancel{M}\frac{L}{t_1} + 2\cancel{M}V_{Bx} \Rightarrow V_{Bx} = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}V - \frac{L}{t_1}\right)\frac{1}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{2}V - \frac{L}{2t_1}$$

$$-3\cancel{M}V\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 + 2\cancel{M}V_{By} \Rightarrow V_{By} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}V$$

$$\Rightarrow V_B = \left(\frac{3}{4}\sqrt{2}V - \frac{L}{2t_1}; -\frac{3}{4}\sqrt{2}V\right)$$ da qui possiamo ricavare la posizione di B

$$X_B = X_0 + \int V_{Bx}\,dt = 0 + \int\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}V - \frac{L}{2t_1}\right)dt = \left(\frac{3}{4}\sqrt{2}V - \frac{L}{2t_1}\right)t$$

$$Y_B = Y_0 + \int V_{By}\,dt = 0 + \int -\frac{3}{4}\sqrt{2}V\,dt = -\frac{3}{4}\sqrt{2}tV$$

N.B. X_0 e Y_0 sono entrambi nulli in quanto il corpo B si muove a partire dall'origine

$$\Rightarrow S_B = \left(\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}V - \frac{L}{2t_1}\right)t; -\frac{3}{4}\sqrt{2}tV\right)$$

Per calcolare l'energia sviluppatasi nell'esplosione è sufficiente fare la differenza tra le energie cinetiche prima e dopo l'esplosione

$$\Delta E = E_{fin} - E_{in}$$

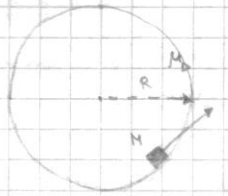
$$E_{in} = \frac{1}{2}3MV^2$$

$$E_{fin} = \frac{1}{2}MV_A^2 + \frac{1}{2}2MV_B^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{L}{t_1}\right)^2 + MV_B^2 \rightarrow V_B = \frac{3V - V_A}{2} = \frac{3V - \frac{L}{t_1}}{2} = \frac{3}{2}V - \frac{L}{2t_1}$$

$$= \frac{1}{2}M\left(\frac{L}{t_1}\right)^2 + M\left(\frac{3}{2}V - \frac{L}{2t_1}\right)^2$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}M\left(\frac{L}{t_1}\right)^2 + M\left(\frac{3}{2}V - \frac{L}{2t_1}\right)^2 - \frac{1}{2}3MV^2 = M\left(\frac{1}{2}\left(\frac{L}{t_1}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}V - \frac{L}{2t_1}\right)^2 - \frac{3}{2}V^2\right)$$ è l'energia sviluppatasi nell'esplosione

ESERCIZIO 1 20 SETTEMBRE 2011



La guida rigida a forma di anello è fissata su un piano orizzontale. All'istante $t=0$, il corpo ha una velocità (tangenziale) V_0.

a) Per il modulo della forza totale agente sul corpo all'istante iniziale non consideriamo la forza peso, la quale è annullata dal vincolo del piano orizzontale; la forza di cui dobbiamo tener conto è la reazione vincolare dell'anello che garantisce l'accelerazione centripeta, per l'asse y

$F_c = \frac{MV_0^2}{R}$ poiché ci troviamo in un moto circolare uniforme

$N = \frac{MV_0^2}{R}$

Per quanto riguarda l'asse x consideriamo la forza d'attrito

$A = N\mu_D = \frac{MV_0^2}{R}\cdot\mu_D$

Quindi il modulo della forza totale sarà:

$$F = \sqrt{N^2+A^2} = \sqrt{\frac{M^2V_0^4}{R^2}+\frac{M^2V_0^4}{R^2}\cdot\mu_D^2} = \frac{MV_0^2}{R}\sqrt{(1+\mu_D)}$$

b) Scriviamo l'equazione di moto per il corpo

$$A = \frac{MV^2}{R}\mu_D \Rightarrow a_t = \frac{A}{M} = \frac{V^2}{R}\mu_D$$

$$\Rightarrow M\underbrace{\boxed{a}}_{\frac{dV}{dt}} = -M\frac{V^2}{R}\mu_D$$ dove il segno "-" è dovuto al fatto che l'attrito ha verso opposto rispetto alla velocità

c) Risolviamo l'equazione del moto:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{V^2}{R}\mu_D \Rightarrow \frac{dV}{V^2} = -\frac{\mu_D}{R}dt$$ con la separazione delle variabili

Integriamo:

$$\int_{V_0}^{V(t)}\frac{dV}{V^2} = -\int_0^t\frac{\mu_D}{R}dt \Rightarrow \int_{V_0}^{V(t)}\frac{dV}{V^2} = -\frac{\mu_D}{R}\int_0^t dt \Rightarrow \left[-\frac{1}{V}\right]_{V_0}^{V(t)} = \left[-\frac{\mu_D t}{R}\right]_0^t \Rightarrow -\frac{1}{V(t)}+\frac{1}{V_0} = -\frac{\mu_D t}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{V(t)} = \frac{1}{V_0}+\frac{\mu_D t}{R} \Rightarrow \frac{1}{V(t)} = \frac{R+\mu_D t V_0}{V_0 R} \Rightarrow V(t) = \frac{V_0 R}{R+\mu_D t V_0} = \frac{V_0}{(1+\mu_D V_0 t/R)}$$

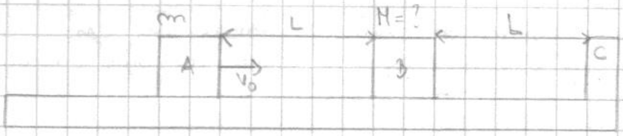
d) Calcoliamo lo spazio percorso quando la velocità si riduce di un fattore α (diventando quindi V_0/α)

$$\frac{V_0}{\alpha} = \frac{V_0}{(1+\mu_D V_0 t/R)} \Rightarrow \alpha = 1+\mu_D V_0 t/R \Rightarrow t_\alpha = \frac{R(\alpha-1)}{\mu_D V_0}$$

$$S = \int_0^{t_\alpha}\frac{V_0}{\alpha}dt = \int_0^{t_\alpha}\frac{V_0}{1+\mu_D V_0 t/R}dt \Rightarrow z = 1+\mu_D V_0 t/R \Rightarrow \int_1^\alpha \frac{\cancel{V_0}}{z}\cdot\frac{R}{\mu_D \cancel{V_0}}dz = \frac{R}{\mu_D}\int_1^\alpha\frac{1}{z}dz = \left[\frac{R}{\mu_D}\cdot\ln|z|\right]_1^\alpha =$$

$$= \frac{R}{\mu_D}\ln|\alpha| - \frac{R}{\mu_D}\ln|1| = \frac{R}{\mu_D}\ln\alpha$$

Esercizio 1 23 novembre 2011



A urta elasticamente B, e B urta elasticamente C, rimbalzandoci

Prima di calcolare l'impulso tra B e C, ricaviamo le velocità di A e B dopo l'urto, poiché l'urto è elastico e non agiscono forze esterne impulsive, si conserva sia la quantità di moto che l'energia, quindi:

$$\begin{cases} mV_0 = mV_A + MV_B \\ \frac{1}{2} mV_0^2 = \frac{1}{2} mV_A^2 + \frac{1}{2} MV_B^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m(V_0 - V_A) = MV_B \\ m(V_0^2 - V_A^2) = MV_B^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m(V_0 - V_A) = MV_B \\ m(V_0 - V_A)(V_0 + V_A) = MV_B^2 \end{cases} \Rightarrow \text{dividendo la II eq per la I}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m(V_0 - V_A) = MV_B \\ V_B = V_0 + V_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mV_0 - mV_A = MV_0 + MV_A \\ V_B = V_0 + V_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A(M+m) = V_0(m-M) \\ V_B = V_0 + V_A \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_A = V_0 \frac{(m-M)}{(M+m)} \qquad V_B = V_0 + V_A = V_0 + V_0 \frac{(m-M)}{(m+M)} = V_0 \left(1 + \frac{(m-M)}{(m+M)}\right) = V_0 \frac{m + \cancel{M} + m - \cancel{M}}{m+M} = V_0 \frac{2m}{m+M}$$

Considerando l'urto tra B e C, anche qui si conservano energia e quantità di moto pertanto la velocità di B dopo l'urto sarà uguale a quella prima dell'urto in modulo, ma con segno opposto; quindi l'impulso sarà:

$$\text{Impulso} = \Delta P = P_{in} - P_{fin} = M \frac{2m}{m+M} - \left(-\frac{2m}{m+M}\right) M = \frac{4mM}{(m+M)}$$

cerchiamo la M per cui l'impulso è minimo:

$$f(x) = \frac{4mM}{(m+M)} \Rightarrow f'(x) = \frac{4m(m+M) - 4mM}{(m+M)^2} = \frac{4m^2 + \cancel{4mM} - \cancel{4mM}}{(m+M)^2} > 0 \quad \forall M$$

Poiché la funzione dell'impulso è strettamente crescente, avremo valore minimo quando M tende all'infinito.

Affinché A e B si scontrino nuovamente B dovrà andare più veloce di A; dobbiamo tenere conto del fatto che la velocità di B dopo l'urto con C è $-V_B$ e se consideriamo come positive le velocità che hanno il verso di V_0:

$$-V_B < V_A \Rightarrow -\frac{2m}{\cancel{m+M}} \cancel{V_0} < \frac{m-M}{\cancel{m+M}} \cancel{V_0} \Rightarrow M < 3m$$ condizione necessaria affinché A e B si urtino di nuovo

Consideriamo $M = 3/2\, m$: $V_A = \frac{V_0(m - 3/2\, m)}{(m + 3/2\, m)} = -\frac{V_0/2\, \cancel{m}}{5/2\, \cancel{m}} = -\frac{V_0}{5}$ $\qquad \underbrace{V_B'}_{\text{vel B dopo urto con C}} = -V_0 \frac{2m}{m + 3/2\, m} = -\frac{4V_0}{5}$

Supponiamo che l'urto tra A e B iniziale avvenga all'istante t_1, quello tra B e C all'istante t_2, ed il secondo urto tra A e B all'istante t_3

$$t_1 = \frac{L}{V_0} \qquad t_2 = t_1 + \frac{L}{V_B} = \frac{L}{V_0} + L \cdot \left(\frac{5}{4V_0}\right) = \frac{9L}{4V_0}$$

Affinché A e B si urtino di nuovo dovranno occupare la stessa posizione quindi:

$$L + V_A(t_3 - t_1) = 2L + V_B'(t_3 - t_2) \Rightarrow L - \frac{V_0 t_3}{5} + \frac{\cancel{V_0}}{5} \cdot \frac{L}{\cancel{V_0}} = 2L - \frac{4}{5} V_0 t_3 + \frac{\cancel{4}\cancel{V_0}}{5} \cdot \frac{9 \cdot L}{\cancel{4}\, \cancel{V_0}}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{5} V_0 t_3 - \frac{V_0 t_3}{5} = 2L + \frac{9}{5} L - L - \frac{L}{5} \Rightarrow t_3 = \frac{10 + 9 - 5 - 1}{\cancel{5}} L \cdot \frac{\cancel{5}}{4 \cdot V_0} \Rightarrow t_3 = \frac{13}{4} \frac{L}{V_0}$$

A questo punto la distanza tra il luogo dell'impatto e C sarà:

$$V'_B(t_3-t_2) = -\frac{\cancel{4}V_0}{5}\cdot\frac{13}{\cancel{4}}\cdot\frac{L}{\cancel{V_0}} - \frac{\cancel{4}\cancel{V_0}}{5}\cdot\frac{9\,L}{\cancel{4}\cancel{V_0}} =$$

$$= -\frac{22}{5}L$$

N.B il segno "−" è dovuto al fatto che inizialmente avevamo considerato come positive le velocità con verso opposto a quello di V'_B

ESERCIZIO 1 28 GENNAIO 2010

Al tempo t=0 il sistema è fermo e viene lasciato libero, con la molla compressa di un tratto Δx. Dopo essersi staccato da A, B percorre un tratto di lunghezza Δx fino al bordo del piano, per poi cadere al suolo.

a) Poiché non agiscono forze esterne, nel sistema si conserva l'energia meccanica; inizialmente avremo solo l'energia potenziale della molla, e quando essa raggiunge la posizione di equilibrio avremo solo quella cinetica dei due blocchi:

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}(M+2M)V^2 \Rightarrow V^2 = \frac{k\Delta x^2}{3M} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{k\Delta x^2}{3M}} = \Delta x\sqrt{\frac{k}{3M}}$$

Quest'ultima è la velocità con la quale continuerà a muoversi il blocco B una volta staccatosi da A e, una volta superato il bordo del piano, tale velocità sarà la componente x del vettore velocità durante la caduta, quindi:

$$V_{Bx} = \Delta x\sqrt{\frac{k}{3M}} \qquad V_{By} = V_{0y} + gt = gt$$ in quanto lungo l'asse y il moto è uniformemente accelerato.

$$V_B = \sqrt{V_{Bx}^2 + V_{By}^2} = \sqrt{\frac{\Delta x^2 k}{3M} + g^2t^2}$$

c) Una volta che B si è staccato, l'energia cinetica di A in quell'istante sarà uguale all'energia potenziale della molla all'istante di massima compressione:

$$\frac{1}{2}MV_{Bx}^2 = \frac{1}{2}k\Delta x'^2 \Rightarrow \Delta x'^2 = \frac{M V_{Bx}^2}{k} = \frac{\cancel{M}}{\cancel{k}}\cdot\Delta x^2\cdot\frac{\cancel{k}}{3\cancel{M}} \Rightarrow \Delta' x = \sqrt{\frac{\Delta x^2}{3}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}$$

quindi Δx' è la massima compressione della molla

d) Determiniamo gli istanti di massima compressione; il distacco tra A e B avviene quando la molla è in equilibrio, quindi dopo un tempo pari a T/4; a questo punto la molla (alla quale ora è attaccato solo il blocco A) dovrà raggiungere la posizione di massima estensione, poi di nuovo quella di equilibrio, e infine nuovamente quella di massima compressione

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{3M}} \Rightarrow T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{3M}{k}} \qquad \omega' = \sqrt{\frac{k}{M}} \Rightarrow T' = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

max estensione a T'/4
equilibrio a T'/2
max compressione a 3/4 T'

$$t_m = T/4 + 3/4\,T' + mT' = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3M}{k}} + \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{k}} + m\cdot 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \quad \text{con } m = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

questi sono gli istanti in cui la molla raggiunge la massima compressione

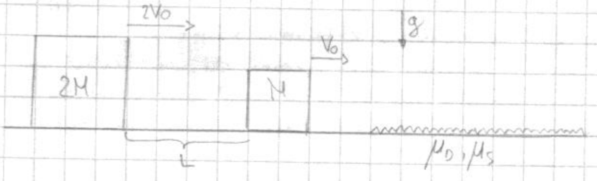
b) Abbiamo detto che A e B si separano in un tempo Δt pari a T/4:

$$\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3M}{k}}$$

Il tempo di volo è invece:

$$\Delta t_{volo} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

ESERCIZIO 1 13 APRILE 2010



Un attimo prima di raggiungere il tratto ruvido, le due masse si urtano in un processo istantaneo ed elastico

a) Poiché si tratta di un urto elastico dove non agiscono forze esterne impulsive, si conservano energia cinetica e quantità di moto:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} 2M V_{1i}^2 + \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} 2M V_{1f}^2 + \frac{1}{2} M V_{2f}^2 \\ 2M V_{1i} + M V_{2i} = 2M V_{1f} + M V_{2f} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2M (V_{1i} - V_{1f}) = -M (V_{2i} - V_{2f}) \\ 2M (V_{1i}^2 - V_{1f}^2) = -M (V_{2i}^2 - V_{2f}^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2M (V_{1i} - V_{1f}) = -M (V_{2i} - V_{2f}) \\ 2M (V_{1i} - V_{1f})(V_{1i} + V_{1f}) = -M (V_{2i} - V_{2f})(V_{2i} + V_{2f}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2M (V_{1i} - V_{1f}) = -M (V_{2i} - V_{2f}) \\ V_{1i} + V_{1f} = V_{2i} + V_{2f} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{1f} = V_{2i} + V_{2f} - V_{1i} \\ 2M V_{1i} - 2M V_{2i} - 2M V_{2f} + 2M V_{1i} = -M V_{2i} + M V_{2f} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{2f} = \frac{4\cancel{M} V_{1i}}{3\cancel{M}} - \frac{\cancel{M} V_{2i}}{3\cancel{M}} = \frac{4}{3} 2V_0 - \frac{1}{3} V_0 = \frac{7}{3} V_0 \\ V_{1f} = V_{2i} - \frac{V_{2i}}{3} + \frac{4}{3} V_{1i} - V_{1i} = \frac{1}{3} V_{1i} + \frac{2}{3} V_{2i} = \frac{1}{3} 2V_0 + \frac{2}{3} V_0 = \frac{4}{3} V_0 \end{cases}$$

Quindi calcoliamo l'impulso:

$$\text{Impulso} = \Delta P = P_{fin} - P_{in} = M \frac{7}{3} V_0 - M V_0 = \frac{4}{3} M V_0$$

b) Tutta l'energia cinetica dei due corpi viene dissipata per attrito

$$\Delta E_{2M} = \frac{1}{2} \cancel{2}M \left(\frac{4}{3} V_0 \right)^2 = \frac{16}{9} M V_0^2 \qquad \Delta E_M = \frac{1}{2} M \left(\frac{7}{3} V_0^2 \right) = \frac{49}{18} M V_0^2$$

c) Per conoscere la distanza a cui si fermano i due corpi è utile ricordare che $\Delta E = L$ e che $L = F \cdot \Delta S$, quindi:

$$\Delta S_M = \frac{L_M}{F_M} = \frac{\Delta E_M}{F_M} = \frac{49}{18} \cancel{M} V_0^2 \cdot \frac{1}{\cancel{M} g \mu_D} = \frac{49}{18} \frac{V_0^2}{g \mu_D} \qquad \Delta S_{2M} = \frac{\overset{8}{\cancel{16}} \cancel{M} V_0^2}{9} \cdot \frac{1}{\cancel{2M} g \mu_D} = \frac{8}{9} \frac{V_0^2}{g \mu_D}$$

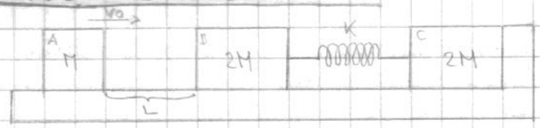
$$d = \Delta S_M - \Delta S_{2M} = \frac{49}{18} \frac{V_0^2}{\mu_D g} - \frac{8}{9} \frac{V_0^2}{\mu_D g} = \frac{49 V_0^2 - 16 V_0^2}{18 \mu_D g} = \frac{33}{18} \frac{V_0^2}{\mu_D g} = \frac{11}{6} \frac{V_0^2}{\mu_D g}$$ distanza tra i due blocchi

d) I due corpi si fermeranno in seguito ad una decelerazione costante pari a $\mu_D g$, pertanto:

$$\Delta t_M = \frac{V_M}{\mu_D g} = \frac{4}{3} \frac{V_0}{\mu_D g}$$

$$\Delta t_{2M} = \frac{V_{2M}}{\mu_D g} = \frac{7}{3} \frac{V_0}{\mu_D g}$$

ESERCIZIO 2 21 LUGLIO 2010



g A si muove verso B con velocità V_0, la molla è a riposo e il corpo C è appoggiato ad una parete. All'istante $t=0$ A è a distanza L da B; A urta B in un piccolo intervallo ed elastico.

a) A si muove di moto uniforme pertanto: $t_1 = \frac{L}{V_0}$ è l'istante dell'urto tra A e B

Poiché la molla è in posizione di equilibrio, raggiungerà la posizione di massima compressione in un tempo pari a T/4:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2M}{K}} \Rightarrow T/4 = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{2M}{K}}$$

$$\Rightarrow t_2 = t_1 + T/4 = \frac{L}{V_0} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2M}{K}}$$ questo è l'istante di massima compressione

b) La molla sarà massimamente compressa quando il corpo B si fermerà; pertanto, poiché non agiscono forze esterne impulsive, l'energia cinetica di B prima della compressione sarà uguale all'energia potenziale della molla massimamente compressa. Determiniamo prima V_B imponendo la conservazione della quantità di moto e dell'energia nell'urto elastico con A dove non sono presenti forze impulsive

$$\begin{cases} \frac{1}{2}MV_0^2 + 0 = \frac{1}{2}MV_A^2 + \frac{1}{2}2MV_B^2 \\ MV_0 + 0 = MV_A + MV_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(V_0^2 - V_A^2) = 2MV_B^2 \\ M(V_0 - V_A) = MV_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(V_0 - V_A)(V_0 + V_A) = 2MV_B^2 \\ M(V_0 - V_A) = MV_B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M(V_0 - V_A) = MV_B \\ V_0 + V_A = 2V_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A = 2V_B - V_0 \\ MV_0 - 2MV_B + MV_0 = MV_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_B = \frac{2}{3}V_0 \quad V_A = \frac{1}{3}V_0 \end{cases}$$

Consideriamo ora la conservazione dell'energia nella compressione della molla:

$$\frac{1}{2}2M\left(\frac{2}{3}V_0\right)^2 = \frac{1}{2}K\Delta x^2 \Rightarrow \Delta x^2 = 2M \cdot \frac{4}{9}V_0^2 \cdot \frac{1}{K} = \frac{8}{9}\frac{M}{K}V_0^2 \Rightarrow \Delta x_{max} = \sqrt{\frac{8}{9}\frac{M}{K}V_0^2} = \frac{2V_0}{3}\sqrt{\frac{2M}{K}}$$

e questa è la massima compressione della molla

c) Il corpo C comincerà a muoversi nel momento in cui la molla tornerà ad essere nella sua posizione di equilibrio e la supererà; questo avviene dopo un tempo pari a T/4:

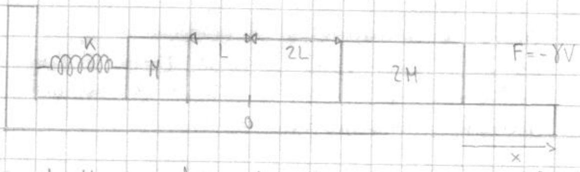
$$t_3 = t_1 + t_2 + T/4 = \frac{L}{V_0} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2M}{K}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2M}{K}} = \frac{L}{V_0} + \pi\sqrt{\frac{2M}{K}}$$

Per calcolare l'istante in cui si raggiunge la massima estensione dobbiamo considerare un moto oscillatorio con una nuova pulsazione ω' (e di conseguenza un nuovo periodo T'), e comunque dal momento in cui C si muove (molla a riposo) a quello in cui la molla è massimamente estesa, trascorre un tempo pari a T'/4:

$$\omega' = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad \text{massa ridotta } \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} = \frac{4M^2}{4M} = M \Rightarrow T' = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M}{K}} \Rightarrow T'/4 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{K}}$$

$$t_4 = t_1 + t_2 + t_3 + T'/4 = \frac{L}{V_0} + \pi\sqrt{\frac{2M}{K}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{K}} = \frac{L}{V_0} + \pi\sqrt{\frac{M}{K}}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)$$

ESERCIZIO 2 6 SETTEMBRE 2010



Prima dell'urto non ci sono attriti, dopo l'urto i due corpi (uniti in un unico corpo) si muovono sotto l'effetto di una forza viscosa ($F = -\gamma V$). La molla è inizialmente compressa di un tratto L, dopo che il primo corpo ha lasciato la molla esso percorre un tratto 2L prima di urtare il secondo corpo; supponiamo che il sistema sia lasciato libero con tutti i corpi immobili al tempo $t = 0$.

a) L'energia potenziale della molla compressa si trasformerà in energia cinetica del blocco quando la molla raggiungerà la posizione di equilibrio:

$$\frac{1}{2}KL^2 = \frac{1}{2}MV^2 \Rightarrow V^2 = \frac{K}{M}L^2 \Rightarrow V_0 = L\sqrt{\frac{K}{M}}$$

$$\Rightarrow t = \frac{2L}{V_0} = 2\cancel{L}\cdot\sqrt{\frac{M}{K}}\cdot\frac{1}{\cancel{L}} = 2\sqrt{\frac{M}{K}} \quad \text{tempo necessario a percorrere } L$$

$$t' = T/4 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}\cdot\frac{1}{4\cdot 2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{K}} \Rightarrow t_1 = t + t' = 2\sqrt{\frac{M}{K}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{K}} = \left(2+\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{M}{K}}$$

b) Nell'urto tra i due corpi, perché anelastico e in assenza di forze esterne impulsive, non si conserva l'energia ma si conserva la quantità di moto:

$$MV_0 = (M+2M)V_1 \Rightarrow V_1 = \frac{\cancel{M}V_0}{3\cancel{M}} = \frac{V_0}{3} = L\sqrt{\frac{K}{M}}\cdot\frac{1}{3} = \frac{\omega L}{3}$$

Considerando l'equazione di moto $3Ma = -\gamma V \Rightarrow a = \frac{-\gamma V}{3M} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{-\gamma V}{3M}$

$$\frac{dV}{-\gamma V} = \frac{dt}{3M} \Rightarrow \int_{V_1}^{V(t)}\frac{dV}{-\gamma V} = \int_{t_1}^{t}\frac{dt}{3M} \Rightarrow \left[\frac{\ln V}{-\gamma}\right]_{V_1}^{V(t)} = \left[\frac{t}{3M}\right]_{t_1}^{t} \Rightarrow -\frac{\ln V(t)}{\gamma} + \frac{\ln V_1}{\gamma} = \frac{(t-t_1)}{3M}$$

$$\Rightarrow \ln V(t) = \ln V_1 - \frac{\gamma(t-t_1)}{3M} \Rightarrow V(t) = e^{\ln V_1 - \frac{\gamma(t-t_1)}{3M}} \Rightarrow V(t) = e^{\ln V_1}\cdot e^{-\frac{\gamma(t-t_1)}{3M}} \Rightarrow V(t) = V_1 e^{-\frac{\gamma(t-t_1)}{3M}}$$

Dobbiamo quindi trovare il tempo δt necessario a percorrere un tratto L dopo che i due corpi si sono uniti:

$$L = \int_0^{\delta t} V(t)\,dt = \int_0^{\delta t}\frac{\omega L}{3}\cdot e^{-\frac{\gamma(t-t_1)}{3M}}dt$$

con $\omega L/3 = V_1$, con $t - t_1 = \Delta t$, con $\tau = 3M/\gamma$

$$L = \int_0^{\delta t} V_1 e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}dt \Rightarrow L = V_1(-\tau)\int_0^{\delta t}\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-\frac{\delta t}{\tau}}dt$$

$$\Rightarrow L = V_1(-\tau)\left[e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}\right]_0^{\delta t} \Rightarrow L = V_1(-\tau)\left(e^{-\frac{\delta t}{\tau}} - 1\right) \Rightarrow L = V_1\tau - V_1\tau e^{-\frac{\delta t}{\tau}} \Rightarrow L - V_1\tau = -V_1\tau e^{-\frac{\delta t}{\tau}}$$

$$\Rightarrow -\frac{L}{V_1\tau} + 1 = e^{-\frac{\delta t}{\tau}} \Rightarrow -\cancel{L}\cdot\frac{3}{\omega\cancel{L}}\cdot\frac{1}{\tau} + 1 = e^{-\frac{\delta t}{\tau}} \Rightarrow -\frac{\delta t}{\tau} = \ln\left(1 - \frac{3}{\omega\tau}\right) \Rightarrow \delta t = -\tau\ln\left(1 - \frac{3}{\omega\tau}\right)$$

c) Calcoliamo l'energia dissipata nell'urto:

$$\delta E = E_{fin} - E_{in} = \frac{1}{2}3M\left(\frac{\omega L}{3}\right)^2 - \frac{1}{2}M(\omega L)^2 = \frac{1}{2}3M\frac{\omega^2L^2}{\cancel{9}_3} - \frac{1}{2}M\omega^2L^2 = -\frac{1}{3}M\omega^2L^2$$

E quella dissipata per attrito:

$$\Delta E = \frac{1}{2}3MV_1^2 - \frac{1}{2}3M\left(V_1 e^{-\frac{\delta t}{\tau}}\right)^2 = \frac{1}{2}3MV_1^2 - \frac{1}{2}3MV_1^2 e^{-\frac{2\delta t}{\tau}} = \frac{1}{2}3MV_1^2\left(1 - e^{-\frac{2\delta t}{\tau}}\right) = \frac{1}{2}3MV_1^2\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{2(t-t_1)\cdot 3M}{\gamma}}}\right)$$

ESERCIZIO 1 17 SETTEMBRE 2010

È presente una forza centrale di intensità inversamente proporzionale al cubo della distanza r da O. Consideriamo poi una particella puntiforme di massa M vincolata a muoversi sulla retta di equazione $y=L$

a) Scriviamo l'espressione generica dell'energia potenziale U (in funzione della coordinata x)

$$F=\frac{A}{r^3} \qquad U=-\int F\,dr \Rightarrow U(r)=-\int\frac{A}{r^3}dr=-A\int\frac{1}{r^3}dr=-A\cdot\left(-\frac{r^{-2}}{2}\right)+B=$$

$$=\frac{A}{2r^2}+B=\frac{A}{2\sqrt{x^2+y^2}}+B=\frac{A}{2\sqrt{x^2+L^2}}+B \rightarrow \text{possiamo considerare } B=0$$

Quindi abbiamo $U(x)=\dfrac{A}{2\sqrt{x^2+L^2}}$

b) Vediamo se ci sono posizioni di equilibrio stabile

$$U'(x)=\frac{A}{2}\left(\frac{0-\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+L^2}}\cdot\cancel{2}x}{(x^2+L^2)}\right)=\frac{A}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}(x^2+L^2)} \qquad U'(x)=0 \Rightarrow x=0 \text{ punto di equilibrio}$$

Controlliamo se $x=0$ è punto di equilibrio stabile o instabile

$$U''(x)=\frac{A}{2}\cdot\left(\frac{1\cdot(x^2+L^2)\sqrt{x^2+L^2}-x\left(\frac{x(x^2+L^2)}{2\sqrt{x^2+L^2}}+2x\sqrt{x^2+L^2}\right)}{(x^2+L^2)^3}\right)=\frac{A}{2}\,\frac{2(x^2+L^2)^2-x^3-L^2x-4x^4-4L^2x^2}{2\sqrt{x^2+L^2}\,(x^2+L^2)^3}=\frac{2x^4+2L^4+\cancel{4L^2x^2}-x^3-L^2x-4x^4-\cancel{4L^2x^2}}{2\sqrt{x^2+L^2}\,(x^2+L^2)^3}\cdot\frac{A}{2}$$

$$=\frac{-2x^4-x^3-L^2x+2L^4}{2\sqrt{x^2+L^2}\,(x^2+L^2)^3}\cdot\frac{A}{2} \Rightarrow U''(0)=\frac{\cancel{2}L^{\cancel{4}}}{\cancel{2}L^{\cancel{7}3}}\cdot\frac{A}{2}=\frac{A}{2L^3}>0 \qquad x=0 \text{ punto di equilibrio stabile per } A>0$$

c) Calcoliamo ora la velocità minima che deve avere la particella per allontanarsi indefinitamente da tale posizione; quindi dobbiamo imporre che l'energia cinetica della particella sia maggiore di quella potenziale in quel punto.

$$E_k>U(0) \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}}Mv^2>\frac{A}{\cancel{2}L} \Rightarrow v^2>\frac{A}{ML} \Rightarrow |v|>\sqrt{\frac{A}{ML}}$$

Passiamo ora a calcolare la frequenza di piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile; usiamo quindi lo sviluppo di Taylor:

$$U(x)=\underbrace{U(0)}_{\text{costante}}+\underbrace{U'(0)}_{0}(x-0)+\underbrace{\frac{1}{2}U''(0)(x-0)^2}_{\frac{1}{2}k\Delta x^2}\ldots$$

$$\Rightarrow k=U''(0)=\frac{A}{2L^3}$$

$$\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{k}{M}}=\sqrt{\frac{A}{2L^3M}} \Rightarrow \nu(\text{frequenza})=\sqrt{\frac{A}{2L^3M}}\cdot\frac{1}{2\pi}$$

ESERCIZIO 1 4 NOVEMBRE 2010

Un corpo di massa M è vincolato a muoversi lungo l'asse x e su di esso agisce una forza conservativa cui è associata un'energia potenziale che dipende dall'ascissa x secondo la legge: $U(x) = Ax^2 e^{-|x|/L}$ dove L è una lunghezza assegnata ed A una costante da determinare

a) Controlliamo la presenza di posizioni di equilibrio e, nel caso in cui ci siano, quante sono di equilibrio stabile (al variare di A)

$U(x) = Ax^2 e^{-|x|/L} \Rightarrow U'(x) = 2Axe^{-|x|/L} + \left(-\frac{1}{L}\right)(\text{sign}\,x)\, e^{-|x|/L} Ax^2 = Axe^{-|x|/L}\left(2 - \frac{x(\text{sign}\,x)}{L}\right)$

$U'(x) = 0 \Rightarrow Axe^{-|x|/L}\,(2 - x(\text{sign}\,x)/L) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2L \end{cases}$ punti di equilibrio

$U''(x) = 2Ae^{-|x|/L} + (-1/L)(\text{sign}\,x)e^{-|x|/L}\cdot 2Ax + (-1/L)^2(\text{sign}\,x)^2 e^{-|x|/L}\cdot Ax^2 + 2Ax(-1/L)(\text{sign}\,x)e^{-|x|/L} =$

$= 2Ae^{-|x|/L} - 4/L\,Ax(\text{sign}\,x)e^{-|x|/L} + (1/L^2)\cancel{(\text{sign}\,x)^2}e^{-|x|/L}\cdot Ax^2$ $(\text{sign}\,x)^2 = +$ in ogni caso

$U''(0) = 2A\cdot e^0 - 4/L\cdot 0(\text{sign}\,0)e^0 + (1/L^2)e^0 A\cdot 0 = 2A$

$U''(2L) = 2Ae^{-2\cancel{L}/\cancel{L}} - 4/\cancel{L}\cdot A\cdot 2\cancel{L}\,(\text{sign}\,2L)e^{-2\cancel{L}/\cancel{L}} + 1/\cancel{L^2}\,e^{-2\cancel{L}/\cancel{L}}\cdot A4\cancel{L^2} = -2Ae^{-2}$

$U''(-2L) = 2Ae^{-2} - 4/\cancel{L}\,A(-2\cancel{L})(\underset{-1}{\text{sign}\,2L})e^{-2} + 1/\cancel{L^2}\,e^{-2}\cdot A4\cancel{L^2} = -2Ae^{-2}$

$\Rightarrow$ $A>0$: $x=0$ punto di equilibrio stabile, $x=\pm 2L$ punti di equilibrio instabile
$A<0$ $x=0$ punto di equilibrio instabile, $x=\pm 2L$ punti di equilibrio stabile

b) Consideriamo una $A<0$, per cui esistono quindi due posizioni di equilibrio stabile in $x = \pm 2L$; per poter passare da un minimo all'altro dovremmo avere che:

$\frac{1}{2}MV^2 > U(\pm 2L) \Rightarrow \frac{1}{2}MV^2 > A4L^2\cdot e^{-2} = A4L^2/e^2 \Rightarrow V^2 > \frac{8AL^2}{Me^2} \Rightarrow |V| > \frac{L}{e}\sqrt{\frac{8A}{M}}$

c) Consideriamo ora una $A>0$, per cui esiste invece una sola posizione di equilibrio stabile in $x=0$; determiniamo la frequenza di piccole oscillazioni intorno a tale posizione con l'aiuto dello sviluppo di Taylor

$U(x) = \underset{\text{costante}}{U(0)} + \underset{0}{U'(0)(x-0)} + \underset{\frac{1}{2}k\Delta x^2}{\frac{1}{2}U''(0)(x-0)^2}$

$\Rightarrow k = U''(0) = 2A$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2A}{M}} \Rightarrow \nu\,(\text{frequenza}) = \frac{\omega}{2\pi} = \sqrt{\frac{2A}{M}}\cdot\frac{1}{2\pi}$

Chiedere al Bicchieri come procedo per velocità superiori (II punto, domanda B)

ESERCIZIO 2 27 MARZO 2009

Fra i due corpi, così come fra il tavolo ed il corpo inferiore ha luogo attrito radente descritto dai coefficienti μ_D e μ_S; la corda è inestensibile e di massa trascurabile, così come la carrucola, la quale è libera di ruotare senza attriti. Supponiamo il sistema immobile all'istante $t=0$

Affinchè il sistema sia immobile dobbiamo avere che la forza di attrito statico A tra il blocco e il tavolo sia maggiore della tensione T della corda, quindi:

$$A < \mu_S N = \mu_S 2Mg \qquad T = Mg \quad \Rightarrow A > T \Rightarrow \mu_S 2Mg > Mg \Rightarrow \mu_S > \cancel{M}g / 2\cancel{M}g \Rightarrow \mu_S > \frac{1}{2}$$

Consideriamo ora il caso in cui non siano verificate le condizioni di staticità, ma non ci sia comunque strisciamento tra i due corpi sul tavolo; per prima cosa ricaviamo l'accelerazione con la quale si muovono, e la possiamo ricavare scrivendo le equazioni della II legge della dinamica per i due blocchi:

$$F = 2Ma = T - A_D = Mg - \mu_D 2Mg \Rightarrow a = \frac{\cancel{M}g(1-2\mu_D)}{2\cancel{M}} = \frac{g}{2}(1-2\mu_D)$$

A questo punto possiamo anche determinare la velocità del corpo M sospeso, quando è sceso di un tratto h, dal momento che si muove di moto uniformemente accelerato; usiamo quindi la relazione cinematica:

$$\Delta V^2 = 2ah \Rightarrow \Delta V = \sqrt{2ah} \Rightarrow \Delta V = \sqrt{\cancel{2}\frac{g}{\cancel{2}}(1-2\mu_D)h} = \sqrt{gh(1-2\mu_D)}$$

In maniera altrettanto semplice determiniamo l'istante al quale il corpo sospeso è sceso di un tratto h:

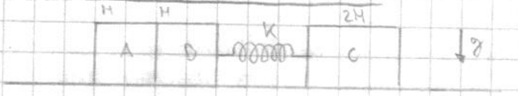
$$\Delta V = a\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta V}{a} = \sqrt{gh(1-2\mu_D)} \cdot \frac{2}{g(1-2\mu_D)} = \sqrt{\frac{4gh\cancel{(1-2\mu_D)}}{g^2(1-2\mu_D)^{\cancel{2}}}} = \sqrt{\frac{4h}{g(1-2\mu_D)}}$$

Torniamo ora a calcolare il coefficiente di attrito statico μ_S che fa rimanere i due blocchi fermi l'uno rispetto all'altro, anche se si muovono sul tavolino; l'unica forza agente sul primo blocco è quella di attrito statico, quindi:

$$F = Ma = A_S < \mu_S Mg \Rightarrow \cancel{M}a < \mu_S \cancel{M}g \Rightarrow \mu_S > \frac{g}{a} \Rightarrow \mu_S > \cancel{g} \cdot \frac{2}{\cancel{g}(1-2\mu_D)}$$

$$\Rightarrow \mu_S > \frac{2}{1-2\mu_D}$$

ESERCIZIO 2 22 LUGLIO 2009



Il piano orizzontale è liscio e inizialmente A e B sono a contatto, la molla è compressa di un tratto Δx ed il sistema è fermo. All'istante $t=0$ il sistema viene lasciato libero e la molla può quindi espandersi.

a) Il distacco dei corpi A e B avviene nel momento in cui la molla raggiunge la sua posizione di equilibrio, il che avviene dopo un intervallo di tempo pari a $T/4$, dove T è il periodo di oscillazione della molla:

$$\mu_1 = \frac{(M+M)\cdot 2M}{(M+M)+2M} = \frac{4M^2}{4M} = M \quad \text{questa è la massa ridotta del sistema}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{K}{M}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} \quad \text{questo è il periodo della molla}$$

$$t_{distacco} = \frac{T}{4} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}\,\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{K}} \quad \text{questo è l'istante in cui avviene il distacco tra A e B}$$

b) Per determinare le velocità dei tre corpi al momento del distacco è sufficiente impostare il sistema dove ci sono le equazioni corrispondenti alla conservazione dell'energia meccanica e all'uguaglianza (in modulo) delle velocità di C e AB: *

$$\begin{cases} \frac{1}{2}K\Delta x^2 = \frac{1}{2}2M V_{AB}^2 + \frac{1}{2}2M V_C^2 \\ V_{AB} = -V_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K\Delta x^2 = 2M(-V_C)^2 + 2M V_C^2 \\ V_{AB} = -V_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4MV_C^2 = K\Delta x^2 \\ V_{AB} = -V_C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_C = \sqrt{\frac{K\Delta x^2}{4M}} = \frac{\Delta x}{2}\sqrt{\frac{K}{M}} = \frac{\Delta x}{2}\omega \\ V_{AB} = -V_C = -\frac{\Delta x}{2}\omega \end{cases}$$

* qui si conserva la quantità di moto totale, cioè: $(M+M)V_{AB} = -2MV_C \Rightarrow V_{AB} = -V_C$ (in realtà sarebbe $0 = (M+M)V_{AB} + 2MV_C$)

c) Dopo il distacco di A e B, A si muove di moto uniforme verso sinistra, così come il centro di massa del sistema B+C, il quale si muove però in direzione opposta. Procediamo quindi a determinare la distanza che separa A da B dopo un numero intero n di oscillazioni.

$$V_{CM} = \frac{M\cdot(-V_C) + 2MV_C}{3M} = \frac{MV_C}{3M} = \frac{V_C}{3} \qquad \mu_{BC} = \frac{M\cdot 2M}{M+2M} = \frac{2M^2}{3M} = \frac{2}{3}M \Rightarrow T_{BC} = 2\pi\sqrt{\frac{2M}{3K}}$$

$$V_{AB} = -V_C$$

$$V_{rel} = V_{CM} - V_{AB} = \frac{V_C}{3} - (-V_C) = \frac{4V_C}{3} \quad \text{questa è la velocità relativa tra il corpo A e il sistema B+C}$$

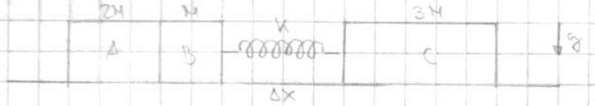
$$d = V_{rel}\cdot\Delta t = \frac{4}{3}V_C\cdot T_{BC} = \frac{4}{3}\frac{\Delta x}{2}\sqrt{\frac{K}{M}}\,2\pi\sqrt{\frac{2M}{3K}} = \frac{4}{3}\pi\Delta x\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Questa è la distanza che separa A e B+C dopo una sola oscillazione, dopo n avremo quindi:

$$d_n = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\pi\Delta x\cdot n \quad \text{con } n = 1, 2, 3 \ldots n$$

(l'esercizio 2 del 2 settembre 2009 è del tutto analogo, cambiano solo i dati)

ESERCIZIO 2 18 SETTEMBRE 2009



le condizioni iniziali sono del tutto analoghe a quelle dell'esercizio precedente

a) Per calcolare l'accelerazione di A all'istante $t=0$, poniamo usare l'equazione del II principio della dinamica:

$$F = 3M\,a = -(-k\Delta x) \Rightarrow 3Ma = -(-k\Delta x) \Rightarrow a = \frac{k\Delta x}{3M}$$

Troviamo ora l'istante in cui l'accelerazione calcolata in $t=0$ è dimezzata.

$$x(t) = -A\cos(\omega t)$$

CHIEDI CONFERMA BIANCALANA

$$v(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t)\cdot\omega$$

$$a(t) = A\cos(\omega t)\,\omega^2 \Rightarrow \underbrace{\cancel{A}\cos(\omega t)\cancel{\omega^2}}_{\text{costanti}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3\omega}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \qquad \text{dove } \mu = \frac{(2M+M)3M}{2M+M+3M} = \frac{3\cdot 3M^{\cancel{2}}}{2\cdot\cancel{3M}} = \frac{3}{2}M$$

quindi $\omega = \sqrt{\frac{2k}{3M}}$ e dunque $t = \frac{\pi}{3}\cdot\sqrt{\frac{3M}{2k}}$

b) Calcoliamo il rapporto tra l'energia cinetica di A e di C all'istante del distacco, supponiamo che si conservino sia l'energia meccanica che la quantità di moto:

$$0 = (2\cancel{M}+\cancel{M})V_{AB} + 3\cancel{M}V_C \Rightarrow V_{AB} = -V_C$$

quindi $\frac{E_{kA}}{E_{kC}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\,2\cancel{M}(\cancel{V_{AB}^2})}{\cancel{\frac{1}{2}}\,3\cancel{M}(\cancel{V_C^2})} = \frac{2}{3}$

c) Calcoliamo la distanza tra A e B dopo un numero intero n di oscillazioni:

$$\begin{cases} \cancel{\frac{1}{2}}k\Delta x^2 = \cancel{\frac{1}{2}}3M(V_{AB})^2 + \cancel{\frac{1}{2}}3M(V_C)^2 \\ 0 = (\cancel{2M+M})V_{AB} + \cancel{3M}V_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{AB} = -V_C \\ V_C^2 = \frac{k\Delta x^2}{6M} \end{cases} \Rightarrow \left\{ V_C = \sqrt{\frac{k\Delta x^2}{6M}} = \Delta x\sqrt{\frac{k}{6M}} = -V_{AB} \right.$$

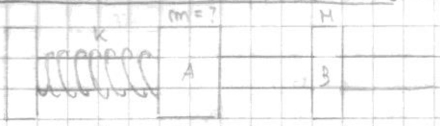
$$V_{CM} = \frac{3MV_C + M(\overset{V_{AB}}{-V_C})}{M+3M} = \frac{2\cancel{M}V_C}{\cancel{4M}} = \frac{V_C}{2} \quad \text{velocità del centro di massa di B+C}$$

$$V_{rel} = \frac{V_C}{2} - (\overset{V_{AB}}{-V_C}) = \frac{3}{2}V_C \quad \text{velocità relativa tra A e B+C}$$

$$\mu_{BC} = \frac{M\cdot 3M}{M+3M} = \frac{3M^{\cancel{2}}}{4\cancel{M}} = \frac{3}{4}M \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4k}{3M}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{3M}{4k}}$$

quindi $d = V_{rel}\cdot T\cdot n = \frac{3}{\cancel{2}}\cdot\Delta x\sqrt{\frac{\cancel{k}}{\cancel{6M}_2}}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{\cancel{3M}}{4\cancel{k}}}\cdot n = \frac{3}{2\sqrt{2}}\pi n\,\Delta x$

ESERCIZIO 1 2 APRILE 2008



La guida orizzontale è priva di attriti; il manicotto di massa m è appoggiato alla molla (con l'altro estremo bloccato) senza esservi agganciato. Il manicotto è inizialmente fermo e la molla a riposo, mentre il manicotto di massa M si muove con velocità V_0 verso l'altro manicotto, fino ad urtarlo in un processo istantaneo ed elastico.

a) Determiniamo i valori di m per cui dopo l'urto i due corpi hanno velocità uguali in modulo ed opposte in segno. Innanzitutto supponiamo che in tale urto si conservino sia l'energia meccanica che la quantità di moto:

$$\begin{cases} MV_0 = MV_B + mV_A \\ \frac{1}{2}MV_0^2 = \frac{1}{2}MV_B^2 + \frac{1}{2}mV_A^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(V_0 - V_B) = mV_A \\ M(V_0 - V_B)^2 = mV_A^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(V_0 - V_B) = mV_A \\ M(V_0 - V_B)(V_0 + V_B) = mV_A^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} MV_0 - MV_B = mV_A \\ V_0 + V_B = V_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_B = V_A - V_0 \\ MV_0 - MV_A + MV_0 = mV_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A = \dfrac{2MV_0}{M+m} \\ V_B = \dfrac{2MV_0}{M+m} - V_0 = \dfrac{2MV_0 - MV_0 - mV_0}{M+m} = \dfrac{V_0(M-m)}{M+m} \end{cases}$$

Imponendo $V_A = -V_B$:

$$\frac{2MV_0}{M+m} = -\frac{V_0(M-m)}{M+m} \Rightarrow 2M = -M + m \Rightarrow m = 3M \Rightarrow V_B = -\frac{V_0}{2} \quad V_A = \frac{V_0}{2}$$

b) Consideriamo ora $m = 3M$. Per sapere a quale distanza si trovano i due manicotti quando quello di massa m lascia la molla, dobbiamo riflettere che il manicotto A lascia la molla quando essa sarà nuovamente nella posizione di equilibrio e che nel frattempo il corpo B si muove di moto uniforme.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{3M}}$$ è la pulsazione del moto armonico della molla

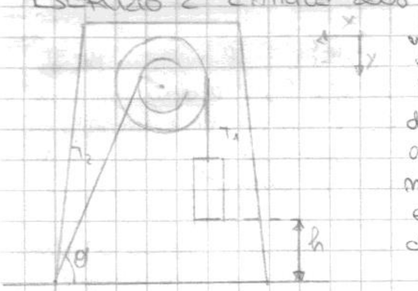
$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{k}}$$ periodo del moto armonico

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2} = \cancel{2}\pi \sqrt{\frac{3M}{k}} \frac{1}{\cancel{2}} = \pi\sqrt{\frac{3M}{k}}$$ tempo dopo il quale la molla è nuovamente in equilibrio

$$d = V_B \cdot \Delta t = \frac{V_0(M-3M)}{M+3M} \cdot \pi\sqrt{\frac{3M}{k}} = -\frac{2MV_0}{4M}\pi\sqrt{\frac{3M}{k}} = -\frac{V_0}{2}\sqrt{\frac{3M}{k}}\,\pi$$ distanza dal luogo del primo impatto

c) Questa distanza si mantiene costante; infatti il corpo B continuerà a muoversi con velocità $V_0/2$ e la stessa farà il corpo A: esso infatti dopo l'urto con B si muove di velocità $-V_0/2$, la quale diventerà $V_0/2$ una volta che si staccherà dalla molla perché noi supponiamo che in questa circostanza l'energia meccanica si conservi, quindi quella che all'inizio era energia cinetica del blocco A diventa energia potenziale della molla quando questa è massimamente compressa, per poi diventare la stessa energia cinetica precedente nel momento in cui il manicotto A lascia la molla.

ESERCIZIO 2 2 APRILE 2008



I due cilindri sono coassiali e solidali entrambi di massa M ma uno di raggio R e l'altro due R. La carrucola formata dai due cilindri può ruotare senza attrito attorno al suo asse orizzontale. Un filo ideale allegato al cilindro di raggio maggiore tiene sospeso ad altezza h un corpo di massa M ed un altro filo, allegato al cilindro più piccolo, è fissato al suolo formando con esso un angolo θ.

a) Calcoliamo le componenti della reazione vincolare R agente sull'asse della carrucola. La tensione T_1 dipende dalla forza peso del corpo appeso alla corda, mentre l'altra tensione T_2 dipende da T_1

$\sum F_{corpo} = 0 \Rightarrow Mg - T_1 = 0 \Rightarrow T_1 = Mg$

$\sum \tau_z = 0 \Rightarrow T_1 2R - T_2 R = 0 \Rightarrow T_1 2\cancel{R} = T_2 \cancel{R} \Rightarrow T_2 = 2T_1 = 2Mg$

$T_2 = (2Mg\cos\theta \,;\, 2Mg \,\mathrm{sen}\,\theta)$

$R = (2Mg\cos\theta \,;\, 2Mg\,\mathrm{sen}\,\theta + 2Mg - Mg)$

b) All'istante t=0 il filo si rompe; usiamo la II cardinale per calcolare l'accelerazione angolare della carrucola, a sistema con la I cardinale per corpo e la condizione del filo inestensibile.

$$\begin{cases} I\alpha = T_1 2R \\ Ma = Mg - T_1 \\ a = \alpha 2R \end{cases} \qquad I = I_R + I_{2R} = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}M(2R)^2 = \frac{1}{2}MR^2 + 2MR^2 = \frac{5}{2}MR^2$$

questo è il momento di inerzia delle due carrucole

$$\begin{cases} \frac{5}{2}MR^{\cancel{2}}\alpha = T_1 2\cancel{R} \\ Ma = Mg - T_1 \\ a = \alpha 2R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = M(g-a) \\ \alpha = a/2R \\ 5/2\cancel{M}\cancel{R}a/2\cancel{R} = \cancel{M}(g-a)\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{4}a = 2g - 2a \Rightarrow a = \frac{8}{13}g \\ \alpha = \frac{a}{2R} = \frac{\cancel{8}^{4}}{13}g\frac{1}{\cancel{2}R} = \frac{4g}{13R} \\ T_1 = \ \wedge\wedge \ \text{inutile} \end{cases}$$

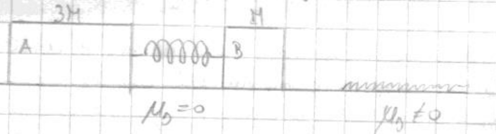
$\Rightarrow$ l'accelerazione angolare è $\alpha = \frac{4g}{13R}$

c) Dopo che il filo si è rotto il blocco si muove di moto uniformemente accelerato; procediamo quindi al calcolo del tempo necessario affinché tocchi terra

$$x(t) = h = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a\Delta t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{8}^{4}}{13}g\cdot\Delta t^2 = \frac{4}{13}g\,\Delta t^2$$

$\Rightarrow \Delta t^2 = \frac{13h}{4g} \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{13h}{4g}}$ ecco il tempo dopo il quale il blocco tocca terra

ESERCIZIO 2 10 LUGLIO 2008



La molla non è connessa ai due corpi, ha lunghezza a riposo pari a L_0 ed è inizialmente compressa di un tratto Δx. Ad un certo istante si lascia il sistema libero di muoversi, così che la molla si espande; appena terminata l'espansione il corpo B incontra il tratto scabro, mentre A si muove senza attriti.

a) La molla impiega, per espandersi, un periodo di tempo pari ad un quarto del suo periodo, in seguito al quale i corpi poi si allontanano da essa.

$$\mu = \frac{3M\cdot M}{3M+M} = \frac{3M^{\cancel{2}}}{4\cancel{M}} = \frac{3}{4}M \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{\mu}} = \sqrt{\frac{4K}{3M}}$$ massa ridotta e pulsazione del moto armonico

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{4K}} \Rightarrow T/4 = \Delta t = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{3M}{4K}}\cdot\frac{1}{\cancel{4}\,2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3M}{4K}}$$ tempo necessario alla molla per espandersi

b) Per calcolare la velocità dei due blocchi in seguito all'espansione della molla, consideriamo che si conservano sia la quantità di moto (assenza di forze impulsive) che l'energia meccanica (agiscono solo forze conservative), perciò imponiamo il sistema

$$\begin{cases} 0 = 3MV_A + MV_B \\ \cancel{\frac{1}{2}}K\Delta x^2 = \cancel{\frac{1}{2}}3MV_A^2 + \cancel{\frac{1}{2}}MV_B^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\cancel{M}V_A = -\cancel{M}V_B \Rightarrow V_B = -3V_A \\ K\Delta x^2 = 3MV_A^2 + M\cdot(-3V_A)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_B = -3V_A \\ 12MV_A^2 = K\Delta x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_A^2 = \frac{K\Delta x^2}{12M} \\ V_B = -3V_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A = \sqrt{\frac{K\Delta x^2}{12M}} = \frac{\Delta x}{2}\sqrt{\frac{K}{3M}} \\ V_B = -\frac{3}{2}\Delta x\sqrt{\frac{K}{3M}} \end{cases}$$

c) Per sapere a quale distanza si trovano i due corpi quando B si arresta dobbiamo tenere conto del tempo impiegato da B per arrestarsi e della distanza percorsa da A nel frattempo

$$V_B = \mu_D g\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{V_B}{\mu_D g}$$ è il tempo per cui B continua a muoversi

$$\Delta X_B = X_{B0} + \int V_B(t')dt' = X_{B0} + \int (V_0 + at')\,dt' = X_{B0} + V_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + V_B\Delta t - \frac{1}{2}\mu_D g\,\Delta t^2 =$$

$$= \frac{3}{2}\Delta x\sqrt{\frac{K}{3M}}\cdot\frac{3}{2}\Delta x\sqrt{\frac{K}{3M}}\,\frac{1}{\mu_D g} - \frac{1}{2}\cancel{\mu_D g}\left(\frac{3}{2}\Delta x\sqrt{\frac{K}{3M}}\right)^2\cdot\frac{1}{\mu_D^{\cancel{2}} g^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\Delta x\sqrt{\frac{K}{3M}}\right)^2\cdot\frac{1}{\mu_D g} = \frac{V_B^2}{2\mu_D g}$$

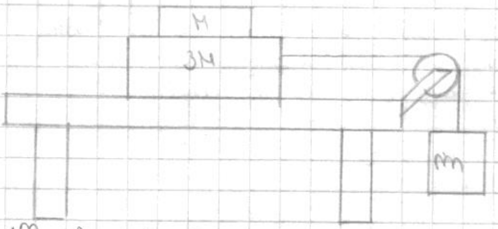
$$\Delta X_A = V_A\cdot\Delta t = \frac{\Delta x}{2}\sqrt{\frac{K}{3M}}\cdot\frac{3}{2}\Delta x\sqrt{\frac{K}{3M}}\cdot\frac{1}{\mu_D g} = \frac{\cancel{3}}{4}\Delta x^2\cdot\frac{K}{\cancel{3}M}\,\frac{1}{\mu_D g}$$

$$d_{TOT} = \Delta X_A + \Delta X_B + L_0 = \frac{1}{2\mu_D g}\left(\frac{3}{2}\Delta x\sqrt{\frac{K}{3M}}\right)^2 + \frac{\Delta x^2}{4}\cdot\frac{K}{M}\cdot\frac{1}{\mu_D g} + L_0 =$$

$$= \frac{1}{2\mu_D g}\,\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{4}\Delta x^2\frac{K}{\cancel{3}M} + \frac{\Delta x^2}{4}\,\frac{K}{M}\,\frac{1}{\mu_D g} + L_0 = \frac{5\Delta x^2}{8\mu_D g}\cdot\frac{K}{M} + L_0$$

Questa è la distanza a cui si trovano i due corpi A e B quando B si arresta considerando anche la distanza L_0 (lunghezza della molla a riposo) che li separava inizialmente.

ESERCIZIO 1 18 SETTEMBRE 2008



Tra i due corpi, così come tra il tavolo ed il corpo inferiore ha luogo attrito radente descritto dai coefficienti μ_D e μ_S. La carrucola è di massa trascurabile, su di essa non striscia il filo il quale è anch'esso di massa trascurabile. Il sistema è immobile al tempo $t=0$.

Affinché il sistema rimanga immobile, la forza di attrito tra il sistema dei due blocchi e il tavolo deve essere maggiore della forza esercitata dalla massa m sospesa, ovvero della tensione della corda:

$$A \le \mu_S N = \mu_S 4Mg \qquad A \ge T = mg \Rightarrow \mu_S 4M\cancel{g} \ge m\cancel{g} \Rightarrow m \le \mu_S 4M$$

Per calcolare per quali valori di m non ci sono le condizioni di staticità, senza far strisciare i due corpi, è sufficiente scrivere l'equazione di moto per i due corpi che, non strisciando, costituiscono un unico sistema e per il corpo sospeso

$$\begin{cases}(M+3M)a = T - \mu_D 4Mg \\ ma = mg - T\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}T = m(g-a) \\ 4Ma = m(g-a) - \mu_D 4Mg\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}T = mg - ma \\ 4Ma + ma = mg - \mu_D 4Mg\end{cases}$$

$$\begin{cases}a = \dfrac{mg - \mu_D 4Mg}{4M+m} = g\dfrac{(m-\mu_D 4M)}{4M+m} \\ T = mg - m g\dfrac{(m-\mu_D 4M)}{4M+m} = mg\left(1 - \dfrac{m-\mu_D 4M}{4M+m}\right)\end{cases}$$

Trovata l'accelerazione con cui si muove il sistema, dobbiamo imporre che tale forza sia minore della forza di attrito tra i due blocchi, quindi:

$$\cancel{M}a < \mu_S \cancel{M}g \Rightarrow \cancel{g}\frac{(m-\mu_D 4M)}{4M+m} < \mu_S \cancel{g} \Rightarrow m - \mu_D 4M < \mu_S 4M + \mu_S m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(1-\mu_S) < 4M(\mu_S+\mu_D) \Rightarrow m < \frac{4M(\mu_S+\mu_D)}{(1-\mu_S)}$$ ecco i valori di m per cui non c'è strisciamento, e non c'è staticità.

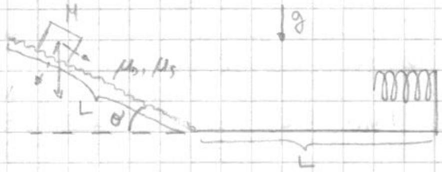
Per determinare la velocità con cui il blocco scende usiamo la formula:

$$\Delta v^2 = 2ah \Rightarrow \Delta v = v = \sqrt{2ah} = \sqrt{2gh\frac{(m-\mu_D 4M)}{4M+m}}$$

In modo altrettanto semplice calcoliamo il tempo di caduta, usando sempre una formula:

$$\Delta v = a\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta v}{a} \Rightarrow \sqrt{2gh\frac{(m-\mu_D 4M)}{4M+m}}\cdot\frac{4M+m}{g(m-\mu_D 4M)} = \sqrt{\frac{2h}{g}\cdot\frac{4M+m}{m-\mu_D 4M}}$$

ESERCIZIO 1 27 APRILE 2007



All'istante $t=0$ il corpo di massa M scivola lungo il piano inclinato di lunghezza L con attrito radente; dopo scivola per un altro tratto L orizzontale liscio finché non incontra una molla di costante elastica k e con un estremo bloccato, grazie alla quale rimbalza.

a) Calcoliamo per quali valori di μ_s il corpo si muove; la componente orizzontale della forza peso dovrà superare la forza di attrito statico.

$$A < \mu_s N \Rightarrow A < \mu_s Mg\cos\theta$$

$$Mg_{\parallel} = Mg\,\text{sen}\theta \Rightarrow Mg_{\parallel} > A = \cancel{M}g\,\text{sen}\theta > \cancel{\mu_s} Mg\cos\theta \Rightarrow \mu_s < \text{tg}\theta$$

b) Per calcolare la velocità del blocco in fondo al piano inclinato dobbiamo considerare che in questo tratto non agiscono solo forze conservative, in quanto l'attrito radente dinamico è una forza non conservativa

$$L_C + L_{NC} = \Delta E_K \Rightarrow -\Delta U (= L_C) + L_{NC} = \Delta E_K \Rightarrow -(\underset{0}{U_f} - U_i) + L_{NC} = (E_{Kf} - \underset{0}{E_{Ki}}) \Rightarrow E_{Kf} = U_i + L_{NC}$$

$U_i = MgL\,\text{sen}\theta$ questa è l'energia potenziale iniziale

$L_{NC} = F_{A_D} L = -\mu_D Mg\cos\theta L$ questo è il lavoro fatto dalla forza di attrito dinamico

$$E_{Kf} = U_i + L_{NC} = MgL\,\text{sen}\theta - \mu_D Mg\cos\theta L = \cancel{M}gL(\text{sen}\theta - \mu_D\cos\theta) = \frac{1}{2}\cancel{M}V^2$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{2gL(\text{sen}\theta - \mu_D\cos\theta)}$$

c) L'istante in cui il corpo abbandona il piano inclinato si trova ragionando sul fatto che esso si muove di moto uniformemente accelerato.

$$\cancel{M}a = \cancel{M}g\,\text{sen}\theta - \mu_D \cancel{M}g\cos\theta \Rightarrow a = g(\text{sen}\theta - \mu_D\cos\theta)$$

$$x(t) = L = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2}a\Delta t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}g(\text{sen}\theta - \mu_D\cos\theta)\Delta t^2 \Rightarrow \Delta t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g(\text{sen}\theta - \mu_D\cos\theta)}}$$

L'istante in cui incontra la molla lo si trova aggiungendo a Δt_1 il tempo necessario al corpo per percorrere il tratto liscio, sul quale si muoverà di moto uniforme con la velocità con la quale lascia il piano inclinato

$$\Delta t_2 = \Delta t_1 + \frac{L}{\sqrt{2gL(\text{sen}\theta - \mu_D\cos\theta)}} = \sqrt{\frac{2L}{g(\text{sen}\theta - \mu_D\cos\theta)}} + \sqrt{\frac{L}{2g(\text{sen}\theta - \mu_D\cos\theta)}} = \sqrt{\frac{5L}{2g(\text{sen}\theta - \mu_D\cos\theta)}}$$

Infine il tempo dopo il quale la molla si comprime lo otteniamo aggiungendo a Δt_2 il tempo $T/4$, ovvero quello necessario alla compressione.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \Rightarrow \frac{T}{4} = 2\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{M}{k}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{k}}$$

$$\Rightarrow \Delta t_3 = \Delta t_2 + \frac{T}{4} = \sqrt{\frac{5L}{2g(\text{sen}\theta - \mu_D\cos\theta)}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{k}}$$

d) Per calcolare l'altezza raggiunta dal blocco dobbiamo considerare ancora il lavoro non conservativo:

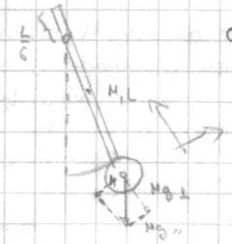
$$\Delta E_{tot} = L_{NC} \Rightarrow E_{tot\,f} - E_{tot\,i} = L_{NC} \Rightarrow \cancel{Mg}\Delta x\,\text{sen}\theta - \cancel{Mg}L\,\text{sen}\theta = -\mu_D \cancel{Mg}\cos\theta L - \mu_D \cancel{Mg}\cos\theta\Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta x \,\mathrm{sen}\,\theta + \Delta x \,\mu_D \cos\theta = L\,\mathrm{sen}\,\theta - L\mu_D \cos\theta$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{L(\mathrm{sen}\,\theta - \mu_D \cos\theta)}{(\mathrm{sen}\,\theta + \mu_D \cos\theta)}$$

Questa è la lunghezza del tratto percorso dal corpo che risale sul piano inclinato.

ESERCIZIO 1 7 LUGLIO 2005



a) Calcoliamo il momento d'inerzia del sistema rispetto al fulcro usando il teorema di Steiner

$$I = \underbrace{\frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{2L}{6}\right)^2}_{\text{inerzia sbarretta}} + \underbrace{M\left(\frac{5L}{6}\right)^2}_{\text{inerzia palla}} = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{9}ML^2 + \frac{25}{36}ML^2 = \frac{3+4+25}{36} = \frac{8}{9}ML^2$$

b) Usiamo la II eq cardinale per trovare l'equazione di moto

$$I\ddot{\theta} = -Mg\,\mathrm{sen}\theta\,\frac{5}{6}L - Mg\,\mathrm{sen}\theta\,\frac{2}{6}L = -Mg\,\mathrm{sen}\theta\,\frac{7}{6}L \cong -Mg\theta\,\frac{7}{6}L \quad \text{per } \theta \ll 1$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{MgL}{I}\frac{7}{6}\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{Mg\cancel{L}}{\cancel{M}L^{\cancel{2}}}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{7}{6}\theta = -\frac{g}{L}\frac{21}{16}\theta$$ questa è l'equazione di moto

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{21g}{16L}}$$ questa è la pulsazione per piccole oscillazioni

c) Troviamo per quale valore di L si ha un'oscillazione completa ogni secondo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1 \Rightarrow \omega = 2\pi$$ questa è la condizione per cui si ha un'oscillazione completa ogni secondo

$$2\pi = \sqrt{\frac{21g}{16L}} \Rightarrow 4\pi^2 = \frac{21g}{16L} \Rightarrow L = \frac{21g}{16\cdot 4\cdot \pi^2} \cong 0{,}326 \Rightarrow L = 32{,}6\ \text{cm}$$

L'energia meccanica totale è pari all'energia potenziale del sistema nell'istante in cui l'oscillazione è massima, quindi nel nostro caso 5°

$$E_{tot} = U_{tot} = U_{corpo} + U_{sbarra} = \left(\frac{5}{6}L - \frac{5}{6}L\cos\theta\right)Mg + \left(\frac{2}{6}L - \frac{2}{6}L\cos\theta\right)Mg = Mg\left(\frac{5}{6}L + \frac{1}{3}L\right)(1-\cos\theta) \cong 1{,}42\ \text{mJ}$$

d) Scriviamo la legge oraria quando il pendolo compie oscillazioni di ampiezza θ_0 e che all'istante $t=0$ transiti in posizione verticale con velocità angolare positiva

$$\theta(t) = \theta_0\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{21g}{16L}}\,t\right) \overset{\text{infatti}}{\Rightarrow} \dot{\theta}(t) = \omega(t) = \sqrt{\frac{21g}{16L}}\,\theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{21g}{16L}}\,t\right)$$ con $t=0$ $\omega(t)>0$ $(\cos 0 = 1)$

e) Calcoliamo la reazione vincolare nell'istante $t=0$; teniamo conto che il vincolo, oltre a bilanciare la forza peso, fornisce l'accelerazione centripeta

$$Ma_c = R - Mg - Mg \Rightarrow R = Ma_c + 2Mg$$

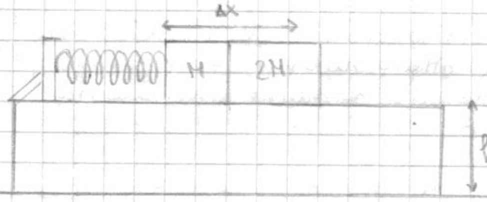
$$a_c = a_{c\,sbarra} + a_{c\,corpo} = \omega^2\frac{2}{6}L + \omega^2\frac{5}{6}L = \omega^2\left(\frac{1}{3}L + \frac{5}{6}L\right)$$

$$\Rightarrow R = M\omega^2\left(\frac{1}{3}L + \frac{5}{6}L\right) + 2Mg$$

Considerando i valori numerici $M = 100$ g, $L = 32{,}6$ cm, $\omega = 2\pi$ otteniamo

$$R \cong 1{,}97\ N$$

ESERCIZIO 1 6 LUGLIO 2007



Il corpo A è connesso alla molla di costante elastica K ed il corpo B è appoggiato al corpo A: le masse sono M per A e 2M per B. All'istante $t=0$ il sistema è fermo e viene lasciato libero, con la molla compressa di un tratto Δx. Dopo essersi staccato da A, B percorre un tratto fino al bordo del piano per poi cadere al suolo

a) Dobbiamo calcolare il tempo di volo di B e la distanza percorsa da B, dal punto in cui lascia il piano al punto in cui tocca il suolo; per fare questo abbiamo bisogno della velocità che possiamo trovare sfruttando la conservazione dell'energia meccanica del sistema

$E_{k\,massima} = U_{molla} \Rightarrow \frac{1}{2}(M+2M)V^2 = \frac{1}{2}K\Delta x^2$ • cioè l'energia cinetica dei due corpi quando la molla raggiunge l'equilibrio è uguale all'energia potenziale di quest'ultima

$V^2 = \frac{K\Delta x^2}{3M} \Rightarrow V_{Bx} = \sqrt{\frac{K\Delta x^2}{3M}} = \Delta x\sqrt{\frac{K}{3M}}$ • tale velocità è V_{Bx} che si mantiene costante finché B non tocca il suolo

Per trovare il tempo di volo consideriamo che il moto lungo y è uniformemente accelerato:

$x(t) = h = \cancel{x_0} + \cancel{V_{0y}t} + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2h}{g} \Rightarrow t_{volo} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$d = V_{Bx}\cdot t_{volo} = \Delta x\sqrt{\frac{K}{3M}}\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}$ questa è la distanza dal punto di distacco a quello del contatto col suolo di B

b) Il contatto tra A e B cessa quando la molla raggiunge la posizione di equilibrio, ovvero dopo un quarto del periodo del moto armonico da essa compiuto

$\omega = \sqrt{\frac{K}{3M}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{K}} \Rightarrow \frac{T}{4} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{3M}{K}}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3M}{K}}$ istante del distacco

c) Per stabilire la max compressione della molla dopo che B si è staccato, consideriamo ancora la conservazione dell'energia meccanica:

$\frac{1}{2}MV_{Bx}^2 = \frac{1}{2}K\Delta x_{max}^2 \Rightarrow \Delta x_{max}^2 = \frac{MV_{Bx}^2}{K} \Rightarrow \Delta x_{max} = \sqrt{\frac{MV_{Bx}^2}{K}} = V_{Bx}\sqrt{\frac{M}{K}} = \Delta x\sqrt{\frac{K}{3M}}\sqrt{\frac{M}{K}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}$

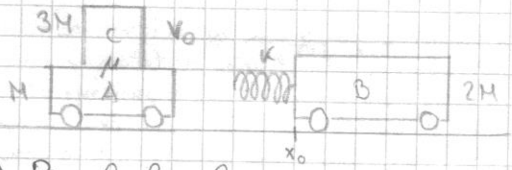
d) Scriviamo ora a quali tempi t_m la molla sarà massimamente compressa. Consideriamo il quarto di periodo impiegato dalla molla per raggiungere l'equilibrio con i corpi A e B, e i successivi tre quarti di periodo impiegati dalla molla (con collegato il solo corpo A) per passare alla posizione di massima elongazione, poi di nuovo alla posizione di equilibrio e infine a quella di max compressione. Quindi abbiamo:

$T = \sqrt{\frac{3M}{K}}\,2\pi \quad T' = \sqrt{\frac{M}{K}}\,2\pi \Rightarrow \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3M}{K}} \quad \frac{3T'}{4} = \frac{3}{4}2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} = \frac{3}{2}\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$

$t_m = \frac{T}{4} + \frac{3}{4}T' + mT' = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3M}{K}} + \frac{3}{2}\pi\sqrt{\frac{M}{K}} + m2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} = \sqrt{\frac{M}{K}}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + 2m\right) = \sqrt{\frac{M}{K}}\pi\frac{\sqrt{3}+3+4m}{2}$

con $m = 0, 1, 2, \ldots$

ESERCIZIO 1 1 APRILE 2016



Dopo l'urto A si aggancia alla molla; tra A e C c'è attrito radente e il sistema da essi formato si muove con velocità V_0 verso B.

a) Per calcolare la max compressione della molla imponiamo la conservazione dell'energia meccanica e della quantità di moto

$$\begin{cases} \frac{1}{2} 4MV_0^2 = \frac{1}{2} 6MV^2 + \frac{1}{2} k \Delta x^2 \\ 4\cancel{M}V_0 = 6\cancel{M}V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = 2V_0/3 \\ \Delta x = \sqrt{\left(4MV_0^2 - 6M\frac{4V_0^2}{9}\right)\frac{1}{k}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = 2V_0/3 \\ \Delta x = \sqrt{\frac{4V_0^2 M}{3k}} = 2V_0\sqrt{\frac{M}{3k}} \end{cases}$$

b) Calcoliamo la posizione di B agli istanti in cui è massimamente dilatata; la max dilatazione si ha dopo un tempo pari a $3/4\,T$.

$$\mu = \frac{4M \cdot 2M}{3M+2M+M} = \frac{8M^2}{6M} = \frac{4M}{3} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3k}{4M}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4M}{3k}}$$

$$t_n = \frac{3}{4}T + nT = \frac{3}{4} 2\pi\sqrt{\frac{4M}{3k}} + n\,2\pi\sqrt{\frac{4M}{3k}} = 3\pi\sqrt{\frac{M}{3k}} + n2\pi \cdot 2\sqrt{\frac{M}{3k}} = \sqrt{\frac{M}{3k}}\pi(3+4n)$$

trovati gli istanti a cui la molla è massimamente dilatata è sufficiente moltiplicare per la velocità del sistema per trovare la posizione di B, il quale a tali istanti è sempre alla stessa distanza dal centro di massa e quindi si sposta quanto tale centro

$$x_B = V \cdot t_n = \frac{2V_0}{3}\sqrt{\frac{M}{3k}}\,\pi(3+4n) \quad \text{con } n = 0,1,2,3 \ldots$$

c) L'attrito tra A e C è statico fino a che non c'è la collisione con la molla, dopodiché l'attrito rimane statico fino a che la molla non esercita una forza superiore a quella dell'attrito che diventa quindi dinamico. La max intensità della forza della molla si ha quando la molla è massimamente deformata (compressa o allungata)

$$F_{max} = k\Delta x_{max} = k\sqrt{\frac{M}{3k}}\,2V_0 = 2V_0\sqrt{\frac{Mk}{3}}$$

Da qui ricaviamo l'accelerazione del sistema A+C sottoposto a tale forza

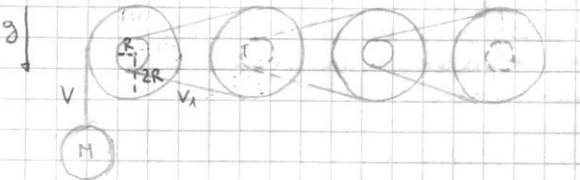
$$a_{max} = \frac{F_{max}}{M+3M} = 2V_0\sqrt{\frac{Mk}{3}} \cdot \frac{1}{4M} = V_0\sqrt{\frac{4Mk}{48M^2}} = V_0\sqrt{\frac{k}{12M}}$$

La forza di attrito su C è pari a $3Ma_{max} (= F_A) = 3MV_0\sqrt{\frac{k}{12M}} = V_0\sqrt{\frac{9M^2k}{12M}} = V_0\sqrt{\frac{k}{4M}}$

$3Ma_{max} < \mu_s N \qquad N = 3Mg$

$$\Rightarrow \mu_s > \frac{3Ma_{max}}{N} = V_0\sqrt{\frac{k}{4M}} \cdot \frac{1}{3Mg} = \frac{V_0}{3Mg}\sqrt{\frac{k}{4M}} \Rightarrow \mu_s > \frac{V_0}{3Mg}\sqrt{\frac{k}{4M}}$$

ESERCIZIO 2 1 APRILE 2016



Lo spessore dei cilindri è h e hanno tutti la stessa densità ρ

a) Il momento di inerzia di ogni carrucola è dato dalla somma dei momenti dei due cilindri calcolati rispetto allo stesso asse, passante per i centri:

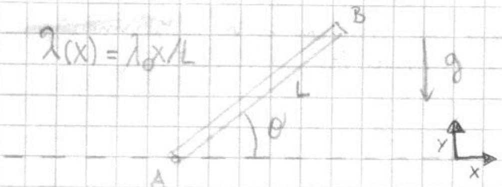
$$I_{tot} = \frac{1}{2}\underbrace{\rho 4\pi R^2 h}_{Massa}\cdot R^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\rho \pi R^2 h}_{Massa}\cdot R^2$$

b) Calcoliamo l'energia cinetica totale quando M scende con velocità V. Consideriamo che per la inestensibilità del filo la velocità tangenziale di ogni disco piccolo deve essere uguale a quella di quello grande a cui è collegato tramite il filo. Quindi:

$$V_G = V_P \Rightarrow \omega_G 2R = \omega_P R \Rightarrow 2\omega_G = \omega_P$$

$$E_{K\,TOT} = \frac{1}{2}MV_0^2 + \frac{1}{2}I\sum_{K=0}^{m}\omega_K^2$$

ESERCIZIO 2 6 LUGLIO 2007



La densità della sbarretta dipende dalla distanza x dall'estremo A secondo la legge $\lambda(x) = \lambda_0 x/L$

a) Calcoliamo la massa totale della sbarretta con l'integrale:

$$M_{tot} = \int dm = \int_0^L \lambda\, dx = \int_0^L \frac{\lambda_0}{L} x\, dx = \frac{\lambda_0}{L}\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{\lambda_0}{L}\left(\frac{L^2}{2} - 0\right) = \frac{\lambda_0}{\cancel{L}}\cdot\frac{L^{\cancel{2}}}{2} = \lambda_0 \frac{L}{2}$$

b) Calcoliamo ora la distanza D tra A e il centro di massa e il momento d'inerzia rispetto ad A servendosi sempre degli integrali

$$D = \int \frac{x\,dm}{M} = \frac{\int_0^L x\lambda\, dx}{M} = \int_0^L x \cdot \frac{\lambda_0}{L} x\, dx \cdot \frac{2}{L\lambda_0} = \frac{\cancel{\lambda_0}}{L}\cdot\frac{2}{L\cancel{\lambda_0}}\int_0^L x^2 dx = \frac{2}{L^2}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{2}{3}L$$

$$I = \int x^2 dm = \int_0^L \frac{\lambda_0}{L} x \cdot x^2 dx = \frac{\lambda_0}{L}\int_0^L x^3 dx = \frac{\lambda_0}{L}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^L = \frac{\lambda_0}{\cancel{L}}\cdot\frac{L^{\cancel{4}\,3}}{4} = \lambda_0\frac{L^3}{4}$$

Supponiamo che la sbarretta possa ruotare attorno ad A e che essa venga lasciata ferma, quando forma un angolo $\theta = 45°$ con l'orizzontale.

c) Per calcolare la velocità angolare della sbarretta quando si trova in posizione orizzontale è sufficiente imporre la conservazione dell'energia meccanica: infatti inizialmente si ha solo energia potenziale che diventa soltanto cinetica quando la sbarretta è in posizione orizzontale

$$MgD\,\text{sen}\theta = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \cancel{2}MgD\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{I} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{MgD\sqrt{2}}{I}}$$

d) Volendo calcolare la reazione vincolare in A quando la sbarretta è in posizione orizzontale dobbiamo tener conto che essa deve bilanciare il peso lungo y e fornire l'accelerazione centripeta lungo x

$$R_x = -Ma_c = -M\omega^2 D = -M\cdot\frac{MgD\sqrt{2}}{I}\cdot D = -\frac{\sqrt{2}M^2D^2g}{I}$$ questa è la reazione lungo x

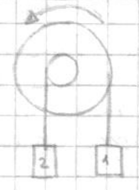
$$Ma_{CM} = R_y - Mg$$

$$I\alpha = MgD \Rightarrow \alpha = \frac{MgD}{I} \Rightarrow a_{CM} = \alpha D = \frac{MgD^2}{I}$$ ecco l'accelerazione del centro di massa

$$\Rightarrow R_y = M\cdot\frac{MgD^2}{I} + Mg = Mg\left(\frac{MD^2}{I} + 1\right)$$ questa è la reazione lungo y

$$\Rightarrow R = \left(-\frac{\sqrt{2}M^2D^2g}{I}\ ;\ Mg\left(1 + \frac{MD^2}{I}\right)\right)$$ ecco la reazione nelle sue due componenti

ESERCIZIO 1 20 LUGLIO 2007



Due masse M sono appese a due fili ideali (inestensibili e di massa trascurabile) avvolte su due parti diverse di una carrucola pesante costituita da due cilindri coassiali omogenei ciascuno di massa M e di raggio rispettivamente r e R ($r<R$). La carrucola è libera di ruotare senza attriti attorno l'asse orizzontale che la sostiene.

a) Per calcolare l'accelerazione di ogni massa e quella della carrucola sfruttiamo l'inestensibilità del filo, la I e la II cardinale

$$\begin{cases} I\alpha = T_2 r - T_1 R \\ Ma_1 = T_1 - Mg \\ Ma_2 = Mg - T_2 \\ a_1 = \alpha R \\ a_2 = \alpha r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = M\alpha R + Mg \\ T_2 = Mg - M\alpha r \\ a_1 = \alpha R \\ a_2 = \alpha r \\ I\alpha = Mgr - M\alpha r^2 - M\alpha R^2 - MgR \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{Mg(r-R)}{(I+Mr^2+MR^2)} \\ a_1 = \dfrac{Mg(r-R)R}{(I+Mr^2+MR^2)} \\ a_2 = \dfrac{Mg(r-R)r}{I+Mr^2+MR^2} \\ T_1 = \dots \\ T_2 = \dots \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2}Mr^2 + \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}M(r^2+R^2) \Rightarrow \alpha = \frac{Mg(r-R)}{\frac{1}{2}M(r^2+R^2)+Mr^2+MR^2} = \frac{\cancel{M}g(r-R)}{\cancel{M}\frac{3}{2}(r^2+R^2)} = \frac{2}{3}\frac{g(r-R)}{r^2+R^2}$$

$$a_1 = \frac{\cancel{M}g(r-R)R}{\cancel{M}\frac{3}{2}(r^2+R^2)} = \frac{2}{3}\frac{(r-R)R}{r^2+R^2} \Rightarrow a_2 = \frac{2}{3}\frac{(r-R)r}{r^2+R^2}$$ ecco le accelerazioni cercate

b) Calcoliamo la reazione dell'asse della carrucola:

$$4Ma_{CM} = 4Mg - R \qquad a_{CM} = \frac{M\cdot a_2 - Ma_1}{4M} = \frac{a_2-a_1}{4}$$

$$\Rightarrow R = 4Mg - 4Ma_{CM} = 4M(g-a_{CM}) = 4M\left(g - \frac{a_2-a_1}{4}\right) = \cancel{4}M\frac{4g+a_1-a_2}{\cancel{4}} = M(4g+a_1-a_2)$$

c) Per calcolare la velocità angolare della carrucola usiamo il principio di conservazione dell'energia; inizialmente c'è solo energia potenziale, dopo un giro della carrucola c'è energia cinetica

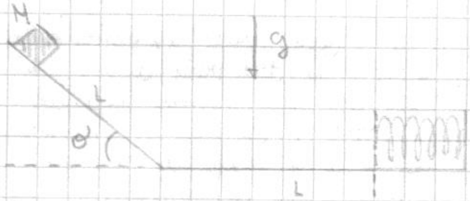
$$\begin{cases} Mg2\pi R - Mg2\pi r = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 \\ \omega R = v_1 \\ \omega r = v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega R = v_1 \\ \omega r = v_2 \\ Mg2\pi(R-r) = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}M\omega^2R^2 + \frac{1}{2}M\omega^2r^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Mg2\pi(R-r) = \omega^2\left(\frac{1}{2}I + \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}Mr^2\right) \Rightarrow Mg2\pi(R-r) = \omega^2\left(\frac{1}{4}M(r^2+R^2) + \frac{1}{2}M(r^2+R^2)\right)$$

$$\Rightarrow Mg2\pi(R-r) = \omega^2\frac{3}{4}M(r^2+R^2) \Rightarrow \omega^2 = \frac{4}{3}\frac{\cancel{M}g2\pi(R-r)}{\cancel{M}(r^2+R^2)} = \frac{8}{3}\frac{\pi g(R-r)}{(r^2+R^2)}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{g\pi(r-R)}{r^2+R^2}}$$

ESERCIZIO 1 06 SETTEMBRE 2007



Il corpo di massa M parte da fermo all'istante $t=0$, per poi scivolare lungo i due tratti lisci e rimbalzare sulla molla di costante elastica k che ha l'altro estremo bloccato

a) Per trovare la velocità del corpo alla base del piano inclinato è sufficiente imporre la conservazione dell'energia totale:

$$\cancel{M}gL\,\text{sen}\theta = \frac{1}{2}\cancel{M}V^2 \Rightarrow V^2 = 2gL\,\text{sen}\theta \Rightarrow V = \sqrt{gL\,\text{sen}\theta \cdot 2}$$

b) Calcoliamo l'istante in cui la massa M passa al piano orizzontale

$$x(t) = \cancel{x_0} + \cancel{V_0 t} + \frac{1}{2}at^2 \qquad V(t) = \cancel{V_0} + at \Rightarrow a(t) = \frac{V}{t} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}\frac{V}{\cancel{t}}\cdot t^{\cancel{2}}$$

$t_1 = \frac{2L}{V}$ istante del passaggio al piano orizzontale $= \frac{2L}{\sqrt{gL\,\text{sen}\theta \cdot 2}}$

Troviamo ora l'istante in cui tocca la molla

$$t_2 = t_1 + \frac{L}{V} = \sqrt{\frac{2L}{g\,\text{sen}\theta}} + \frac{L}{\sqrt{gL\,\text{sen}\theta \cdot 2}} = \sqrt{\frac{2L}{2g\,\text{sen}\theta}} + \sqrt{\frac{L}{2g\,\text{sen}\theta}} = \sqrt{\frac{3L}{2g\,\text{sen}\theta}}$$

Infine l'istante di massima compressione della molla, cioè 1/4 del periodo:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \Rightarrow \frac{T}{4} = 2\pi\cdot\frac{1}{4_2}\sqrt{\frac{M}{k}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{k}}$$

$$t_3 = t_2 + \frac{T}{4} = \sqrt{\frac{3L}{2g\,\text{sen}\theta}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{k}}$$

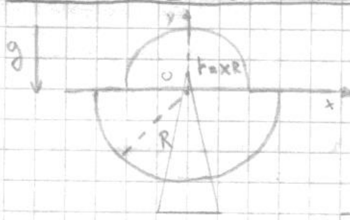
c) Il blocco ripercorre nella sua risalita un tratto lungo L, in quanto nel nostro caso agiscono soltanto forze conservative e l'energia potenziale posseduta all'inizio dalla massa si conserva facendola tornare al suo posto.
Ricaviamo le componenti dell'accelerazione:

$$\cancel{M}a_x = -\cancel{M}g\,\text{sen}\theta \Rightarrow a_x = -g\,\text{sen}\theta$$

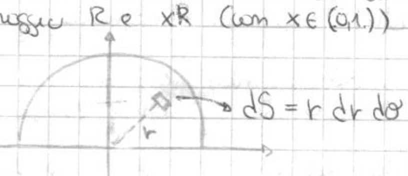
$$Ma_y = N - Mg\cos\theta = 0 \Rightarrow a_y = 0$$

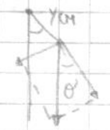
$$\Rightarrow a = (-g\,\text{sen}\theta\,;\,0)$$

ESERCIZIO 2 28 GENNAIO 2014



Il corpo è costituito da due semicerchi concentrici di raggio R e xR (con $x \in (0,1)$) di densità superficiale σ





1) Calcoliamo prima i singoli centri di massa, per poi calcolare il centro di massa dei centri di massa

$$y_{CM_1} = \frac{\int y\,dm}{M} = \frac{\iint r\,\text{sen}\,\theta\,\sigma\,dS}{\frac{\pi R^2}{2}\cdot\sigma} = \frac{\int_0^R\int_0^\pi r\,\text{sen}\,\theta\, r\,dr\,d\theta}{\pi R^2/2} = \frac{\int_0^R r^2(-\cos\theta)\big|_0^\pi\,dr}{\pi R^2/2} = \frac{r^3/3\big|_0^R\cdot 2}{\pi R^2/2} = \frac{R^{\cancel{3}}}{3}\cdot 2\cdot\frac{2}{\pi \cancel{R^2}}\;\frac{4R}{3\pi}$$

$$y_{CM} = \frac{4}{3}\frac{Rx}{\pi}$$ ecco trovati i centri di massa delle semicirconferenze

$$M_{tot} = \frac{\sigma\pi R^2}{2} + \frac{\sigma\pi x^2R^2}{2} = \frac{\sigma\pi R^2(1+x^2)}{2}$$

$$y_{CM_{tot}} = \frac{y_{CM_1}\cdot M_1 + y_{CM_2}M_2}{M_{tot}} = \frac{-\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}\cdot\frac{\cancel{\sigma\pi R^2}}{\cancel{2}} + \frac{4}{3}\frac{Rx}{\pi}\cdot\frac{\cancel{\sigma\pi R^2}x^2}{\cancel{2}}}{\cancel{\sigma\pi R^2}(1+x^2)/\cancel{2}} = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}\frac{(x^3-1)}{(1+x^2)}$$

2) Per trovare la pulsazione usiamo la II cardinale:

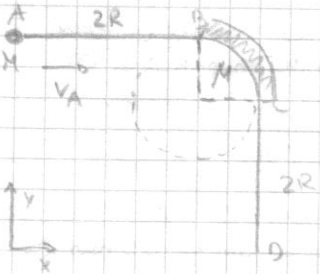
$$I = \frac{M_1R^2}{4} + \frac{M_2R^2x^2}{4} + \cancel{M_{tot}\cdot y^2_{CM_{tot}}} = \frac{\sigma\pi R^2}{2}\cdot\frac{R^2}{4} + \frac{\sigma\pi R^2x^2}{2}\cdot\frac{R^2x^2}{4} + \cancel{\frac{\sigma\pi R^2(1+x^2)}{2}\,\frac{16}{9}\frac{R^2}{\pi^2}\frac{(x^3-1)^2}{(1+x^2)^2}}$$

$$I\ddot\theta = -Mg\,\text{sen}\,\theta\cdot\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}\frac{(x^3-1)}{(1+x^2)} \quad \text{con } \theta \ll 1 \Rightarrow \text{sen}\,\theta \cong \theta \Rightarrow \ddot\theta = -\frac{Mg}{I}\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}\frac{(x^3-1)}{(1+x^2)}\cdot\theta$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{Mg}{I}\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}\frac{(x^3-1)}{(1+x^2)}}$$

3) Per calcolare i valori di x che rendono max e min la pulsazione basta trovare il max e il min della funzione corrispondente a meno di costanti

ESERCIZIO 1 26 SETTEMBRE 2013



Nella parte circolare il corpo di massa M incontra attrito radente dinamico.

a) Per determinare l'accelerazione tangenziale devo analizzare le forze che agiscono lungo l'asse:

$$N = M \frac{V^2}{R} \Rightarrow \cancel{M} a_C = \cancel{M} \frac{V^2}{R} \Rightarrow a_C = \frac{V^2}{R}$$

$$\cancel{M} a_T = -F_A = -\mu_D N = -\mu_D \cancel{M} \frac{V^2}{R} \Rightarrow a_T = -\mu_D \frac{V^2}{R}$$

b) Per trovare la legge oraria usiamo la definizione di a_T:

$$a_T = \frac{dV}{dt} = -\mu_D \frac{V^2}{R} \Rightarrow \frac{dV}{V^2} = -\frac{\mu_D}{R} dt \Rightarrow \int_{V_B}^{V(t)} \frac{1}{V^2} dV = \int_{t_B}^{t} -\frac{\mu_D}{R} dt$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{V(t)} + \frac{1}{V_B} = -\frac{\mu_D}{R}(t-t_B) \Rightarrow \frac{1}{V(t)} = \frac{1}{V_B} + \frac{\mu_D (t-t_B)}{R} \Rightarrow V(t) = V_B + \frac{R}{\mu_D (t-t_B)}$$

c) Per trovare il tempo impiegato a percorrere il tratto curvilineo è necessario eguagliare la lunghezza del tratto all'integrale della velocità cioè:

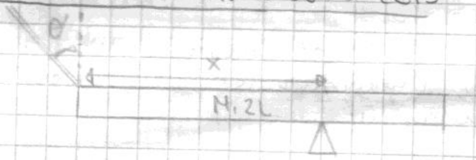
$$\frac{\pi R}{2} = \int_{t_B}^{t_C} V(t)\, dt$$

risolvendo otteniamo il tempo cercato

d) guardare cosa richiesto

Per trovare V_C sostituire il tempo trovato precedentemente in $V(t)$

ESERCIZIO 1 18 GIUGNO 2013



Per determinare la tensione T usiamo il fatto che in condizioni statiche è nulla la sommatoria delle forze e dei momenti, quindi:

$\sum \tau_z = 0 \Rightarrow Mg(x-L) - T\cos\theta x \Rightarrow Mg(x-L) = T\cos\theta x \Rightarrow T = \dfrac{Mg(x-L)}{x\cos\theta}$

Consideriamo ora $\theta = 0$ controlliamo che ci siano valori che minimizzano T

$T = \dfrac{Mg(x-L)}{x\cos\theta} = \dfrac{Mg(x-L)}{x} \Rightarrow y(x) = \dfrac{x-L}{L}$

$y'(x) = \dfrac{x-x+L}{x^2} = \dfrac{L}{x^2} > 0 \ \forall x \Rightarrow$ funzione monotona crescente

con $x \in [L, 2L]$ si ha il max per L e il min per 2L

Consideriamo ora $x = 5L/3$ e calcoliamo l'accelerazione angolare nel caso in cui la corda si rompa

$I\alpha = Mg(x-L) = Mg\left(\frac{5}{3}L - L\right) = Mg\frac{2}{3}L$

$I = \frac{1}{12}M(2L)^2 + M\left(\frac{5}{3}L - L\right)^2 = \frac{1}{\cancel{12}_3}M\cancel{4}L^2 + \frac{4L^2M}{9} = \frac{7}{9}ML^2$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{Mg2L}{3I} = \dfrac{\cancel{M}g2\cancel{L}}{\cancel{3}\cdot\frac{7}{\cancel{9}_3}\cancel{M}L^{\cancel{2}}} = \dfrac{6g}{7L}$

Se consideriamo l'istante immediatamente successivo alla rottura del filo, dobbiamo calcolare la reazione vincolare

$a = \alpha(x-L) = \dfrac{\cancel{6}^2g}{7\cancel{L}}\cdot\dfrac{2\cancel{L}}{\cancel{3}_1} = \dfrac{4}{7}g \quad Ma = R - Mg = M\frac{4}{7}g \Rightarrow R = Ma + Mg = \frac{11}{7}Mg$

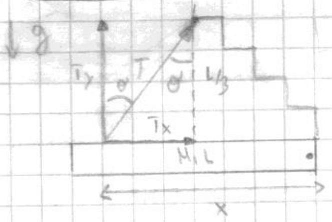
Guardiamo cosa fa l'accelerazione angolare per valori di x poco superiori a $\frac{5}{3}L$

$\alpha = \dfrac{\cancel{M}g(x-L)}{\frac{1}{\cancel{12}_3}\cancel{M}\cancel{4}L^2 + \cancel{M}(x-L)^2} \Rightarrow y(x) = \dfrac{(x-L)}{\frac{L^2}{3} + x^2 + L^2 - 2xL} \Rightarrow y'(x) = \dfrac{x^2 - 2xL + \frac{4}{3}L^2 - (2x-2L)(x-L)}{(\ldots)^2} =$

$= \dfrac{x^2 - 2xL + \frac{4}{3}L^2 - 2x^2 + 2xL + 2xL - 2L^2}{(\sim)^2} = \dfrac{-x^2 + 2Lx - 2/3\cdot L^2}{(\sim)^2} \geq 0 \qquad x = \dfrac{-L \pm \sqrt{L^2 - 2/3 L^2}}{-1}$

studiando il segno di $f'(x)$ nelle vicinanze di $\frac{5}{3}L$ si vede che l'accelerazione va diminuendo

ESERCIZIO 1 19 FEBBRAIO 2013



Poiché la sbarretta è ferma la sommatoria delle forze deve essere nulla (garantito dal vincolo) così come quella dei momenti

$$\sum \tau_z = 0 \Rightarrow Mg\frac{L}{2} = T_y \cdot x$$

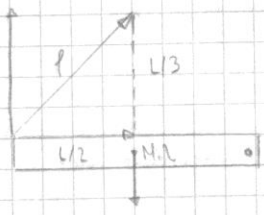
$$T_y = \frac{MgL}{2x}$$

Possiamo poi notare che $\frac{T}{T_y} = \frac{\ell}{L/2}$ dove ℓ è la lunghezza totale della corda

$$\ell = \sqrt{\frac{L^2}{9} + \left(x - \frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{L^2}{9} + x^2 + \frac{L^2}{4} - xL}$$

$$\Rightarrow T = T_y \cdot \frac{\ell}{L/2} = T_y \cdot \frac{2\ell}{L}$$

Consideriamo ora il caso in cui $x = L$



La reazione del vincolo deve bilanciare con la componente x la componente x della tensione, con la componente y la componente y della tensione e la forza peso.
Procediamo come fatto sopra

$$\sum \tau_z = 0 \Rightarrow Mg\frac{\cancel{L}}{2} = T_y \cdot \cancel{L}$$

$\Rightarrow T_y = \frac{Mg}{2}$ ecco la componente perpendicolare di T

Ancora $\frac{T}{T_y} = \frac{\ell}{L/3}$ dove $\ell = \sqrt{\frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{9}} = \sqrt{\frac{9L^2 + 4L^2}{36}} = \sqrt{\frac{13L^2}{36}} = L\sqrt{\frac{13}{36}}$

perciò $T = \frac{3\ell}{L} \cdot T_y = 3\cancel{L} \cdot \sqrt{\frac{13}{36}} \cdot \frac{1}{\cancel{L}} \cdot \frac{Mg}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{13}{36}}\, Mg$

Considerando che $T^2 = T_x^2 + T_y^2 \Rightarrow T_x = \sqrt{T^2 - T_y^2}$

quindi $T_x = \sqrt{\frac{\cancel{9}}{4} \cdot \frac{13}{\cancel{36}\,4} M^2g^2 - \frac{M^2g^2}{4}} = \sqrt{\frac{13M^2g^2 - 4M^2g^2}{16}} = Mg\sqrt{\frac{9}{16}}$

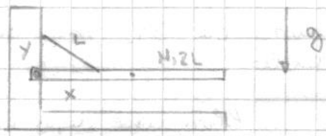
Concludendo la reazione avrà componenti:

$$R_x = T_x = Mg\sqrt{\frac{9}{16}}$$

$$R_y = T_y - Mg = \frac{Mg}{2} - Mg = -\frac{Mg}{2}$$

$$\Rightarrow R = \left(Mg\sqrt{\frac{9}{16}}\, i - \frac{Mg}{2}\right)$$

ESERCIZIO 1 16 LUGLIO 2013



Per calcolare la reazione vincolare dobbiamo prima ricavare le due componenti della tensione, dopo che la reazione vincolare lungo x deve bilanciare la componente x della tensione, lungo y deve bilanciare la forza peso e la componente y della tensione.

Innanzitutto imponiamo che la somma dei momenti torcenti sia nulla

$$\sum \tau_z = 0 \Rightarrow Mg L = T_y x \Rightarrow T_y = \frac{mgL}{x}$$

$$\frac{T}{T_y} = \frac{L}{y} \Rightarrow T = \frac{T_y L}{y} \quad \text{dove } y = \sqrt{L^2-x^2} \Rightarrow T = \frac{mgL}{x} \cdot L \cdot \frac{1}{\sqrt{L^2-x^2}} = \frac{mgL^2}{x\sqrt{L^2-x^2}}$$

Da qui $T_x = \sqrt{T^2 - T_y^2} = \sqrt{\frac{m^2g^2L^4}{x^2(L^2-x^2)} - \frac{m^2g^2L^2}{x^2}} = \sqrt{\frac{\cancel{m^2g^2L^4} - \cancel{m^2g^2L^4} + m^2g^2L^2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(L^2-x^2)}} = \frac{mgL}{\sqrt{L^2-x^2}}$

Pertanto la reazione vincolare sarà:

$$R_x = T_x = \frac{mgL}{\sqrt{L^2-x^2}}$$

$$R_y = T_y - mg = \frac{mgL}{x} - mg = mg\left(\frac{L}{x} - 1\right)$$

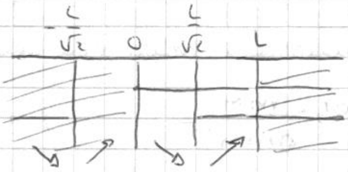
Calcoliamo ora il valore per il quale è minima la tensione:

$$T = \frac{mgL^2}{x\sqrt{L^2-x^2}} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{x^2L^2 - x^4}} \Rightarrow y' = \frac{0 - \frac{1}{2\sqrt{x^2L^2-x^4}} \cdot (2xL^2 - 4x^3)}{(x^2L^2 - x^4)} = \frac{\cancel{2}x(2x^2-L^2)}{x^2(L^2-x^2)} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2L^2-x^4}}$$

considerando il Df: $0 < x < L$

$$\frac{x(2x^2-L^2)}{x^2(L^2-x^2)\sqrt{x^2L^2-x^4}} > 0 \Rightarrow N>0 \quad x>0$$

$$x < -\sqrt{\frac{L^2}{2}} \vee x > \sqrt{\frac{L^2}{2}}$$



$x = \frac{L}{\sqrt{2}}$ è il minimo della funzione considerata

$\Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{2}}$ è il valore che minimizza la tensione

ESERCIZIO 2 18 GIUGNO 2013

La molla è compressa di Δx_0 ma non è fissata ai due blocchi

a) La molla cade dall'istante in cui raggiunge la posizione di equilibrio, cioè dopo $T/4$

$$\mu = \frac{2m \cdot m}{2m+m} = \frac{2}{3}m \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{\mu}} = \sqrt{\frac{3K}{2m}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{3K}} \Rightarrow \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2m}{3K}}$$

b) Per trovare la quantità di moto e l'energia cinetica di A dobbiamo conoscerne la velocità, che otteniamo imponendo la conservazione della quantità di moto e dell'energia prima tra B e C, poi tra A e B.

$$\begin{cases} \cancel{\frac{1}{2}}K\Delta x^2 = \cancel{\frac{1}{2}}mV_B^2 + \cancel{\frac{1}{2}}2mV_C^2 \\ 0 = \cancel{m}V_B + 2\cancel{m}V_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_B = -2V_C \\ K\Delta x^2 = mV_B^2 + 2m\left(\frac{V_B}{2}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_B = \sqrt{\frac{K\Delta x^2}{m+m/2}} = \Delta x\sqrt{\frac{2K}{3m}} \\ V_C = -\frac{\Delta x}{2}\sqrt{\frac{2K}{3m}} \end{cases}$$

Facciamo lo stesso per A e B

$$\begin{cases} \cancel{\frac{1}{2}}mV_B^2 = \cancel{\frac{1}{2}}mV_B'^2 + \cancel{\frac{1}{2}}MV_A^2 \\ mV_B = mV_B' + MV_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A = \frac{m(V_B - V_B')}{M} \\ \cancel{m}(V_B^2 - V_B'^2) = \cancel{M} \cdot \frac{m^2(V_B - V_B')^2}{M^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (V_B + V_B') = \frac{m}{M}(V_B - V_B') \\ V_A = \frac{m(V_B - V_B')}{M} \end{cases}$$

$$\begin{cases} MV_B + MV_B' = mV_B - mV_B' \\ V_A = \frac{m(V_B - V_B')}{M} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_B' = \frac{V_B(m-M)}{m+M} = \Delta x\sqrt{\frac{2K}{3M}} \cdot \frac{(m-M)}{(m+M)} \\ V_A = m\left(\Delta x\sqrt{\frac{2K}{3M}} - \Delta x\sqrt{\frac{2K}{3M}}\frac{(m-M)}{(m+M)}\right) \cdot \frac{1}{M} = \Delta x\sqrt{\frac{2K}{3M}}\,\frac{2\cancel{M}}{m+M} \cdot \frac{m}{\cancel{M}} \end{cases}$$

Troviamo ora p_A e E_{K_A}

$$p_A = MV_A = M \cdot \frac{2m}{m+M} \cdot \Delta x\sqrt{\frac{2K}{3M}} = V_B \cdot \frac{2mM}{m+M} \qquad E_{K_A} = \frac{1}{2}MV_A^2 = \frac{M}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}^{2}m^2}{(m+M)^2} \cdot V_B^2 = 2V_B^2\frac{m^2 M}{(m+M)^2}$$

c) Troviamo i valori che massimizzano p_A e E_{K_A}

$$p_A = V_B\frac{2mM}{(m+M)} = y \Rightarrow y' = 2mV_B \cdot \frac{m+\cancel{M}-\cancel{M}}{(m+M)^2} > 0 \ \forall M \Rightarrow$$ funzione monotona crescente max $M \to 0$, min $M \to \infty$

$$E_{K_A} = 2V_B^2\frac{m^2 M}{(m+M^2)} = y \Rightarrow y' = 2V_B^2 m^2 \cdot \frac{m^2 + M^2 + \cancel{2mM} - (\cancel{2m} + 2M)M}{(m+M)^4} = 2V_B^2 m^2 \cdot \frac{m^2 - M^2}{(m+M)^4} > 0$$

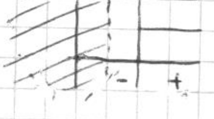
$\Rightarrow -m < M < M$

quindi E_{K_A} è minima per $M = 0$
E_{K_A} è massima per $M = m$

d) Affinché B torni ad urtare C dovremmo avere che la velocità di B dopo l'urto con A sia maggiore di quella di C, quindi:

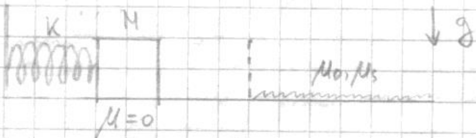
$$V_B' > V_C \Rightarrow V_B\left(\frac{m-M}{m+M}\right) > V_C \Rightarrow -2\cancel{V_C}\left(\frac{m-M}{m+M}\right) > \cancel{V_C} \Rightarrow \frac{2(M-m)}{m+M} > 1 \Rightarrow \frac{2M-2m-m-M}{m+M} > 0$$

$$\frac{M-3m}{m+M} > 0 \Rightarrow \begin{matrix} N>0 & M>3m \\ D>0 & M>-m \end{matrix}$$



$\Rightarrow$ B raggiunge di nuovo C se $M > 3m$

ESERCIZIO 2 26 SETTEMBRE 2007



M si muove sulla parte liscia del piano quando la molla è compressa, su quella scabra quando la molla è estesa. All'inizio la molla è compressa di un tratto Δx ed il sistema è tenuto bloccato; quando il blocco viene liberato esso inizia a spostarsi, poi quando la molla è allungata di $\Delta x' = \Delta x/2$ il blocco si ferma e non si muove più.

a) Dato che agiscono anche forze non conservative, l'energia dissipata è uguale alla somma delle variazioni di energia cinetica e potenziale:

$$\Delta E_{tot} = \Delta U + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\Delta E_k} \Rightarrow \Delta E_{tot} = \frac{1}{2} k \Delta x^2 - \frac{1}{2} k \Delta x'^2 = \frac{1}{2} k \left(\Delta x^2 - \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} k \frac{3}{4} \Delta x^2 = \frac{3}{8} k \Delta x^2$$

b) Per calcolare il coefficiente di attrito dinamico, dobbiamo tenere conto che la variazione dell'energia meccanica totale è uguale al lavoro delle forze non conservative

$$\Delta E_{tot} = L_{NC} = F_{AD} \cdot \Delta x' = \mu_D N \frac{\Delta x}{2} = \mu_D M g \frac{\Delta x}{2} \Rightarrow \mu_D M g \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{2}} = \frac{3}{\cancel{8}4} k \Delta x^{\cancel{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_D = \frac{3 k \Delta x}{4 M g}$$ ecco il coefficiente cercato

c) Il valore minimo del coefficiente di attrito statico si trova imponendo che la forza di attrito sia maggiore di quella della molla, quindi:

$$F_A < \mu_S N = \mu_S M g > k \Delta x' \Rightarrow \mu_S > \frac{k \Delta x'}{M g} = \frac{\Delta x k}{2 M g}$$ questo è il valore minimo per il quale è verificata la condizione di staticità

d) Per scrivere l'equazione di moto valida nell'intervallo di tempo in cui il blocco si muove dobbiamo considerare le forze che agiscono sul blocco, ovvero quella di attrito dinamico e quella della molla, entrambe con verso opposto a quello del moto della massa

$$M a = - k \Delta x - \mu_D M g$$

ESERCIZIO 1 22 LUGLIO 2009

La sbarretta ha momento d'inerzia I_0 rispetto all'asse orizzontale; la sbarretta è imperniata a distanza x dal centro di massa. Viene lasciata libera, non in equilibrio, e quando giunge in posizione verticale urta in un processo istantaneo ed elastico un corpo puntiforme di massa $M/6$

a) Per determinare per quali valori di x la sbarretta resta immobile dopo l'urto consideriamo che si ha sia la conservazione dell'energia meccanica (urto elastico) sia quella del momento angolare; siccome la sbarretta rimane immobile (nel caso da noi cercato) il suo momento verrà trasmesso al corpo puntiforme

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(I+Mx^2)\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{M}{6}V^2 \\ (I+Mx^2)\omega = \frac{M}{6}V(L+x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \frac{V}{(L+x)} \Rightarrow V = \omega(L+x) \\ 6(I+Mx^2)\omega = MV(L+x) \end{cases} \Rightarrow 6(I+Mx^2)\cancel{\omega} = M\cancel{\omega}(L+x)^2$$

$$6I + 6Mx^2 = M(L^2+x^2+2Lx) \Rightarrow 6I + 6Mx^2 = ML^2 + Mx^2 + 2LMx \Rightarrow 3Mx^2 - 2LMx + 6I - ML^2 = 0$$

$$x = \frac{LM \pm \sqrt{L^2M^2 - 3M(6I - ML^2)}}{3M} = \frac{LM \pm \sqrt{L^2M^2 - 12MI + 3M^2L^2}}{3M} = \frac{LM \pm 2\sqrt{M^2L^2 - 3MI}}{3M}$$

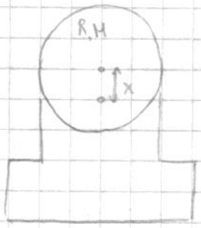
b) Volendo sapere invece per quali x non c'è reazione impulsiva del vincolo durante l'urto, dobbiamo imporre sempre la conservazione dell'energia meccanica e del momento angolare (considerando che ora la sbarretta continua a muoversi dopo l'urto), alle quali si aggiunge la conservazione della quantità di moto in quanto non agiscono forze impulsive

$$\frac{1}{2}(I+Mx^2)\omega^2 = \frac{1}{2}(I+Mx^2)\omega'^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{6}V^2$$

$$(I+Mx^2)\omega = (I+Mx^2)\omega' + \frac{M}{6}V(L+x)$$

$M\omega$

ESERCIZIO 1 5 APRILE 2011



Il disco ruota su un piano verticale essendo imperniato ad un asse orizzontale, l'asse è posto a distanza x dal centro. Esso parte dalla posizione di equilibrio instabile e compie mezza rotazione.

Per determinare la velocità angolare ω è sufficiente imporre la conservazione dell'energia meccanica, inizialmente solo potenziale e, quando il disco ha compiuto mezzo giro, solo cinetica. Prima è però necessario calcolare il momento di inerzia attraverso il teorema di Steiner

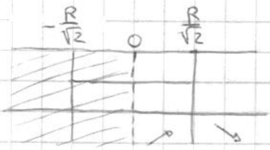
$$I = \frac{MR^2}{2} + Mx^2 \Rightarrow Mg2x = \frac{1}{2} I\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4Mgx}{I}} = \sqrt{\frac{4\cancel{M}gx}{\cancel{M}\left(\frac{R^2}{2}+x^2\right)}} = \sqrt{\frac{8gx}{R^2+2x^2}}$$

Nella configurazione finale la reazione vincolare oltre a bilanciare la forza peso, deve anche fornire l'accelerazione centripeta; usiamo quindi l'equazione di moto del disco:

$$Ma_c = R - Mg \Rightarrow M\omega^2 R = R - Mg \Rightarrow R = M\omega^2 x + Mg = M\left(\frac{8gx^2}{R^2+2x^2} + g\right)$$

Per determinare i valori di x che massimizzano ω e R è sufficiente studiare le due funzioni corrispondenti (a meno di costanti etc.)

$$y_\omega = \frac{x}{R^2+2x^2} \Rightarrow y'_\omega = \frac{R^2+2x^2-4x^2}{(R^2+2x^2)^2} = \frac{R^2-2x^2}{(R^2+2x^2)^2} > 0 \qquad N>0 \quad -\sqrt{\frac{R^2}{2}} < x < \sqrt{\frac{R^2}{2}} \qquad D>0 \quad \forall x$$



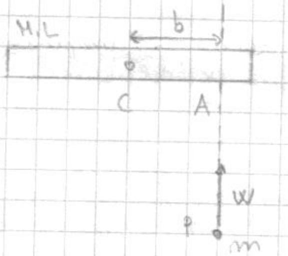
$x = R/\sqrt{2}$ è max

Quindi l'accelerazione angolare sarà massima quando il perno è posto a distanza $x = R/\sqrt{2}$ dal cm

$$y_R = \frac{x^2}{R^2+2x^2} \Rightarrow y'_R = \frac{2xR^2+\cancel{4x^3}-\cancel{4x^3}}{(R^2+2x^2)^2} = \frac{2xR^2}{(R^2+2x^2)^2} > 0 \qquad N>0 \quad x>0 \qquad D>0 \quad \forall x$$

Quindi non esistono valori di x che massimizzano il valore della reazione vincolare R, in quanto per $x \in [0,R]$ la funzione è monotona crescente, pertanto R è max quando $x \to +\infty$.

ESERCIZIO 2 23 GIUGNO 2011



L'asta ed il punto materiale si trovano su un piano orizzontale senza attrito; la sbarretta è inizialmente in quiete ed il punto materiale P la urta con velocità w perpendicolare ad essa in un urto perfettamente elastico.

a) In questo caso, durante l'urto si conserva l'energia meccanica totale in quanto si tratta di un urto elastico, la quantità di moto in quanto non sono presenti forze esterne impulsive che giocano sul sistema, ed anche il momento angolare, in quanto non essendoci forze esterne non ci saranno neppure i rispettivi momenti torcenti.

b) Per trovare la velocità del centro di massa del sistema è sufficiente usare la conservazione della quantità di moto

$$mw = (m+M)V_{CM} \Rightarrow V_{CM} = \frac{m}{m+M}\,w$$

c/d) Per calcolare la velocità di P dopo l'urto e la velocità angolare della sbarra usiamo le 3 equazioni della conservazione delle 3 quantità che abbiamo detto essere costanti:

$$\begin{array}{l} E_K \\ P \\ I\omega \end{array}\begin{cases} \frac{1}{2}mw^2 = \frac{1}{2}mw'^2 + \frac{1}{2}MV_S^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\ mw = mw' + MV_S \\ mwb = mw'b + I\omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m(w-w')(w+w') = MV_S^2 + I\omega^2 \\ m(w-w') = MV_S \\ mb(w-w') = I\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{I\omega}{MV_S} \\ V_S = \frac{m}{M}(w-w') \\ m(w-w')(w+w') = MV_S^2 + I\omega^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_S = \frac{m}{M}(w-w') \\ \omega = \frac{MV_Sb}{I} = \frac{Mb}{I}\cdot\frac{m}{M}(w-w') = \frac{mb}{I}(w-w') \\ m(w-w')(w+w') = M\cdot\frac{m^2}{M^2}(w-w')^2 + I\frac{m^2b^2}{I^2}(w-w')^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cancel{m(w-w')}(w+w') = m^2(w-w')^{\cancel{2}}\left(\frac{1}{M}+\frac{b^2}{I}\right) \Rightarrow w+w' = (mw-mw')\left(\frac{I+b^2M}{MI}\right)$$

$$\Rightarrow w'\left(1+\frac{mI+mMb^2}{MI}\right) = w\left(\frac{mI+mMb^2}{MI}-1\right) \Rightarrow w' = w\,\frac{\frac{mI+mMb^2-MI}{MI}}{\frac{MI+mI+mMb^2}{MI}}$$

$$\Rightarrow w' = w\,\frac{(mI-MI+mMb^2)}{(mI+MI+mMb^2)} \Rightarrow V_S = \frac{m}{M}w\left(1-\frac{mI-MI+mMb^2}{mI+MI+mMb^2}\right) = \frac{m}{M}w\cdot\frac{2MI}{mI+MI+mMb^2}$$

$$\omega = \frac{mb}{I}w\left(1-\frac{mI-MI+mMb^2}{mI+MI+mMb^2}\right) = \frac{mbw}{I}\cdot\frac{2MI}{mI+MI+mMb^2} \qquad \text{con } I = \frac{1}{12}ML^2$$

$$\omega = \frac{2mMbw}{\frac{mML^2}{12}+\frac{M^2L^2}{12}+mMb^2} = \frac{24mMbw}{mML^2+M^2L^2+12mMb^2} \Rightarrow y = \frac{x}{mML^2+M^2L^2+12mMx^2}$$

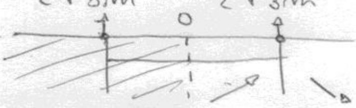
$$y' = \frac{mML^2+M^2L^2+12mMx^2-24mMx^2}{(mML^2+M^2L^2+12mMx^2)^2} = \frac{mML^2+M^2L^2-12mMx^2}{(\quad)^2} > 0 \Rightarrow D>0 \ \forall x$$

$N > 0 \quad mML^2 + M^2L^2 - 12mMx^2 > 0$

$\Rightarrow 12m\cancel{M}x^2 < m\cancel{M}L^2 + M^{\cancel{2}}L^2 \quad \Rightarrow$

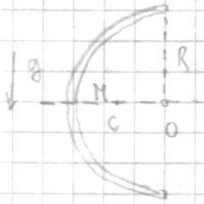
$x^2 < \dfrac{L^2(m+M)}{12m} \qquad x = \pm\sqrt{\dfrac{L^2(m+M)}{12m}}$

$-\dfrac{L}{2}\sqrt{\dfrac{m+M}{3m}} < x < \dfrac{L}{2}\sqrt{\dfrac{m+M}{3m}}$

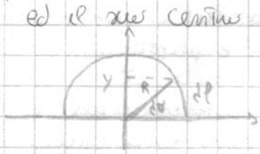


$x = b = \dfrac{L}{2}\sqrt{\dfrac{m+M}{3m}}$ è il valore di b che rende massima la velocità angolare ω

ESERCIZIO 2 20 SETTEMBRE 2011



a) Calcoliamo la distanza d tra il centro di massa del semianello ed il suo centro di curvatura O:



$$M = \int dm = \lambda L = \lambda \pi R$$

$$dm = \lambda\, dl \qquad \frac{dl}{R} = d\vartheta \Rightarrow dl = R\,d\vartheta \Rightarrow dm = \lambda R\, d\vartheta$$

$$d = y_{CM} = \frac{\int y\, dm}{M} = \frac{\int_0^\pi R \operatorname{sen}\vartheta\, \lambda R\, d\vartheta}{M} = \frac{R^2\lambda}{M}\int_0^\pi \operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta = \frac{R^{\cancel{2}}}{\cancel{M}}\frac{\cancel{M}}{\pi \cancel{R}}\left[-\cos\vartheta\right]_0^\pi = \frac{R}{\pi}\left(1-(-1)\right) = \frac{2R}{\pi}$$

b) Calcoliamo il momento di inerzia del semianello rispetto al CM (I_{CM}) e rispetto al punto P (I_P) in cui la retta CO interseca il semianello. Per calcolare il momento di inerzia totale si usa la definizione

$$I = \int R^2 dm = \int_0^\pi R^2 \lambda R\, d\vartheta = R^3 \lambda \int_0^\pi d\vartheta = R^{\cancel{3}2}\frac{M}{\pi \cancel{R}}\left[\vartheta\right]_0^\pi = \frac{R^2 M}{\cancel{\pi}}\cancel{\pi} = MR^2$$

Questo è il momento di inerzia calcolato rispetto a O e non rispetto al CM, pertanto dobbiamo impiegare il Teorema di Huygens-Steiner

$$I = I_{CM} + Md^2 \Rightarrow I_{CM} = I - Md^2 \Rightarrow I_{CM} = MR^2 - Md^2 = M(R^2 - d^2)$$

Utilizziamo ora Huygens-Steiner per calcolare il momento di inerzia rispetto al punto P:

$$I_P = I_{CM} + M(R-d)^2 = M(R^2-d^2) + M(R-d)^2$$

c) Per calcolare la velocità angolare nei due casi teniamo comunque conto del fatto che l'energia meccanica si conserva, quindi inizialmente sarà solo potenziale, diventando solo cinetica all'istante richiesto; con il puro rotolamento l'energia cinetica è di rotazione attorno a P, quando non c'è attrito l'energia cinetica è di rotazione attorno ad O.

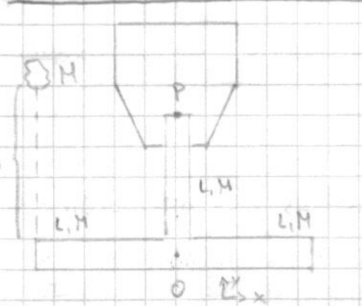
$$Mg\left(R-(R-d)\right) = \frac{1}{2} I_P \omega^2 \Rightarrow \frac{2Mgd}{I_P} = \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2\cancel{M}gd}{\cancel{M}(R^2-d^2)+\cancel{M}(R-d)^2}} = \frac{1}{R-d}\sqrt{\frac{2gd}{R^2-d^2}}$$

questa è la velocità angolare in caso di puro rotolamento

$$Mg\left(R-(R-d)\right) = \frac{1}{2} I_O \omega'^2 \Rightarrow \frac{2Mgd}{I_O} = \omega'^2 \Rightarrow \omega' = \sqrt{\frac{2\cancel{M}gd}{\cancel{M}R^2}} = \frac{1}{R}\sqrt{2gd}$$

questa è la velocità angolare in assenza di attrito

ESERCIZIO 2 13 LUGLIO 2011



Il corpo di massa M cade partendo da fermo da un'altezza h fino ad urtare un estremo della T in un processo istantaneo e perfettamente anelastico.

a) Prima dell'urto si conserva solo l'energia meccanica in quanto non ci sono forze esterne; durante l'urto si conserva solo il momento angolare poiché non ci sono forze esterne con momento torcente; infine dopo l'urto si conserva soltanto l'energia meccanica (durante e dopo la quantità di moto non si conserva poiché c'è il vincolo, dopo il momento non si conserva perché non è nulla la somma dei mom. torcenti

b) Calcoliamo la posizione del CM della T

$x_{CM}=0 \qquad y_{CM} = \frac{0\cdot 2\cancel{M} + L/2\cdot \cancel{M}}{3\cancel{M}} = \frac{L}{6} \Rightarrow CM_T = \left(0, \frac{L}{6}\right)$

Calcoliamo ora il CM dopo l'urto

$x_{CM} = \frac{(-L\cdot M) + 0\cdot 3M}{4M} = -\frac{L}{4} \qquad y_{CM} = \frac{L/6\cdot 3M + 0\cdot M}{4M} = \frac{L}{8} \Rightarrow CM\left(-\frac{L}{4}; \frac{L}{8}\right)$

$d_1 = L - \frac{L}{6} = \frac{5}{6}L$ ecco la distanza di CM_T da P

$d_2 = \sqrt{\left(\frac{L}{4}\right)^2 + \left(L - \frac{L}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{L^2}{16} + \frac{49}{64}L^2} = \sqrt{\frac{4L^2 + 49L^2}{64}} = \frac{L}{8}\sqrt{53}$ ecco la distanza di CM da P

c) Per calcolare la velocità angolare e l'energia cinetica dopo l'urto consideriamo che durante l'urto il momento angolare si conserva e che possiamo calcolare la velocità del corpo, in quanto in caduta libera

$V_M = \sqrt{2gh}$ derivata dal fatto che $\begin{cases} x(t) = h = \cancel{x_0} + \cancel{v_0 t} + \frac{1}{2}gt^2 \\ v(t) = \cancel{v_0} + at \end{cases}$

La conservazione del momento ci dice che

$I\omega = \overset{M}{M}\,\overset{v}{\sqrt{2gh}}\cdot\overset{\times d}{L}$

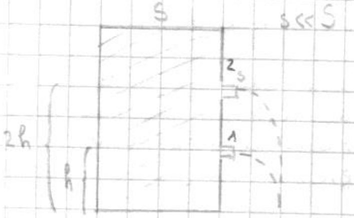
$I = \underbrace{\frac{1}{3}ML^2}_{\text{asta vert}} + \underbrace{\frac{1}{12}2M(2L)^2 + 2ML^2}_{\text{asta orizzontale steiner}} + \underbrace{M(L\sqrt{2})^2}_{\text{corpo } \int x^2 dm} = 5ML^2$

$\Rightarrow \omega = \frac{M\sqrt{2gh}\,L}{I} = \frac{\cancel{M}\sqrt{2gh}\,L}{5\cancel{M}L^2} = \frac{\sqrt{2gh}}{5L}$

Per compiere rotazioni complete il sistema deve avere $E_K > U$ quindi

$\frac{1}{2}I\omega^2 > 4Mg(2d_2 - y_{CM})$

ESERCIZIO 6 23 GIUGNO 2011



Ad un certo punto dai due fori l'acqua esce cadendo nello stesso punto.
Per calcolare il volume del liquido contenuto nel recipiente a quell'istante consideriamo con x il livello iniziale del fluido ed usiamo il teorema di Bernoulli:

$$\cancel{P_0} + \cancel{\rho} g x + \frac{1}{2}\cancel{\rho v^2} = \cancel{P_0} + \cancel{\rho} g h + \frac{1}{2}\cancel{\rho} v_1^2$$ in quanto la v iniziale è prossima a 0

$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2g(x-h)}$ quindi è un moto uniformemente accelerato

$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ poiché si tratta di un moto uniformemente accelerato

$d_1 = v_1 \cdot \Delta t = \sqrt{2g(x-h)}\sqrt{\frac{2h}{g}}$ ecco la gittata del foro più in basso

analogamente, sostituendo 2h ad h troviamo che $d_2 = \sqrt{2g(x-2h)}\sqrt{\frac{4h}{g}}$

Nel nostro caso le due gittate sono uguali, quindi:

$$d_1 = d_2 \Rightarrow \sqrt{2g(x-h)}\sqrt{\frac{2h}{\cancel{g}}} = \sqrt{2g(x-2h)}\sqrt{\frac{4h}{\cancel{g}}} \Rightarrow (2x-2h)\cdot\cancel{2h} = (2x-4h)\overset{2}{\cancel{4h}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-2h = 4x-8h \Rightarrow 2x = 6h \Rightarrow x = 3h$$

quando i due getti cadono nello stesso punto il volume sarà quindi:

$V = S \cdot 3h$

Perciò la gittata dei due fori sarà: $d = \sqrt{2g(3h-h)}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2g\,4h^2}{g}} = 2h\sqrt{2}$

Per vedere agli istanti successivi quale getto arriverà più lontano dobbiamo studiare la funzione differenza tra le due funzioni delle distanze dei getti:

$d_1 = 2\sqrt{h(x-h)} \Rightarrow y_1 = h(x-h) \qquad d_2 = 2\sqrt{2h(x-2h)} \Rightarrow y_2 = 2h(x-2h)$

$y = y_2 - y_1 = 2h(x-2h) - h(x-h) = 2hx - 4h^2 - hx + h^2 = hx - 3h^2$

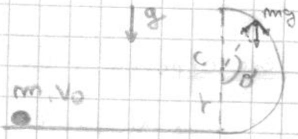
$y' = h > 0 \quad \forall x$

$hx - 3h^2 = 0 \Rightarrow x = 3h$

Poiché la funzione è sempre crescente e si annulla per $x = 3h$, scendendo sotto tale valore la funzione è negativa; pertanto la prima distanza (d_2) sarà minore della seconda (d_1):

$d_2 - d_1 < 0 \Rightarrow d_2 < d_1$

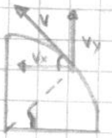
ESERCIZIO 1 26 GENNAIO 2012



Il corpo si stacca quando sottende un angolo di 150°

a) Per calcolare la velocità V_1 all'istante del distacco dobbiamo considerare che in quell'istante la reazione vincolare è nulla, e quindi accelerazione centripeta è garantita dalla componente perpendicolare della forza peso

$$m\cdot a_c = \cancel{m}\frac{V^2}{r} = \cancel{m}g\cos(\pi-\vartheta) \Rightarrow V^2 = rg\cos(\pi-\vartheta) \Rightarrow V = \sqrt{rg\frac{\sqrt{3}}{2}}$$



$$V_x = V\cos(\pi-\vartheta) = \sqrt{rg\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$V_y = V\,sen(\pi-\vartheta) = \sqrt{rg\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1}{2}$$

b) Per calcolare la velocità iniziale usiamo la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}\cancel{m}V_0^2 = \frac{1}{2}\cancel{m}V^2 + 2\cancel{m}g(r+r\cos(\pi-\vartheta)) \Rightarrow V_0^2 = V^2 + 2gr\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = rg\frac{\sqrt{3}}{2} + gR(2+\sqrt{3}) =$$

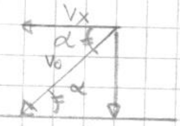
$$= gR\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+2+\sqrt{3}\right) \Rightarrow V_0 = \sqrt{gR\frac{\sqrt{3}+4+2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{gR\left(2+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$$

c) Per trovare la reazione nell'istante in cui il corpo transita in $(r;r)$ imponiamo la conservazione dell'energia meccanica e che l'accelerazione centripeta sia garantita solo dalla reazione normale; quindi:

$$\frac{1}{2}\cancel{m}V_0^2 = \frac{1}{2}\cancel{m}V_1^2 + 2\cancel{m}gr \Rightarrow V_1^2 = V_0^2 - 2gr \Rightarrow V_1 = \sqrt{2gR + gR\frac{3\sqrt{3}}{2} - \cancel{2gr}} = \sqrt{gR\cdots}$$

$$m\cdot a_c = m\cdot\frac{V_1^2}{R} = m\cdot\frac{g\cancel{R}3\sqrt{3}}{2\cancel{R}} = N \Rightarrow N = \frac{mg3\sqrt{3}}{2}$$

d) Per calcolare l'angolo formato dal corpo al suo impatto con la guida consideriamo che la velocità all'atterraggio è uguale a V_0 in quanto l'energia si è conservata, e la sua componente x è uguale a quella della velocità al distacco in quanto durante la caduta si conserva la quantità di moto lungo x

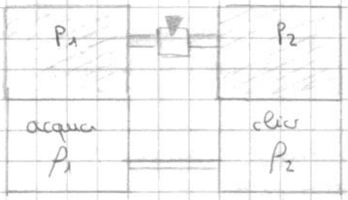


$$V_x = V_0\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{V_x}{V_0} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{V_x}{V_0}\right)$$

$$\alpha = \arccos\left(\sqrt{\frac{rg\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{gR}}\right) = \ldots$$

non ho considerato il segno "–" per V_x così che ho ottenuto l'angolo acuto e non il suo complementare

ESERCIZIO 6 7 MARZO 2012



$P_1 > P_2$

Il sistema è all'equilibrio in quanto le pressioni soprastanti sono diverse.
Viene aperta la connessione superiore.

Quando la connessione viene aperta, le pressioni diventano uguali e l'acqua si abbassa fluendo in parte nel contenitore dell'olio; inizialmente infatti, affinché i due liquidi fossero alla stessa altezza, la pressione sull'olio doveva essere maggiore di quella sull'acqua. Otteniamo quindi una stessa variazione di pressione:

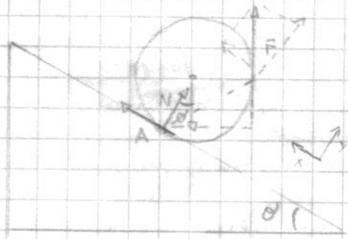
$$\cancel{p_0} + \rho_1 g(h-\Delta h) = \cancel{p_0} + \rho_1 g\Delta h + \rho_2 g h$$

dove Δh è l'altezza di cui l'acqua cala da una parte e aumenta dall'altra

$$\rho_1 g h - \rho_1 g \Delta h = \rho_1 g \Delta h + \rho_2 g h \Rightarrow 2\rho_1 \cancel{g} \Delta h = \rho_1 \cancel{g} h - \rho_2 \cancel{g} h$$

$$\Rightarrow \Delta h = \frac{h(\rho_1 - \rho_2)}{2\rho_1 \Delta h}$$

ESERCIZIO 1 26 SETTEMBRE 2007



M, R, I (rispetto all'asse di simmetria) sono noti. La forza F fa rimanere fermo il cilindro

a/b/c) Per trovare F, N e A dobbiamo imporre le condizioni di statica, quindi le forze lungo x e y dovranno essere 0, così come la somma dei momenti

$$\begin{cases} FR(1+\operatorname{sen}\theta) - MgR\operatorname{sen}\theta = 0 & \sum \tau_z = 0 \\ F\cos\theta + N - Mg\cos\theta = 0 & \sum F_x = 0 \\ A + F\operatorname{sen}\theta - Mg\operatorname{sen}\theta = 0 & \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = \dfrac{MgR\operatorname{sen}\theta}{R(1+\operatorname{sen}\theta)} = \dfrac{Mg\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} \\ N = Mg\cos\theta - \dfrac{Mg\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\cos\theta \\ A = Mg\operatorname{sen}\theta - \dfrac{Mg\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

quindi $F = \dfrac{Mg\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}$ $\quad N = Mg\cos\theta\left(1 - \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\right)$ $\quad A = Mg\operatorname{sen}\theta\left(1 - \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\right)$

L'attrito A in questo caso è statico: $\mu_s N < A \Rightarrow \mu_s < \dfrac{A}{N}$

$$\mu_s < \frac{\cancel{Mg}\operatorname{sen}\theta\cancel{\left(1 - \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\right)}}{\cancel{Mg}\cos\theta\cancel{\left(1 - \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\right)}} \Rightarrow \mu_s < \operatorname{tg}\theta$$

d) Consideriamo ora il caso in cui la forza F venga tolta e quindi il cilindro comincia a muoversi con un moto di puro rotolamento, pertanto per calcolare l'accelerazione angolare α dobbiamo usare la II cardinale:

$I_{CM} = \dfrac{MR^2}{2}$ $\quad I_P = I_{CM} + MR^2 = \dfrac{3}{2}R^2$

$I\alpha = MgR\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \alpha = \dfrac{MgR\operatorname{sen}\theta}{I} \Rightarrow \alpha = \dfrac{Mg\cancel{R}\operatorname{sen}\theta}{\frac{3}{2}R^{\cancel{2}}} = \dfrac{2Mg\operatorname{sen}\theta}{3R}$

Calcoliamo ora la risultante delle forze in dipendenza da α

F_x: $Ma = M\alpha R = MgR\operatorname{sen}\theta$

F_y: $Ma = M\alpha R = MgR\cos\theta$

ESERCIZIO 3 23 APRILE 2013

L'altezza del recipiente è H_0 ha alla base un foro di sezione $s \ll S$ (sezione del cilindro). Il liquido non è omogeneo e la sua densità varia con l'altezza: all'inizio si ha $\rho(z) = \rho_0(1+z/H_0)$, dove z è la profondità misurata a partire dalla sommità del recipiente. Il liquido esce dal foro posto alla base del cilindro.

CILINDRO PIENO:

$$\cancel{p_0} + \rho g \underset{0}{\underset{\parallel}{h}} + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\rho} v^2 = \cancel{p_0} + \rho_z g h + \frac{1}{2}\rho_z V^2$$

v è trascurabile rispetto a V

$$\rho(z) g h = \Delta p = \int_0^{H_0} \rho(z) g \, dz = \int_0^{H_0} \rho_0 \left(1 + \frac{z}{H_0}\right) g \, dz = \rho_0 g \int_0^{H_0} \left(1 + \frac{z}{H_0}\right) dz =$$

$$= \rho_0 g \left[z + \frac{z^2}{2H_0} \right]_0^{H_0} = \rho_0 g \left[H_0 + \frac{H_0^2}{2H_0} - 0 - 0 \right] = \frac{3}{2} H_0 \rho_0 g = \rho(z) g h$$

$$\rho(z) = \rho_0 \left(1 + \frac{H_0}{H_0} \right) = 2\rho_0$$

$$\frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} \cancel{\rho_0} V^2 = -\frac{3}{2} H_0 \cancel{\rho_0} g \implies V^2 = -\frac{3}{2} H_0 g \implies V = \sqrt{\frac{3}{2} g H_0}$$

il segno "-" è stato tolto considerando l'orientamento dell'asse

CILINDRO A METÀ:

$$\cancel{p_0} + \cancel{\rho g h} + \frac{1}{2}\cancel{\rho v^2} = \cancel{p_0} + \rho_z g h + \frac{1}{2}\rho_z V^2$$

come sopra

Analogamente a quanto fatto nel caso precedente ora abbiamo:

$$\rho(z) g h = \rho_0 g \left[z + \frac{z^2}{2H_0} \right]_0^{H_0/2} = \left[\frac{H_0}{2} + \frac{H_0^2}{8 H_0} \right] \rho_0 g = \frac{5}{8} H_0 \rho_0 g$$

$$\rho(z) = \rho_0 \left(1 + \frac{H_0}{2H_0} \right) = \frac{3}{2} \rho_0$$

$$\frac{1}{\cancel{2}} \frac{3}{\cancel{2}} \cancel{\rho_0} V^2 = -\frac{5}{\cancel{8}\,2} H_0 \cancel{\rho_0} g \implies V^2 = -\frac{5}{6} H_0 g \implies V = \sqrt{\frac{5}{6} g H_0}$$

anche qui si è tolto il segno "-"

N.B. è lecito togliere il "-" in quanto normalmente consideriamo g positiva quando va in direzione opposta a quella positiva dell'asse; nel nostro caso g è diretta lungo la stessa direzione dell'asse e pertanto va considerata negativa, potendo così togliere il segno "-" da davanti l'espressione in cui compare.

ESERCIZIO 2 6 SETTEMBRE 2011

Calcoliamo prima l'energia potenziale di ogni elemento; collocando gli assi come qui, il disco ha energia potenziale nulla in quanto il suo CM si trova a $x = 0$. Calcoliamo quindi l'energia potenziale della sbarretta e della massa puntiforme:

$$U_s = Mg \cdot 2A - 2A\cos\theta = Mg\, 2A(1-\cos\theta)$$

$$U_M = Mg\frac{\theta 3A}{3} = Mg\,\theta A$$ in quanto la massa scende di un tratto pari a 1/3 di quello descritto dalla sbarretta (dal suo estremo più lontano) in quanto essa ruota con un raggio triplo rispetto a quello della circonferenza attorno alla quale è avvolto il filo (...

$$\Rightarrow U_{TOT} = U_s + U_M = -Mg\,2A(1-\cos\theta) + Mg\,\theta A = MgA(\theta - 2 + 2\cos\theta)$$

Passiamo ora al calcolo dell'energia cinetica; prima studiamo i momenti di inerzia della sbarretta e del disco:

$$I_D = \frac{MA^2}{2} \qquad I_S = \frac{1}{12}M(2A)^2 + M(2A)^2 = \frac{M}{\cancel{12}\,3}\cancel{4}A^2 + 4MA^2 = \frac{13\,MA^2}{3}$$

Quindi l'energia cinetica totale è data da:

$$E_{K\,TOT} = \frac{1}{2}I_D\omega^2 + \frac{1}{2}I_S\omega^2 + \frac{1}{2}M(\omega A)^2 = \frac{1}{2}\frac{MA^2}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{13\,MA^2}{3}\omega^2 + \frac{1}{2}M\omega^2A^2 =$$

$$= \frac{3MA^2\omega^2 + 26MA^2\omega^2 + 6M\omega^2A^2}{12} = \frac{35}{12}MA^2\omega^2$$

Determiniamo ora eventuali punti di equilibrio stabile:

$U(x) = MgA(x - 2 + 2\cos x) \approx x + 2\cos x$

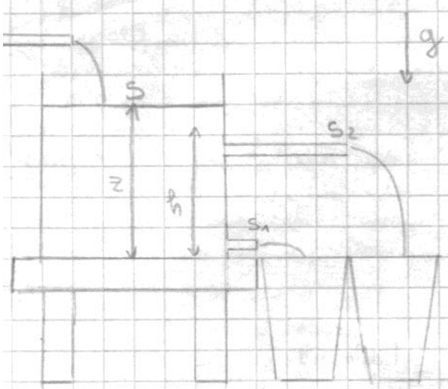
$U'(x) = 1 - 2\sin x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5}{6}\pi$ sono punti di equilibrio

$U''(x) = -2\cos x$

$U''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\cancel{2}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ è punto di equilibrio instabile

$U''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cancel{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{5}{6}\pi$ è punto di equilibrio stabile

ESERCIZIO 3 24 SETTEMBRE 2013



$S_1 < S_2 \ll S$

Il liquido nel recipiente viene tenuto ad un livello costante $z = 3h/2$

Affinché i due contenitori si riempiano simultaneamente è necessario che i due tubi che li riempiono abbiano la stessa portata, quindi con l'equazione di continuità:

$$S_1 V_1 = S_2 V_2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

A questo punto dobbiamo determinare la velocità con cui il liquido esce dai due tubi, e per farlo ci serviamo del teorema di Bernoulli:

$$\cancel{p_0} + \rho g \frac{3}{2}h + \underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2}_{V \text{ trascurabile}} = \cancel{p_0} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow \cancel{\rho} g \frac{3}{2}h = \frac{1}{2}\cancel{\rho} V_2^2 + \cancel{\rho} g h$$

$$\Rightarrow gh\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}V_2^2 \Rightarrow V_2^2 = \frac{1}{\cancel{2}} gh \cdot \cancel{2} \Rightarrow V_2 = \sqrt{gh}$$ ecco la velocità con cui il liquido esce da S_2

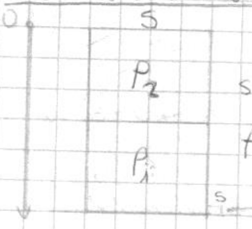
$$\cancel{p_0} + \rho g \frac{3}{2}h + \cancel{\frac{1}{2}\rho v^2} = \cancel{p_0} + \underbrace{\cancel{\rho g h}}_{h=0} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \Rightarrow \cancel{\rho} g \frac{3}{\cancel{2}}h = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\rho} V_1^2 \Rightarrow V_1^2 = 3gh$$

$\Rightarrow V_1 = \sqrt{3gh}$ questa è la velocità con cui il liquido esce da S_1

Pertanto i due contenitori si riempiranno simultaneamente se:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\sqrt{\cancel{gh}}}{\sqrt{3\cancel{gh}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ESERCIZIO 3 18 GIUGNO 2013



$s \ll S$

$\rho_2 = \rho_1/3$

Il liquido con densità ρ_2 esce e colpisce il suolo ad una certa distanza, quando esce il secondo liquido si osserva che la distanza raggiunta dal getto è la stessa.

Per determinare il rapporto dei volumi dei due liquidi dobbiamo prima imporre che colpiscono il terreno con il getto nello stesso punto, dovranno quindi avere uguali velocità. Calcoliamole con il teorema di Bernoulli nei due casi:

$$\cancel{p_0} + \underbrace{\cancel{(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) g}}_{\text{altezza } 0} + \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{2}\rho_2 v^2}}_{v^2 \text{ trasc}} = \cancel{p_0} + (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) g + \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{\rho_1} v_1^2 = \cancel{\rho_1} h_1 g + \frac{\cancel{\rho_1}}{3} h_2 g \Rightarrow v_1^2 = 2h_1 g + \frac{2}{3} h_2 g$$ per tutti e due i liquidi.

Consideriamo ora quando abbiamo solo il liquido superiore

$$\cancel{p_0} + \rho_2 h_1 g + \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{2}\rho_2 v^2}}_{v^2 \text{ trasc}} = \cancel{p_0} + \rho_2 (h_2 + h_1) g + \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2$$

$$\Rightarrow \cancel{\rho_2 h_1 g} - \cancel{\rho_2} h_2 g - \cancel{\rho_2 h_1 g} = \frac{1}{2}\cancel{\rho_2} v_2^2 \Rightarrow v_2^2 = -2gh_2$$

considerando che abbiamo orientato l'asse verso il basso

$$v_2^2 = 2gh_2$$

Uguagliamo ora le velocità:

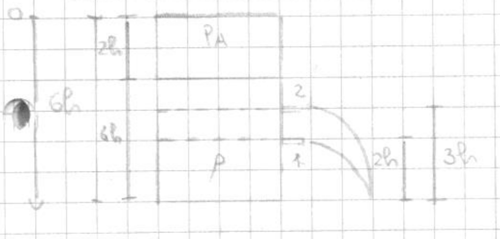
$$\cancel{2}h_1\cancel{g} + \frac{\cancel{2}}{3}h_2\cancel{g} = \cancel{2}\cancel{g}h_2 \Rightarrow h_1 = \frac{2}{3}h_2 \Rightarrow 3h_1 = 2h_2$$

Poiché i due volumi saranno Sh_1, Sh_2 allora, dato che il volume è proporzionale alle altezze, il rapporto tra i due volumi sarà come quello tra le altezze:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{Sh_1}{Sh_2} = \frac{\cancel{S}\frac{2}{3}\cancel{h_2}}{\cancel{S}\cancel{h_2}} = \frac{2}{3}$$

NB dopo un po' di tempo il getto sarà più corto; si può verificare studiando la funzione relativa alla distanza del getto.

ESERCIZIO 3 28 GENNAIO 2016



Il cilindro è superiormente chiuso; il gas è inizialmente a pressione P_A mentre la pressione esterna è trascurabile.
I due getti colpiscono inizialmente lo stesso punto.

Per determinare P_A e la distanza raggiunta utilizziamo il teorema di Bernoulli, tramite il quale ricaviamo la velocità.

$$\cancel{\rho g h} + \frac{1}{2}\rho V^2 = P_A + \rho g h + \frac{1}{2}\rho V_2^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\rho V_2^2 = -P_A - \rho g h$$ cambiando il "-" per l'orientazione dell'asse

$$\Rightarrow V_2^2 = \frac{2}{\rho}(P_A + \rho g h)$$

$$\cancel{\rho g h} + \frac{1}{2}\rho V^2 = P_A + \rho g 2h + \frac{1}{2}\rho V_1^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\rho V_1^2 = -P_A - 2\rho g h$$ cambiando il segno come sopra

$$\Rightarrow V_1^2 = (P_A + 2\rho g h)\frac{2}{\rho}$$

Ora consideriamo che il tempo necessario affinché il fluido tocchi terra è quello di un moto uniformemente accelerato e quindi della forma $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$; quindi uguagliamo le due distanze percorse dai getti:

$$d_2^2 = d_1^2 \Rightarrow \frac{2}{\cancel{\rho}}(P_A + \rho g h)\cdot\frac{6h}{\cancel{g}} = \frac{2}{\cancel{\rho}}(P_A + 2\rho g h)\frac{4h}{\cancel{g}}$$

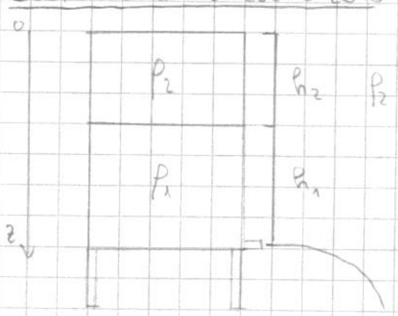
$$\Rightarrow 6P_A + 6\rho g h = 4P_A + 8\rho g h \Rightarrow \cancel{2}P_A = \cancel{2}\rho g h \Rightarrow P_A = \rho g h$$

Quindi la distanza raggiunta dai due getti è:

$$d_1 = d_2 = \sqrt{(\cancel{\rho} g h + \cancel{\rho} g h)\frac{2}{\cancel{\rho}}\frac{6h}{\cancel{g}}} = \sqrt{24}h = 2\sqrt{6}h$$

da finire

ESERCIZIO 3 16 LUGLIO 2013



$\rho_2 = \frac{\rho_1}{2}$

Quando comincia ad uscire il primo liquido si ha un getto che cade a distanza D_0; quando comincia ad uscire il secondo il getto raggiunge invece una distanza pari a $2/3\, D_0$

Per calcolare la distanza minima che può raggiungere il getto del primo liquido, dobbiamo tenere conto che questo succede quando il primo liquido è praticamente finito. Calcoliamo quindi le velocità nei tre diversi istanti per poi trovare la distanza richiesta; usiamo 3 volte il teorema di Bernoulli.

$$\cancel{p_0} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho V^2 = \cancel{p_0} + \rho_1 h_1 g + \rho_1 h_2 g + \frac{1}{2}\rho_1 V_0^2 \Rightarrow -2\cancel{\rho_1} h_1 g + -\cancel{2}\frac{\cancel{\rho_1}}{\cancel{2}} h_2 g = V_0^2 \cancel{\rho_1}$$

$$\Rightarrow V_0^2 = 2h_1 g + h_2 g$$ con i segni cambiati a causa dell'orientamento dell'asse

$$\cancel{p_0} + \rho_2 g h_1 + \frac{1}{2}\cancel{\rho V^2} = \cancel{p_0} + \rho_2 g (h_1 + h_2) + \frac{1}{2}\rho_1 V_1^2 \Rightarrow \rho_2 g h_1 - \cancel{\rho_2 g h_1} - \rho_2 g h_2 = \frac{1}{2}\rho_1 V_1^2$$

$$\Rightarrow -\frac{\rho_1}{\cancel{2}} g h_2 = \frac{1}{\cancel{2}}\rho_1 V_1^2 \Rightarrow V_1^2 = g h_2$$ questa è la velocità nel momento in cui si sta esaurendo il primo liquido, quindi quella che dà la minor gittata

$$\cancel{p_0} + \rho_2 g h_1 + \frac{1}{2}\cancel{\rho V^2} = \cancel{p_0} + \rho_2 g (h_1 + h_2) + \frac{1}{2}\rho_2 V_2^2 \Rightarrow \frac{\cancel{\rho}}{2} g h_1 - \frac{\cancel{\rho}}{2} g h_1 - \frac{\cancel{\rho}}{2} g h_2 = \frac{1}{2}\cancel{\rho_2} V_2^2$$

$$\Rightarrow V_2^2 = 2 g h_2$$ questa è la velocità con cui comincia ad uscire il secondo liquido, per la quale la gittata è $2/3 \cdot D_0$

Ricaviamo ora la distanza cercata, usando le relazioni note; teniamo conto che il tempo impiegato dai liquidi per cadere è sempre lo stesso e quindi le distanze dipenderanno solo dalle velocità e saranno ad esse proporzionali.

$$\left(\frac{2}{3}V_0\right)^2 = (V_2)^2 \Rightarrow (2V_0)^2 = (3V_2)^2 \Rightarrow 8h_1\cancel{g} + 4h_2\cancel{g} = 18\cancel{g}h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\underset{7}{\cancel{14}}}h_1 = \frac{4}{7}h_1$$

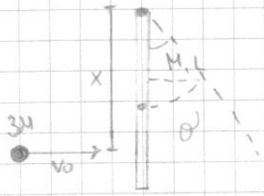
$$\Rightarrow V_1^2 = \frac{4}{7}h_1 g \qquad V_0^2 = 2h_1 g + \frac{4}{7}h_1 g = \frac{18}{7}h_1 g$$

$$\Rightarrow \frac{V_1^2}{V_0^2} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\cancel{h_1 g}}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{7}}{\underset{9}{\cancel{18}}\cancel{h_1 g}} \Rightarrow \frac{V_1^2}{V_0^2} = \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{V_1}{V_0} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow V_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}V_0 = \frac{\overset{6}{\cancel{18}}}{7}h_1 g \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{3}_1} = \frac{6\sqrt{2}}{7}h_1 g$$

Quindi la distanza minima raggiunta dal getto del primo liquido sarà data da

$$V_1 \cdot \Delta t = V_1 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$ dove h è l'altezza del foro dal suolo

ESERCIZIO 1 23 APRILE 2013



L'urto tra il corpo puntiforme e la sbarretta è elastico ed in seguito ad esso il corpo puntiforme cade in verticale.

a) Per calcolare il valore di x imponiamo la conservazione dell'energia (in quanto l'urto è elastico) e del momento angolare (la quantità di moto non si conserva a causa della presenza del vincolo); considerando poi che non ci sono forze impulsive che agiscono lungo x durante l'urto (considerando il solo proiettile) non ci può essere una componente verticale della velocità dopo l'urto.

$$\begin{cases} \cancel{\frac{1}{2}}3MV_0^2 = \cancel{\frac{1}{2}3MV'^2} + \cancel{\frac{1}{2}}I\omega^2 \\ 3MV_0x = \cancel{3MV'x} + I\omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \frac{V_0}{x} \\ 3M\cancel{V_0}x = I\frac{\cancel{V_0}}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \frac{V_0}{x} \\ x^2 = \frac{I}{3M} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{I}{3M}} \\ \omega = V_0\sqrt{\frac{3M}{I}} \end{cases}$$

Dove $I = \frac{1}{3}ML^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{\cancel{M}L^2}{3\cancel{M}}} = \frac{L}{3}$

b) Per calcolare l'ampiezza delle oscillazioni della sbarretta, teniamo conto del fatto che, dato che l'energia del sistema si conserva, l'energia cinetica del proiettile dell'inizio diventerà tutta energia potenziale quando la sbarretta si fermerà al massimo dell'altezza raggiungibile:

$$\cancel{\frac{1}{2}}3MV_0^2 = Mg\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2}\cos\vartheta\right) = Mg\frac{L}{\cancel{2}}(1-\cos\vartheta) \Rightarrow 3\cancel{M}V_0^2 = \cancel{M}gL - \cancel{M}gL\cos\vartheta$$

$$\Rightarrow gL\cos\vartheta = gL - 3V_0^2 \Rightarrow \cos\vartheta = \frac{gL-3V_0^2}{gL} \Rightarrow \vartheta = \arccos\left(\frac{gL-3V_0^2}{gL}\right)$$

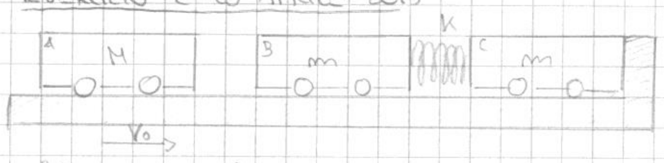
c) Nel caso in cui $x = 2L/3$, la velocità del proiettile dopo l'urto sarà:

$$\begin{cases} \cancel{\frac{1}{2}}3MV_0^2 = \cancel{\frac{1}{2}}3MV_A^2 + \cancel{\frac{1}{2}}I\omega^2 \\ \cancel{3}MV_0\frac{2L}{\cancel{3}} = \cancel{3}MV'\frac{2L}{\cancel{3}} + I\omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3M(V_0^2 - V'^2) = I\omega^2 \\ 2ML(V_0 - V') = I\omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \frac{3}{2L}(V_0+V') \\ 2ML(V_0-V') = I\cdot\frac{3}{2L}(V_0+V') \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2MLV_0 - 2MLV' = I\frac{3V_0}{2L} + I\frac{3}{2L}V' \Rightarrow V'\left(I\frac{3}{2L} + 2ML\right) = V_0\left(2ML - I\frac{3}{2L}\right)$$

$$\Rightarrow V' = \frac{V_0\left(2ML - \frac{1}{\cancel{3}}ML^2\cdot\frac{\cancel{3}}{2L}\right)}{\left(\frac{1}{\cancel{3}}ML^2\cdot\frac{\cancel{3}}{2L} + 2ML\right)} = V_0\cdot\frac{3ML}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{5}\cdot\frac{1}{ML} = \frac{3}{5}V_0$$

ESERCIZIO 2 23 APRILE 2013



La molla è a riposo e C è a contatto con una parete fissa. A urta B all'istante t=0 in un processo istantaneo e perfettamente anelastico

a) Per trovare l'energia dissipata nell'urto dobbiamo fare la differenza tra le energie cinetiche subito prima e subito dopo l'urto; la velocità subito dopo l'urto si trova con la conservazione della quantità di moto:

$$MV_0 = (m+M)V_{AB} \Rightarrow V_{AB} = \frac{M}{m+M}V_0$$

$$\Delta E = \Delta E_k = \frac{1}{2}MV_0^2 - \frac{1}{2}(M+m)V_{AB}^2 = \frac{1}{2}MV_0^2 - \frac{1}{2}\cancel{(M+m)}\frac{M^2V_0^2}{(m+M)^{\cancel{2}}} = \frac{M(\cancel{M}+m)V_0^2 - \cancel{M^2V_0^2}}{2(m+M)} =$$

$$= \frac{Mm V_0^2}{2(M+m)}$$ è l'energia dissipata nell'urto

b) Cerchiamo eventuali valori di M per cui ΔE è massimo:

$$y = \frac{x}{m+x} \Rightarrow y' = \frac{m+\cancel{x}-\cancel{x}}{(m+x)^2} > 0 \quad \forall x$$

la funzione è monotona crescente quindi non esistono valori di M per cui è massimo ΔE

c) d) Consideriamo ora M=m; per trovare a quale distanza si trova C dalla parete agli istanti $\{t_m\}$ (quelli in cui la molla è a riposo e si sta per comprimere) dobbiamo prima trovare tali istanti; per prima cosa C si stacca dalla parete dopo che la molla è tornata di nuovo in equilibrio dopo l'impatto di A con B, ovvero dopo T/2; da qui la molla raggiungerà la condizione di equilibrio in seguito alla quale si comprimerà dopo T'/2. A questo punto l'equilibrio della molla (che poi si comprime) verrà raggiunto ogni periodo T'.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}} \Rightarrow \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$$ quando C si stacca dalla parete

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad \text{con } \mu = \frac{2m\cdot \cancel{m}}{2\cancel{m}+\cancel{m}} = \frac{2}{3}m \Rightarrow \omega' = \sqrt{\frac{3k}{2m}} \Rightarrow T' = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{3k}} \Rightarrow \frac{T'}{2} = \pi\sqrt{\frac{2m}{3k}}$$

$$t_m = \frac{T}{2} + \frac{T'}{2} + mT = \pi\sqrt{\frac{2m}{k}} + \pi\sqrt{\frac{2m}{3k}} + m2\pi\sqrt{\frac{2m}{3k}} = \pi\sqrt{\frac{2m}{k}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{m}{\sqrt{3}}\right) = \pi\sqrt{\frac{2m}{k}}\,\frac{1+\sqrt{3}+m}{\sqrt{3}}$$

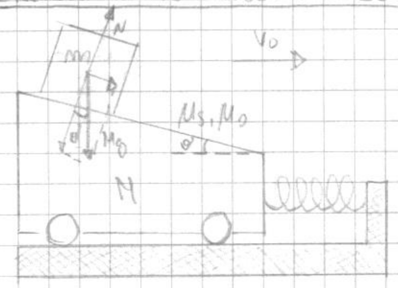
Trovati gli istanti t_m, per calcolare la distanza di C dalla parete, moltiplichiamo t_m per la velocità del centro di massa del sistema (rispetto al quale C si trova sempre alla stessa distanza in questi istanti) che troviamo attraverso la conservazione della quantità di moto

$$\text{con } M=m \quad V_{AB} = \frac{m}{m+m}V_0 = \frac{\cancel{m}}{2\cancel{m}}V_0 = \frac{V_0}{2}$$

$$2mV_{AB} = (2m+m)V_{CM} \Rightarrow V_{CM} = \frac{2m}{3m}V_{AB} = \frac{2}{3}\frac{V_0}{\cancel{2}} = \frac{V_0}{3}$$

$$d_m = t_m V_{CM} = \frac{V_0}{3}\cdot\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}\cdot\frac{1+\sqrt{3}+m}{\sqrt{3}}$$ questa è la distanza tra C e la parete agli istanti t_m

ESERCIZIO 2 19 FEBBRAIO 2013



All'istante $t=0$ la molla è a riposo e il corpo inferiore si muove a velocità V_0 insieme al blocchetto che ha sopra;

a) Per trovare il valore massimo della velocità V_0 per il quale i due blocchi rimangono solidali, diciamo che si deve conservare l'energia totale (se ci fosse attrito dinamico tra i due corpi l'energia non si conserverebbe); la massima forza (e quindi accelerazione) si ha quando la molla è massimamente compressa; quindi:

$$\frac{1}{2}(m+M)V_0^2 = \frac{1}{2}K\Delta x_{max}^2 \Rightarrow \Delta x_{max}^2 = \frac{(m+M)V_0^2}{K} \Rightarrow \Delta x_{max} = V_0\sqrt{\frac{m+M}{K}}$$

l'equazione di moto del sistema è:

$$(m+M)a_{max} = K\Delta x_{max} \Rightarrow a_{max} = KV_0\sqrt{\frac{m+M}{K}}\cdot\frac{1}{m+M} = V_0\sqrt{\frac{K}{m+M}}$$

questa sarà quindi l'accelerazione di entrambi i corpi; consideriamo solo il corpo piccolo (l'accelerazione è diretta verso sinistra)

$$a_{\parallel} = -a_{max}\cos\theta \qquad a_{\perp} = -a_{max}\,\text{sen}\,\theta$$

$$ma_{\parallel} > mg\,\text{sen}\,\theta - \mu_s N \Rightarrow -ma_{max}\cos\theta > mg\,\text{sen}\,\theta - \mu_s(mg\cos\theta - a_{max}\,\text{sen}\,\theta)$$

$$\Rightarrow ma_{max}\cos\theta < \mu_s(mg\,\text{sen}\,\theta - ma_{max}\,\text{sen}\,\theta) \Rightarrow a_{max}m(\cos\theta - \mu_s\,\text{sen}\,\theta) < \mu_s mg\,\text{sen}\,\theta$$

$$\Rightarrow \cancel{m}a_{max} < \frac{\mu_s \cancel{m}g\,\text{sen}\,\theta}{\cos\theta - \mu_s\,\text{sen}\,\theta} \Rightarrow V_0\sqrt{\frac{K}{m+M}} < \frac{\mu_s g\,\text{sen}\,\theta}{\cos\theta - \mu_s\,\text{sen}\,\theta} \Rightarrow V_0 < \sqrt{\frac{m+M}{K}}\cdot\frac{\mu_s g\,\text{sen}\,\theta}{\cos\theta - \mu_s\,\text{sen}\,\theta}$$

ecco la velocità limite per far sì che i due blocchi rimangano solidali

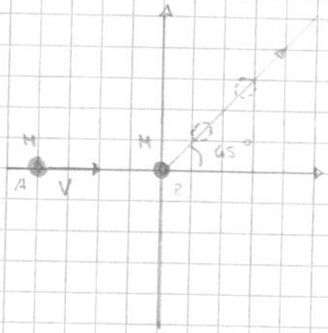
b) La molla sarà massimamente espansa dopo $3T/4$ rispetto alla posizione attuale (cioè di equilibrio); successivamente la raggiungerà ogni periodo T e quindi:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m+M}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{K}} \Rightarrow \frac{3T}{4} = \frac{3}{4}2\pi\sqrt{\frac{m+M}{K}} = \frac{3}{2}\pi\sqrt{\frac{m+M}{K}}$$

$$t_n = \frac{3T}{4} + nT = \frac{3}{2}\pi\sqrt{\frac{m+M}{K}} + 2\pi n\sqrt{\frac{m+M}{K}} = \pi\sqrt{\frac{m+M}{K}}\left(\frac{3}{2}+2n\right) \quad \text{con } n = 0,1,2\ldots$$

questi sono gli istanti ai quali la molla sarà massimamente espansa

ESERCIZIO 2 22 GENNAIO 2013



All'istante $t=0$ il corpo A urta B elasticamente, B è inizialmente fermo e dopo l'urto comincia a muoversi lungo la bisettrice del I quadrante.

Per calcolare la distanza che separa i due corpi ad un generico istante t dobbiamo prima determinare le velocità a cui si muovono dopo l'urto, quindi imponiamo la conservazione dell'energia e della quantità di moto lungo x e y:

$V_B = (W, W) \qquad V_A = (V_x, V_y)$

$$\begin{cases} MV^2 = MV_x^2 + MV_y^2 + 2MW^2 \\ MV = MW + MV_x \\ 0 = MW + MV_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -W = +V_y \\ V_x = V - W = V + V_y \\ \cancel{V^2} = \cancel{V^2} + V_y^2 + 2VV_y + V_y^2 + 2V_y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{4}^{2} V_y^{\cancel{2}} = -\cancel{2}V\cancel{V_y} \Rightarrow V_y = -\frac{V}{2} \\ W = \frac{V}{2} \\ V_x = \frac{V}{2} \end{cases}$$

Quindi $V_A = V\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) \qquad V_B = V\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Essendo un moto rettilineo uniforme troviamo facilmente la posizione delle due particelle ad un istante t

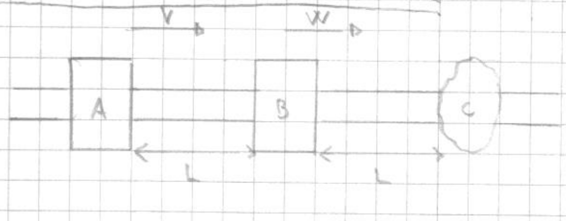
$x_A = Vt\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) \qquad x_B = Vt\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

A questo punto la distanza che separa le due particelle la si trova facendo la differenza di questi due vettori (in modulo)

$$d(t) = Vt\left\|\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\right\| = Vt\,\|(0; -1)\| = Vt(0;1) = Vt$$

pertanto i due corpi sono separati da una distanza pari a Vt

ESERCIZIO 1 12 NOVEMBRE 2012



A si muove verso B con velocità V arbitraria, B si muove verso C con velocità W da determinare e C è fermo; A urta elasticamente B e dopo B urta anelasticamente C.

a) Affinché avvenga prima l'urto tra A e B è necessario che A vada con veloc. da colpire B prima che quest'ultimo sia arrivato a C; poiché tra A e B e tra B e C intercorre la stessa distanza, l'urto tra A e B sarebbe contemporaneo a quello tra B e C se la velocità di A fosse il doppio di quella di B; quindi affinché l'urto tra A e B avvenga prima dell'altro è necessario che:

$$W < \frac{V}{2}$$

b) Per calcolare l'energia dissipata nell'urto BC vediamo a quale velocità si muovono i corpi A e B dopo il loro urto:

$$\begin{cases} \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{M}V^2 + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{M}W^2 = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{M}V'^2 + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{M}W'^2 \\ MV + MW = MV' + MW' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V^2 - V'^2 = W'^2 - W^2 \\ V - V' = W' - W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V + V' = W' + W \\ V - V' = W' - W \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V' = W' + W - V \\ V - W' \cancel{- W} + V = W' \cancel{- W} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2V = 2W' \Rightarrow W' = V \text{ la velocità di B} \\ V' = \cancel{V} + W \cancel{- V} \Rightarrow V' = W \text{ la velocità di A} \end{cases}$$

quindi A e B si muovono a velocità scambiate; usiamo ora la conservazione della quantità di moto nell'urto tra B e C per trovare la velocità del corpo risultante e calcolare quindi l'energia dissipata

$$MV = (M+M)V_{BC} \Rightarrow V_{BC} = \frac{\cancel{M}V}{2\cancel{M}} = \frac{V}{2}$$

$$\Delta E = \Delta E_K = \frac{1}{2}MV^2 - \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}M\left(\frac{V}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}MV^2 - \frac{MV^2}{4} = \frac{2MV^2 - MV^2}{4} = \frac{MV^2}{4}$$

ma ΔE non dipende da W come richiesto

c) Affinché A urti in un terzo urto il corpo formato da B e C dovremmo avere che $V_A > V_{BC}$; la velocità di A all'uscita dell'urto è diventata quella di B prima dell'urto mentre V_{BC} l'abbiamo appena calcolata:

$$V_A = W < \frac{V}{2} \qquad V_{BC} = \frac{V}{2}$$

in queste condizioni non ci sarà mai un urto tra A ed il corpo formato da B e C

ESERCIZIO 3 19 FEBBRAIO 2013

La densità varia con l'altezza secondo la legge: $\rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{z}{H_0}\right)$

Per determinare la velocità di uscita all'inizio e quando il liquido è dimezzato usiamo il teorema di Bernoulli e la legge di Stevino

$$\cancel{p_0} + \rho g h + \frac{1}{2}\cancel{\rho V^2} = \cancel{p_0} + \rho(z) g h + \frac{1}{2}\rho(z) V_1^2$$

$$\rho g h = g\int_0^{H_0} \rho(z)\,dz = g\int_0^{H_0} \rho_0 e^{-\frac{z}{H_0}}\,dz = g\rho_0(-H_0)\left[e^{-\frac{z}{H_0}}\right]_0^{H_0} = -g\rho_0 H_0\left(\frac{1}{e} - 1\right) =$$

$$= H_0 \rho_0 g\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\cancel{\rho_0}}{e} V_1^2 = H_0 \cancel{\rho_0} g\left(1 - \frac{1}{e}\right) \Rightarrow V_1^2 = 2e H_0 g\left(1 - \frac{1}{e}\right) \Rightarrow V_1 = \sqrt{2e H_0 g\left(1 - \frac{1}{e}\right)}$$

ecco la velocità di uscita quando il contenitore è pieno. Facciamo lo stesso cosa per il secondo

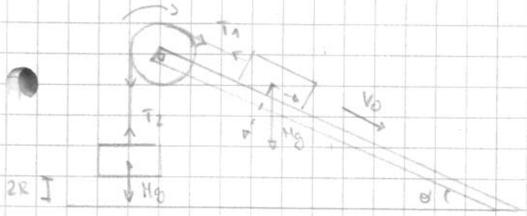
$$\cancel{p_0} + \rho g h + \frac{1}{2}\cancel{\rho V^2} = \cancel{p_0} + \rho(z) g h + \frac{1}{2}\rho V_2^2$$

$$\rho g h = g\int_0^{H_0/2} \rho(z)\,dz = g\int_0^{H_0/2} \rho_0 e^{-\frac{z}{H_0}}\,dz = g\rho_0(-H_0)\left[e^{-\frac{z}{H_0}}\right]_0^{H_0/2} = -g\rho_0 H_0\left(\frac{1}{e^{1/2}} - 1\right) =$$

$$= H_0 \rho_0 g\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\cancel{\rho_0}}{e^2} V_2^2 = H_0 \cancel{\rho_0} g\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \Rightarrow V_2^2 = 2e^2 H_0 g\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

ESERCIZIO 3 12 NOVEMBRE 2012



a)
$$\begin{cases} Ma = Mg\,\text{sen}\theta - T_1 \\ Ma = T_2 - Mg \\ I\alpha = T_1 R - T_2 R \\ a = \alpha R \end{cases} \qquad \text{con } I = \frac{MR^2}{2}$$

$$\begin{cases} T_1 = Mg\,\text{sen}\theta - Ma \\ T_2 = Ma + Mg \\ I\alpha = Mg\,\text{sen}\theta R - MaR - MaR - MgR \\ a = \alpha R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \frac{MR^2}{2} = Mg\,\text{sen}\theta R - 2M\alpha R^2 - MgR \\ a = \alpha R \\ T_1 = Mg\,\text{sen}\theta - Ma \\ T_2 = Ma + Mg \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha \frac{\cancel{M}R^{\cancel{2}}}{2} + 2\cancel{M}\alpha R^{\cancel{2}} = \cancel{M}g\,\text{sen}\theta \cancel{R} - \cancel{M}g\cancel{R} \Rightarrow \frac{5}{2}\alpha R = g(\text{sen}\theta - 1) \Rightarrow \alpha = \frac{2}{5R} g(\text{sen}\theta - 1) \\ a = \frac{2}{5} g(\text{sen}\theta - 1) \\ T_1 = Mg\,\text{sen}\theta - M\frac{2}{5}g(\text{sen}\theta - 1) = \frac{3}{5}Mg\,\text{sen}\theta + \frac{2}{5}Mg = \frac{Mg}{5}(3\,\text{sen}\theta + 2) \\ T_2 = M\frac{2}{5}g(\text{sen}\theta - 1) + Mg = Mg\left(\frac{2}{5}\text{sen}\theta - \frac{2}{5} + 1\right) = Mg\left(\frac{2}{5}\text{sen}\theta + \frac{3}{5}\right) = \frac{Mg}{5}(2\,\text{sen}\theta + 3) \end{cases}$$

b) Per trovare θ usiamo la conservazione dell'energia; uguagliamo quindi le variazioni dell'energia cinetica e di quella potenziale

$$\frac{1}{2}MV_0^2 + \frac{1}{2}MV_0^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = Mg\pi R - Mg\pi R\,\text{sen}\theta \Rightarrow MV_0^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\frac{V_0^2}{R^2} = Mg\pi R(1 - \text{sen}\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}\cancel{M}V_0^2 = \cancel{M}g\pi R(1 - \text{sen}\theta) \Rightarrow (1 - \text{sen}\theta) = \frac{5V_0^2}{4g\pi R} \Rightarrow \text{sen}\theta = 1 - \frac{5V_0^2}{4g\pi R}$$

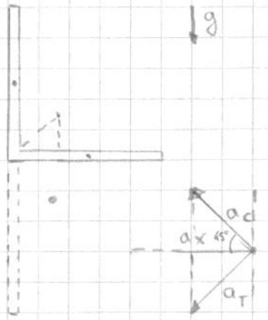
$$\Rightarrow \theta = \text{arcsen}\left(1 - \frac{5V_0^2}{4g\pi R}\right)$$

c) Il blocco scende con moto uniformemente accelerato, quindi:

$$x(t) = V_0 + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 2R + \pi R = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t^2 = \frac{4R + 2\pi R}{a} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{4R + 2\pi R}{a}}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{5}{2} \cdot \frac{2(2R + \pi R)}{g(\text{sen}\theta - 1)}}$$

ESERCIZIO 3 7 MARZO 2012



a) $I = \frac{1}{3}ML^2 + \frac{1}{3}ML^2 = \frac{2}{3}ML^2$

$x_{CM} = \frac{\frac{L}{2}M}{2M} = \frac{L}{4} = y_{CM}$

$r_{M} = \left(\frac{L}{4}; \frac{L}{4}\right)$

Per la conservazione dell'energia, riusciamo a trovare la velocità angolare quando la sbarrette sono nella posizione richiesta

$2Mg\frac{L}{\cancel{4}\,2} = \frac{1}{2}I\omega^2 - \cancel{2}Mg\frac{L}{4\,2} \Rightarrow \frac{1}{2}I\omega^2 = MgL \Rightarrow \omega^2 = \frac{MgL}{I}\cdot 2$

$\Rightarrow \omega = \frac{3}{\cancel{2}}\frac{\cancel{M}g\cancel{L}\cdot\cancel{2}}{\cancel{M}L^{\cancel{2}}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{3g}{L} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$

b) La reazione del vincolo è data da bilanciare la forza peso e la forza dovuta all'accelerazione; calcoliamo prima l'accelerazione angolare e poi quella centripeta e tangenziale

$a_c = \omega^2 R$ con $R = \sqrt{\frac{L^2}{16} + \frac{L^2}{16}} = \frac{L}{2\sqrt{2}} \Rightarrow a_c = \frac{\omega^2 L}{2\sqrt{2}} = \frac{3g}{\cancel{L}}\cdot\frac{\cancel{L}}{2\sqrt{2}} = \frac{3g}{2\sqrt{2}}$

$I\alpha = 2Mg\frac{L}{4\,2} \Rightarrow \alpha = \frac{MgL}{2I} = \frac{3}{2}\frac{\cancel{M}g\cancel{L}}{2\cancel{M}L^{\cancel{2}}} = \frac{3g}{4L}$

$a_T = \alpha R = \alpha\frac{L}{2\sqrt{2}} = \frac{3g}{4\cancel{L}}\cdot\frac{\cancel{L}}{2\sqrt{2}} = \frac{3g}{8\sqrt{2}}$

Ora calcoliamo le risultanti lungo x e y di queste accelerazioni

$a_x = -a_{c-x} - a_{T-x} = -\frac{3g}{2\cancel{\sqrt{2}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2} - \frac{3g}{8\cancel{\sqrt{2}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2} = -\frac{3g}{4} - \frac{3g}{16} = \frac{-12g - 3g}{16} = -\frac{15}{16}g$

$a_y = +a_{cy} - a_{T-y} = \frac{3g}{2\cancel{\sqrt{2}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2} - \frac{3g}{8\cancel{\sqrt{2}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2} = \frac{3g}{4} - \frac{3g}{16} = \frac{12g - 3g}{16} = \frac{9}{16}g$

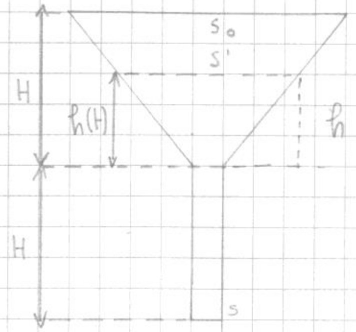
$2Ma_x = R_x \Rightarrow R_x = 2M\cdot\left(-\frac{15}{\cancel{16}\,8}g\right) = -\frac{15}{8}Mg$

$2Ma_y = R_y - 2Mg \Rightarrow R_y = 2Ma_y + 2Mg = 2M\frac{9}{\cancel{16}\,8}g + 2Mg = \frac{25}{8}Mg$

$\Rightarrow R = \left(-\frac{15}{8}Mg; \frac{25}{8}Mg\right)$

$R = \sqrt{\frac{225}{64}M^2g^2 + \frac{625}{64}M^2g^2} = Mg\sqrt{\frac{850}{64}}$

Esercizio 3 26 Gennaio 2012



$s \ll S$

Teniamo presente il fatto che mano a mano che l'altezza diminuisce diminuisce anche il raggio, quindi le due grandezze sono proporzionali; così come sono proporzionali la superficie con il quadrato del raggio e quindi per la proprietà transitiva con il quadrato dell'altezza

$S(H) = S_0 \qquad S(h) = S'$

$$\frac{S_0}{H^2} = \frac{S'}{h^2} \Rightarrow S' = \left(\frac{h}{H}\right)^2 S_0$$

Per l'equazione di continuità sappiamo che $vs = VS' \Rightarrow V = v\frac{s}{S'}$

Con il teorema di Bernoulli allora avremo:

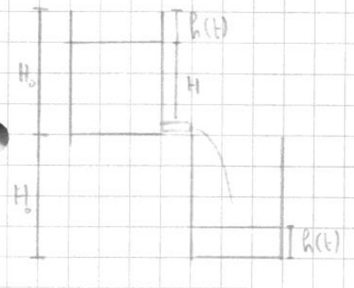
$$\cancel{p_0} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho V^2 = \cancel{p_0} + \rho g(H+h) + \frac{1}{2}\rho v^2 \Rightarrow v^2 = 2g(H+h) + V^2$$

$$\Rightarrow v^2 = 2g(H+h) + \left(\frac{v s_0}{S'}\right)^2 \Rightarrow v^2\left(1 - \frac{s^2}{S'^2}\right) = 2g(H+h) \Rightarrow v^2\left(1 - \frac{s^2 h^4}{S_0^2 H^4}\right) = 2g(H+h)$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2g(H+h)}{\left(1 - \frac{s^2 h^4}{S_0^2 H^4}\right)} \Rightarrow v(h) = \sqrt{\frac{2g(H+h)}{\left(1 - \frac{s^2 h^4}{S_0^2 H^4}\right)}}$$

questa è la velocità cercata in funzione dell'altezza

Esercizio 3 6 Settembre 2011



Il dislivello tra i due contenitori sarà:

$2H - 2h(t) = \Delta z(t)$

Applichiamo Bernoulli per il primo contenitore:

$$\cancel{p_0} + \rho g h + \cancel{\frac{1}{2}\rho V^2} = \cancel{p_0} + \rho g H + \frac{1}{2}\rho v^2$$

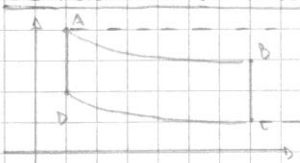
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g \Rightarrow v^2 = 2gh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Per l'equazione di continuità $Vs = Sv \Rightarrow V = v\frac{s}{S}$

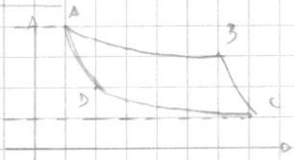
Quindi la velocità di discesa sarà:

$$V = \frac{s}{S}\sqrt{2gh} = -\dot{H} = -\frac{dH}{dt}$$ dove la velocità rappresenta la variazione di H nel tempo

ESERCIZIO 4 17 FEBBRAIO 2014



CICLO DI STIRLING



CICLO DI CARNOT

$A_S = A_C \qquad C_S = C_C$

$T_{AB} = 2T_{CD} \qquad V_C = 4V_A$

CICLO DI STIRLING

AB isoterma
BC isocora
CD isoterma
DA isocora

	P	V	T
A	P_A	V_A	T_A
B	$P_A/4$	$4V_A$	T_A
C	$P_A/8$	$4V_A$	$T_A/2$
D	$P_A/2$	V_A	$T_A/2$

CICLO DI CARNOT

AB isoterma
BC adiabatica
CD isoterma
DA adiabatica

	P	V	T
A	P_A	V_A	T_A
B	$P_A/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}V_A$	T_A
C	$P_A/8$	$4V_A$	$T_A/2$
D	$2^{-5/2}P_A$	$2^{3/2}V_A$	$T_A/2$

$$P_AV_A = P_BV_B \Rightarrow P_B = P_A\frac{V_A}{V_B} = P_A\frac{V_A}{4V_A} = \frac{P_A}{4}$$

$$\frac{P_B}{T_B} = \frac{P_C}{T_C} \Rightarrow P_C = \frac{T_C}{T_B}P_B = \frac{\cancel{T_A}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{T_A}}P_B = \frac{P_A}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{P_A}{8}$$

$$P_CV_C = P_DV_D \Rightarrow P_D = \frac{V_C}{V_D}\cdot P_C = \frac{4\cancel{V_A}}{\cancel{V_A}}\cdot P_C = 4\frac{P_A}{8} = \frac{P_A}{2}$$

$$T_BV_B^{\gamma-1} = T_CV_C^{\gamma-1} \Rightarrow V_B^{\gamma-1} = \frac{T_C}{T_B}V_C^{\gamma-1} \Rightarrow V_B = \left(\frac{T_C}{T_B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}V_C = \left(\frac{\cancel{T_A}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{T_A}}\right)^{\frac{1}{\frac{5}{3}-1}}\cdot 4V_A = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}4V_A = \sqrt{2}V_A$$

$$P_AV_A = P_BV_B \Rightarrow P_B = \frac{V_A}{V_B}P_A = \frac{\cancel{V_A}}{\sqrt{2}\cancel{V_A}}P_A = \frac{P_A}{\sqrt{2}}$$

$$T_AV_A^{\gamma-1} = T_DV_D^{\gamma-1} \Rightarrow V_D^{\gamma-1} = \frac{T_A}{T_D}V_A^{\gamma-1} \Rightarrow V_D = \left(\frac{T_A}{T_D}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}V_A = \left(\frac{\cancel{T_A}}{\cancel{T_A}/2}\right)^{\frac{1}{\frac{5}{3}-1}}V_A = 2^{\frac{3}{2}}V_A$$

$$P_CV_C = P_DV_D \Rightarrow P_D = \frac{V_C}{V_D}P_C = \frac{4\cancel{V_A}}{2^{3/2}\cancel{V_A}}\frac{P_A}{8} = 2^{-5/2}P_A$$

Passiamo ora al calcolo dei lavori:

$$L_S = L_{AB} + L_{CD} \qquad L_{AB} = nRT_A\ln\frac{V_B}{V_A} \qquad L_{CD} = nRT_C\ln\frac{V_D}{V_C} = -nRT_C\ln\frac{V_C}{V_D}$$

$$L_S = nRT_A\ln\frac{4\cancel{V_A}}{\cancel{V_A}} - nR\frac{T_A}{2}\ln 4 = nR\frac{T_A}{2}\ln 4 = nRT\ln 4^{1/2} = nRT\ln 2$$

$$L_C = L_{AB} + \underbrace{L_{BC} + L_{CD} + L_{DA}}_{0} \qquad L_{AB} = nRT_A\ln\frac{V_B}{V_A} \qquad L_{CD} = nRT_C\ln\frac{V_D}{V_C} = -nRT_C\ln\frac{V_C}{V_D}$$

perché opposti in Carnot

$$L_C = nRT_A\ln\frac{\sqrt{2}\cancel{V_A}}{\cancel{V_A}} - nR\frac{T_A}{2}\ln\frac{4\cancel{V_A}}{2^{3/2}\cancel{V_A}} = \frac{1}{2}nRT_A\ln\sqrt{2} \Rightarrow \frac{L_S}{L_C} = 4$$

$$\eta_C = 1 - \frac{T_{CD}}{T_{AB}} = 1 - \frac{\cancel{T_A}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{T_A}} = \frac{1}{2}$$

$$Q_{ASS-S} = Q_{AB} + Q_{DA}$$

$\Delta E = Q - L = 0$ poiché AB è isoterma e $\Delta T \propto \Delta E \Rightarrow L = Q$

$$Q_{AB} = L_{AB} = nRT_A \ln 4 \qquad Q_{DA} = nC_v\Delta T = n\frac{3}{2}R\left(T_A - \frac{T_A}{2}\right) = n\frac{3}{2}R\frac{T_A}{2}$$

$$Q_{ASS-S} = Q_{AB} + Q_{DA} = nRT_A \ln 4 + n\frac{3}{2}R\frac{T_A}{2} = nRT_A\left(\ln 4 + \frac{3}{4}\right)$$

$$\eta_S = \frac{L}{Q_{ASS}} = \frac{\cancel{nRT_A}\ln 2}{\cancel{nRT_A}\left(\frac{3}{4} + \ln 4\right)}$$

$$\frac{\eta_S}{\eta_C} = \frac{2\ln 2}{\frac{3}{4} + \ln 4} \Rightarrow \eta_S = \frac{2\ln 2}{\frac{3}{4} + \ln 4}\cdot\eta_C$$

Per il calcolo dell'entropia consideriamo che le due isoterme sono reversibili e quindi il loro $\Delta S = 0$; calcoliamolo quindi per le due isocore.

$$Q_{BC} = nC_v\Delta T = n\frac{3}{2}R\left(\frac{T_A}{2} - T_A\right) = -\frac{3}{4}nRT_A$$

$$\Delta S = \frac{Q_{BC}}{T_{CD}} + \frac{Q_{DA}}{T_{AB}} = \frac{-\frac{3}{4}nR\cancel{T_A}}{\cancel{T_A}/2} + \frac{\frac{3}{4}nR\cancel{T_A}}{\cancel{T_A}} = -\frac{3}{4}nR \ (?)$$

ESERCIZIO 1 13 GIUGNO 2014

	P	V	T
A	p_A	V_A	$\frac{p_A V_A}{nR}$
B	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} p_A$	V_A	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} \frac{p_A V_A}{nR}$
C	$\left(\frac{1}{2}\right)^{5/3} p_A$	$2V_A$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} \frac{p_A V_A}{nR}$

nelle espansioni libere per convenzione $T_i = T_f \Rightarrow T_B = T_C$

$$p_A V_A = nRT_A \Rightarrow T_A = \frac{p_A V_A}{nR}$$

$$p_A V_A^{\gamma} = p_C V_C^{\gamma} \Rightarrow p_C = \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma} p_A = \left(\frac{\cancel{V_A}}{2\cancel{V_A}}\right)^{5/3} p_A = \left(\frac{1}{2}\right)^{5/3} p_A$$

$$p_C V_C = nRT_C \Rightarrow T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \left(\frac{1}{2}\right)^{5/3} p_A \cdot 2V_A \cdot \frac{1}{nR} = 2^{-\frac{5}{3}+1} \frac{p_A V_A}{nR} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} \frac{p_A V_A}{nR}$$

$$p_B V_B = nRT_B \Rightarrow p_B = \frac{nRT_B}{V_B} = \frac{\cancel{nR} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} \frac{p_A \cancel{V_A}}{\cancel{nR}}}{\cancel{V_A}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} p_A$$

$$\Delta E_{AB} = nc_V \Delta T = \cancel{n} \frac{3}{2} R \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} \frac{p_A V_A}{\cancel{nR}} - \frac{p_A V_A}{\cancel{nR}}\right] = \frac{3}{2} p_A V_A \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} - 1\right]$$

$$\Delta E_{CA} = Q - L = 0 - L = -L \Rightarrow L_{CA} = -\Delta E_{CA}$$

$$\Delta E_{CA} = nc_V \Delta T = \cancel{n} \frac{3}{2} R \left[\frac{p_A V_A}{\cancel{nR}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} \frac{p_A V_A}{\cancel{nR}}\right] = \frac{3}{2} p_A V_A \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}\right]$$

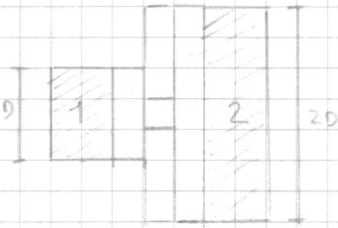
$$\Rightarrow L_{CA} = \frac{3}{2} p_A V_A \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} - 1\right]$$

L'espansione libera si tratta come un'isoterma, calcoliamo quindi la variazione di entropia

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} \qquad \Delta E = Q - L = 0 \Rightarrow Q = L \Rightarrow \Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{dL}{T} = \int \frac{p\,dV}{T} =$$

$$= \int \frac{nR\cancel{T}}{V\cancel{T}} dV = nR \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V} = nR \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) = nR \ln\left(\frac{2V_A}{V_A}\right) = nR \ln 2$$

ESERCIZIO 4 24 SETTEMBRE 2013



$n = 1 \qquad T_{A1} = T_0 \qquad T_{A2} = \frac{3}{2} T_0 \qquad T_{A2} = T_{B2} = T_{eq}$

	P	V	T
A_1	p_{A1}	V_{A1}	T_0
B_1	$\frac{21RT_0}{20V_{A1}}$	$\frac{5}{4}V_{A1}$	$\frac{21}{16}T_0$

	P	V	T
A_2	$p_{A1}/4$	$6V_{A1}$	$\frac{3}{2}T_0$
B_2	$\frac{21RT_0}{80V_{A1}}$	$5V_{A1}$	$\frac{21}{16}T_0$

$$S_1 = \frac{D^2\pi}{4} \qquad S_2 = D^2\pi \qquad P = \frac{F}{S} \Rightarrow P_1 S_1 = F = P_2 S_2 \Rightarrow P_1 \frac{D^2\pi}{4} = P_2 \cancel{D^2\pi}$$

$$\Rightarrow P_1 = 4P_2$$

Per i gas perfetti sappiamo che $P_{A1}V_{A1} = nRT_0 \qquad P_{A2}V_{A2} = nR\frac{3}{2}T_0$

$\Rightarrow 4P_{A2}V_{A1} = nRT_0 \; ; \; P_{A2}V_{A2} = nR\frac{3}{2}T_0$ e facendo il rapporto

$$\frac{4V_{A1}}{V_{A2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow 6V_{A1} = V_{A2}$$

La variazione di temperatura, e di energia sarà uguale (di segno opposto)

$$\cancel{n}C_{v1}(T_{eq} - T_0) = \cancel{n}C_{v2}\left(\frac{3}{2}T_0 - T_{eq}\right) \Rightarrow \frac{3}{\cancel{2}}\cancel{R}T_{eq} - \frac{3}{\cancel{2}}T_0\cancel{R} = \frac{15}{4}RT_0 - \frac{5}{\cancel{2}}\cancel{R}T_{eq}$$

$$\Rightarrow 6T_{eq} - 6T_0 = 15T_0 - 10T_{eq} \Rightarrow T_{eq} = \frac{21}{16}T_0$$

$$P_{B1}V_{B1} = nR\frac{21}{16}T_0 = P_{B2}V_{B2} \Rightarrow P_{B1}V_{B1} = P_{B2}V_{B2} \Rightarrow 4\cancel{P_{B2}}V_{B1} = \cancel{P_{B2}}V_{B2} \Rightarrow 4V_{B1} = V_{B2}$$

Il rapporto tra le superfici e lo stesso che c'è tra le variazioni.

$$\begin{cases} V_{A2} - V_{B2} = 4(V_{B1} - V_{A1}) \\ 6V_{A1} = V_{A2} \\ 4V_{B1} = V_{B2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6V_{A1} - 4V_{B1} = 4V_{B1} - 4V_{A1} \Rightarrow V_{B1} = \frac{5}{4}V_{A1} \\ // \qquad \Rightarrow \cancel{4}\frac{5}{\cancel{4}}V_{A1} = V_{B2} \\ // \end{cases}$$

$$P_{B1}V_{B1} = nR\frac{21}{16}T_0 \Rightarrow P_{B1} = \frac{\cancel{n}R\,21\,T_0}{\cancel{16}\,4} \cdot \frac{4}{5V_{A1}} = \frac{21RT_0}{20V_{A1}}$$

$$P_{B2} = \frac{P_{B1}}{4} = \frac{21RT_0}{80V_{A1}}$$

La trasformazione è adiabatica, quindi la variazione di entropia del sistema è nulla:

$$\Delta S = 0$$

ESERCIZIO 4 26 GENNAIO 2012

$n = 1$ $n = 1$

	P	V	T		P	V	T
A	p_A	$\frac{V_0}{2}$	$\frac{p_A V_0}{2R}$	A	p_A	$\frac{V_0}{2}$	$\frac{p_A V_0}{2R}$
C	$\frac{5}{3}p_A$	$V_A\left(2-\left(\frac{5}{3}\right)^{-3/5}\right)$	$\frac{5}{3}\left(2-\left(\frac{5}{3}\right)^{-3/5}\right)T_A$	B	$\frac{5}{3}p_A$	$\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{3}{5}}V_A$	$\left(\frac{5}{3}\right)^{2/5}T_A$

$$pV = nRT \Rightarrow T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{p_A V_0}{2R}$$

$$p_A = \frac{V_0}{2} \Rightarrow 2p_A = V_0 = V_B + V_C \qquad p_B = p_C \text{ per tutto il tempo (?)}$$

A sinistra viene fornito $Q = p_A V_0 \overset{*}{=} 2p_A V_A = \Delta E_{int} = \Delta E_{AC} + \Delta E_{AB} =$

$$= nc_V(T_C - T_A) + nc_V(T_B - T_A) = c_V(T_B + T_C - T_A) = \frac{3}{2}R(T_B + T_C - 2T_A) \qquad V_0 = 2V_A$$

Per il I principio $\frac{3}{2}(RT_B + RT_C - 2RT_A) = \frac{3}{2}(\underbrace{p_B V_B + p_B V_C}_{p_B = p_C} - 2p_A V_A) = \frac{3}{2}(p_B(V_B + V_C) - 2p_A V_A)$

$$= \frac{3}{2}(2p_B V_A - 2p_A V_A) \Rightarrow * \; 2p_A V_A = 3p_B V_A - 3p_A V_A \Rightarrow 5p_A \cancel{V_A} = 3p_B \cancel{V_A} \Rightarrow p_B = \frac{5}{3}p_A$$

Poiché $A \to B$ rimane in isolamento termico si tratta di una trasformazione adiabatica, quindi:

$$p_A V_A^\gamma = p_B V_B^\gamma \Rightarrow V_B^\gamma = \left(\frac{p_A}{p_B}\right)V_A^\gamma \Rightarrow V_B = \left(\frac{p_A}{p_B}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_A = \left(\frac{3}{5}\right)^{3/5} V_A = \left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{3}{5}} V_A$$

$$V_C = V_0 - V_B = V_0 - \left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{3}{5}}\frac{V_0}{2} = V_0\left(1 - \left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{3}{5}}\frac{1}{2}\right) = 2V_A\left(1 - \left(\frac{5}{3}\right)^{-3/5}\frac{1}{2}\right) = V_A\left(2 - \left(\frac{5}{3}\right)^{-3/5}\right)$$

$$p_C = p_B = \frac{5}{3}p_A$$

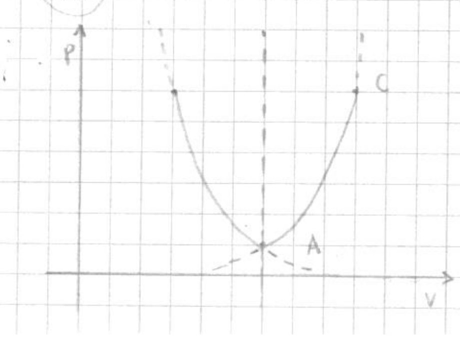
$$T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{5}{3}p_A \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-3/5} V_A \cdot \frac{1}{R} = \left(\frac{5}{3}\right)^{2/5} T_A$$

$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{5}{3}p_A \cdot V_A\left(2 - \left(\frac{5}{3}\right)^{-3/5}\right) \cdot \frac{1}{R} = \frac{5}{3}\left(2 - \left(\frac{5}{3}\right)^{-3/5}\right)T_A$$

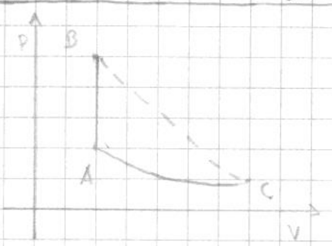
Poiché la trasformazione di destra è un'adiabatica la variazione di entropia $\Delta S = 0$; per l'altra possiamo considerarla come una isocora seguita da un'isobara

$$\Delta S_{AC} = \Delta S_{isoc} + \Delta S_{isob} = \int \frac{dQ}{T} + \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{nc_V dT}{T} + \int \frac{nc_p dT}{T} = nc_V \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} + nc_p \int_{T_A}^{T_C} \frac{dT}{T} =$$

$$= nc_V \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + nc_p \ln\left(\frac{T_C}{T_A}\right) \overset{?}{=} n\frac{3}{2}R\ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right) + n\frac{5}{2}R\ln\left(\frac{V_C}{V_A}\right) = \frac{3}{2}R\ln\frac{5}{3} + \frac{5}{2}R\ln\left(2 - \left(\frac{5}{3}\right)^{-3/5}\right)$$



ESERCIZIO 6 20 SETTEMBRE 2007



$n = 2$

	P	V	T
A	P_A	V_A	T_A
B	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} P_A$	V_A	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} T_A$
C	$\left(\frac{1}{2}\right)^{5/3} P_A$	$2V_A$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} T_A$

$$P_A V_A^{\gamma} = P_C V_C^{\gamma} \Rightarrow P_C = \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma} P_A = \left(\frac{V_A}{2V_A}\right)^{\frac{5}{3}} P_A = \left(\frac{1}{2}\right)^{5/3} P_A$$

$$P_C V_C = nRT_C \Rightarrow T_C = \frac{P_C V_C}{2R} = \left(\frac{1}{2}\right)^{5/3} P_A \cdot \cancel{2} V_A \cdot \frac{1}{\cancel{2}R} = \left(\frac{1}{2}\right)^{5/3} \underbrace{\frac{P_A V_A}{R}}_{2T_A} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{5/3} T_A = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} T_A$$

$T_B = T_C$ poichè l'espansione libera lo garantisce

$$\frac{P_A}{T_A} = V_A = \frac{P_B}{T_B} \Rightarrow P_B = \frac{T_B}{T_A} \cdot P_A = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} P_A$$

$L_{AB} = 0$ poichè è un'isocora

$$L_{BC} = \int dL = \int p\,dV = \int_{V_B}^{V_C} \frac{nRT}{V} dV = nRT_{BC} \ln \frac{V_C}{V_B} = 2R \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} T_A \ln 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} RT_A \ln 4$$

$L_{CA} = -\Delta E_{AC}$ poichè nell'adiabatica $Q = 0 \Rightarrow \Delta E = 0 - L \Rightarrow \Delta E = -L$

$$\Delta E_{CA} = nC_V \Delta T = \cancel{2}\frac{3}{\cancel{2}} R \left(T_A - \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} T_A\right) = 3RT_A \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}\right)$$

$$L_{CA} = 3RT_A \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} - 1\right)$$

$$Q_{AB} = nC_V \Delta T = \cancel{2}\frac{3}{\cancel{2}} R (T_B - T_A) = 3R\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} T_A - T_A\right) = 3RT_A \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} - 1\right)$$

$Q_{BC} = L_{BC}$ poichè nell'isoterma $\Delta T = 0 \Rightarrow \Delta E = 0$ $(\Delta T \propto \Delta E) \Rightarrow Q = L$

$$L_{BC} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} RT_A \ln 4 = Q_{BC}$$

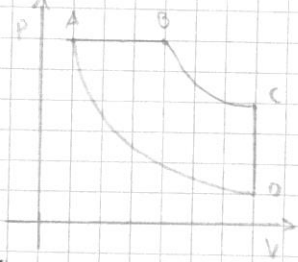
$Q_{CA} = 0$ poichè è un'adiabatica

$$\Delta S_{AB} = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_A}^{T_B} \frac{nC_V dT}{T} = nC_V \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = \cancel{2}\frac{3}{\cancel{2}} R \ln \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} = \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} R \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 2R \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Delta S_{BC} = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{p\,dV}{T} = \int \frac{nR\cancel{T}}{V \cdot \cancel{T}} dV = nR \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V} = nR \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) = nR \ln 2$$

$\Delta S_{CA} = 0$ poichè è un'adiabatica

ESERCIZIO 3 2 SETTEMBRE 2008



	P	V	T
A	P_A	V_A	T_A
B	P_A	$V_A\left(1+\frac{2Q_{AB}}{5mRT_A}\right)$	$T_A+\frac{2Q_{AB}}{5mR}$
C	$\left[\frac{V_A}{\alpha}\left(1+\frac{2Q_{AB}}{5mRT_A}\right)\right]^{5/3}P_A$	αV_A	$\left(1+\frac{2Q_{AB}}{5mRT_A}\right)^{5/3}\frac{V_A^{5/3}}{\alpha^{2/3}}T_A$
D	$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{5/3}P_A$	αV_A	$\frac{T_A}{\alpha^{2/3}}$

Q_{AB} noto

$$Q_{AB} = mC_p(T_B-T_A) \Rightarrow T_B = T_A + \frac{Q_{AB}}{mC_p} = T_A + \frac{2Q_{AB}}{5mR}$$

$$\frac{T_A}{V_A} = \frac{T_B}{V_B} \Rightarrow V_B = V_A\frac{T_B}{T_A} = V_A\cdot\left(T_A+\frac{2Q_{AB}}{5mR}\right)\frac{1}{T_A} = V_A\left(1+\frac{2Q_{AB}}{5mRT_A}\right)$$

$$P_BV_B^{\gamma} = P_CV_C^{\gamma} \Rightarrow P_C = \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma}P_B = \left[\frac{V_A}{\alpha}\left(1+\frac{2Q_{AB}}{5mRT_A}\right)\right]^{5/3}P_A$$

$$T_C = \frac{P_CV_C}{mR} = \left[\frac{V_A}{\alpha}\left(1+\frac{2Q_{AB}}{5mRT_A}\right)\right]^{5/3}P_A\cdot\alpha V_A\cdot\frac{1}{mR} = \left(1+\frac{2Q_{AB}}{5mRT_A}\right)^{5/3}\frac{P_AV_A^{8/3}}{\alpha^{2/3}mR} = \left(1+\frac{2Q_{AB}}{5mRT_A}\right)^{5/3}\frac{V_A^{5/3}}{\alpha^{2/3}}T_A$$

$$P_AV_A^{\gamma} = P_DV_D^{\gamma} \Rightarrow P_D = \left(\frac{V_A}{V_D}\right)^{\gamma}P_A = \left(\frac{V_A}{\alpha V_A}\right)^{\gamma}P_A = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{5/3}P_A$$

$$T_D = \frac{P_DV_D}{mR} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{5/3}P_A\alpha V_A\cdot\frac{1}{mR} = \frac{P_AV_A}{\alpha^{2/3}mR} = \frac{T_A}{\alpha^{2/3}}$$

$$Q_{ASS} = Q_{AB}$$

$$L_{AB} = p\Delta V = P_A(V_B-V_A) = P_A\left(\cancel{V_A}+\frac{2Q_{AB}}{5mR}-\cancel{V_A}\right) = \frac{2Q_{AB}P_A}{5mR}$$

$$L_{BC} = -\Delta E = -mc_v\Delta T = -mc_v(T_C-T_B) = mc_v(T_B-T_C) = m\frac{3}{2}R\,T_A\left(1+\frac{2Q_{AB}}{5mRT_A}\right)\left(1+\left(1+\frac{2Q_{AB}}{5mRT_A}\right)^{2/3}\frac{V_A^{5/3}}{\alpha^{2/3}}\right)$$

$$L_{CD} = 0$$

$$L_{DA} = -\Delta E = -mc_v(T_A-T_D) = mc_v(T_D-T_A) = m\frac{3}{2}R\left(\frac{T_A}{\alpha^{2/3}}-T_A\right) = T_A\,m\frac{3}{2}R\left(\frac{1}{\alpha^{2/3}}-1\right)$$

$$\eta = \frac{L_{AB}+L_{BC}+L_{DA}}{Q_{ASS}} = \dots$$

$\Delta S_{tot} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{CD}$ poiché nelle adiabatiche $\Delta S = 0$

$$\Delta S_{AB} = \int\frac{dQ}{T} = mc_p\int_{T_A}^{T_B}\frac{dT}{T} = m\frac{5}{2}R\ln\left(1+\frac{2Q_{AB}}{5mRT_A}\right)$$

$$\Delta S_{CD} = mc_v\int_{T_C}^{T_D}\frac{dT}{T} = m\frac{3}{2}R\ln\left[\left(1+\frac{2Q_{AB}}{5mRT_A}\right)^{5/3}V_A^{5/3}\right] = \frac{5m\cancel{3}}{\cancel{3}\;2}R\ln\left(V_A+\frac{2Q_{AB}V_A}{5mRT_A}\right)$$

$$\Delta S_{tot} = \frac{5}{2}mR\ln\left(1+\frac{Q_{AB}}{5mRT_A}\right)+\frac{5}{2}mR\ln\left(1+\frac{2Q_{AB}V_A}{5mRT_A}\right) = \frac{5}{2}mR\ln\left(1+\frac{Q_{AB}}{5mRT_A}\right)\left(1+\frac{2Q_{AB}V_A}{5mRT_A}\right)$$

ESERCIZIO 4 18 NOVEMBRE 2013

	P	V	T
A	P_A	V_A	T_A
B	$\frac{P_A}{2}$	$\frac{V_A}{2}$	$\frac{T_A}{4}$

a) La forza della molla deve essere bilanciata dalla pressione del gas

$$p_A = \frac{Kh}{\Sigma} \qquad V_A = h\Sigma \quad \Rightarrow \quad p_A = \frac{KV_A}{\Sigma^2} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{p_A\Sigma^2}{V_A}$$

b) $$p_B = \frac{Kh}{2\Sigma} \qquad V_B = \frac{h}{2}\Sigma \quad \Rightarrow \quad p_B = \frac{KV_B}{\Sigma^2} \quad \Rightarrow \quad p_B = \frac{KV_A}{2\Sigma^2} = \frac{p_A}{2}$$

$$T_B = \frac{p_BV_B}{nR} = \frac{p_AV_A}{4nR} = \frac{T_A}{4}$$

$$\Delta E = Q - L \Rightarrow Q = \Delta E + L$$

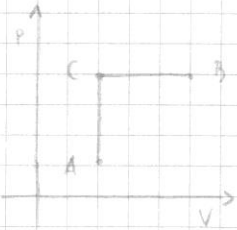
$$\Delta E = nc_v(T_B - T_A) = n\frac{3}{2}R\left(\frac{T_A}{4} - T_A\right) = -\frac{3}{2}R\frac{3}{4}T_A = -\frac{9}{8}RT_A = -\frac{9}{8}p_AV_A.$$

$$L_{molla} = \frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}k(h_A^2 - h_B^2) = \frac{1}{2}k(p_AV_A - p_BV_B) = \frac{p_AV_A}{2} - \frac{1}{2}\frac{p_A}{2}\cdot\frac{V_A}{2} = \frac{4p_AV_A - p_AV_A}{8} = \frac{3}{8}p_AV_A$$

Il lavoro della molla sarà opposto a quello svolto dal gas

$$\Rightarrow \Delta E + L_{gas} = Q_{AB} = \Delta E - L_{molla} = -\frac{9}{8}p_AV_A - \frac{3}{8}p_AV_A = -\frac{12}{8}p_AV_A = -\frac{3}{2}p_AV_A$$

c) Per calcolare la variazione di entropia possiamo considerarla in una successione data da un'isocora AC e da un'isobara CB



$$\Delta S_{AC} = \int\frac{dQ}{T} = \int\frac{nc_v\,dT}{T} = nc_v\int_{T_A}^{T_C}\frac{dT}{T} = nc_v\ln\left(\frac{T_C}{T_A}\right) = nc_v\ln\left(\frac{p_C}{p_A}\right)$$

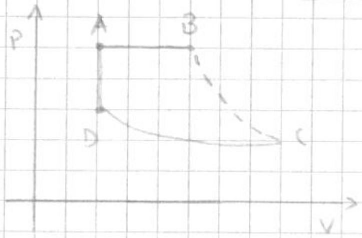
$$= nc_v\ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right) = n\frac{3}{2}R\ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

$$\Delta S_{CB} = \int\frac{dQ}{T} = nc_p\int_{T_C}^{T_B}\frac{dT}{T} = nc_p\ln\left(\frac{T_B}{T_C}\right) = nc_p\ln\left(\frac{V_B}{V_C}\right) =$$

$$= nc_p\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = n\frac{5}{2}R\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_{AC} + \Delta S_{CB} = n\frac{3}{2}R\ln\left(\frac{1}{2}\right) + n\frac{5}{2}R\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 4nR\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -4nR\ln(2)$$

ESERCIZIO 1 30 MAGGIO 2013



	P	V	T
A	p_A	V_A	T_A
B	p_A	$2V_A$	$2T_A$
C	$\frac{p_A}{2}$	$6V_A$	$2T_A$
D	$2p_A$	V_A	$2T_A$

$$T_B = \frac{p_B V_B}{mR} = \frac{p_A \cdot 2V_A}{mR} = 2T_A$$

$$p_C = \frac{mRT_C}{V_C} = \frac{mR \cdot 2T_A}{6V_A} = \cancel{mR}\,\cancel{2}\,\frac{p_A \cancel{V_A}}{\cancel{mR}} \cdot \frac{1}{\cancel{6}\cancel{V_A}} = \frac{p_A}{2}$$

$$p_C V_C = p_D V_D \Rightarrow p_D = \frac{V_C}{V_D}\,p_C = \frac{{}^{3}\cancel{6}\cancel{V_A}}{\cancel{V_A}} \cdot \frac{p_A}{\cancel{2}} = 2p_A$$

$$T_D = \frac{p_D V_D}{mR} = \frac{2p_A \cdot V_A}{mR} = 2T_A$$

$$\Delta E_{AB} = m c_V \Delta T = m \frac{3}{2} R (T_B - T_A) = m \frac{3}{2} R\, T_A$$

$$Q_{DA} = m c_V \Delta T = m \frac{3}{2} R (T_A - T_D) = m \frac{3}{2} R (-T_A) = -\frac{3}{2} m R T_A$$

$$L_{CD} = \int p\,dV = \int \frac{mRT_{CD}}{V}\,dV = mR\,2T_A \int_{V_C}^{V_D} \frac{dV}{V} = mR\,2T_A \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = 2mRT_A \ln\left(\frac{1}{6}\right) =$$

$$= -mRT_A \ln 6$$

L'espansione libera è simile ad un'isoterma quindi $\Delta T = 0 \Rightarrow \Delta E = 0 \Rightarrow Q = L$

$$\Delta S_{BC} = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{p\,dV}{T} = mR \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V} = mR \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) = mR \ln 2$$

ESERCIZIO 6 23 APRILE 2013

	P	V	T		P	V	T
A_1	P_A	V_A	T_A	A_2	P_A	V_A	T_A
B_1	$2^{5/3} P_A$	$\frac{V_A}{2}$	$2^{2/3} T_A$	B_2	$2^{5/3} P_A$	$2^{-\frac{25}{21}} V_A$	$2^{10/21} T_A$
C_1	$2^{5/3} P_A$	$\frac{V_A}{2}$	$2^{2/3} T_A$	C_2	$\frac{2^{-1/5}}{3^{7/5}} P_A$	$\frac{3}{2} V_A$	$\frac{2^{-6/5}}{3^{2/5}} T_A$
D_1	$2^{5/3} P_A$	$\frac{V_A}{2}$	T_{eq}	D_2	$\frac{2^{-1/5}}{3^{7/5}} P_A$	$\frac{3}{2} V_A$	T_{eq}

$$P_{A_1} V_{A_1}^{\gamma} = P_{B_1} V_{B_1}^{\gamma} \Rightarrow P_{B_1} = \left(\frac{V_{A_1}}{V_{B_1}}\right)^{\gamma} P_{A_1} = \left(\frac{\cancel{V_A}}{\cancel{V_A}/2}\right)^{5/3} P_A = 2^{5/3} P_A = P_{B_1} = P_{B_2}$$

$$P_{A_2} V_{A_2}^{\gamma} = P_{B_2} V_{B_2}^{\gamma} \Rightarrow V_{B_2}^{\gamma} = \frac{P_{A_2}}{P_{B_2}} \cdot V_{A_2}^{\gamma} \Rightarrow V_{B_2} = \left(\frac{P_{A_2}}{P_{B_2}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot V_{A_2} = \left(\frac{1}{2^{5/3}}\right)^{\frac{1}{7/5}} V_A = \left(2^{-5/3}\right)^{5/7} \cdot V_A = \left(2^{-\frac{25}{21}}\right) V_A$$

$$T_{B_1} = \frac{P_{B_1} V_{B_1}}{mR} = 2^{\cancel{5/3}\,2/3} P_A \cdot \frac{V_A}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{mR} = 2^{2/3} T_A$$

$$T_{B_2} = \frac{P_{B_2} V_{B_2}}{mR} = 2^{5/3} P_A \cdot 2^{-\frac{25}{21}} V_A \cdot \frac{1}{mR} = 2^{10/21} T_A$$

$$P_{B_2} V_{B_2}^{\gamma} = P_{C_2} V_{C_2}^{\gamma} \Rightarrow P_{C_2} = \left(\frac{V_{B_2}}{V_{C_2}}\right)^{\gamma} P_{B_2} = \left(\frac{2 \cdot 2^{-\frac{25}{21}}}{3}\right)^{\frac{7}{5}} 2^{5/3} P_A = \left(\frac{2^{-\frac{4}{21}}}{3}\right)^{\frac{7}{5}} 2^{5/3} P_A = \frac{2^{-\frac{28}{15}}}{3^{7/5}} \cdot 2^{5/3} P_A =$$

$$= \frac{2^{-1/5}}{3^{7/5}} P_A$$

$$T_{C_2} = \frac{P_{C_2} V_{C_2}}{mR} = \frac{\cancel{2^{-1/5}}}{3^{\cancel{7/5}\,2/5}} \cdot \frac{\cancel{3}}{2^{6/5}} V_A P_A \cdot \frac{1}{mR} = \frac{2^{-6/5}}{3^{2/5}} T_A$$

Fino ad ora tutti i calcoli fatti sono dovuti alle leggi di Poisson, in quanto tutte le trasformazioni sono adiabatiche. Per calcolare la temperatura di equilibrio facciamo la media pesata sulle capacità termiche

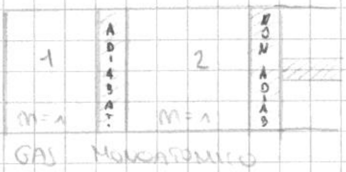
$$T_{eq} = \frac{\cancel{m} c_V T_{C_1} + \cancel{m} c_V T_{C_2}}{\cancel{m} c_V + \cancel{m} c_V} = \frac{\frac{3}{\cancel{2}} \cancel{R}\, 2^{\cancel{2/3}\,-1/3} T_A + \frac{5}{\cancel{2}} \cancel{R}\, \frac{2^{\cancel{-6/5}\,-11/5}}{3^{2/5}} T_A}{\frac{3}{2} \cancel{R} + \frac{5}{2} \cancel{R}} = \frac{T_A}{4} \left(2^{-1/3} \cdot 3 + 5 \cdot \frac{2^{-11/5}}{3^{2/5}}\right)$$

Ai fini del calcolo della variazione di entropia influisce solo l'ultima trasformazione sui due gas, in quanto le precedenti erano tutte adiabatiche

$$\Delta S_{C_1 D_1} = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{m c_V dT}{T} = m c_V \ln\left(\frac{T}{T_{C_1}}\right) = \frac{3}{2} mR \ln\left(\frac{T_{eq}}{T_{C_1}}\right)$$

$$\Delta S_{C_2 D_2} = \int \frac{dQ}{T} = m c_V \ln\left(\frac{T_{eq}}{T_{C_2}}\right) = \frac{5}{2} mR \ln\left(\frac{T_{eq}}{T_{C_2}}\right)$$

ESERCIZIO 4 18 GIUGNO 2013



	P	V	T
A_1	P_A	V_A	T_0
B_1	$3^{5/3}P_A$	$\frac{V_A}{3}$	$3^{2/3}T_0$
C_1	$3^{5/3}P_A$	$\frac{V_A}{3}$	$3^{2/3}T_0$
D_1	$3^{5/3}P_A$	$\frac{V_A}{3}$	T_{eq}

	P	V	T
A_2	P_A	V_A	T_0
B_2	$3^{5/3}P_A$	$3^{-5/3}V_A$	T_0
C_2	$\frac{3}{5}P_A$	$\frac{5}{3}V_A$	T_0
D_2	$\frac{3}{5}P_A$	$\frac{5}{3}V_A$	T_{eq}

$$P_{A_1}V_{A_1}^{\gamma} = P_{B_1}V_{B_1}^{\gamma} \Rightarrow P_{B_1} = \left(\frac{V_{A_1}}{V_{B_1}}\right)^{\gamma} P_{A_1} = \left(\frac{V_A}{V_A}\cdot 3\right)^{5/3} P_A = 3^{5/3}P_A$$

$$PV = mRT \Rightarrow T_{B_1} = \frac{P_{B_1}V_{B_1}}{mR} = 3^{\cancel{5/3}\,2/3} P_A \frac{V_A}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{mR} = 3^{2/3}T_0$$

$$V_{B_2} = \frac{mRT_{B_2}}{P_{B_2}} = mRT_0 \cdot \frac{1}{3^{5/3}P_A} = \cancel{mR}\frac{\cancel{P_A}V_A}{\cancel{mR}} \cdot \frac{1}{3^{5/3}\cancel{P_A}} = 3^{-5/3}V_A$$

$$P_{C_2} = \frac{mRT_{C_2}}{V_{C_2}} = \cancel{mR}\frac{P_A\cancel{V_A}}{\cancel{mR}} \cdot \frac{3}{5\cancel{V_A}} = \frac{3}{5}P_A$$

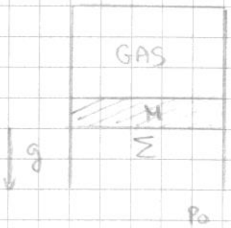
$$T_{eq} = \frac{\cancel{m}c_vT_{C_1} + \cancel{m}c_vT_{C_2}}{\cancel{m}c_v + \cancel{m}c_v} = \frac{\frac{3}{2}R\,3^{2/3}T_0 + \frac{3}{2}RT_0}{\frac{3}{2}R + \frac{3}{2}R} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cancel{R}T_0\left(3^{2/3}+1\right)\cdot\frac{\cancel{2}}{2\,\cancel{6}\cancel{R}}$$

Per il calcolo della variazione di entropia subita dal gas 1 dobbiamo limitarci a considerare l'ultima trasformazione; infatti dopo la prima adiabatica (la cui variazione di entropia ΔS è nulla) il gas non subisce altre trasformazioni se non tale isocora; quindi:

$$\Delta S_{G_1} = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{mc_v\,dT}{T} = mc_v\int_{T_{C_1}}^{T_{D_1}} \frac{dT}{T} = m\frac{3}{2}R\ln\left(\frac{T_{D_1}}{T_{C_1}}\right) = \frac{3}{2}mR\ln\left(\frac{\cancel{T_0}(3^{2/3}+1)}{3^{2/3}\cancel{T_0}}\cdot\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}mR\ln\frac{3^{2/3}+1}{2\cdot 3^{2/3}}$$

ESERCIZIO 4 28 GENNAIO 2014



	P	V	T
A	$P_0 - \Delta P$	V_A	T_0
B	$P_0 + \Delta P$	$\left(\frac{P_0-\Delta P}{P_0+\Delta P}\right)^{3/5} V_A$	$\left(\frac{P_0+\Delta P}{P_0-\Delta P}\right)^{2/5} T_0$
C	$P + \Delta P$	$\left(\frac{P_0-\Delta P}{P_0+\Delta P}\right) V_A$	T_0

Dopo che è stato capovolto il cilindro, la pressione nel gas sarà data da quella precedente e quella del pistone che si trova a gravare su di essa:

$$\Delta P = \frac{Mg}{\Sigma} \Rightarrow P_B = P_0 + \Delta P \qquad P_A = P_0 - \Delta P$$

$$P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma \Rightarrow V_B^\gamma = \frac{P_A}{P_B} \cdot V_A^\gamma \Rightarrow V_B = \left(\frac{P_A}{P_B}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_A = \left(\frac{P_0-\Delta P}{P_0+\Delta P}\right)^{\frac{3}{5}} V_A$$

$$PV = mRT \Rightarrow T_B = \frac{P_B V_B}{mR} = (P_0+\Delta P)^{2/5} \cdot \left(\frac{P_0-\Delta P}{\cancel{P_0+\Delta P}}\right)^{3/5} V_A \cdot \frac{1}{mR} = \frac{(P_0+\Delta P)^{2/5}}{(P_0-\Delta P)^{2/5}} \cdot \cancel{(P_0-\Delta P)^{3/5}}\, V_A \frac{(P_0-\Delta P)}{mR} =$$

$$= \left(\frac{P_0+\Delta P}{P_0-\Delta P}\right)^{2/5} T_0$$

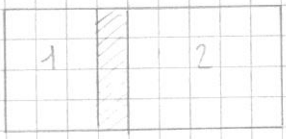
$$P_A V_A = P_C V_C \Rightarrow V_C = \frac{P_A}{P_C} V_A = \left(\frac{P_0-\Delta P}{P_0+\Delta P}\right) V_A$$

Per la variazione di entropia totale consideriamo solo la trasformazione isoterma che va da B a C in quanto AB è un'adiabatica, per la quale sappiamo che $\Delta S = 0$

$$\Delta S_{BC} = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{m c_p\, dT}{T} = m c_p \int_{T_B}^{T_C} \frac{dT}{T} = m c_p \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) = m c_p \ln\left(\cancel{T_0} \cdot \left(\frac{P_0-\Delta P}{P_0+\Delta P}\right)^{2/5} \frac{1}{\cancel{T_0}}\right)$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{5}} m \frac{\cancel{5}}{\cancel{2}} R \ln\left(\frac{P_0-\Delta P}{P_0+\Delta P}\right) = mR \ln\left(\frac{P_0-\Delta P}{P_0+\Delta P}\right)$$

ESERCIZIO 6 19 FEBBRAIO 2013



	P	V	T
A_1	P_A	V_A	T_A
B_1	P_A	$\frac{3}{2}V_A$	$\frac{3}{2}T_A$

	P	V	T
A_2	P_A	$2V_A$	$2T_A$
B_2	P_A	$\frac{3}{2}V_A$	$\frac{3}{2}T_A$

$$T_{A2} = \frac{P_{A2}V_{A2}}{mR} = \frac{P_A 2V_A}{mR} = 2T_A$$

$$T_{eq} = \frac{\cancel{mc_v}T_{A1} + \cancel{mc_v}T_{A2}}{\cancel{mc_v}+\cancel{mc_v}} = \frac{T_{A1}+T_{A2}}{2} = \frac{3}{2}T_A$$

$$P_{B1} = P_{B2} \qquad T_{B1} = T_{B2} \qquad PV = mRT \Rightarrow V_{B1} = V_{B2} = \frac{V_{A1}+V_{A2}}{2} = \frac{3}{2}V_A$$

$$P_{B1} = P_{B2} = \frac{mRT_{B1}}{V_{B1}} = \frac{mR}{\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}V_A}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}T_A = \frac{\cancel{mR}}{\cancel{V_A}}\cdot\frac{P_A\cancel{V_A}}{\cancel{mR}} = P_A$$

Per calcolare la variazione di entropia nei due gas a questi punti possiamo farlo come su un'isobara, poichè abbiamo constatato che la pressione rimane costante durante la trasformazione

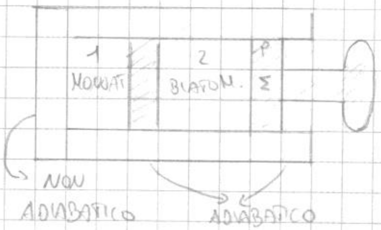
$$\Delta S_1 = \int\frac{dQ}{T} = \int\frac{mc_p\,dT}{T} = mc_p\ln\frac{T_{B1}}{T_{A1}} = m\frac{5}{2}R\ln\frac{3}{2} = \frac{5}{2}mR\ln\frac{3}{2}$$

$$\Delta S_2 = \int\frac{dQ}{T} = \int\frac{mc_p\,dT}{T} = mc_p\ln\frac{T_{B2}}{T_{A2}} = m\frac{5}{2}R\ln\frac{3}{4} = -\frac{5}{2}mR\ln\frac{4}{3}$$

Quindi l'entropia globale avrà una variazione pari a:

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{5}{2}mR\ln\frac{3}{2} - \frac{5}{2}mR\ln\frac{4}{3} = \frac{5}{2}mR\left(\ln\frac{3}{2} - \ln\frac{4}{3}\right)$$

ESERCIZIO 4 16 LUGLIO 2013



	P	V	T		P	V	T
A_1	p_A	V_A	T_0	A_2	p_A	V_A	T_0
B_1	$2^{7/5}p_A$	$2^{-7/5}V_A$	T_0	B_2	$2^{7/5}p_A$	$\frac{V_A}{2}$	$2^{2/5}T_0$
C_1	$2^{7/5}p_A$	$2^{-7/5}V_A$	T_0	C_2	$\frac{p_A}{2^{3/5}(1-2^{-7/5})}$	$V_A(2-2^{-7/5})$	$2^{2/5}T_0$

A_2B_2 adiabatica $\quad p_{A_2}V_{A_2}^{\gamma} = p_{B_2}V_{B_2}^{\gamma} \Rightarrow p_{B_2} = \left(\frac{V_{A_2}}{V_{B_2}}\right)^{\gamma} p_{A_2} = 2^{7/5}p_A$

$PV = nRT \Rightarrow T_{B_2} = \frac{p_{B_2}V_{B_2}}{nR} = 2^{\cancel{7/5}\;2/5}p_A \frac{V_A}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{nR} = 2^{2/5}T_0$

$P_1 = P_2$ sempre

$V_{B_1} = \frac{nRT_{B_1}}{p_{B_1}} = \cancel{nR}\frac{p_A V_A}{\cancel{nR}} \cdot \frac{1}{2^{7/5}\cancel{p_A}} = 2^{-7/5}V_A$

$V_{C_2} = 2V_A - 2^{-7/5}V_A = 2V_A(1-2^{-7/5})$

B_2C_2 adiabatica $\quad p_{B_2}V_{B_2}^{\gamma} = p_{C_2}V_{C_2}^{\gamma} \Rightarrow p_{C_2} = \left(\frac{V_{B_2}}{V_{C_2}}\right)^{\gamma} p_{B_2} = \frac{1}{\cancel{4}\,2^{7/5}(1-2^{-7/5})}\cancel{2^{7/5}}p_A = \frac{p_A}{2^{3/5}(1-2^{-7/5})}$

$T_{C_2} = \frac{p_{C_2}V_{C_2}}{nR} = \frac{p_A}{\cancel{2^{3/5}(1-2^{-7/5})}}\, 2^{2/5}\,2V_A\cancel{(1-2^{-7/5})}\,\frac{1}{nR} = 2^{2/5}T_0$

$\Delta S_{A_1B_1} = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{p\,dV}{T} = \int \frac{nRT}{V}dV = nRT_{A_1B_1}\ln\left(\frac{V_{B_1}}{V_{A_1}}\right) = nRT_0\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{7/5} = -\frac{7}{5}nRT_0\ln 2$

$\Delta S_{B_1C_1} = \int \frac{dQ}{T} = nRT_{B_1C_1}\ln\left(\frac{V_{C_1}}{V_{B_1}}\right) = nRT_0\ln 1 = 0$

$\Rightarrow \Delta S_1 = \Delta S_{A_1B_1} = -\frac{7}{5}nRT_0\ln 2$

Per calcolare la forza meccanica a tenere fermo il setto consideriamo le due pressioni che agiscono su di esso

$P = \frac{F}{S} \Rightarrow F = P \cdot S = (p_{C_1} - p_{C_2})\Sigma = p_A\left(2^{7/5} - \frac{1}{2^{3/5}(1-2^{-7/5})}\right)\Sigma$

ESERCIZIO 6 10 SETTEMBRE 2013

$\Sigma_2 = 3\Sigma_1$

	P	V	T
A_1	$4P_0$	V_A	T_0
B_1	$\frac{24}{5}P_0$	$\frac{5V_A}{6}$	T_0

	P	V	T
A_2	$2P_0$	$2V_A$	T_0
B_2	$\frac{8}{5}P_0$	$\frac{5}{2}V_A$	T_0

Affinché il pistone sia in equilibrio le forze ricevute da una parte e dall'altra devono uguagliarsi:

$$P_{A_1}\Sigma_1 + P_0(\Sigma_2 - \Sigma_1) = P_{A_2}\Sigma_2 \Rightarrow P_{A_1}\cancel{\Sigma_1} + 2P_0\cancel{\Sigma_1} = 3P_{A_2}\cancel{\Sigma_1} \Rightarrow 3P_{A_2} = 4P_0 + 2P_0$$

$$\Rightarrow P_{A_2} = 2P_0$$

$$PV = mRT \Rightarrow V = \frac{mRT}{P} = 2V_A$$

Quando viene creato il vuoto nelle due camere, diminuisce maggiormente la forza a destra e quindi il pistone scorrerà verso sinistra, con una diminuzione $-\Delta V_1$ del gas 1 e con un aumento ΔV_2 del gas 2. Inoltre il rapporto tra i volumi uguaglia quello tra le superfici

$$\frac{\Delta V_2}{\Delta V_1} = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} = 3$$

A_1B_1 isoterma $\quad P_{A_1}V_{A_1} = P_{B_1}V_{B_1} \Rightarrow P_{A_1}V_{A_1} = P_{B_1}(V_{A_1} - \Delta V_1)$

A_2B_2 isoterma $\quad P_{A_2}V_{A_2} = P_{B_2}V_{B_2} \Rightarrow P_{A_2}V_{A_2} = P_{B_2}(V_{A_2} + \Delta V_2) = P_{B_2}(2V_{A_1} + 3\Delta V_1)$

uguagliando le forze $\quad P_{B_1}\Sigma_1 = P_{B_2}\Sigma_2 \Rightarrow P_{B_1}\cancel{\Sigma_1} = P_{B_2}3\cancel{\Sigma_1} \Rightarrow P_{B_1} = 3P_{B_2}$

$$\begin{cases} P_{A_1}V_{A_1} = P_{B_1}(V_{A_1} - \Delta V_1) \\ P_{A_2}V_{A_2} = P_{B_2}(2V_{A_1} + 3\Delta V_1) \\ P_{B_1} = 3P_{B_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4P_0V_A = 3P_{B_2}(V_A - \Delta V_1) \\ 2P_0 2V_A = P_{B_2}(2V_A + 3\Delta V_1) \\ P_{B_1} = 3P_{B_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{3(V_A - \Delta V_1)}{(2V_A + 3\Delta V_1)} \\ 4P_0V_A = P_{B_2}(2V_A + 3\Delta V_1) \\ P_{B_1} = 3P_{B_2} \end{cases}$$

$$2V_A + 3\Delta V_1 = 3V_A - 3\Delta V_1 \Rightarrow \Delta V_1 = V_A/6 \Rightarrow \Delta V_2 = V_A/2$$

$$4P_0V_A = P_{B_2}\left(2V_A + \frac{V_A}{2}\right) \Rightarrow P_{B_2} = 4P_0\cancel{V_A}\frac{2}{5\cancel{V_A}} = \frac{8}{5}P_0 \Rightarrow P_{B_1} = \frac{24}{5}P_0$$

$$V_{B_1} = \frac{5V_A}{6} \qquad V_{B_2} = \frac{5}{2}V_A$$

$$Q = L = \int P\,dV = \int \frac{mRT}{V}\,dV = mRT_{A_1B_1}\ln\frac{V_{B_1}}{V_{A_1}} = mRT_0\ln\frac{5}{6} = -mRT_0\ln\frac{6}{5}$$

Esercizio 4 10 luglio 2012

	P	V	T
A_1	P_A	V_A	T_A
B_1		$2V_A$	$2T_A$

	P	V	T
A_2	P_A	$2V_A$	$4T_A$
B_2		V_A	$2T_A$

$P_{A1} = P_{A2}$ e $P_{B1} = P_{B2}$ per come è fatto il pistone

$$T_{B1} = T_{B2} \Rightarrow \frac{P_{B1} V_{B1}}{m_1 R} = \frac{P_{B2} V_{B2}}{m_2 R} \Rightarrow \frac{\cancel{P_B} 2\cancel{V_A}}{m_1} = \frac{\cancel{P_B} \cancel{V_A}}{m_2} \Rightarrow m_1 = 2m_2 \text{ o } m_2 = \frac{m_1}{2}$$

$$\Rightarrow T_{A2} = \frac{2 P_A V_A}{m_2 R} = \frac{4 P_A V_A}{m_1 R} = 4T_A$$

Poiché il sistema è isolato non può esserci scambio di energia; quella acquisita da un gas è pari a quella ceduta dall'altro

$$\Delta E_{A_1B_1} = -\Delta E_{A_2B_2} \Rightarrow m_1 \cancel{c_V} (T_{eq} - T_{A1}) = - m_2 \cancel{c_V} (T_{eq} - T_{A2}) \Rightarrow m_1 (T_{eq} - T_{A1}) = m_2 (T_{A2} - T_{eq})$$

$$\Rightarrow 2\cancel{m_2} (T_{eq} - T_{A1}) = \cancel{m_2} (T_{A2} - T_{eq}) \Rightarrow 2T_{eq} - 2T_{A1} = T_{A2} - T_{eq} \Rightarrow 3T_{eq} = T_{A2} + 2T_{A1}$$

$$\Rightarrow 3T_{eq} = 6T_{A1} \Rightarrow T_{eq} = 2T_A$$

Per calcolare la variazione di entropia nei due gas consideriamo le trasformazioni come formate da un'isocora e un'isoterma.

$$\Delta S_{A_1B_1} = m_1 c_V \ln \frac{T_{B1}}{T_{A1}} + m_1 R \ln \frac{V_{B1}}{V_{A1}} = \frac{3}{2} R m_1 \ln 2 + m_1 R \ln 2 = m_1 \ln 2 \left(\frac{3}{2}R + R\right) =$$

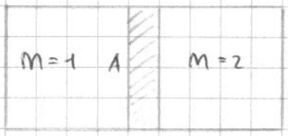
$$= c_p m_1 \ln 2$$

$$\Delta S_{A_2B_2} = m_2 c_V \ln \frac{T_{B2}}{T_{A2}} + m_2 R \ln \frac{V_{B2}}{V_{B1}} = m_2 \frac{3}{2} R \ln\left(\frac{1}{2}\right) + m_2 R \ln\left(\frac{1}{2}\right) = m_2 \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}R + R\right) =$$

$$= - c_p m_2 \ln 2$$

I segni dei due ΔS sono differenti, così come i valori assoluti: infatti il modulo di $\Delta S_{A_1B_1}$ risulta essere doppio di $\Delta S_{A_2B_2}$ per il fatto che $m_1 = 2m_2$; quindi l'entropia globale sarà aumentata di un fattore pari a $c_p m_2 \ln 2$

ESERCIZIO 3 6 MARZO 2011



$Q_{AB} = 6RT_A$

	P	V	T
A_1	P_A	V_A	T_A
B_1	$5P_A$	V_A	$5T_A$
C_1	$\frac{11}{3}P_A$	V_A	$\frac{11}{3}T_A$
D_1		$\frac{2V_A}{1+2^{1/\gamma}}$	$\frac{11}{3}T_A$

	P	V	T
A_2	$2P_A$	V_A	T_A
B_2	$6P_A$	V_A	$3T_A$
C_2	$\frac{22}{3}P_A$	V_A	$\frac{11}{3}T_A$
D_2		$\frac{2^{1+\frac{1}{\gamma}}V_A}{1+2^{1/\gamma}}$	$\frac{11}{3}T_A$

$PV = mRT \Rightarrow P = \frac{mRT}{V} \Rightarrow P_{A1} = \frac{\cancel{R}P_AV_A}{\cancel{R}} \cdot \frac{1}{\cancel{V_A}} = P_A \quad P_{A2} = \frac{2\cancel{R}P_A\cancel{V_A}}{\cancel{R}} \frac{1}{\cancel{V_A}} = 2P_A$

$Q = mC_V \Delta T \Rightarrow T_{B1} = T_{A1} + \frac{Q}{mC_V} = T_A + \frac{\cancel{6}^{2}\cancel{R}T_A}{\cancel{3}\cancel{R}} \cdot 2 = 5T_A \quad T_{B2} = T_{A2} + \frac{6RT_A}{2} \cdot \frac{2}{3R} = 3T_A$

$P_{B1} = \frac{RT_{B1}}{V_{B1}} = \frac{R5T_A}{V_A} = \frac{\cancel{R}5P_A\cancel{V_A}}{\cancel{R}} \frac{1}{\cancel{V_A}} = 5P_A \quad P_{B2} = \frac{mRT_{B2}}{V_{B2}} = \frac{2R3T_A}{V_A} = \frac{6RT_A}{V_A} = \frac{6\cancel{R}P_A\cancel{V_A}}{\cancel{R}\cancel{V_A}} = 6P_A$

$T_{eq} = \frac{m_1\cancel{C_V}T_{B1} + m_2\cancel{C_V}T_{B2}}{m_1\cancel{C_V} + m_2\cancel{C_V}} = \frac{5T_A + 2\cdot 3T_A}{1+2} = \frac{11}{3}T_A$

$P_{C1} = \frac{RT_{C1}}{V_{C1}} = \frac{R11T_A}{3V_A} = \frac{11\cancel{R}P_A\cancel{V_A}}{\cancel{R}3\cancel{V_A}} \frac{1}{} = \frac{11}{3}P_A$

$P_{C2} = \frac{2RT_{C2}}{V_{C2}} = \frac{22RT_A}{3V_A} = \frac{22\cancel{R}P_A\cancel{V_A}}{\cancel{R}} \cdot \frac{1}{3\cancel{V_A}} = \frac{22}{3}P_A$

$P_{D1} = P_{D2}$ in quanto è stato raggiunto l'equilibrio

CD adiabatica $\Rightarrow P_{C1}V_{C1}^{\gamma} = P_{D1}V_{D1}^{\gamma} \quad P_{C2}V_{C2}^{\gamma} = P_{D2}V_{D2}^{\gamma}$

dividendo membro a membro $\frac{\cancel{P_{C1}}}{2\cancel{P_{C2}}}\left(\frac{\cancel{V_{C1}}}{\cancel{V_{C2}}}\right)^{\gamma} = \frac{\cancel{P_{D1}}}{\cancel{P_{D2}}}\left(\frac{V_{D1}}{V_{D2}}\right)^{\gamma} \Rightarrow V_{D2} = V_{D1} \cdot 2^{1/\gamma}$

inoltre sappiamo che $V_{D1} + V_{D2} = 2V_A \Rightarrow V_{D1} + V_{D1}2^{1/\gamma} = 2V_A \Rightarrow V_{D1} = \frac{2V_A}{(1+2^{1/\gamma})}$

$\Rightarrow V_{D2} = \frac{2^{1+\frac{1}{\gamma}}V_A}{(1+2^{1/\gamma})}$

$\Delta S_{C1D1} = \Delta S_{C2D2} = 0$ in quanto adiabatiche

$\Delta S_{A1B1} = \int \frac{dQ}{T} = mC_V \ln \frac{T_{B1}}{T_{A1}} = \frac{3}{2}R\ln 5$

$\Delta S_{A2B2} = \int \frac{dQ}{T} = mC_V \ln \frac{T_{B2}}{T_{A2}} = 3R\ln 3$

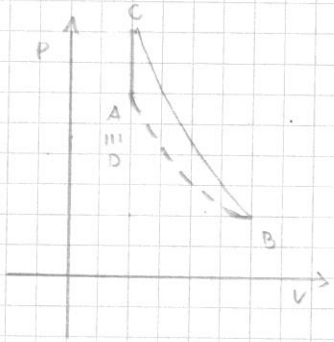
$\Delta S_{B1C1} = \int \frac{dQ}{T} = mC_V \ln \frac{T_{C1}}{T_{B1}} = \frac{3}{2}R\ln \frac{11}{15} = -\frac{3}{2}R\ln \frac{15}{11}$

$\Delta S_{B2C2} = \int \frac{dQ}{T} = mC_V \ln \frac{T_{C2}}{T_{B2}} = 3R\ln \frac{11}{9}$

ESERCIZIO 3 23 NOVEMBRE 2011

	P	V	T
A	P_A	$\frac{V_A}{3}$	T_A
B	$\frac{P_A}{3}$	V_A	T_A
C	$3^{2/3} P_A$	$\frac{V_A}{3}$	$3^{-1/3} T_A$
D	P_A	$\frac{V_A}{3}$	T_A

AB espansione libera
BC adiabatica
CD isocora



in AB $\Delta T = 0 \Rightarrow T_B = T_A$

$$P_A V_A = P_B V_B \Rightarrow P_B = P_A \frac{V_A}{V_B} = P_A \cdot \frac{1}{3} = \frac{P_A}{3}$$

$$P_B V_B^{\gamma} = P_C V_C^{\gamma} \Rightarrow P_C = \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma} P_B = 3^{\cancel{5/3}\, 2/3} \frac{P_A}{\cancel{3}} = 3^{2/3} P_A$$

$$T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = \cancel{3^{2/3}} P_A \frac{V_A}{3^{1/3}} \cdot \frac{1}{nR} = 3^{-1/3} T_A$$

Poiché $T_A = T_D$ e $V_A = V_D \Rightarrow P_A = P_D$

$$P = \frac{F}{S} \Rightarrow F = P \cdot S$$

$\Rightarrow$ FORZA prima colla saltata $= P_0 \Sigma$

FORZA primo equilibrio $= \left(P_0 - \frac{P_A}{3}\right)\Sigma$

FORZA dopo compressione $= (P_0 - 3^{2/3} P_A)\Sigma$

FORZA dopo equilibrio termico $= (P_0 - P_A)\Sigma$

$$\Delta S_{AB} = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{p\,dV}{T} = nR \ln \frac{V_B}{V_A} = nR \ln 3$$

$\Delta S_{BC} = 0$ poiché BC è adiabatica

$$\Delta S_{CD} = \int \frac{dQ}{T} = n c_V \ln \frac{T_D}{T_C} = \frac{3}{2} nR \ln 3^{1/3} = \frac{1}{\cancel{3}} \frac{\cancel{3}}{2} nR \ln 3 = \frac{nR}{2} \ln 3$$

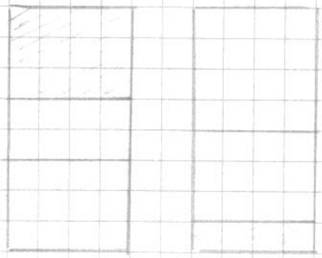
$$L_{AB} = \int dL = \int p\,dV = nRT_{AB} \ln \frac{V_B}{V_A} = nRT_A \ln 3$$

$L_{BC} = -\Delta E_{BC}$ per il primo principio ($\Delta E = Q - L$, adiabatica $\Rightarrow Q = 0$)

$$L_{BC} = -n c_V (T_C - T_B) = n c_V (T_B - T_C) = \frac{3}{2} nRT_A (1 - 3^{-1/3})$$

$L_{CD} = 0$ poiché CD è isocora

ESERCIZIO 3 20 SETTEMBRE 2011



	P	V	T
A	P_A	V_A	T_0
B	$2^{-5/3}P_A$	$2V_A$	$2^{-2/3}T_0$
C	$2^{-5/3}P_A$	$2^{5/3}V_A$	T_0

$P_A = P_0 + Mg/\Sigma$

$P_C = P_0 - Mg/\Sigma$

AB adiabatica $\Rightarrow P_A V_A^{\gamma} = P_B V_B^{\gamma} \Rightarrow P_B = \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma} P_A = 2^{-5/3} P_A$

$$PV = nRT \Rightarrow T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = \frac{2^{-5/3} P_A V_A \cdot 2}{nR} = 2^{-2/3} T_0$$

$$V_C = \frac{nRT_C}{P_C} = \cancel{nR}\frac{P_A V_A}{\cancel{nR}} \cdot \frac{1}{2^{-5/3} \cancel{P_A}} = 2^{5/3} V_A$$

Per calcolare il peso del pistone:

$$2^{-5/3}(P_0 + Mg/\Sigma) = P_0 - Mg/\Sigma \Rightarrow 2^{-5/3} Mg/\Sigma + Mg/\Sigma = P_0 - P_0 2^{-5/3}$$

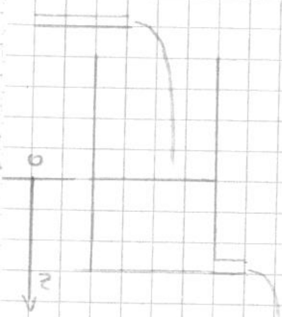
$$\Rightarrow Mg(1 + 2^{-5/3})/\Sigma = P_0(1 - 2^{-5/3}) \Rightarrow Mg = \frac{P_0 \Sigma (1 - 2^{-5/3})}{(1 + 2^{-5/3})}$$

$\Delta S_{AB} = 0$ perché AB adiabatica

$$\Delta S_{BC} = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{n c_p \, dT}{T} = n c_p \int \frac{dT}{T} = n c_p \ln \frac{T_C}{T_B} = \frac{5}{2} nR \ln \frac{1}{2^{-2/3}} =$$

$$= \frac{5}{2} nR \ln 2^{2/3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} nR \ln 2 = \frac{5}{3} nR \ln 2$$

ESERCIZIO 4 20 SETTEMBRE 2011



a) La quota raggiunta dal liquido dopo un periodo lungo la si trova uguagliando le portate dei tubi; calcoliamo con il teorema di Bernoulli la portata del tubo più in basso.

$$\cancel{p_0} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = \cancel{p_0} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho v^2 = -\rho g h \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{\rho} v^2 = \rho g h$$

il cambio di segno è dovuto all'orientazione dell'asse z.

$$V = \sqrt{2gh} \Rightarrow J' = s\sqrt{2gh}$$

$$J = J' = s\sqrt{2gh} \Rightarrow J^2 = s^2 2gh \Rightarrow h_{eq} = \left(\frac{J}{s}\right)^2 \frac{1}{2g}$$ l'altezza di equilibrio

b) Il recipiente vede il liquido al suo interno aumentare per effetto di J e diminuire per J' quindi:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d(Sh)}{dt} = S\frac{dh}{dt} = J - J' = J - s\sqrt{2gh} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \left(\frac{J}{S} - \frac{s}{S}\sqrt{2gh}\right)$$

c) $$\Rightarrow \frac{dh}{J/S - s\sqrt{2gh}/S} = dt \Rightarrow \int_{h(0)}^{h(t)} \frac{S\,dh}{J - s\sqrt{2gh}} = \int_0^t dt$$ o anche

$$\int_{h(0)}^{h(t)} (J/S - s\sqrt{2gh}/S)^{-1} dh = \int_0^t dt$$ riconducibile a $(a\sqrt{h} + b)^{-1} dh = dt$

con $a = -s\sqrt{2g}/S$ e $b = J/S$ la cui primitiva è:

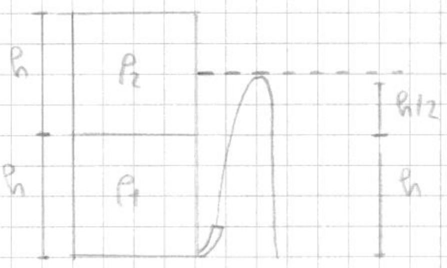
$$F(x) = 2a\sqrt{x} - 2b\ln(b + a\sqrt{x})]/a^2$$

Pertanto otteniamo (con le sostituzioni precedenti)

$$\left[-\frac{2s\sqrt{2gh}}{S} \dots - \frac{2J}{S}\ln\left(\frac{J}{S} - \frac{s\sqrt{2gh}}{S}\right)\cdot\frac{S^2}{s^2 2gh}\right]_{h(0)}^{h(t)} = t$$

$$\Rightarrow t_1 = -\frac{2s\sqrt{2gh(t_1)}}{S} - 2\frac{J}{S}\ln\left(\frac{J}{S} - \frac{s\sqrt{2gh(t_1)}}{S}\right)\cdot\frac{S^2}{s^2 2gh}$$

ESERCIZIO 4 6 MARZO 2011



$t = 0$, i liquidi hanno lo stesso volume

Innanzi calcoliamo la velocità con cui il liquido fuoriesce dal foro in fondo usando il teorema di Bernoulli:

$$\cancel{p_0} + \rho_1 g h + \rho_2 g h + \cancel{\frac{1}{2}\rho_2 v^2} = \cancel{p_0} + \cancel{\rho_1 g h} + \frac{1}{2}\rho_1 v^2$$

$$\Rightarrow (\rho_1 + \rho_2) g h = \frac{1}{2}\rho_1 v^2$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2gh}{\rho_1}(\rho_1 + \rho_2)$$

* poiché passa dal moto in quello uniformemente accelerato

Poiché il liquido fuoriesce in direzione verticale, possiamo considerare che la velocità abbia soltanto una componente y. Nel moto uniformemente accelerato* tale componente è pari a $2gH$, dove H è l'altezza raggiunta (ciò è deducibile dalla conservatività della forza peso); quindi

$$v^2 = \frac{\cancel{2g}h}{\rho_1}(\rho_1 + \rho_2) = \cancel{2g}\left(h + \frac{h}{2}\right) \Rightarrow \frac{h}{\rho_1}(\rho_1 + \rho_2) = \frac{3h}{2} \Rightarrow 2(\rho_1 + \rho_2) = 3\rho_1$$

$$\Rightarrow 2\rho_1 + 2\rho_2 = 3\rho_1 \Rightarrow \rho_1 = 2\rho_2$$

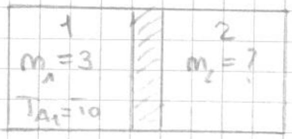
Per gli istanti successivi, chiamiamo z l'altezza del primo liquido e controlliamo a che altezza arriva

$$\frac{1}{2}\rho_1 v^2 = \rho_1 g z + \rho_2 g h = \rho_1 g z + \frac{\rho_1}{2} g h = \rho_1 g\left(z + \frac{h}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{\rho_1} v^2 = \cancel{\rho_1} g\left(z + \frac{h}{2}\right) \Rightarrow v^2 = 2g\left(z + \frac{h}{2}\right)$$

Quindi, poiché anche qui la componente della velocità è soltanto verticale vediamo che l'altezza raggiunta è pari a $z + h/2$, ovvero viene raggiunta sempre la metà del secondo liquido.

Esercizio 4 5 aprile 2011



	P	V	T
A_1	P_A	V_A	T_0
B_1	P_A	$\frac{3}{2}V_A$	$\frac{3}{2}T_0$

	P	V	T
A_2	P_A	V_A	$3T_0$
B_2	P_A	$\frac{V_A}{2}$	$\frac{3}{2}T_0$

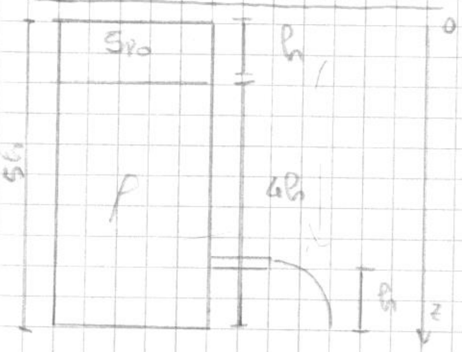
Per la legge di stato dei gas perfetti $PV = mRT \Rightarrow T = \frac{PV}{mR}$

$$T_{B_1} = T_{B_2} \Rightarrow \frac{\cancel{P_A} 3\cancel{V_A}}{\cancel{m_1} R 2} = \frac{\cancel{P_A} \cancel{V_A}}{m_2 R 2} \Rightarrow \cancel{2} m_2 \cancel{R} = 2R \Rightarrow m_2 = 1$$

$$T_{B_1} = \frac{P_A 3 V_A}{2} \cdot \frac{1}{3R} = \frac{P_A V_A}{2R} \qquad T_0 = \frac{P_A V_A}{3R} \Rightarrow T_{B_1} = \frac{3}{2} T_0$$

$$T_{A_2} = \frac{P_A V_A}{mR} = 3T_0$$

Esercizio 3 13 luglio 2011



Calcoliamo innanzi la velocità di uscita dell'acqua utilizzando il teorema di Bernoulli:

$$p_0 + \cancel{\rho g h} + \cancel{\frac{1}{2}\rho v^2} = 5p_0 + \rho g 3h + \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho v_1^2 = -4p_0 - \rho g 3h$$

Cambiando i segni per come è stato orientato l'asse otteniamo:

$$v_1^2 = (4p_0 + \rho g 3h)\frac{2}{\rho} \Rightarrow v_1 = \sqrt{(4p_0 + \rho g 3h)\frac{2}{\rho}} \Rightarrow d_1 = v_1 \cdot t_1 = \sqrt{(4p_0 + \rho g 3h)\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Questa è la distanza raggiunta dal getto considerando che il tempo di discesa t_1 è uguale a tutte e due in quanto si tratta di un moto uniformemente accelerato; la velocità lungo x, poi, sappiamo che si conserva. Facciamo lo stesso nel secondo caso, considerando l'isoterma che subisce l'aria nel contenitore

	P	V	T
A	$5p_0$	V_A	T_A
B	$\frac{5}{3}p_0$	$3V_A$	T_A

AB isoterma $\Rightarrow p_A V_A = p_B V_B \Rightarrow p_B = \frac{V_A}{V_B} \cdot p_A = \frac{1}{3} 5p_0 = \frac{5}{3}p_0$

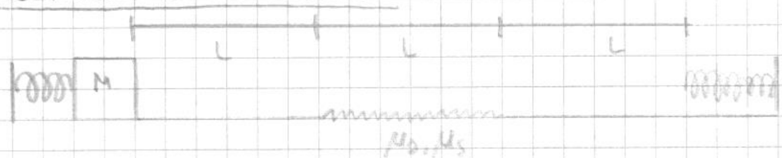
Usiamo ancora Bernoulli:

$$p_0 + \cancel{\rho g h} + \cancel{\frac{1}{2}\rho v^2} = \frac{5}{3}p_0 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$ (anche qui cambio segno come prima)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho v_2^2 = \frac{2}{3}p_0 + \rho g h \Rightarrow v_2^2 = \left(\frac{2}{3}p_0 + \rho g h\right)\frac{2}{\rho} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\left(\frac{2}{3}p_0 + \rho g h\right)\frac{2}{\rho}}$$

$$\Rightarrow d_2 = v_2 \cdot t_1 = \sqrt{\left(\frac{2}{3}p_0 + \rho g h\right)\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

ESERCIZIO 2 5 APRILE 2011



a) Il corpo arriverà all'altra molla se l'energia potenziale iniziale non verrà assorbita dal lavoro non conservativo dell'attrito dinamico

$$\frac{1}{2}k\Delta x_0^2 > L_{nc} \qquad L_{nc} = F\cdot\Delta S = \mu_D N L = \mu_D M g L$$ in quanto l'attrito è costante

$$\Rightarrow \frac{1}{2}k\Delta x_0^2 > \mu_D M g L \Rightarrow \Delta x_0^2 > \frac{2}{k}\mu_D M g L \Rightarrow \Delta x_0 > \sqrt{\frac{2}{k}\mu_D M g L}$$

b) La compressione della seconda molla sarà dovuta all'energia residua dopo il tratto ruvido

$$\frac{1}{2}k\Delta x_0^2 - \mu_D M g L = \frac{1}{2}k\Delta x_2^2 \Rightarrow \Delta x_2^2 = \Delta x_0^2 - \frac{2}{k}\mu_D M g L \Rightarrow \Delta x_2 = \sqrt{\Delta x_0^2 - \frac{2}{k}\mu_D M g L}$$

Per calcolare l'istante della massima compressione dobbiamo considerare il tempo necessario al corpo per percorrere i due tratti lisci, quello ruvido e i tempi di distensione e compressione delle due molle. Innanzitutto calcoliamo i tempi per i tratti lisci (dopo cui calcolo la velocità del blocco) e per la distensione-compressione della molla

$$\frac{1}{2}k\Delta x_0^2 = \frac{1}{2}M v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{k}{M}\Delta x_0^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{M}\Delta x_0^2} = \Delta x_0\sqrt{\frac{k}{M}}$$

$$t_2 = \frac{S}{v} = \frac{L}{v} = \frac{L}{\Delta x_0}\sqrt{\frac{M}{k}}$$ il tempo per percorrere il primo tratto liscio

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \Rightarrow \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{k}} = t_1 = t_5$$ i tempi per distensione e compressione della molla

$$\frac{1}{2}k\Delta x_0^2 - L_{nc} = \frac{1}{2}M v_2^2 \Rightarrow v_2^2 = \frac{k}{M}\Delta x_0^2 - 2\mu_D g L \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{k}{M}\Delta x_0^2 - 2\mu_D g L}$$

$$t_4 = \frac{L}{v_2} = L\cdot\sqrt{\frac{M}{k\Delta x_0^2 - 2Mg\mu_D L}}$$ il tempo per percorrere il secondo tratto liscio

$$L = v_2 t - \frac{1}{2}\mu_D g t_3^2 \Rightarrow \mu_D g t_3^2 - v_1 t + L = 0 \Rightarrow t_3 = \frac{v_1 \pm \sqrt{v_1^2 - 4L\mu_D g}}{2\mu_D g}$$

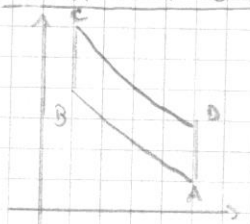
$$t_{compr} = 2t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \pi\sqrt{\frac{k}{M}} + \frac{L}{\Delta x_0}\sqrt{\frac{M}{k}} + \frac{v_1 - \sqrt{v_1^2 - 4L\mu_D g}}{2\mu_D g} + L\sqrt{\frac{M}{k\Delta x_0^2 - 2M g\mu_D L}}$$

c) Per calcolare l'n-esimo valore di compressione della prima molla è sufficiente considerare che, per tornare alla prima molla, il corpo attraversa due volte il tratto ruvido, il quale è l'unico che gli fa perdere energia; quindi

$$\frac{1}{2}k\Delta x_n^2 = \frac{1}{2}k\Delta x_0^2 - 2nL_{nc} \Rightarrow \Delta x_n^2 = \Delta x_0^2 - \frac{4}{k}\mu_D M g L$$

$$\Rightarrow \Delta x_n = \sqrt{\Delta x_0^2 - \frac{4}{k}\mu_D M g L} \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots$$

ESERCIZIO 4 13 LUGLIO 2011



	P	V	T
A	P_A	V_A	T_A
B		$\frac{V_A}{\alpha}$	$\alpha^{\gamma-1} T_A$
C		$\frac{V_A}{\alpha}$	$\alpha^{\gamma-1} T_D$
D		V_A	T_D

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

$$\alpha = \frac{V_{max}}{V_{min}}$$

AB e CD adiabatiche BC e DA isocore

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \Rightarrow T_B = \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} T_A = \alpha^{\gamma-1} T_A$$

Analogamente $\alpha^{\gamma-1} T_D = T_C$

$$Q_{ass} = Q_{BC} = m c_v \Delta T = m c_v (T_C - T_B)$$

$$Q_{ced} = Q_{DA} = - m c_v \Delta T = - m c_v (T_A - T_D) = m c_v (T_D - T_A)$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}} = 1 - \frac{\cancel{m c_v} (T_D - T_A)}{\cancel{m c_v} (T_C - T_B)} = 1 - \frac{T_D - T_A}{\alpha^{\gamma-1} T_D - \alpha^{\gamma-1} T_A} = 1 - \frac{\cancel{T_D - T_A}}{\alpha^{\gamma-1} \cancel{(T_D - T_A)}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}} = 1 - \alpha^{1-\gamma} = 1 - \frac{T_A}{T_B}$$

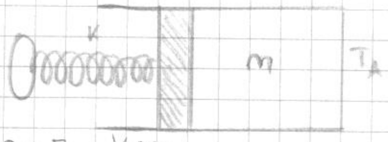
$$\eta_{carnot} = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{T_A}{T_C}$$

Come possiamo dedurre dal grafico, $T_C > T_B$ pertanto:

$$\frac{T_A}{T_C} < \frac{T_A}{T_B} \Rightarrow 1 - \frac{T_A}{T_C} > 1 - \frac{T_A}{T_B} \Rightarrow \eta_{carnot} > \eta$$

Per arrivare a tale risultato mi sono servito soltanto delle proprietà delle adiabatiche delle isocore e dei cicli diretti.

ESERCIZIO 3 17 SETTEMBRE 2010



	P	V	T
A_1	P_A	V_A	T_A
B_1	$2P_A$	$\frac{V_A}{2}$	T_A

	P	V	T
A_2	P_A	V_A	T_A
B_2	$2^\gamma P_A$	$\frac{V_A}{2}$	$2^{\gamma-1} T_A$

$P = \frac{F}{S} = \frac{K\Delta x}{S}$

① AB isoterma

$PV = mRT \Rightarrow P_B = \frac{mRT_B}{V_B} = \frac{\cancel{mR}\, P_A V_A}{\cancel{mR}} \cdot \frac{2}{\cancel{V_A}} = 2P_A$

$P_1 = P_A = \frac{K h_0}{S} \qquad P_2 = 2P_A = \frac{K h_1}{S} = \frac{2Kh_0}{S} \Rightarrow h_1 = 2h_0$

$-L_{molla} = \Delta U_{molla} = \frac{1}{2}K\left((2h_0)^2 - h_0^2\right) = \frac{1}{2}K\,3h_0^2 = \frac{3}{2}Kh_0^2$ questo è il lavoro sulla molla

$-L_{gas} = -mRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} = -mRT_A \ln\frac{1}{2} = mRT_A \ln 2$

$-L_{gas_{tot}} = -L_{molla} + (-L_{gas}) = \frac{3}{2}Kh_0^2 + mRT_A\ln 2$ questo è il lavoro totale sul gas

$Q = L_{gas} = -mRT_A\ln 2$ perché $\Delta T = 0$, $\Delta E \propto \Delta T$, $\Rightarrow 0 = Q - L \Rightarrow Q = L$

$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = mR\ln\frac{V_B}{V_A} = -mR\ln 2$

② AB adiabatica

$P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma \Rightarrow P_B = \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^\gamma P_A = 2^\gamma P_A \Rightarrow T_B = \frac{P_B V_B}{mR} = 2^{\gamma-1} T_A$

Con lo stesso metodo di prima vediamo che $h_1 = 2^\gamma h_0$

$-L_{molla} = \Delta U_{molla} = \frac{1}{2}K\left((2^\gamma h_0)^2 - h_0^2\right) = \frac{1}{2}Kh_0^2\left(2^{2\gamma} - 1\right)$ questo è il lavoro sulla molla

$-L_{gas} = \Delta E = mC_V\Delta T = \frac{3}{2}mR\left(T_A 2^{\gamma-1} - T_A\right) = \frac{3}{2}mRT_A\left(2^{\gamma-1} - 1\right)$

$-L_{gas_{tot}} = -L_{molla} + (-L_{gas}) = \frac{1}{2}Kh_0^2\left(2^{2\gamma} - 1\right) + \frac{3}{2}mRT_A\left(2^{\gamma-1} - 1\right)$ questo è il lavoro totale sul gas

$Q = 0$ perché AB adiabatica

$\Delta S = 0$ perché AB adiabatica

ESERCIZIO 3 6 SETTEMBRE 2010

	P	V	T
A	P_A	V_A	T_A
B	$\frac{3}{2}P_A$	$\frac{3}{2}V_A$	$\frac{9}{4}T_A$
C		V_A	$\left(\frac{3}{2}\right)^{8/3}T_A$

a) $V_A = \Sigma h$

$$P_A = \frac{F}{\Sigma} = \frac{kh}{\Sigma}$$

$\Rightarrow T_A = \frac{P_A V_A}{mR} = \frac{kh}{\Sigma}\cdot\frac{\Sigma h}{mR} = kh^2$ per la legge di stato dei gas perfetti

b) $V_B = \frac{3}{2}V_A = \frac{3}{2}\Sigma h \Rightarrow h_1 = \frac{3}{2}h \Rightarrow P_A = \frac{3}{2}\frac{hk}{\Sigma} = \frac{3}{2}P_A$

$$T_B = \frac{P_B V_B}{mR} = \frac{3}{2}P_A\,\frac{3}{2}\frac{V_A}{mR} = \frac{9}{4}T_A$$

$$\Delta E = mc_v\Delta T = \frac{3}{2}mR\left(\frac{9}{4}T_A - T_A\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}mRT_A = \frac{15}{8}mRT_A$$

Il lavoro fatto dal gas sarà uguale a quello subito dalla molla, il quale a sua volta è uguale alla variazione di energia potenziale della molla stessa

$$-L = \Delta U_{molla} = \frac{1}{2}k\left(\left(\frac{3h}{2}\right)^2 - h^2\right) = \frac{1}{2}k\left(\frac{9h^2}{4} - h^2\right) = \frac{5}{8}kh^2$$

$\Delta E = Q - L \Rightarrow Q = \Delta E + L = \frac{15}{8}mRT_A + \frac{5}{8}kh^2 = \frac{5}{8}(3mRT_A + kh^2)$ per il I principio

c) Per calcolare la variazione di entropia consideriamo la trasformazione AB come successione di un'isobara ed un'isocora

$$\Delta S_{AB} = \Delta S_{isob} + \Delta S_{isoc} = mc_p\ln\frac{V_B}{V_A} + mc_v\ln\frac{P_B}{P_A} = \frac{5}{2}mR\ln\frac{3}{2} + \frac{3}{2}mR\ln\frac{3}{2} = 4mR\ln\frac{3}{2}$$

d) BC è un'adiabatica

$$T_A V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \Rightarrow T_C = \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1}T_B = \frac{3}{2}^{2/3}\frac{9}{4}T_A = \frac{3}{2}^{2/3}\cdot\frac{3}{2}^2 T_A = \left(\frac{3}{2}\right)^{8/3}T_A$$

$L = -\Delta E$ in un'adiabatica perché $\Delta E = Q - L$, $Q = 0 \Rightarrow L = -\Delta E$

$$\Delta E = mC_v\Delta T = \frac{3}{2}mR\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{8/3}T_A - \left(\frac{3}{2}\right)^2 T_A\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2 mRT_A\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} - 1\right) = \frac{27}{8}mRT_A\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} - 1\right)$$

$$P_C = \frac{mRT_C}{V_C} = \cancel{mR}\left(\frac{3}{2}\right)^{8/3}\frac{P_A\cancel{V_A}}{\cancel{mR}}\cdot\frac{1}{\cancel{V_A}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{8/3}P_A = \left(\frac{3}{2}\right)^{8/3}\frac{kh}{\Sigma} \Rightarrow h_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{8/3}h$$

$$-L_{molla} = \Delta U_{molla} = \frac{1}{2}k\left(\left(\frac{3}{2}^{8/3}h\right)^2 - \left(\frac{3}{2}h\right)^2\right) = \frac{1}{2}k\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{16/3}h^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 h^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2 kh^2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{10/3} - 1\right)$$

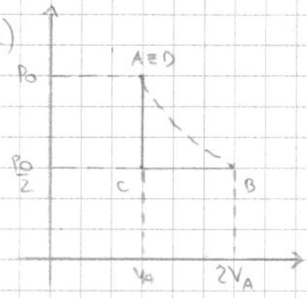
$$= \frac{9}{8}kh^2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{10/3} - 1\right)$$

$$L_{tot} = \Delta E + \Delta U_{molla} = \frac{9}{8}\left(3mRT_A\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} - 1\right) + kh^2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{10/3} - 1\right)\right)$$

ESERCIZIO 3 13 APRILE 2010

	P	V	T
A	P_0	V_A	$2T_0$
B	$\frac{P_0}{2}$	$2V_A$	$2T_0$
C	$\frac{P_0}{2}$	V_A	T_0
D	P_0	V_A	$2T_0$

a)



$$P_B = \frac{nRT_B}{V_B} = \cancel{nR} \cdot \frac{P_0 V_A}{\cancel{nR}} \cdot \frac{1}{2V_A} = \frac{P_0}{2}$$

$P_B = P_C$ poiché $F_B = F_C$

$$V_C = \frac{nRT_C}{P_C} = \cancel{nR}\,\frac{P_0 V_A}{2\cancel{nR}} \cdot \frac{2}{P_0} = V_A$$

b) Calcoliamo le forze richieste

$$P = \frac{F}{S} \Rightarrow F = PS$$

$F_1 = P_0 S$ è la forza che tiene il pistone prima della rottura del vello

$F_2 = (P_0 - P_0/2)S = \frac{P_0 S}{2}$ forza sul pistone al primo equilibrio

$F_3 = (P_0 - P_0)S = 0$ forza sul pistone dopo il riscaldamento finale

c) $\Delta S_{AB} = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{dL}{T} = \int \frac{p\,dV}{T} = nR \ln \frac{V_B}{V_A} = nR \ln 2$

$$\Delta S_{BC} = \int \frac{dQ}{T} = nc_p \ln \frac{T_C}{T_B} = \frac{5}{2} nR \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2} nR \ln 2$$

$$\Delta S_{CD} = \int \frac{dQ}{T} = nc_V \ln \frac{T_D}{T_C} = \frac{3}{2} nR \ln 2$$

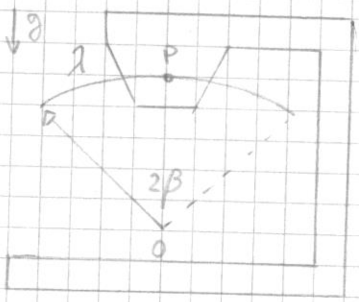
$$\Delta S_{tot} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CD} = nR\ln 2 + \left(-\frac{5}{2} nR \ln 2\right) + \frac{3}{2} nR \ln 2 = 0$$

d) $L_{AB} = nRT_{AB} \ln \frac{V_B}{V_A} = 2nRT_0 \ln 2$ NO! nell'espansione libera non c'è lavoro compiuto dal gas

$$L_{BC} = p \cdot \Delta V = \frac{P_0}{2} \cdot (V_A - 2V_A) = -\frac{P_0 V_A}{2}$$

$L_{CD} = 0$ poiché è isocora

ESERCIZIO 2 14 SETTEMBRE 2010



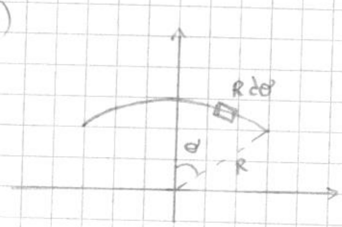
a) Calcoliamo intanto la lunghezza della sbarretta:

$$rad = \frac{arco}{raggio} \Rightarrow arco = rad \cdot raggio = 2\beta R$$

$$M = arco \cdot densità = 2\beta R\lambda$$

$$I_O = \int x^2 dm = R^2 M = 2\beta\lambda R^3$$

b)



$$x_{CM} = 0$$

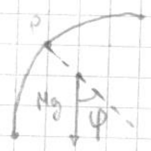
$$Y_{CM} = \frac{\int y\,dm}{M} = \frac{\int R\cos\vartheta\, R\, d\vartheta\, \lambda}{2\beta R\lambda} = \frac{R\,[\mathrm{sen}\,\vartheta]_{-\beta}^{\beta}}{2\beta} =$$

$$= \frac{R\,(\mathrm{sen}\,\beta - \mathrm{sen}(-\beta))}{2\beta} = \frac{R\,(\mathrm{sen}\,\beta + \mathrm{sen}\,\beta)}{2\beta} = \frac{R\,2\,\mathrm{sen}\,\beta}{2\beta} = \frac{R\,\mathrm{sen}\,\beta}{\beta}$$

$Y_{CM} = D = \frac{R\,\mathrm{sen}\,\beta}{\beta}$ è la distanza tra CM e centro di curvatura

$$I_O = I_{CM} + MD^2 \Rightarrow I_{CM} = I_O - MD^2 = 2\beta\lambda R^3 - 2\cancel{\beta}R\lambda \cdot \frac{R^2\,\mathrm{sen}^2\beta}{\beta^{\cancel{2}}} = 2\lambda\beta R^3\left(1 - \frac{\mathrm{sen}^2\beta}{\beta}\right)$$

c) $I_P = I_{CM} + M(R-D)^2 = 2\lambda\beta R^3\left(1 - \frac{\mathrm{sen}^2\beta}{\beta}\right) + 2\lambda\beta R\left(R - R\frac{\mathrm{sen}\,\beta}{\beta}\right)^2$



Per calcolare la frequenza di piccole oscillazioni utilizziamo la II cardinale:

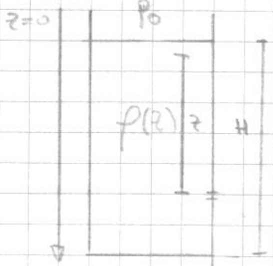
$$I_P\,\alpha = I\,\ddot\varphi = -Mg\,\mathrm{sen}\,\varphi\,(R-D)$$

per $\varphi \ll 1 \Rightarrow \mathrm{sen}\,\varphi \cong \varphi$

$$\Rightarrow I\ddot\varphi = -Mg\varphi(R-D) \Rightarrow \ddot\varphi = -\frac{Mg}{I_P}\varphi(R-D)$$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{Mg(R-D)}{I_P}}$ era la frequenza cercata

ESERCIZIO 3 17 FEBBRAIO 2014



$$P(z) = p_0 + \alpha z^3$$

a) Per la legge di Stevino possiamo trovare la pressione in un liquido a densità variabile, qui ci è data già tale pressione pertanto sarà sufficiente seguire il procedimento inverso:

$$P(z) = \cancel{p_0} + \int \rho(z) g \, dz = \cancel{p_0} + \alpha z^3 \Rightarrow \rho(z) g = 3\alpha z^2$$

$$\Rightarrow \rho(z) = \frac{3\alpha z^2}{g}$$

b) Per vedere a quale altezza fare il foro per cui la massima distanza raggiunta dal getto in uscita calcoliamo la velocità di uscita per un foro ad una generica altezza z utilizzando il teorema di Bernoulli

$$\cancel{p_0} + \cancel{\rho g h} + \cancel{\tfrac{1}{2}\rho V^2} = \cancel{p_0} + \alpha z^3 + \frac{1}{2}\rho(z) V^2 \Rightarrow \cancel{\alpha} z^3 = \frac{1}{2}\frac{3\cancel{\alpha} z^2}{g} V^2$$

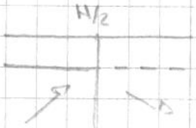
$$\Rightarrow V^2 = \frac{2}{3} g z \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2}{3} g z}$$

Il tempo di caduta sarà quello di un corpo in caduta libera, e moltiplicando la velocità per tale quantità otteniamo la distanza raggiunta, considerando poi la funzione della gittata, potremo trovare il valore di z che la massimizza.

$$d = V \cdot t = \sqrt{\frac{2\cancel{g}z}{3}} \cdot \sqrt{\frac{2(H-z)}{\cancel{g}}} = \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{zH - z^2}$$

$$f(z) = zH - z^2$$

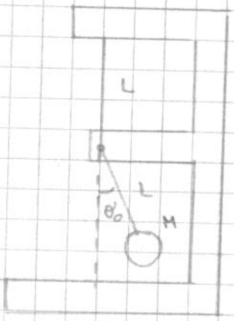
$$f'(z) = H - 2z > 0 \Rightarrow z < \frac{H}{2}$$



$x = \frac{H}{2}$ è max

$\Rightarrow$ il valore di z, quindi l'altezza del foro da praticare, che rende massima la gittata è $\frac{H}{2}$, dove H è l'altezza del liquido.

ESERCIZIO 1 17 FEBBRAIO 2016



Supponiamo che il pendolo parta da un angolo ϑ_0 come in figura:

a) Per calcolare la massima elongazione angolare del pendolo all'altro estremo del moto usiamo la conservazione dell'energia che all'inizio e alla fine dell'oscillazione sarà solo potenziale:

$$\cancel{K}+\cancel{K}\cos\vartheta_0 = 2\cancel{K}\cos\vartheta_1 \Rightarrow \cos\vartheta_1 = \frac{1+\cos\vartheta_0}{2}$$

$$\Rightarrow \vartheta_1 = \arccos\left(\frac{1+\cos\vartheta_0}{2}\right)$$

b) $T = Ma_c + Mg\cos\vartheta_0 = \frac{Mv^2}{R} + Mg\cos\vartheta_0$

$Mg\cos\vartheta$ è max per $\vartheta_0 = 0$

$\frac{Mv^2}{R}$ è max per $R = L$, cioè per $\vartheta_0 \to 0^+$ (per $\vartheta_0 \to 0^-$, $R = 2L$)

La velocità massima si avrà quando il corpo transita in posizione verticale, quindi l'energia potenziale è diventata tutta cinetica

$$\cancel{M}gL(1-\cos\vartheta_0) = \frac{1}{2}\cancel{M}v_{max}^2 \Rightarrow v_{max}^2 = 2gL(1-\cos\vartheta_0)$$

$$\Rightarrow v_{max} = \sqrt{2gL(1-\cos\vartheta_0)}$$

quindi:

$$T_{max} = \frac{Mv^2}{R} + Mg\cos\vartheta = \frac{M\,2g\cancel{L}(1-\cos\vartheta_0)}{\cancel{L}} + Mg = Mg(2-2\cos\vartheta_0+1) = Mg(3-2\cos\vartheta_0)$$

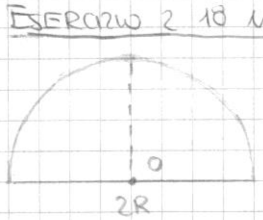
c) Per calcolare la frequenza del moto dobbiamo trovare prima il periodo, il quale sarà dato dalla somma di due diversi semiperiodi:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow \frac{T_1}{2} = \frac{2\pi}{2\omega_1} = \pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{2L}} \Rightarrow \frac{T_2}{2} = \frac{2\pi}{2\omega_2} = \pi\sqrt{\frac{2L}{g}}$$

$$T_{tot} = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} = \pi\sqrt{\frac{L}{g}} + \pi\sqrt{\frac{2L}{g}} = \pi\sqrt{\frac{L}{g}}(1+\sqrt{2})$$

$$\nu_{tot} = \frac{1}{T_{tot}} = \sqrt{\frac{g}{L}}\,\frac{1}{\pi(1+\sqrt{2})}$$ questa è la frequenza del pendolo

ESERCIZIO 2 18 NOVEMBRE 2013



a) $M_S = 2R\lambda_0$

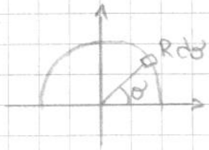
$M_C = \pi R \lambda_0$

$M_{tot} = M_S + M_C = 2R\lambda_0 + \pi R \lambda_0 = R\lambda_0 (2+\pi)$

$I_S = \frac{1}{12} M_S (2R)^2 = \frac{M_S R^2}{3}$

$I_C = M_C R^2$

$\Rightarrow I_{tot} = I_S + I_C = \frac{M_S R^2}{3} + M_C R^2 = \frac{2R\lambda_0 R^2}{3} + \pi R \lambda_0 R^2 = R^3 \lambda_0 \left(\frac{2}{3} + \pi\right)$

b) 

$x_{CM} = 0$

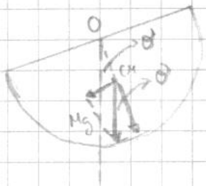
$D = y_{CM} = \frac{\int y\,dm}{M_{tot}} = \frac{\int R \operatorname{sen}\vartheta\, \lambda_0 R\, d\vartheta}{R\lambda_0 (2+\pi)} = \frac{R^2 \lambda_0 [-\cos\vartheta]_0^{\pi}}{R\lambda_0 (2+\pi)} = \frac{R(-\cos\pi + \cos 0)}{2+\pi}$

$= \frac{2R}{(2+\pi)}$ questa è la distanza del CM dal punto O

c) Per determinare il momento di inerzia rispetto ad un asse baricentrico è sufficiente invertire il teorema degli assi paralleli dato che noi conosciamo I rispetto ad O.

$I_0 = I_{CM} + M y_{CM}^2 \Rightarrow I_{CM} = I_0 - M y_{CM}^2 = R^3\lambda_0 \left(\frac{2}{3}+\pi\right) - R\lambda_0 \cancel{(2+\pi)} \cdot \frac{4R^2}{(2+\pi)^{\cancel{2}}} =$

$= \frac{R^3 \lambda_0 (2+3\pi)}{3} - \frac{4R^3\lambda_0}{(2+\pi)} = \frac{R^3\lambda_0 (4 + 2\pi + 6\pi + 3\pi^2) - 12 R^3 \lambda_0}{3(2+\pi)} = \frac{R^3\lambda_0 (3\pi^2 + 8\pi - 8)}{3(2+\pi)}$



Per calcolare la frequenza di piccole oscillazioni usiamo la II cardinale

$I_0 \alpha = I_0 \ddot{\vartheta} = -Mg \operatorname{sen}\vartheta \, y_{CM}$

con $\vartheta \ll 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\vartheta \simeq \vartheta$

$I_0 \ddot{\vartheta} = -Mg\vartheta\, y_{CM} \Rightarrow \ddot{\vartheta} = -\frac{Mg}{I_0} \vartheta\, y_{CM}$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{Mg\, y_{CM}}{I_0}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{Mg\, y_{CM}}} \Rightarrow f = \sqrt{\frac{Mg\, y_{CM}}{I_0}} \cdot \frac{1}{2\pi}$

ESERCIZIO 1 18 NOVEMBRE 2013

$$U(x) = Ax^2 e^{Bx^2}$$

a) $U(x)$ ha le dimensioni di un'energia; l'esponenziale è adimensionale e quindi Ax^2 deve avere dimensioni di un'energia:

$$Ax^2 = \text{energia} = \left[M\frac{L^2}{T^2}\right] \Rightarrow A = \left[\frac{M}{T^2}\right]$$

$$Bx^2 = \text{adimensionale} \Rightarrow B = [L^{-2}]$$

b) Vediamo per quali condizioni su A e B ci sono più posizioni di equilibrio stabile.

$$U'(x) = 2Axe^{Bx^2} + Ax^2 2Bxe^{Bx^2} = 2Axe^{Bx^2}(1+Bx^2) = 0 \qquad x_1 = 0$$

$$B<0 \Leftarrow x_{2,3} = \pm\sqrt{-\frac{1}{B}}$$

queste sono le posizioni di equilibrio

$$U''(x) = 2Ae^{Bx^2}(1+Bx^2) + 2Ax2Bxe^{Bx^2}(1+Bx^2) + 2Axe^{Bx^2}2Bx$$

$$= 2Ae^{Bx^2}(1+Bx^2+2Bx^2(1+Bx^2)+2Bx^2) = 2Ae^{Bx^2}(1+Bx^2+2Bx^2+2B^2x^4+2Bx^2) =$$

$$= 2Ae^{Bx^2}(2B^2x^4+5Bx^2+1)$$

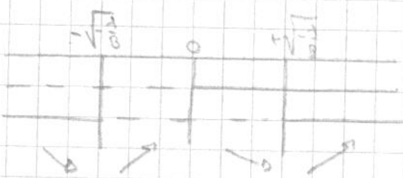
$$U''(0) = 2Ae^0(1) = 2A > 0 \Rightarrow A>0 \wedge B<0$$

$$U''\left(\pm\sqrt{-\frac{1}{B}}\right) = 2Ae^{-1}\left(2B^2\frac{1}{B^2} + 5B\left(-\frac{1}{B}\right)+1\right) = \frac{2A}{e}(-2) = -\frac{4A}{e} > 0 \Rightarrow A<0 \wedge B<0$$

Pertanto ci saranno due posizioni di equilibrio stabile con $A<0$ e $B<0$

c) Affinché, nel caso in cui ci siano due posizioni di equilibrio stabile x_1 e x_2, la particella in x_1 raggiunga quella in x_2, deve succedere che l'energia cinetica di x_1 sia maggiore di quella potenziale.

$$U(x_1) = Ax_1^2e^{Bx_1^2} \Rightarrow U\left(\pm\sqrt{-\frac{1}{B}}\right) = A\left(-\frac{1}{B}\right)e^{-1}$$



$$U(0) - U(x_1) = 0 - \left(-\frac{A}{B}e^{-1}\right) = \frac{A}{Be}$$

$$\frac{1}{2}Mv^2 > \frac{A}{Be} \Rightarrow v^2 > \frac{2A}{MBe} \Rightarrow v > \sqrt{\frac{2A}{MBe}}$$

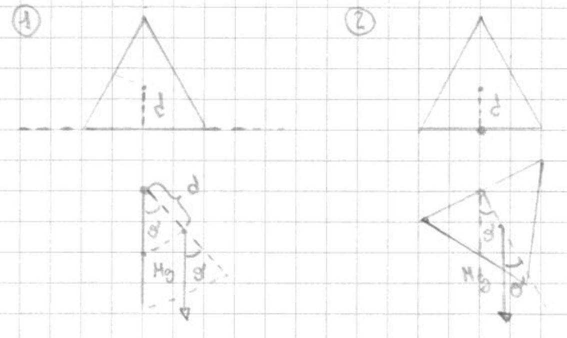
d) Dato che 0 è punto di massimo per $U(x)$, una volta che x_1 ha raggiunto x_2 significa che la sua energia cinetica supera la massima energia potenziale possibile e pertanto si allontanerà indefinitamente

e) $$U(x) = \underbrace{U(x_{eq})}_{cost} - \underbrace{U'(x_{eq})(x-x_{eq})}_{0} + \underbrace{\frac{U''(x_{eq})}{2!}(x-x_{eq})^2}_{\cong \frac{1}{2}k\Delta x^2} + O(x-x_{eq})^2 \ldots$$

$$K = U''(x_{eq}) = -\frac{4A}{e}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{-\frac{4A}{eM}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-\frac{4A}{eM}}$$

ESERCIZIO 2 24 SETTEMBRE 2013



Per calcolare il rapporto tra i periodi di oscillazione nei due casi dobbiamo prima calcolare i due momenti di inerzia.

① Nel primo caso dobbiamo calcolare il momento solo di due sbarrette, in quanto quella che coincide con l'asse di rotazione non contribuisce al momento di inerzia (infatti è come se ruotasse su se stessa); di quelle due sbarrette dobbiamo poi considerare solo la componente perpendicolare all'asse (quindi l'altezza del triangolo:

$$I_1 = 2\cdot\frac{M R^2}{3} = 2M\left(\frac{\sqrt{3}L}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{3} = \frac{ML^2}{2}$$

② Nel secondo caso invece contribuiscono tutte e tre le sbarrette al momento d'inerzia, ma per due di esse è necessario usare il teorema di Huygens-Steiner (la terza infatti ha l'asse di rotazione nel baricentro

$$I_2 = \frac{1}{12}ML^2 + 2\left(\frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2\right) = \frac{ML^2}{12} + 2\left(\frac{ML^2}{12}+\frac{ML^2}{4}\right) = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2+3ML^2}{\cancel{12}\,6}\cancel{2} = \frac{ML^2+8ML^2}{12} = \frac{3}{4}ML^2$$

In entrambi i casi, considerando piccole oscillazioni, avremo che il baricentro si trova alla stessa distanza dall'asse di rotazione, pari a 1/3 dell'altezza (proprietà dei triangoli equilateri)

$$I\ddot{\vartheta} = -Mg\,\text{sen}\,\vartheta\,\frac{\sqrt{3}}{6}L \Rightarrow \text{se } \vartheta \ll 1,\ \text{sen}\,\vartheta \cong \vartheta \quad \ddot{\vartheta} = -\frac{Mg\vartheta}{I}\frac{\sqrt{3}}{6}L$$

$$\omega = \sqrt{\frac{ML}{I}\frac{\sqrt{3}}{6}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{6I}{ML\sqrt{3}}}$$ quindi i due periodi si distinguono solo per I

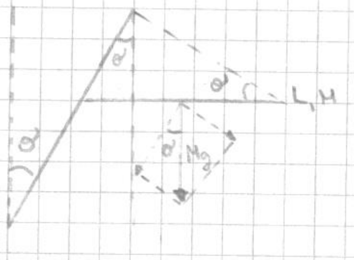
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{I_1}}{\sqrt{I_2}} = \sqrt{\frac{\cancel{ML^2}}{\cancel{2}}}\cdot\sqrt{\frac{\cancel{4}\,2}{3\cancel{ML^2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$ è il rapporto tra i periodi

Affinché la traiettoria disegnata dal vertice sia chiusa (nel caso in cui il triangolo oscilli attorno ad un punto) è necessario che il vertice passi due volte nello stesso punto due volte: questo si verifica se il tempo dopo il quale il vertice passa nello stesso punto è multiplo di entrambi i periodi:

$$\Delta t = nT_1 = mT_2$$ con n ed m che devono essere necessariamente numeri interi

$$\frac{n}{m} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$ il vertice non disegna traiettorie chiuse

ESERCIZIO 2 10 SETTEMBRE 2013



L'unica componente che influisce nel moto del sistema è quella perpendicolare al perno; calcoliamo intorno il momento di inerzia della sbarretta (al quale contribuisce solo la sua componente perpendicolare al perno)

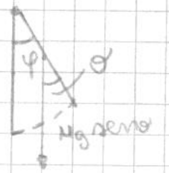
$$I = \frac{1}{3}M(L\cos\vartheta)^2 = \frac{M}{3}L^2\cos^2\vartheta$$

Affinché la sbarretta compia rotazione completa è necessario che la sua energia cinetica superi quella potenziale massima:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 > Mg\,\text{sen}\vartheta\,L\cos\vartheta \Rightarrow \omega^2 > \frac{2MgL\,\text{sen}\vartheta\cos\vartheta}{I} = \frac{2\cancel{M}g\cancel{L}\,\text{sen}\vartheta\,\cancel{\cos\vartheta}}{\cancel{M}L^2\cos^2\vartheta}\cdot 3$$

$$\Rightarrow \omega^2 > \frac{6g\,\text{tg}\vartheta}{L} \Rightarrow \omega > \sqrt{\frac{6g\,\text{tg}\vartheta}{L}}$$

Consideriamo ora piccole oscillazioni della sbarretta andiamo a calcolare la frequenza per questa situazione. Utilizziamo la II equazione cardinale



$$I\alpha = I\ddot{\vartheta} = -Mg\,\text{sen}\vartheta\,\text{sen}\varphi\,\frac{L\cos\vartheta}{2}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vartheta} = -\frac{Mg\,\text{sen}\vartheta\,\text{sen}\varphi\,L\cos\vartheta}{2I}$$

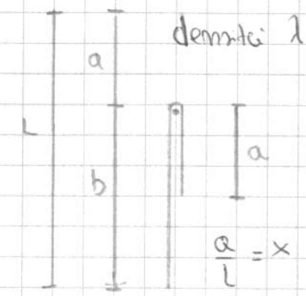
considerando $\varphi \ll 1$, $\text{sen}\varphi \cong \varphi$, quindi:

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{\cancel{M}g\,\text{sen}\vartheta\,\cancel{L\cos\vartheta}}{2\cancel{M}L^2\cos^2\vartheta}\cdot 3\varphi = -\frac{3}{2}\frac{g\,\text{sen}\vartheta}{L\cos\vartheta}\varphi$$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g\,\text{sen}\vartheta}{2L\cos\vartheta}}$ è la pulsazione del moto di piccole oscillazioni

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g\,\text{sen}\vartheta}{2L\cos\vartheta}}$$

ESERCIZIO 1 22 GENNAIO 2013



densità λ

$$M = (a+b)\lambda = (Lx + L(1-x))\lambda = L(x+1-x)\lambda = L\lambda$$

$$I = \frac{a\lambda a^2}{3} + \frac{b\lambda b^2}{3} = \frac{\lambda}{3}(a^3+b^3) = \frac{\lambda}{3}(L^3x^3 + L^3(1-x)^3) =$$

$$= \frac{\lambda L^3}{3}(\cancel{x^3}+1-\cancel{x^3}-3x+3x^2) = \frac{\lambda L^3}{3}(3x^2-3x+1)$$

$$\frac{a}{L} = x$$

$$\Rightarrow a = Lx \qquad b = L(1-x)$$

Calcoliamo ora la posizione del centro di massa del corpo ottenuto piegando la sbarretta di partenza:

$$D = \frac{a\lambda \cdot \frac{a}{2} + b\lambda \cdot \frac{b}{2}}{(a+b)\lambda} = \frac{\frac{\cancel{\lambda}}{2}(a^2+b^2)}{(a+b)\cancel{\lambda}} = \frac{(a^2+b^2)}{2(a+b)} = \frac{(L^2x^2 + L^2(1-x)^2)}{2(Lx+L(1-x))} =$$

$$= \frac{L^{\cancel{2}}(x^2+1+x^2-2x)}{2\cancel{L}(x+1-\cancel{x})} = \frac{L(2x^2-2x+1)}{2}$$

A questo punto calcoliamo la pulsazione ω:

$$I\alpha = I\ddot{\vartheta} = -L\lambda g \,\mathrm{sen}\vartheta \cdot \frac{L(2x^2-2x+1)}{2} \Rightarrow \ddot{\vartheta} = -\frac{L^2\lambda g(2x^2-2x+1)}{2I}\,\mathrm{sen}\vartheta$$

con $\vartheta \ll 1 \Rightarrow \mathrm{sen}\vartheta \cong \vartheta$ quindi $\ddot{\vartheta} = -\frac{3\cancel{L^2}\cancel{\lambda}g(2x^2-2x+1)}{2\cancel{\lambda}L^{\cancel{3}}(3x^2-3x+1)}\vartheta$

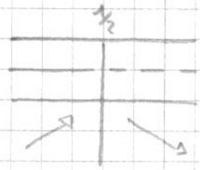
$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g(2x^2-2x+1)}{2L(3x^2-3x+1)}} \Rightarrow y = \omega^2 = \frac{3g(2x^2-2x+1)}{2L(3x^2-3x+1)} \Rightarrow y(x) = \frac{2x^2-2x+1}{3x^2-3x+1}$$

$$y'(x) = \frac{(4x-2)(3x^2-3x+1)-(6x-3)(2x^2-2x+1)}{(3x^2-3x+1)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{12x^3}-\cancel{12x^2}+4x-\cancel{6x^2}+\cancel{6x}-2-\cancel{12x^3}+\cancel{12x^2}-\cancel{6x}+\cancel{6x^2}-6x+3}{(3x^2-3x+1)^2} = \frac{-2x+1}{(3x^2-3x+1)^2}$$

$$y'(x) > 0 \Rightarrow -2x+1 > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$(3x^2-3x+1)^2 > 0 \quad \forall x$$



Quindi il valore di x che massimizza la velocità angolare è 1/2, cioè si ha quando la sbarra viene piegata a metà.

ESERCIZIO 3 22 GENNAIO 2013

Supponiamo che la potenza emessa per irraggiamento è data da: $\mathcal{E} = \sigma e T^4$; quindi è proporzionale alla temperatura alla quarta.
Consideriamo che la capacità termica C è direttamente proporzionale al cubo del raggio, e la superficie S al quadrato:

$$C = mc = \lambda V c = \lambda \frac{4}{3}\pi r^3 c \qquad e \qquad S = 4\pi r^2$$

quindi possiamo scrivere $C\frac{dT}{dt} = -SeT^4$ dove e è l'emissività

separando le variabili $\frac{dT}{T^4} = -\frac{S}{C}e\,dt$ dove $-\frac{S}{C}e \propto \frac{1}{r}$ $\left(\frac{S \propto r^2}{C \propto r^3}\right)$

integrando $\int_{T_0}^{T(t)} \frac{dT}{T^4} = \int_0^t -\frac{S}{C}e\,dt$

$$\Rightarrow \left[-\frac{1}{3T^3}\right]_{T_0}^{T(t)} = \left[-\frac{S}{C}et\right]_0^t \Rightarrow -\frac{1}{3T(t)^3} + \frac{1}{3T_0^3} = -\frac{S}{C}et$$

$$\Rightarrow \frac{-\cancel{3}T_0^3 + \cancel{3}T(t)^3}{3\cancel{3}T(t)^3T_0^3} = -\frac{S}{C}et \Rightarrow \frac{3T(t)^3T_0^3}{T(t)^3 - T_0^3} = -\frac{C}{Set} \Rightarrow 3T(t)^3T_0^3 = \frac{T_0^3C - T(t)^3C}{Set}$$

$$\Rightarrow 3T(t)^3T_0^3 + \frac{T(t)^3C}{Set} = \frac{T_0^3C}{Set} \Rightarrow T(t)^3\left(3T_0^3 + \frac{C}{Set}\right) = \frac{T_0^3C}{Set}$$

$$\Rightarrow T(t)^3 = \frac{T_0^3C}{\cancel{Set}} \cdot \frac{\cancel{Set}}{3SetT_0^3 + C} \Rightarrow T(t) = \sqrt[3]{\frac{T_0^3C}{3SetT_0^3 + C}} = T_0\sqrt[3]{\frac{C}{3SetT_0^3 + C}}$$

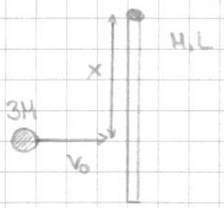
Ecco la legge che lega la temperatura al tempo

Considerando una sfera più grande, quindi con raggio maggiore, essa si raffredderà più lentamente; consideriamo il risultato appena ottenuto alla luce di una sostituzione:

$$\frac{S}{C}e = \beta \Rightarrow T(t) = \frac{T_0}{\sqrt[3]{1 + \beta t T_0^3}}$$

poiché supponiamo che $\beta \propto \frac{1}{r}$, se il raggio aumenta tale quantità diminuisce e pertanto la sfera più grande si raffredderà più lentamente

ESERCIZIO 1 23 APRILE 2013



L'urto è elastico, dopo l'urto il proiettile cade verticalmente.

a) Per determinare il valore di x consideriamo che si conserva l'energia poiché l'urto è elastico, si conserva il momento angolare ma non la quantità di moto (infatti c'è un vincolo):

$$\begin{cases}\frac{1}{2}3MV_0^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 \\ 3MV_0 x = I\omega\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{V_0}{x}=\omega \Rightarrow V_0=\omega x \\ 3M\omega x^2 = I\omega\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=\frac{I}{3M} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{I}{3M}} \\ V_0=\omega\sqrt{\frac{I}{3M}}\end{cases}$$

dove $I=\frac{ML^2}{3} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{ML^2}{9M}}=\frac{L}{3} \Rightarrow V_0=\omega\cdot\frac{L}{3}$

b) Per calcolare l'ampiezza delle oscillazioni della sbarretta consideriamo che nell'urto tutta l'energia del proiettile si trasferisce alla sbarretta; inizialmente sarà solo cinetica, poi diventerà solo potenziale quando la sbarretta giungerà all'altezza massima

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = Mg\left(\frac{L}{2}-\frac{L}{2}\cos\vartheta\right) \Rightarrow \frac{1}{2}I\omega^2 = Mg\frac{L}{2}(1-\cos\vartheta) \Rightarrow (1-\cos\vartheta) = \frac{ML^2}{3}\omega^2\cdot\frac{1}{MgL}$$

$$\Rightarrow (1-\cos\vartheta) = \frac{L^2}{3}\cdot\frac{9V_0^2}{L^2}\cdot\frac{1}{gL} \Rightarrow \cos\vartheta = 1-\frac{3V_0^2}{gL} \Rightarrow \vartheta = \arccos\left(1-\frac{3V_0^2}{gL}\right)$$

c) Consideriamo ora $x = 2L/3$; in questo caso il proiettile continuerà il suo moto orizzontale dopo l'urto. Imponiamo sempre la conservazione dell'energia e del momento angolare.

$$\begin{cases}\frac{1}{2}3MV_0^2=\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}3MV_1^2\\ 3MV_0x = I\omega+3MV_1x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3M(V_0^2-V_1^2)=I\omega^2\\ 3Mx(V_0-V_1)=I\omega\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{(V_0+V_1)}{x}=\omega \Rightarrow V_0+V_1=\omega x\\ 3Mx(V_0-V_1)=I\omega\end{cases}$$

$$\begin{cases}\omega=\frac{V_0+V_1}{x}\\ 3Mx(V_0-V_1)=I\frac{V_0+V_1}{x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3Mx^2(V_0+V_1)=IV_0+IV_1\\ V_1(I+3Mx^2)=V_0(3Mx^2-I)\end{cases}\Rightarrow V_1=V_0\frac{(3Mx^2-I)}{(3Mx^2+I)}$$

$$V_1 = V_0\frac{\left(3M\frac{4L^2}{9}-\frac{ML^2}{3}\right)}{\left(3M\frac{4L^2}{9}+\frac{ML^2}{3}\right)} = V_0 ML^2\cdot\frac{3}{5ML^2} = \frac{3V_0}{5}$$ ecco la velocità finale per $x = 2L/3$

$$\omega = \frac{V_0+V_1}{x} = \left(V_0+\frac{3}{5}V_0\right)\cdot\frac{3}{2L} = \frac{8}{5}V_0\cdot\frac{3}{2L} = \frac{12V_0}{5L}$$

ESERCIZIO 3 26 APRILE 2012

a) Calcoliamo massa e momento di inerzia rispetto al centro:

$$\lambda(y) = \lambda_0\left(1 + \frac{y^2}{L}\right)$$

$$M = \int dm = \int \lambda(y)\,dy = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \lambda_0\left(1+\frac{y^2}{L}\right)dy = \lambda_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\left(1+\frac{y^2}{L}\right)dy =$$

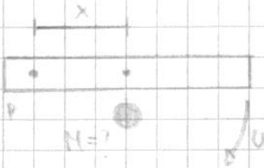
$$= \lambda_0\left[y + \frac{y^3}{3L}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \lambda_0\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{2}+\frac{L^{\cancel{3}\,2}}{8\cdot 3\cancel{L}}+\frac{L^{\cancel{3}\,2}}{8\cdot 3\cancel{L}}\right) = \lambda_0\left(\frac{12L+12L+L^2+L^2}{24}\right) = \lambda_0 2L\,\frac{12+L}{\cancel{24}_{12}}$$

$$= \lambda_0 L\,\frac{(L+12)}{12}$$

$$I = \int y^2\lambda(y)\,dy = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} y^2\left(1+\frac{y^2}{L}\right)\lambda_0\,dy = \lambda_0\int_{-L/2}^{L/2}\left(y^2+\frac{y^4}{L}\right)dy = \lambda_0\left[\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5L}\right]_{-L/2}^{L/2} =$$

$$= \lambda_0\left(\frac{L^3}{3\cdot 8}+\frac{L^{\cancel{5}\,4}}{32\cdot 5\cancel{L}}+\frac{L^3}{3\cdot 8}+\frac{L^{\cancel{5}\,4}}{32\cdot 5\cancel{L}}\right) = \lambda_0\,\frac{20L^3+20L^3+3L^4+3L^4}{480} = \lambda_0 2L^3\,\frac{10+3L}{\cancel{480}_{240}} = \lambda_0 L^3\,\frac{3L+10}{240}$$

b)



La sbarretta ruota attorno a P con velocità angolare pari a ω_0; l'urto con la massa puntiforme è elastico e dopo di esso la sbarretta rimane ferma. Per calcolare la massa M usiamo la conservazione dell'energia e del momento angolare; prima calcoliamo I rispetto a P

$$I_P = I_{CM} + MD^2 = \lambda_0 L^3\frac{(3L+10)}{240} + \lambda_0 L\frac{(L+12)}{12}x^2 = \frac{\lambda_0 L}{12}\left(\frac{L^2(3L+10)}{20}+\frac{(L+12)}{12}x^2\right)$$

$$\begin{cases}\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} I_P\omega_0^2 = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}MV^2 \\ I_P\omega_0 = MVx\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\omega_0 x = V \\ M\cancel{\omega_0}x^2 = I_P\cancel{\omega_0}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = \frac{I_P}{x^2} \\ V = \omega_0 x\end{cases}$$

$$\Rightarrow M = \frac{\lambda_0 L}{12}\left(\frac{L^2(3L+10)}{20x^2}+\frac{(L+12)}{12}\right)$$

c)

Per trovare il periodo di piccole oscillazioni usiamo la II cardinale:

$$I_P\alpha = I_P\ddot{\vartheta} = -Mg\,\text{sen}\vartheta\,x \Rightarrow \ddot{\vartheta} = -\frac{Mg\,\text{sen}\vartheta\,x}{I_P}$$

con $\vartheta \ll 1$, $\text{sen}\vartheta \cong \vartheta \Rightarrow \ddot{\vartheta} = -\frac{Mgx}{I_P}\vartheta \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{Mgx}{I_P}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{I_P}{Mgx}}$

Studiamo la funzione corrispondente a T per trovare i minimi

$$y(x) = \frac{\cancel{\lambda_0 L}}{\cancel{12}}\left(\frac{L^2(3L+10)}{20}+\frac{(L+12)}{12}x^2\right)\cdot\frac{\cancel{12}}{(L+12)\cancel{\lambda_0 L}}\cdot\frac{1}{gx} = \frac{L^2(3L+10)}{20(L+12)gx}+\frac{x}{12g} = \frac{3L^2(3L+10)+5(L+12)x^2}{60(L+12)gx}$$

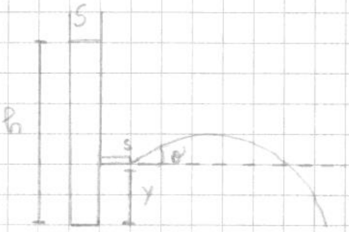
$$y'(x) = \frac{10(L+12)gx\,60(L+12)x - 60(L+12)\left(3L^2(3L+10)+5(L+12)gx^2\right)}{(60(L+12)gx)^2} =$$

$$= \frac{600(L+12)^2gx^2 - 180L^2(3L^2+10L+36L+120) - 300(L+12)^2gx^2}{\sim\sim} = \frac{300(L+12)^2gx^2 - 180L^2(3L^2+46L+120)}{(60(L+12)gx)^2}$$

$$N > 0 \Rightarrow x^2 > \frac{\cancel{180}^{\cancel{18}\,3}L^2(3L^2+46L+120)}{\cancel{300}_{\cancel{30}\,\cancel{15}\,5}(L+12)^2g} \Rightarrow x < -\sqrt{\frac{3L^2(3L^2+46L+120)}{5g(L+12)^2}} \vee x > \sqrt{\frac{3L^2(3L^2+46L+120)}{5g(L+12)^2}}$$

$D > 0\ \forall x$

Esercizio 3 10 luglio 2012



$\frac{S}{s} = \alpha$

Per l'equazione di continuità sappiamo che il rapporto tra le superfici è lo stesso tra le velocità:

$$Sv = sV \Rightarrow \frac{S}{s} = \frac{V}{v} = \alpha \Rightarrow v = \frac{V}{\alpha}$$

Usiamo ora il teorema di Bernoulli per trovare la velocità di uscita

$$\cancel{p_0} + \cancel{\rho g h} + \frac{1}{2}\rho v^2 = \cancel{p_0} + \rho g(h-y) + \frac{1}{2}\rho V^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\rho V^2 - \frac{1}{2}\rho\frac{V^2}{\alpha^2} = \rho g(h-y)$$

$$\Rightarrow V^2\left(1-\frac{1}{\alpha^2}\right) = 2g(h-y) \Rightarrow V^2 = \frac{2g(h-y)}{1-\alpha^{-2}}$$

Per calcolare la gittata ne calcoliamo una parte con la formula (la gittata sulla retta che quella opposta al foro) ed una parte ricavando il tempo di caduta del liquido da moltiplicare poi per la velocità. (quella parte è di sotto della retta appena citata)

$D_1 = \frac{2V^2 \sin 2\theta}{g}$ è la gittata fino a che il liquido incontra la retta

$$y = -V\sin\theta t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \frac{1}{2}gt^2 - V\sin\theta t - y = 0 \Rightarrow gt^2 - 2V\sin\theta t - 2y = 0$$

$t = \frac{V\sin\theta t \pm \sqrt{V^2\sin^2\theta + 2gy}}{g}$ di queste due soluzioni ovviamente va scartata quella negativa

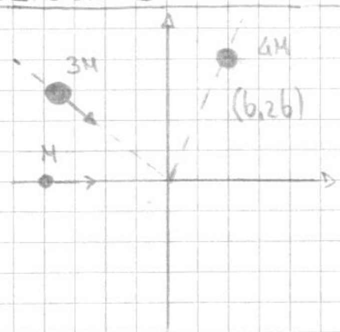
Così facendo abbiamo trovato il tempo necessario al liquido per giungere a terra partendo da quella retta; quindi la seconda parte della gittata la troveremo moltiplicando questo tempo per la componente x della velocità

$D_2 = V\cos\theta \cdot t$

Quindi la gittata totale sarà

$$D_{tot} = D_1 + D_2 = \frac{2V^2\sin 2\theta}{g} + V\cos\theta t$$

Esercizio 2 19 settembre 2012



$V_M = (v_x ; 0)$

$V_{3M} = (W_x ; W_y)$

In questo caso si conserva la quantità di moto lungo x e lungo y ma non si conserva l'energia meccanica totale, poiché si tratta di un urto anelastico quindi:

$$MV_x + 3MW_x = 4M \cdot V_{CM} \Rightarrow V_{CM} = \frac{\cancel{M}V_x + 3\cancel{M}W_x}{4\cancel{M}} = \frac{V_x + 3W_x}{4}$$

Poiché il corpo di massa 3M si muove lungo la bisettrice del II e del IV quadrante, la velocità lungo y sarà l'opposto della velocità lungo x:

$$W_x = -W_y$$

$$-3MW_x = V_{CM} \cdot 4M \Rightarrow V_{CM} = -\frac{3\cancel{M}W_x}{4\cancel{M}} = -\frac{3}{4}W_x$$

Sappiamo poi che dopo l'urto, il corpo risultante passa per (b;2b), pertanto le componenti della velocità del CM moltiplicate per t_1 dovranno uguagliare queste quantità corrispondenti alla posizione

$$S_{4M} = (b;2b)$$

$$V_{4M} = \left(\frac{V_x + 3W_x}{4} ; -\frac{3}{4}W_x\right)$$

$$\begin{cases} \frac{V_x + 3W_x}{4} \cdot t_1 = b \\ -\frac{3}{4}W_x \cdot t_1 = 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W_x = -\frac{2b}{t_1} \cdot \frac{4}{3} = -\frac{8}{3}\frac{b}{t_1} = -\frac{8}{3}v \quad \left(\frac{b}{t_1} = v\right) \\ V_x = \frac{4b}{t_1} - 3W_x = \frac{4b}{t_1} + \frac{8b}{t_1} = \frac{12b}{t_1} = 12v \end{cases}$$

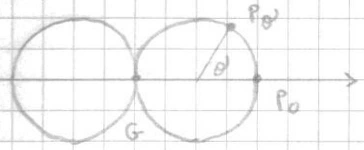
$$\Rightarrow V_{3M} = \left(-\frac{8}{3}v ; \frac{8}{3}v\right) \quad V_M = (12v ; 0)$$

L'energia dissipata la si trova calcolando la variazione di energia cinetica che si ha nell'urto:

$$\Delta E = \Delta E_k = E_{in} - E_{fin} = \frac{1}{3}M(12v)^2 + 3M\left(\frac{8v}{3}\right)^2 - \frac{1}{2}4Mv^2 = \frac{4}{3}144v^2 + 3M\frac{64v^2}{9} - 2Mv^2 =$$

$$= \frac{432Mv^2 + 192Mv^2 - 18Mv^2}{9} = \frac{606}{9}Mv^2 = \frac{202}{3}Mv^2$$

ESERCIZIO 3 18 SETTEMBRE 2012



densità lineare λ
raggi R

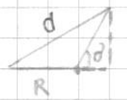
Prima di poter calcolare la frequenza per piccole oscillazioni è necessario calcolare la massa dell' "8" ed il suo momento di inerzia, che andiamo poi a usare a seconda del punto scelto come polo

$$M = \lambda \cdot 2 \cdot (2\pi R) = 4\pi R\lambda$$

$$I_G = 2(I_{CM} + MR^2) = 2(MR^2 + MR^2) = 4MR^2 = 4 \cdot 4\pi R\lambda \cdot R^2 = 16\pi\lambda R^3$$

$$I_{P_0} = I_G + 2M(2R)^2 = 16\pi\lambda R^3 + 8\pi\lambda R \cdot 4R^2 = 48\pi\lambda R^3$$ da usare quando sospeso per P_0

Calcoliamo ora la distanza tra G e P_ϑ:



$$d = \sqrt{(R + R\cos\vartheta)^2 + R^2 \operatorname{sen}^2\vartheta} = \sqrt{R^2(1+\cos\vartheta)^2 + R^2\operatorname{sen}^2\vartheta} = R\sqrt{1 + \underbrace{\cos^2\vartheta + 2\cos\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta}_{1}} =$$
$$= R\sqrt{2 + 2\cos\vartheta} = R\sqrt{2(1+\cos\vartheta)}$$

$$I_{P_\vartheta} = I_G + 2Md^2 = 16\pi\lambda R^3 + 8\pi R\lambda \cdot R^2\, 2(1+\cos\vartheta) = 16\pi\lambda R^3(2+\cos\vartheta)$$

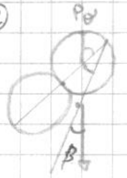
① 

Per calcolare la frequenza di piccole oscillazioni usiamo prima la II cardinale, dalla quale ricaviamo la pulsazione

$$I_{P_0}\alpha = I_{P_0}\ddot{\varphi} = -Mg\operatorname{sen}\varphi \cdot 2R \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{Mg\operatorname{sen}\varphi\, 2R}{I_{P_0}}$$

con $\varphi \ll 1$, $\operatorname{sen}\varphi \cong \varphi$:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\cancel{4\pi R\lambda} g}{\underset{6}{\cancel{48\pi\lambda R^3}}} \cdot \cancel{2R} \cdot \varphi = -\frac{g}{6R}\varphi \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{6R}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{6R}}$$

② 

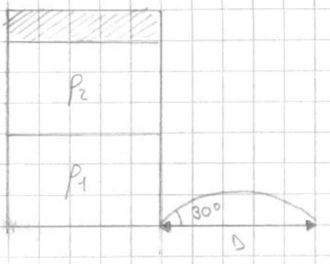
Geometricamente si può arrivare a concludere che l'angolo β è pari a $\vartheta - \varphi$; usiamo sempre la II cardinale

$$I_{P_\vartheta}\alpha = I_{P_\vartheta}\ddot{\beta} = -Mg\operatorname{sen}\beta\, d \Rightarrow \ddot{\beta} = -\frac{Mg\operatorname{sen}\beta\, d}{I_{P_\vartheta}}$$

con $\beta \ll 1$, $\operatorname{sen}\beta \cong \beta$

$$\ddot{\beta} = -\frac{\cancel{4\pi R\lambda} \cdot \cancel{R}\sqrt{2(1+\cos\vartheta)}}{4\,\cancel{16\pi\lambda} R^{\cancel{3}}(2+\cos\vartheta)}\beta \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\sqrt{2(1+\cos\vartheta)}}{4R(2+\cos\vartheta)}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\sqrt{2(1+\cos\vartheta)}}{4R(2+\cos\vartheta)}}$$

ESERCIZIO 3 10 09 2013



$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{3}$$

Quando esce il primo liquido, affinché il getto arrivi a distanza D_0, così come quando comincia ad uscire il secondo liquido

Il momento in cui il getto del primo liquido raggiungerà la distanza più breve è quello in cui il primo liquido sta per finire e quindi ha sopra di esso soltanto la pressione idrostatica del secondo liquido. Usiamo il teorema di Bernoulli per trovare la velocità di uscita in tale momento:

$$\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 = \rho_2 g h \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{\rho_1} v_1^2 = \frac{\cancel{\rho_1}}{3} g h \Rightarrow v_1^2 = \frac{2}{3} g h \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2}{3} g h}$$

Troviamo ora la velocità di uscita del secondo liquido:

$$\frac{1}{2}\cancel{\rho_2} v_2^2 = \cancel{\rho_2} g h \Rightarrow v_2^2 = 2gh \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$$

Per le leggi del moto parabolico, possiamo scrivere la gittata D_0 come:

$$D_0 = \frac{2 v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g} \Rightarrow \frac{\cancel{2} v_0^2 \sqrt{3}}{g \cdot \cancel{2}} \Rightarrow v_0^2 = \frac{D_0}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow v_2 = v_1\sqrt{3}$$

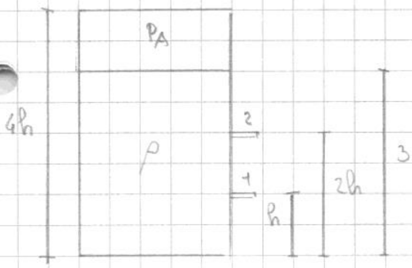
quindi la velocità del primo liquido che sta per finire è $\sqrt{3}$ volte più piccola di quella del secondo liquido

Poiché la gittata è proporzionale al quadrato della velocità, la gittata del primo liquido quando sta per finire sarà 3 volte inferiore a quella di partenza D_0

$$D_0 = \frac{2 v_2^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g} = \frac{\cancel{2} v_2^2 \sqrt{3}}{g \cdot \cancel{2}} = \frac{v_2^2 \sqrt{3}}{g}$$

$$D_2 = \frac{2 v_1^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g} = \frac{\cancel{2} v_2^2 \sqrt{3}}{g \cdot 3 \cdot \cancel{2}} = \frac{v_2^2 \sqrt{3}}{3 \cdot g}$$

ESERCIZIO 3 18 NOVEMBRE 2013



La pressione esterna è trascurabile.
Il getto inferiore colpisce il terreno a distanza d_1 e quello superiore a distanza d_2.

Per calcolare il rapporto tra d_2/d_1, troviamo prima le due velocità d'uscita con il teorema di Bernoulli:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_A + \rho g 2h \Rightarrow v_1^2 = \frac{2}{\rho}(p_A + 2\rho g h) = \frac{2p_A}{\rho} + 4gh$$

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_A + \rho g h \Rightarrow v_2^2 = \frac{2}{\rho}(p_A + \rho g h) = \frac{2p_A}{\rho} + 2gh$$

In entrambi i casi il tempo di caduta corrisponde a $\sqrt{2H/g}$, con H che varia a seconda dell'ugello considerato

$$y^2 = \frac{d_2^2}{d_1^2} \Rightarrow d_1^2 = v_1^2 \cdot t_1^2 = \frac{2}{\rho}(p_A + 2\rho g h) \cdot \frac{2h}{g} = \frac{4h}{\rho g}(p_A + 2\rho g h)$$

$$d_2^2 = v_2^2 \cdot t_2^2 = \frac{2}{\rho}(p_A + \rho g h) \cdot \frac{4h}{g} = \frac{8h}{\rho g}(p_A + \rho g h)$$

$$\Rightarrow y = \frac{d_2}{d_1} = \sqrt{\frac{\cancel{8h}^{2}}{\cancel{\rho g}}(p_A + \rho g h) \cdot \frac{\cancel{\rho g}}{\cancel{4h}} \cdot \frac{1}{(p_A + 2\rho g h)}} = \sqrt{\frac{2(p_A + \rho g h)}{p_A + 2\rho g h}}$$

con $\rho g h \ll p_A$, $y \to \sqrt{2}$
con $p_A \ll \rho g h$, $y \to 1$ $\Rightarrow y \in]1, \sqrt{2}[$ poiché $y(p_A)$ è monotona

Considerando l'espansione del gas fino all'ugello più alto, il suo volume sarà raddoppiato, e la sua pressione, poiché la temperatura rimane costante, sarà invece dimezzata; procedendo come prima

$$v_1'^2 = \frac{2}{\rho}\left(\frac{p_A}{2} + \rho g h\right) = \frac{\cancel{2}}{\rho} \cdot \frac{p_A + 2\rho g h}{\cancel{2}} = \frac{p_A + 2\rho g h}{\rho} \Rightarrow d_1'^2 = \frac{p_A + 2\rho g h}{\rho} \cdot \frac{2h}{g}$$

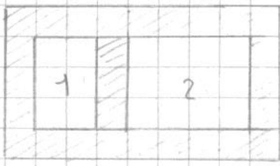
$$v_2'^2 = \frac{\cancel{2}}{\rho}\frac{p_A}{\cancel{2}} = \frac{p_A}{\rho} \Rightarrow d_2'^2 = \frac{p_A}{\rho} \cdot \frac{4h}{g}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{d'}{d'} = \sqrt{\frac{p_A}{\cancel{\rho}} \cdot \frac{\cancel{4h}^{2}}{\cancel{g}}} \sqrt{\frac{\cancel{\rho}}{p_A + 2\rho g h} \cdot \frac{\cancel{g}}{\cancel{2h}}} = \sqrt{\frac{2p_A}{p_A + 2\rho g h}}$$

con $p_A \ll \rho g h$, $y' \to 0$.
con $\rho g h \ll p_A$, $y' \to \sqrt{2}$.

$$\Rightarrow y' \in]0, \sqrt{2}[$$

ESERCIZIO 4 19 FEBBRAIO 2013



	P	V	T
A_1	P_A	V_A	T_A
B_1	P_A	$\frac{3}{2}V_A$	$\frac{3}{2}T_A$

	P	V	T
A_2	P_A	$2V_A$	$2T_A$
B_2	P_A	$\frac{3}{2}V_A$	$\frac{3}{2}T_A$

$P_{A2}V_{A2} = nRT_{A2} \Rightarrow T_{A2} = \frac{P_{A2}V_{A2}}{nR} = \frac{P_A 2V_A}{nR} = 2T_A$ per la legge di stato dei gas perfetti

Poiché i due gas scambiano lentamente calore attraverso il pistone, raggiungeranno una temperatura di equilibrio

$$T_{eq} = \frac{\cancel{nc_v}T_{A1} + \cancel{nc_v}T_{A2}}{\cancel{nc_v} + \cancel{nc_v}} = \frac{T_{A1}+T_{A2}}{2} = \frac{T_A + 2T_A}{2} = \frac{3}{2}T_A$$

Per la struttura del sistema e per la quasi staticità della trasformazione otteniamo che $P_1 = P_2$ sempre; nel secondo stato quindi anche il volume dei due gas sarà necessariamente uguale quindi

$$V_{B1} = V_{B2} = \frac{V_{A1}+V_{A2}}{2} = \frac{V_A + 2V_A}{2} = \frac{3}{2}V_A$$

$$P_{B1} = P_{B2} = \frac{nRT_{B1}}{V_{B1}} = \cancel{nR}\cdot\frac{3}{2}\frac{P_AV_A}{\cancel{nR}}\frac{\cancel{2}}{\cancel{3V_A}} = P_A$$

Quindi questa trasformazione, per entrambi i gas, si comporta come un'isobara. Possiamo calcolare la variazione di entropia nel modo in cui la faremmo per un'isobara:

$$\Delta S_1 = \int\frac{dQ}{T} = nc_p\ln\frac{T_B}{T_A} = \frac{5}{2}nR\ln\frac{3}{2}$$

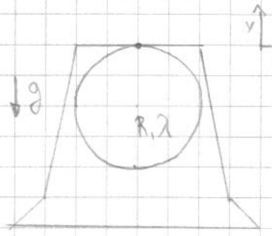
$$\Delta S_2 = \int\frac{dQ}{T} = nc_p\ln\frac{T_B}{T_A} = \frac{5}{2}nR\ln\frac{3}{4} = -\frac{5}{2}nR\ln\frac{4}{3}$$

Quindi l'entropia totale:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{5}{2}nR\ln\frac{3}{2} - \frac{5}{2}nR\ln\frac{4}{3} = \frac{5}{2}nR\left(\ln\frac{3}{2} - \ln\frac{4}{3}\right) > 0$$

infatti la quantità tra parentesi è $\cong 0{,}12$, e quella al di fuori è certamente positiva quindi l'entropia totale aumenta, perciò la trasformazione è irreversibile.

ESERCIZIO 2 10 FEBBRAIO 2011



a) Se consideriamo la retta passante per il baricentro dell'anello come quella corrispondente a $U=0$, se l'anello parte dalla posizione di equilibrio instabile avrà solo energia potenziale, la quale diventa solo cinetica quando transita nella posizione di equilibrio stabile; otteniamo la velocità in quell'istante con la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = Mg2R \Rightarrow \frac{1}{2}(MR^2+MR^2)\omega^2 = Mg2R \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{2}\cancel{M}R^{\cancel{2}}\omega^2 = \cancel{M}g\cancel{2}\cancel{R}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{2g}{R} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g}{R}}$$

b) Partendo dall'equilibrio instabile, quando l'anello passa con il baricentro all'altezza del vincolo (a destra di esso) possiamo dire che la reazione vincolare avrà due componenti; per determinarle osserviamo che la componente x del vincolo garantisce da sola l'accelerazione centripeta, mentre quella y garantisce quella tangenziale con la forza peso. Ricaviamo anche α con la II equazione cardinale:

$$I\alpha = MgR \Rightarrow \alpha = \frac{MgR}{I} = \frac{\cancel{2\pi R\lambda}\, g\, \cancel{R}}{2\cdot\cancel{2\pi R\lambda}\cdot R^{\cancel{2}}} = \frac{g}{2R} \quad \text{e } \omega = \frac{g}{R} \text{ perché } \Delta U = MgR$$

$$Ma_c = M\omega^2 R = R_x \Rightarrow R_x = 2\pi R\lambda \cdot \frac{g}{\cancel{R}}\cdot \cancel{R} = 2\pi R\lambda g$$

$$Ma_T = M\alpha R = R_y - Mg \Rightarrow R_y = M\alpha R + Mg = M(\alpha R + g) = 2\pi\lambda R\left(\frac{g}{2\cancel{R}}\cancel{R} + g\right) = 3\pi\lambda R g$$

$$\Rightarrow R = (2\pi R\lambda g;\ 3\pi R\lambda g)$$

c) Otteniamo la pulsazione per piccole oscillazioni con la II cardinale

$$I\alpha = I\ddot{\vartheta} = -Mg\,\mathrm{sen}\vartheta\, R \Rightarrow \ddot{\vartheta} = -\frac{Mg\,\mathrm{sen}\vartheta\, R}{I} = -\frac{\cancel{2\pi R\lambda}\, g\,\mathrm{sen}\vartheta\, R}{2\cdot\cancel{2\pi R\lambda}\cdot R^2} = -\frac{g\,\mathrm{sen}\vartheta}{2R}$$

con $\vartheta \ll 1$, $\mathrm{sen}\vartheta \cong \vartheta$ quindi:

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{\vartheta}{2R} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{2R}}$$

d) L'energia da fornire per far compiere un'oscillazione di ϑ_0 sarà pari a la variazione di energia potenziale dall'equilibrio stabile a ϑ_0; essa sarà uguale alla variazione di energia cinetica dalla quale troviamo ω_{max}

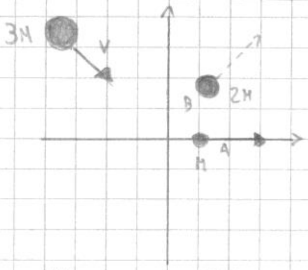
$$MgR(1-\cos\vartheta_0) = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{2MgR(1-\cos\vartheta_0)}{I} = \frac{2\cdot\cancel{2\pi\lambda R}\, g\, R(1-\cos\vartheta_0)}{2\cdot\cancel{2\pi\lambda R}\, R^2} = g\frac{(1-\cos\vartheta_0)}{R}$$

e) Scriviamo la legge oraria per il pendolo messo in piccole oscillazioni con velocità angolare ω_0 all'istante $t=0$

$$\vartheta(t) = \vartheta_0\cos(\Omega t + \phi) = \frac{\omega_0}{\Omega}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{2R}}t + \phi\right) = \frac{\omega_0}{\sqrt{g/2R}}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{2R}} + \phi\right)$$

$$\Rightarrow \vartheta(t) = \sqrt{\frac{2R}{g}}\,\omega_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{2R}} + \phi\right)$$

ESERCIZIO 1 6 SETTEMBRE 2011



3M si muove sulla bisettrice del II quadrante

$V_{2M} = (V_x, V_y)$

$X_M = (L;0)$ all'istante t_1

Per trovare le componenti della velocità del corpo di massa 2M usiamo la conservazione della quantità di moto:

$$x_M = (L;0) \Rightarrow V_M = \left(\frac{L}{t_1};0\right)$$

$$3\cancel{M} V \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cancel{M} V_x + \cancel{M}\frac{L}{t_1} \Rightarrow 2V_x = 3V\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{L}{t_1} \Rightarrow V_x = 3V\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{L}{2t_1}$$

$$-3\cancel{M} V \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cancel{M} V_y \Rightarrow V_y = -\frac{3}{4}V\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V_{2M} = \left(\frac{3V\sqrt{2}}{4} - \frac{L}{2t_1}; -\frac{3}{4}V\sqrt{2}\right)$$ da qui ricaviamo la posizione di B

$$\Rightarrow X_{2M} = t\left(\frac{3V\sqrt{2}}{4} - \frac{L}{2t_1}; -\frac{3V\sqrt{2}}{4}\right)$$ facendo semplicemente prodotto tra velocità e tempo

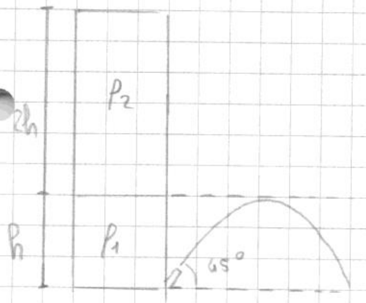
Per calcolare la quantità di energia sviluppata nell'esplosione è sufficiente fare la differenza tra l'energia cinetica iniziale e quella finale, dove quella iniziale dipende dalla particella di massa 3M, quella finale dipende invece da quelle di massa M e 2M

$$\Delta E = E_{k\,fin} - E_{k\,in} = \frac{1}{2}M\left(\frac{L}{t_1}\right)^2 + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}M\left(\frac{3}{4}V\sqrt{2} - \frac{L}{2t_1}\right)^2 + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}M\left(-\frac{3}{4}V\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2}3M\left(\frac{V\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}3M\left(-\frac{V\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= M\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{L^2}{t_1^2} + \frac{9}{8}V^2 + \frac{L^2}{4t_1^2} - \frac{3\sqrt{2}VL}{4t_1} + \frac{9}{8}V^2 - \frac{3}{2}\cdot V^2\cdot\frac{1}{2} - \frac{3}{2}V^2\cdot\frac{1}{2}\right) =$$

$$= M\left(\frac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{8}_{\,4}}V^2 - \frac{3\sqrt{2}VL}{4t_1} + \frac{3L^2}{4t_1^2}\right)$$ ecco la soluzione cercata

ESERCIZIO 4 21 LUGLIO 2010



a) Innanzi calcoliamo la velocità di uscita del primo liquido per poi passare a determinare il rapporto tra le densità.

$$\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 = \rho_1 g h + \rho_2 g 2h \Rightarrow v_1^2 = \frac{2}{\rho_1}(\rho_1 g h + \rho_2 g 2h)$$

Consideriamo la componente y della velocità

$$v_y = \frac{\sqrt{2}}{2} v \Rightarrow v_y^2 = \frac{2}{4} v = \frac{1}{2} v$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}}{\rho_1}(\rho_1 g h + \rho_2 g 2h) = gh + \frac{\rho_2}{\rho_1} g 2h$$

Per la conservazione dell'energia questa componente y della velocità (al quadrato) deve essere uguale a $2gh$

$$\cancel{g}h + 2\frac{\rho_2}{\rho_1}\cancel{g}h = 2\cancel{g}h \Rightarrow 1 + 2\frac{\rho_2}{\rho_1} = 2 \Rightarrow \rho_1 + 2\rho_2 = 2\rho_1 \Rightarrow 2\rho_2 = \rho_1$$

b) Consideriamo ora quando uscirà il secondo liquido:

$$\frac{1}{2}\cancel{\rho_2} v_2^2 = \cancel{\rho_2} g 2h \Rightarrow v_2^2 = 4gh \Rightarrow v_y^2 = \frac{1}{2} v_2^2 \Rightarrow v_y^2 = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{4}^{2} g h = 2gh$$

Analogamente a quanto fatto prima:

$$\cancel{2g}h = \cancel{2g}x \Rightarrow x = h$$ quindi il getto continua ad arrivare ad altezza h

c) Calcoliamo il tempo di svuotamento per il primo liquido, la cui altezza la indichiamo con x; riutilizzando i calcoli di prima otteniamo

$$v^2(x) = \frac{2}{\rho_1}(\rho_1 g x + \rho_2 g 2h) = \frac{2}{\cancel{\rho_1}}(\cancel{\rho_1} g x + \frac{\cancel{\rho_1}}{\cancel{2}} g 2h) \Rightarrow v(x) = \sqrt{2g(x+h)}$$

La velocità di discesa è $\frac{dx}{dt} = \left(\frac{s}{S}\right) v(x) \Rightarrow -\frac{dx}{dt} = \frac{s}{S}\sqrt{2g(x+h)}$

$$\Rightarrow -\frac{dx}{\sqrt{x+h}} = \frac{s}{S}\sqrt{2g}\,dt \quad \text{con } y = \sqrt{x+h} \Rightarrow 2\,dy = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}\,dt$$

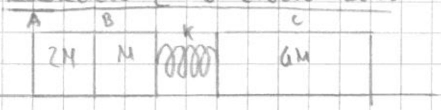
$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t -\frac{s}{S}\sqrt{2g}\,dt \Rightarrow y - y_0 = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}\,t \Rightarrow y = y_0 - \frac{s}{S}\sqrt{2g}\,t \quad \text{con } y_0 = \sqrt{2h}$$

il primo liquido finisce se $x = 0$, quindi se $y = \sqrt{h}$

$$\sqrt{h} = \sqrt{2h} - \frac{s}{S}\sqrt{2g}\,t \Rightarrow \sqrt{h}(1-\sqrt{2}) = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}\,t \Rightarrow \sqrt{h}(\sqrt{2}-1)\cdot\frac{S}{s\sqrt{2g}} = t$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{h}{2g}}\,\frac{(\sqrt{2}-1)S}{s}$$ era il tempo necessario allo svuotamento

ESERCIZIO 2 6 LUGLIO 2010



A e B non sono attaccati tra loro
La molla è compressa di Δx

a) I corpi A e B si separano quando la molla raggiunge l'equilibrio, cioè dopo un quarto del suo periodo:

$$\mu = \frac{(2M+M)\cdot 4M}{2M+M+4M} = \frac{12M^2}{7M} = \frac{12}{7}M \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{7k}{12M}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{12M}{7k}}$$

$$\Rightarrow t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{12M}{7k}}$$ è l'istante al quale i due corpi si separano

b) Usiamo la conservazione dell'energia e della quantità di moto per trovare la velocità con cui si muovono i corpi al distacco:

$$\begin{cases} 0 = (2M+M)V_{AB} + 4M V_C \\ \frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}3M V_{AB}^2 + \frac{1}{2}4M V_C^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_C = -V_{AB}\frac{3M}{4M} = -\frac{3}{4}V_{AB} \\ k\Delta x^2 = 3M\cdot V_{AB}^2 + 4M\cdot\frac{9}{16}V_{AB}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{AB}^2 = \frac{k4x^2}{21M} \\ V_C = -\frac{3}{4}V_{AB} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{AB} = \sqrt{\frac{4k\Delta x^2}{21M}} = 2\Delta x\sqrt{\frac{4k}{21M}} \quad e \quad V_C = -\frac{3}{\cancel{4}\,2}\cancel{2}\Delta x\sqrt{\frac{4k}{21M}} = -\frac{3}{2}\Delta x\sqrt{\frac{4k}{21M}}$$

c) Calcoliamo la distanza che separa A da B dopo un numero n di oscillazioni, A si muoverà con moto uniforme, così come il CM della molla ma in direzione opposta

$$V_{CM} = \frac{-MV_{AB} + 4MV_C}{5M} = \frac{-\cancel{M}\cdot\left(-\frac{4}{3}V_C\right) + 4\cancel{M}V_C}{5\cancel{M}} = \frac{8}{3}V_C\cdot\frac{1}{5} = \frac{8}{15}V_C$$

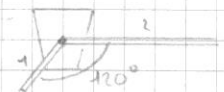
$$\mu_2 = \frac{M\cdot 4M}{5M} = \frac{4}{5}M \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{5k}{4M}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4M}{5k}}$$

Per calcolare la distanza poniamo di sottrarre le distanze coperte nelle direzioni opposte e consideriamo la velocità relativa, per poi moltiplicarla per il periodo T

$$V_{rel} = V_{CM} - V_A = \frac{8}{15}V_C + \frac{4}{3}V_C = \frac{8V_C + 20V_C}{15} = \frac{28}{15}V_C$$

$$d_n = V_{rel}\cdot T\cdot n = n\,\frac{28}{15}V_C\cdot 2\pi\sqrt{\frac{4M}{5k}}$$ questa è la distanza che separa A da B, dal momento che ogni T il corpo B è sempre alla stessa distanza dal CM

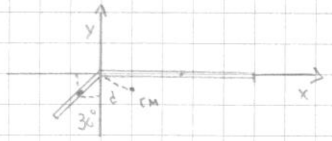
Esercizio 1 6 settembre 2010



a) Calcoliamo innanzi la distanza tra il baricentro ed il fulcro.

$M_1 = M_2 = M$
$L_1 = L$, $L_2 = 3L$

$$CM_1 = \left(\frac{L}{2}\operatorname{sen}30°, -\frac{L}{2}\cos 30°\right) = \left(-\frac{L}{2}\cdot\frac{1}{2}; -\frac{L}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{L}{4}; -\frac{L\sqrt{3}}{4}\right)$$



$$CM_2 = \left(\frac{3}{2}L; 0\right)$$

$$X_{CM} = \frac{-\frac{L}{4}M + \frac{3}{2}L\cdot M}{2M} = \frac{5}{4}M\cdot\frac{L}{2M} = \frac{5}{8}L \qquad Y_{CM} = \frac{-\frac{L\sqrt{3}}{4}M + 0}{2M} = -\frac{L\sqrt{3}}{8}$$

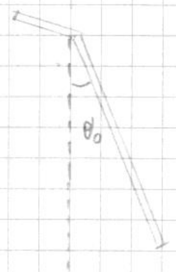
$$d = \sqrt{\left(\frac{5L}{8}\right)^2 + \left(-\frac{L\sqrt{3}}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{25L^2}{64} + \frac{3}{64}L^2} = \sqrt{\frac{28}{64}L^2} = \frac{L}{8}2\sqrt{7} = \frac{L\sqrt{7}}{4}$$ è la distanza tra CM ed il perno

b) Calcoliamo i momenti di inerzia rispetto al baricentro ed al fulcro:

$$I = \frac{1}{3}ML^2 + \frac{1}{3}M(3L)^2 = \frac{ML^2}{3} + 3ML^2 = \frac{10}{3}ML^2$$ e quello rispetto al fulcro

$$I_0 = I - 2Md^2 = \frac{10ML^2}{3} - 2M\left(\frac{L\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \frac{10}{3}ML^2 - \frac{2\cdot 7ML^2}{16} = \frac{160ML^2 - 42ML^2}{48} = \frac{\cancel{118}^{59}}{\cancel{48}_{24}}ML^2 = \frac{59}{24}ML^2$$

c)



Per scrivere la legge di moto consideriamo delle piccole oscillazioni, dove quindi $(\theta_{eq} - \theta_0) \ll 1$ quindi possiamo scrivere:

$$\theta(t) = \theta_{eq} + (\theta_{eq} - \theta_0)\cos(\Omega t)$$

calcoliamo Ω con la II cardinale:

$$I\alpha = I\ddot{\theta} = -\cancel{2}Mg\operatorname{sen}\theta_0\frac{L\sqrt{7}}{\cancel{4}\,2} = -\frac{MgL\sqrt{7}}{2}\operatorname{sen}\theta_0$$

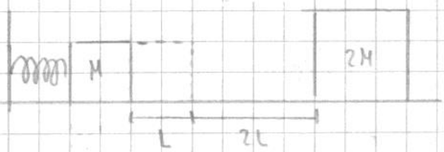
$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{MgL\sqrt{7}}{2I} = -\frac{\cancel{M}g\cancel{L}\sqrt{7}}{10\cancel{M}L^{\cancel{2}}}\cdot 3 = -\frac{\sqrt{7}\,g}{10L}$$

con $\theta_0 \ll 1$, $\operatorname{sen}\theta_0 \cong \theta_0$ e quindi

$$\Omega = \sqrt{\frac{\sqrt{7}\,g}{10L}}$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \theta_{eq} + (\theta_{eq} - \theta_0)\cos\left(\sqrt{\frac{\sqrt{7}\,g}{10L}}\,t\right)$$

ESERCIZIO 2 6 SETTEMBRE 2016



$F = -\gamma V$ è la forza viscosa sotto l'effetto della quale si muovono i due corpi dopo che si sono uniti

a) L'urto avviene dopo che la molla si è portata alla posizione di equilibrio (istante del distacco) e dopo che il primo corpo ha percorso una distanza L

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T_4 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{K}}$$

$$\frac{1}{2}KL^2 = \frac{1}{2}MV^2 \Rightarrow V^2 = \frac{KL^2}{M} \Rightarrow V = L\sqrt{\frac{K}{M}}$$ è la velocità al distacco

$$t_1 = \frac{2L}{V} = \frac{2L}{L}\sqrt{\frac{M}{K}} \Rightarrow t_{impatto} = \frac{T}{4} + t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{K}} + 2\sqrt{\frac{M}{K}} = \sqrt{\frac{M}{K}}\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)$$

b) Determiniamo l'istante dopo il quale hanno percorso un tratto L

$$3Ma = -\gamma V \Rightarrow a = -\frac{\gamma V_1}{3M}$$ è la decelerazione subita dai due corpi

$$MV = 3MV_1 \Rightarrow V_1 = \frac{V}{3}$$ per la conservazione della quantità di moto

quindi $V(t) = V_1 e^{-\frac{\Delta t}{\alpha}} = V_1 e^{-\frac{\Delta t}{\alpha}}$ con $\alpha = \frac{\gamma V_1}{3M}$ tenuto conto che $\left(\frac{dv}{dt} = -\frac{\gamma v}{3M}\right)$

$$L = \int_0^{\delta t} v(t)\,dt = \int_0^{\delta t} V_1 e^{-\frac{t-t_1}{\alpha}}dt = V_1 \int_0^{\delta t} e^{-\frac{\delta t}{\alpha}}dt = V_1(-\alpha)\int_0^{\delta t}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)e^{-\frac{\delta t}{\alpha}}dt =$$

$$= V_1(-\alpha)\cdot\left[e^{-\frac{\delta t}{\alpha}}\right]_0^{\delta t} = V_1(-\alpha)\left(e^{-\frac{\delta t}{\alpha}} - 1\right) = L \Rightarrow \left(e^{-\frac{\delta t}{\alpha}} - 1\right) = \frac{L}{-\alpha V_1} \Rightarrow e^{-\frac{\delta t}{\alpha}} = -\frac{L}{\alpha V_1} + 1$$

$$\Rightarrow -\frac{\delta t}{\alpha} = \ln\left(-\frac{L}{\alpha V_1} + 1\right) \Rightarrow \delta t = -\alpha \ln\left(1 - \frac{L}{\alpha V_1}\right)$$

$$t_2 = t_1 + \delta t = \sqrt{\frac{M}{K}}\left(\frac{\pi}{2} + 2\right) + \left(-\alpha \ln\left(1 - \frac{L}{\alpha V_1}\right)\right)$$

c) Calcoliamo l'energia dissipata nell'urto e quella per attrito

$$\Delta E_1 = E_{k\,in} - E_{k\,fin} = \frac{1}{2}MV^2 - \frac{1}{2}3MV_1^2 = \frac{1}{2}M\left(V^2 - 3V_1^2\right) = \frac{1}{2}M\left(V^2 - 3\frac{V^2}{9}\right) = \frac{1}{2}M\frac{2}{3}V^2 = \frac{MV^2}{3}$$

$$\Delta E_2 = E_{k\,in} - E_{k\,fin} = \frac{1}{2}3MV_1^2 - \frac{1}{2}3M\left(V_1 e^{-\frac{\delta t}{\alpha}}\right)^2 = \frac{3}{2}MV_1^2\left(1 - e^{-\frac{2\delta t}{\alpha}}\right)$$