ELETTROTECNICA

[Fotocopie di Appunti]

A CURA DI ALESSANDRO PAGHI

PROFESSORE: Mauro Forti (http://www3.diism.unisi.it/people/person.php?id=7)

LINK AL CORSO:
http://www3.diism.unisi.it/FAC/index.php?bodyinc=didattica/inc.insegnamento.php&id=55109&aa=2015

FREQUENTAZIONE: Consigliata.

04/03/2015

Martinelli, Salerno "Fondamenti di Elettrotecnica" Sidera, Roma.

RICHIAMI FISICA II.

Rete Interconnessione di Bipoli

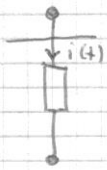
Bipolo: Elemento circuitale a 2 morsetti (2 poli).



Carica
Flusso
Tensione
Corrente
} Elementi di interesse

corrente $i(t)$ che fluisce attraverso il bipolo
tensione $v(t)$ o caduta di tensione ai morsetti del bipolo.

Verso di riferimento $i(t)$. (FISSATO!)



S sezione

$$i(t) = \lim_{\Delta t \to \emptyset} \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Δq carica che fluisce attraverso S concordemente col verso fissato.

$i(t)$ grandezza SCALARE e ALGEBRICA
↑ È un numero ↑ Ha un segno

$i(t = 2\ sec) = +5$ Ampere

$+$ → Le cariche si muovono concordemente al verso assegnato

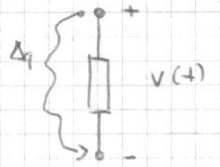
$i(t = 4\ sec) = -5$ Ampere

$-$ → Se cariche si muovono discordemente al verso assegnato

N.B: Verso di riferimento e segno di $i(t)$ permettono di determinare verso effettivo di moto delle cariche.

www.alessandropaghi.it

Tensione $v(t)$, verso di riferimento.



$$v(t) = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta q}$$

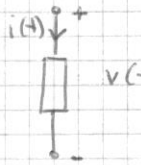
ΔL lavoro compiuto dalla forza del campo elettrico su Δq lungo il percorso prefissato dal morsetto + al morsetto −.

$v(t)$ SCALARE e ALGEBRICA

$v(t = 2\ sec) = +3$ Volt → il morsetto + sta a potenziale più alto di quello −

$v(t = 4\ sec) = -5$ Volt → il morsetto − sta a potenziale più alto di quello +.

Versi concordati di $i(t)$ e $v(t)$.



Convenzione Utilizzatori:

Corrente va da + a −.

$p(t) = v(t) \cdot i(t)$ Watt.

↓

• Potenza istantanea all'istante t assorbita dal dipolo.

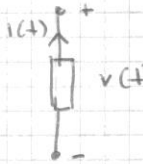
$dW = p(t) \cdot dt = v(t) \cdot i(t) \cdot dt$ Joule

↓

• Energia elettrica assorbita dal dipolo in dt

$$W_{[t_1, t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} dW = \int_{t_1}^{t_2} p(t) \cdot dt$$

Convenzione Generatori:



$p(t) = v(t) \cdot i(t)$

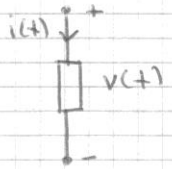
Potenza istantanea all'istante t erogata dal dipolo

$dW = p(t) \cdot dt$

Energia elettrica erogata dal dipolo in dt.

www.alessandropaghi.it

Convenzione utilizzatori



Bipoli PASSIVI o ATTIVI

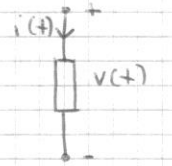
Test di Passività per un dipolo

$$W_{(-\infty,t)} = \int_{-\infty}^{t} dW = \int_{-\infty}^{t} p(t')\,dt' = \int_{-\infty}^{t} v(t')\,i(t')\,dt' \geq 0$$

$\forall t, \forall i(t), \forall v(t)$.

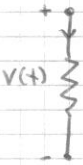
Se l'integrale è ≥ 0 il dipolo è passivo altrimenti se è < 0 è attivo -> c'è una sorgente interna.

Convenzione utilizzatori



Relazione costitutiva di un dipolo: vincolo che un dipolo stabilisce fra $v(t)$ e $i(t)$.

Resistore Ideale



$[R]$ = Resistenza Ohmica

Legge di Ohm: $v(t) = R \cdot i(t)$ ← Legge di Ohm in corrente

Se $R \neq 0$ -> $G = \frac{1}{R}$ conduttanza

$\Rightarrow i(t) = v(t) \cdot G$ ← Legge di Ohm in tensione.

È un elemento senza memoria.

$p(t) = v(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) = G\,v^2(t)$ Watt

↑ Potenza istantanea dissipata per effetto Joule

$dW = p(t)\,dt = R \cdot i^2(t)\,dt$ Joule

$$W = \int_{-\infty}^{t} dW = \int_{-\infty}^{t} R \cdot i^2(t)\,dt \geq 0$$

$R > 0$, è passivo!

INIC: Invertitore di Corrente -> Realizzare $R < 0$.

www.alessandropaghi.it

Bilancio energetico per un resistore passivo:

$$\delta W = v(t) \cdot i(t)\, dt = R\, i^2(t)\, dt = dQ \geq 0$$

↑ Energia elettrica assorbita in dt da R.

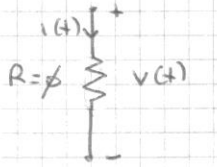
↑ Calore sviluppato da R in dt.

R passivo è un puro dissipatore: trasforma istantaneamente e integralmente tutta l'energia elettrica assorbita in calore.

Da luogo ad una trasformazione irreversibile di energia elettrica in calore.
Calore esce definitivamente dal circuito.
R non è capace di effettuare la trasformazione inversa (Calore → energia elettrica).

Casi ideali:

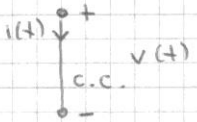
$R = 0\ \Omega$



$$v(t) = R \cdot i(t) = 0 \quad , \forall\, i(t)$$

$\Downarrow$

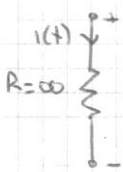
CORTO CIRCUITO



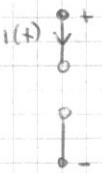
$v(t) = 0 \quad (\forall\ i(t))$

$R = \infty\ \Omega$

$G = \frac{1}{R} = 0\ \Omega^{-1}$



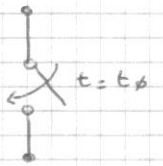
CIRCUITO APERTO



$i(t) = 0 \quad (\forall\ v(t))$

www.alessandropaghi.it

Interruttore Ideale

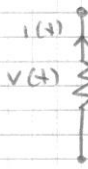


Si può comportare da corto circuito o da interruttore aperto.

Questi visti ora sono 3 Bipoli Inerti
→ non partecipano agli scambi energetici

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = \emptyset$$
$$dW = \emptyset.$$

Per esempio:

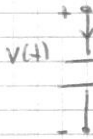


Convenzione dei generatori

$$v(t) = -R\, i(t)$$
$$i(t) = -G\, v(t)$$

} Legge di Ohm con la convenzione dei generatori.

Condensatore Ideale



C capacità [C] = Farad

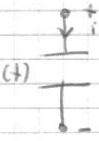
$$q(t) = C \cdot v(t)$$

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t) = C \cdot \frac{d}{dt} v(t)$$

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} i(t')\, dt'.$$

↳ Esamino con Hermann!

06/03/2015



$$i(t) = C \cdot \frac{d}{dt} v(t)$$

relazione costitutiva in tensione.

$E_c(t)$: Energia campo elettrico $= \frac{1}{2} C \cdot v^2(t)$ Joule.

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = C \cdot v(t) \cdot \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C \cdot v^2(t) \right)$$

↳ Derivata rispetto al tempo di $E_c(t)$.
↳ Potenza istantanea.

www.alessandropaghi.it

$v(t)$ VARIABILE DI STATO

$p(t) \cdot dt = dW = dE_c(t)$ (ESAME)

↑ Energia elettrica assorbita da C in dt

‖

Variazione di energia del campo elettrico di C.

=> il condensatore non dissipa!

Se dissipasse : $dW = dE_c(t) + dQ$

nel nostro caso $dQ = \emptyset$.

la trasformazione è ulteriormente reversibile.

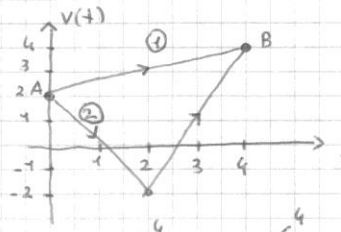
Riassumendo: il condensatore:

- conservativo;
- non dissipa
- trasformazione di energia REVERSIBILE

(energia elettrica <-> energia del campo elettrico)

- Energia elettrica assorbita viene confinata nel circuito.

Esercizio:



un condensatore C.

Trovare energia assorbita da C in $[\emptyset \div 4]$ sec.

$$W_{[0,4]} = \int_{\emptyset}^{4} dW = \int_{\emptyset}^{4} p(t) \cdot dt = \int_{\emptyset}^{4} v(t) \cdot i(t)\, dt = \int_{\emptyset}^{4} dE_c(t) = E_c(t=4\,sec) - E_c(t=\emptyset\,sec)$$

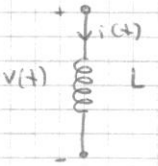
$$= \frac{1}{2} C \cdot 16 - \frac{1}{2} C \cdot 4 \text{ Joule}$$

Basta ricordarsi che E è conservativo!

Quindi $\int_{T_1}^{T_2} E(t)\, dt = E(T_2) - E(T_1)$.

www.alessandropaghi.it

Induttore Ideale



L autoinduttanza

$[L]$ = Henry

$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}}$ N: # di Spire

$\mathcal{R}$: Riluttanza del circuito magnetico

$\phi = Li$ Flusso concatenato con avvolgimento di N spire.

Relazione costitutiva

$$v(t) = \frac{d}{dt}\phi(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i(t)$$

$$v(t) = -e(t)$$

↳ Forza Controelettromotrice.

$$i(t) = i(\phi) + \frac{1}{L}\int_{\phi}^{t} v(t')\,dt'$$

$i(t)$ VARIABILE DI STATO

$E_L(t)$: Energia campo magnetico di $L = \frac{1}{2} L\, i^2(t)$.

L'induttore ideale ha le stesse caratteristiche del condensatore:

- conservativo;
- non dissipa;
- ...

$$p(t) = v(t)\, i(t) = L \frac{di(t)}{dt} i(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L\, i^2(t)\right) = \frac{d}{dt} E_L(t)$$

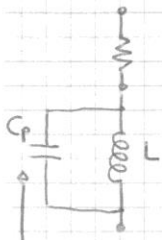
$$dW = d E_L(t)$$

Energia Elettrica ⟷ Energia del campo magnetico.

Induttore ideale è un puro accumulatore di campo magnetico.

www.alessandropaghi.it

Induttore un pò più realistico

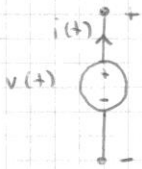


R_s Resistenza Avvolgimento: dovuta al tipo di materiale

Capacità parassita: dovuta alla piccola distanza fra le spire

Ad alte frequenze un'induttanza si comporta come un condensatore e poi come una linea di trasmissione.

Generatore Indipendente Ideale di Tensione



Convenzione dei generatori

La tensione impressa ai morsetti è una assegnata (nota) funzione del tempo.

$v(t) = e_g(t)$ ← Relazione Costitutiva

$(\forall\, i(t))$

La tensione la conosco, ma la corrente non è nota a priori ma dipende dal circuito alimentato dal generatore.

$i(t)$ NON È VINCOLATA

Un generatore ideale non ha limiti della potenza erogabile.



← Esempio.

Esempio: $e_g(t) = 10 \cdot \cos(3t)$ tensione sinusoidale

Verso di riferimento + Segno della funzione permettono di stabilire quale morsetto del generatore sta a potenziale maggiore.

Se generatore è un bipolo senza memoria e attivo.

www.alessandropaghi.it

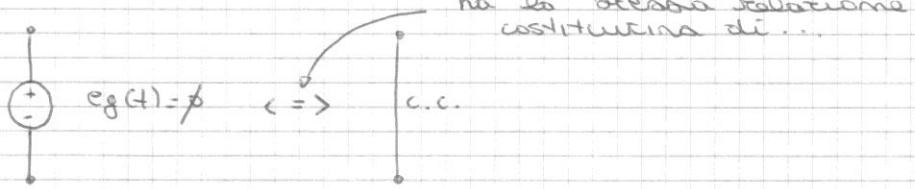
Disattivare un generatore indipendente ideale di tensione

$e_g(t) = \emptyset$

ai morsetti c'è tensione $\emptyset$.

$v(t) = e_g(t) = \emptyset \quad (\forall i(t))$

È un corto circuito

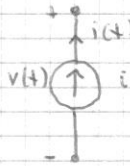


Il generatore ideale dà luogo a uno scambio di energia reversibile.

energia elettrica <-> energia chimica

Non dovrebbe dissipare nulla.

Generatore indipendente ideale di corrente

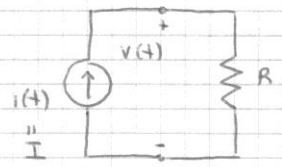


La corrente impressa dal generatore indipendente è una assegnata (nota) funzione del tempo.

$i(t) = i_g(t) \quad (\forall i(t)) \quad (\forall v(t))$

Conosco la corrente ma non conosco la tensione ai morsetti

Esempio:



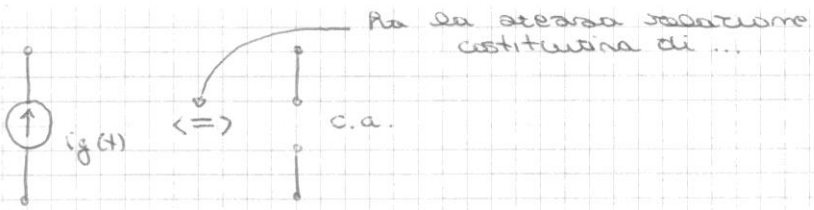
$i(t) =$ costante $= I$

$v(t) = R \cdot I$

Disattivare un generatore indipendente ideale di corrente

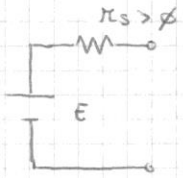
$i_g(t) = \emptyset \Rightarrow i(t) = \emptyset \quad (\forall v(t))$

www.alessandropaghi.it

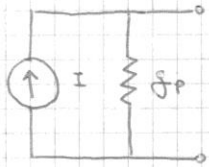


Si comporta da circuito aperto!

Generatore Reale di Tensione

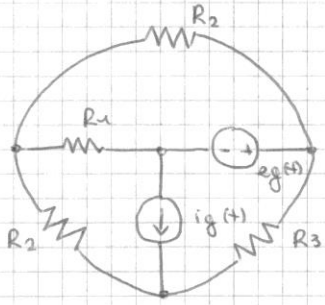


Generatore Reale di Corrente

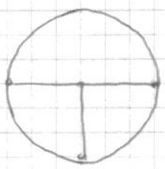


Legge di KirchHoff per le Tensioni (KV)
Legge di KirchHoff per le Correnti (KI)

Necessario stabilire un riferimento elettrico!



Grafo:



Le leggi di KirchHoff non dipendono dagli specifici bipoli ma solo dal Grafo.

lato del grafo <-> bipolo

l = # lati = # bipoli

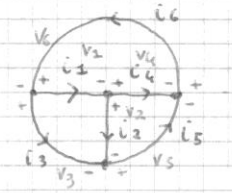
$l = 6$

nodo: punto in cui sono collegati almeno 2 lati

n = # nodi

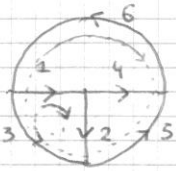
$n = 4$

Grafo Orientato:



vengono orientate le correnti!

Uso convenzione utilizzatori per tutti i bipoli presenti



maglia: percorso chiuso formato da lati del grafo

Maglia orientata quando ho scelto il verso di percorrenza

KV: è nulla, istante per istante, la somma algebrica delle tensioni dei lati che si incontrano percorrendo una maglia.
Ogni tensione ha segno + se concorde col verso di percorrenza; ha segno - se discorde col verso di percorrenza

$V_1(t) + V_2(t) - V_3(t) = 0$

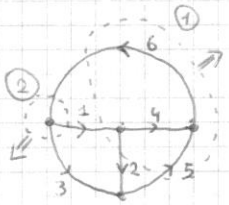
$-V_6(t) - V_5(t) - V_3(t) = 0$

...

Posso scrivere $l - n + 1$ KV indipendenti.

Tensioni indipendenti: $l - (l - n + 1) = n - 1$.

www.alessandropaghi.it

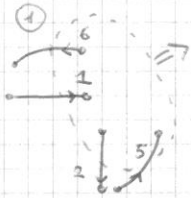


Per le correnti invece:

Linea Gaussiana: linea chiusa che taglia il grafo ma senza intersecare i nodi

Dopo di che orienta la linea chiusa con una normale entrante o uscente.

KI: È nullo, istante per istante, la somma algebrica delle correnti dei lati che intersecano la linea chiusa. Ogni corrente si prende col + se concorde con la normale, col segno - se discorde.



$$KI: \quad i_6(t) - i_1(t) + i_2(t) - i_5(t) = \cancel{0}$$

Per la maglia ②: KI: $i_1(t) - i_6(t) + i_3(t) = \cancel{0}$.

$n-1$ KI indipendenti

$l-n+1$ correnti indipendenti dei lati del grafo.

Esercizio:

Dimostrare che un condensatore con $C > \cancel{0}$ è sicuramente passivo.

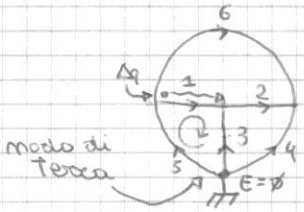
$$W_{[-\infty;t]} = \int_{-\infty}^{t} dW = \int_{-\infty}^{t} p(t')\,dt' = \int_{-\infty}^{t} v(t')\,i(t')\,dt' \geq \cancel{0}$$

ma $dW = dE_c(t)$

$$= \int_{-\infty}^{t} dW = \int_{-\infty}^{t} dE_c(t') = E_c(t) - \underbrace{E_c(-\infty)}_{\cancel{0}\text{ in quanto è scarico inizialmente}} = E_c(t) = \frac{1}{2} C v^2(t) \geq \cancel{0}.$$

www.alessandropaghi.it

Commenti alle KV 11/03/2015

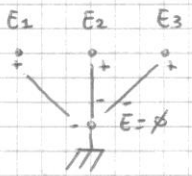


$V_1(t) - V_3(t) + V_5(t) = \phi \quad \forall t$.

$V_1(t)$: $\lim_{\Delta q \to \phi} \frac{\Delta L_1}{\Delta q}$

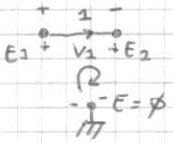
Quindi se lavoro compiuto complessivamente dalle forze del campo su Δq lungo una maglia (percorso chiuso) è nullo.

Il modo di terra ha potenziale nullo.



E_1: potenziale del modo 1 rispetto al modo di terra.

$E_1 = -V_5 = +V_6 - V_4$



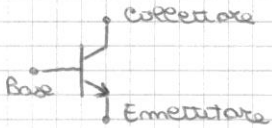
$V_1 = E_1 - E_2$: Se io conosco E_1, E_2 come ricavo V_1?

$\Rightarrow V_1 + E_2 - E_1 = \phi$, tramite la maglia.

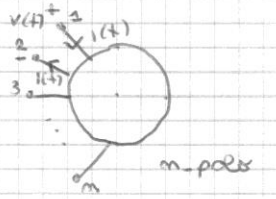
N-polo: componente a N morsetti.

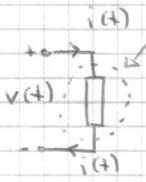
TRIPOLI, QUADRIPOLI, N-POLI.

(Reti due porte - Doppi Bipoli)



$\Rightarrow$ TRANSISTOR





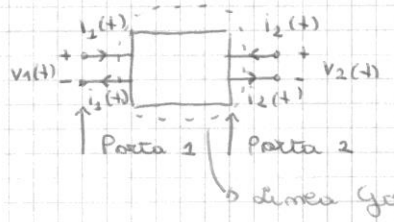
Linea Gaussiana KI

Bipolo: la corrente che entra da un morsetto è uguale a quella che esce.

PORTA: Coppia di morsetti tali che la corrente che entra da un morsetto è uguale, istante per istante, a quella che esce dall'altro morsetto.

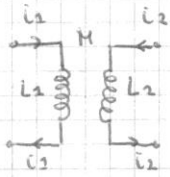
www.alessandropaghi.it

QUADRIPOLI ⟶ RETI DUE PORTE O DOPPIO BIPOLO

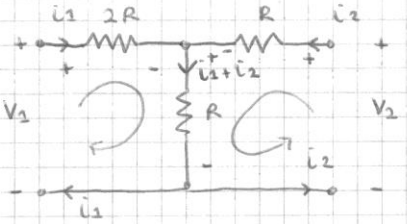


i_1, i_2, v_1, v_2 : 4 grandezze di porta.

Relazioni costitutive di una rete 2 porte : 2 leggi indipendenti che la rete stabilisce fra i_1, i_2, v_1, v_2.



$$\begin{cases} v_1 = L_1 \cdot \frac{d}{dt} i_1 + M \cdot \frac{d}{dt} i_2 \\ v_2 = M \cdot \frac{d}{dt} i_1 + L_2 \cdot \frac{d}{dt} i_2 \end{cases}$$



Noti i_1 e i_2 trovare V_1 e V_2.

$$\begin{cases} V_1 = 2R \cdot i_1 + R(i_1+i_2) = 3Ri_1 + Ri_2 \\ V_2 = R \cdot i_1 + R(i_1+i_2) = Ri_1 + 2Ri_2 \end{cases}$$

Usando la notazione vettoriale:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad \vec{i} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = R \cdot \vec{i} = \begin{pmatrix} 3R & R \\ R & 2R \end{pmatrix} \cdot \vec{i}$$

$p(t) = p_1(t) + p_2(t) = V_1(t) \cdot i_1(t) + V_2(t) \cdot i_2(t) = \langle \vec{v}, \vec{i} \rangle = \vec{v}^T \vec{i}$ Watt

↑ Potenza elettrica assorbita dalle 2 porte

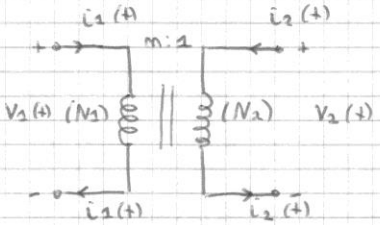
$dW = p(t)\, dt$

$p(t) = \vec{v}^T \cdot \vec{i} = \vec{i}^T \cdot R^T \vec{i} \geq 0$

La matrice delle resistenze è sempre simmetrica e def positiva

www.alessandropaghi.it

TRASFORMATORE IDEALE



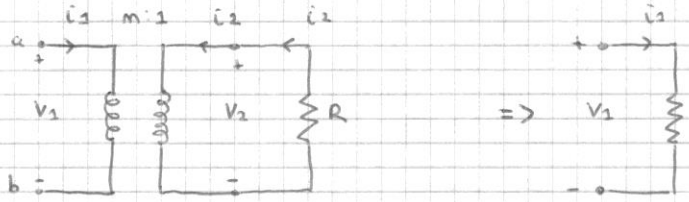
$m = \frac{N_1}{N_2}$: Rapporto di Trasformazione

$$\begin{cases} V_1(t) = m\, V_2(t) \\ i_1(t) = -\frac{1}{m}\, i_2(t) \end{cases} \Rightarrow N_1 i_1 + N_2 i_2 = \emptyset$$

- È una rete senza memoria (senza derivate e integrali)
- È inerte (Trasparente alla potenza istantanea)

$$p(t) = V_1(t)\, i_1(t) + V_2(t) \cdot i_2(t)$$
$$= \cancel{m} V_2(t) \left(-\frac{1}{\cancel{m}}\right) i_2(t) + V_2(t) \cdot i_2(t) = \emptyset$$

Effetto di un Trasformatore Ideale sui bipoli R, L, C.

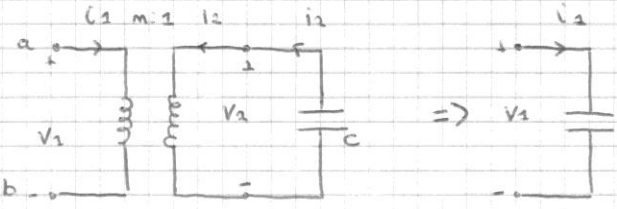


$V_1 = R_{eq} \cdot i_1$
$= m^2 R i_1$

A che cosa corrisponde il bipolo ab ?
Che legame stabilisce fra V_1 e i_1 ?

$$\begin{cases} V_1(t) = m\, V_2(t) \\ i_1(t) = -\frac{1}{m}\, i_2(t) \\ V_2(t) = -R\, i_2(t) \end{cases} \quad = -mR\, i_2(t) = -mR(-m\, i_1(t)) = m^2 R\, i_2(t)$$
$$= R_{eq} \cdot i_2(t).$$

↑ convenzione dei generatori



$$i_1 = \frac{C}{m^2} \cdot \frac{d}{dt} V_1$$

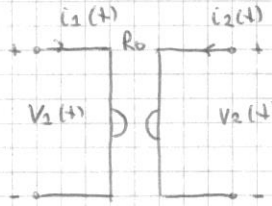
$$\begin{cases} V_1(t) = m\, V_2(t) \\ i_1(t) = -\frac{1}{m}\, i_2(t) \\ i_2(t) = -C \cdot \frac{d}{dt} V_2(t) \end{cases} \quad = \frac{C}{m} \frac{d}{dt} V_2(t) = \frac{C}{m^2} \frac{d}{dt} V_1(t)$$

www.alessandropaghi.it

Se invece inserisco un induttore:

$L \longrightarrow L_{eq} = m^2 \cdot L$

GIRATORE IDEALE



$[R_0] = \Omega$ Resistenza di giratore

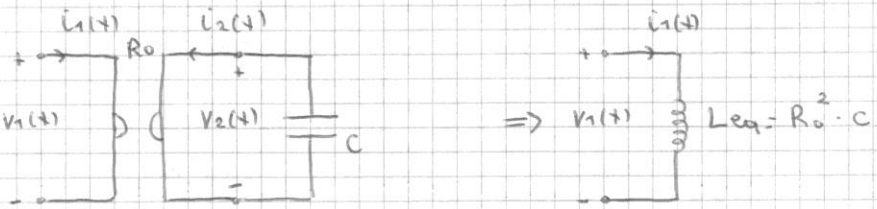
$$\begin{cases} V_1(t) = -R_0 \cdot i_2(t) \\ V_2(t) = R_0 \cdot i_1(t) \end{cases}$$

È una rete senza memoria e inerte.

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) = V_1(t) \cdot i_1(t) + V_2(t) \cdot i_2(t)$$
$$= -R_0 \cdot i_2(t) \cdot i_1(t) + R_0 \cdot i_1(t) \cdot i_2(t) = 0$$

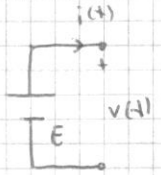
Il giratore trasforma un condensatore in un induttore.

INDUTTORE SINTETICO

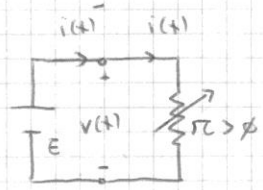


$$\begin{cases} V_1(t) = -R_0 \cdot i_2(t) = R_0 \cdot C \cdot \frac{d}{dt} V_2(t) = R_0^2 C \cdot \frac{d}{dt} i_1(t) = L_{eq} \cdot \frac{d}{dt} i_1(t) \\ V_2(t) = R_0 \cdot i_1(t) \\ i_2(t) = -C \cdot \frac{d}{dt} V_2(t) \end{cases}$$

GENERATORE INDIPENDENTE IDEALE DI TENSIONE



$v(t) = E \quad , \forall i(t)$.



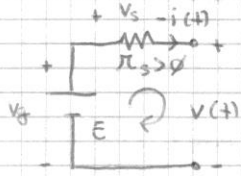
$$i(t) = \frac{E}{r}$$

$$p_r(t) = \frac{V^2(t)}{r} = \frac{E^2}{r}$$

Corrente e potenza istantanea non limitata.

www.alessandropaghi.it

GENERATORE INDIPENDENTE REALE DI TENSIONE



R_s resistenza interna

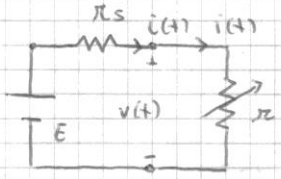
Relazione costitutiva:

$$v(t) = E - R_s \cdot i(t)$$

$$\Rightarrow v(t) - V_g(t) + V_s(t) = 0$$

$$v(t) - E + R_s \cdot i(t) = 0$$

$$v(t) = E - R_s \cdot i(t)$$



$$\begin{cases} V(t) = E - R_s \cdot i(t) \\ v(t) = R \cdot i(t) \end{cases}$$

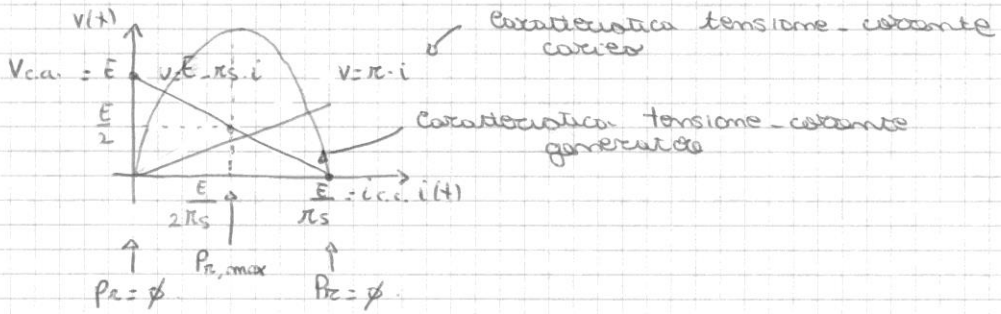
$$i = \frac{E}{R + R_s} \quad , \quad V = E \cdot \frac{R}{R + R_s}$$

$$P_R = R \cdot i^2 = R \cdot \frac{E^2}{(R + R_s)^2}$$

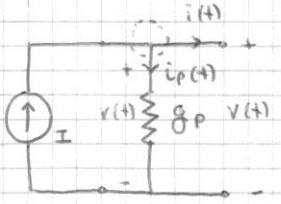
$i(t)_{MAX} = \frac{E}{R_s}$, corrente di corto circuito $i_{c.c.}$

$V(t)_{MAX} = E$, tensione di circuito aperto $V_{c.a.}$

$P_R(t)_{MAX} = P_{R,MAX}\Big|_{R=R_s} = \frac{E^2}{4R_s}$ Watt Potenza disponibile.



GENERATORE REALE DI CORRENTE



$$i(t) = I - g_p \cdot v(t)$$

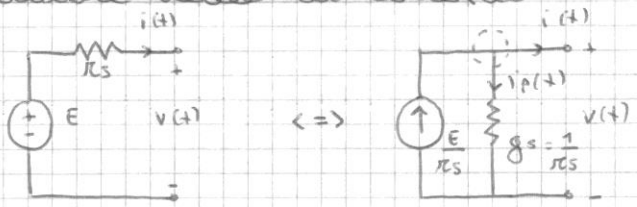
$$I = i_p + i$$

$$= g_p \cdot v(t) + i(t)$$

www.alessandropaghi.it

Due bipoli si dicono equivalenti sse hanno la stessa relazione costitutiva

Equivalenza fra generatore reale di tensione e generatore reale di corrente

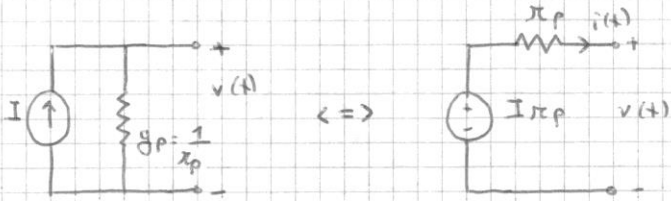


$v(t) = E - \pi_s \cdot i(t)$

$\frac{E}{\pi_s} = i(t) + i_p(t)$

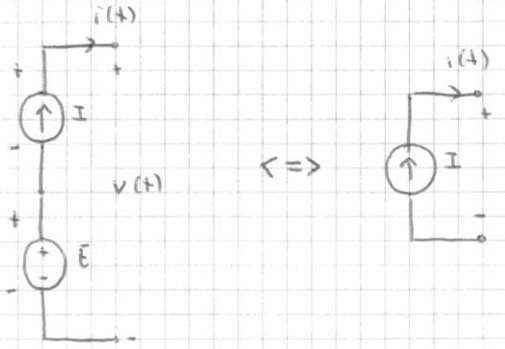
$= i(t) + \frac{v(t)}{\pi_s}$

$\Rightarrow v(t) = E - \pi_s \cdot i(t)$



Dimostrare!

Serie Generatore Tensione e Generatore Corrente



$i(t) = I \quad , \forall v(t)$

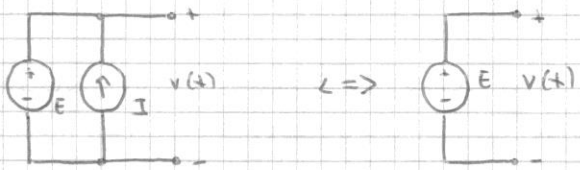
$i = I$

$v = V_I + E$ → qualunque valore

Valore noto

Valore qualunque

Parallelo Generatore Tensione e Generatore Corrente



$v = E \quad , \forall i$

BIPOLO CONTROLLABILE IN CORRENTE

$v = f(i)$

↑ i indipendente

Noto i, conosco univocamente v.

BIPOLO CONTROLLABILE IN TENSIONE

$i = f(v)$

Un resistore $R \neq \emptyset$.

$v = R \cdot i$

$i = G \cdot v$

Un c.c. è controllabile in corrente

Per ogni corrente la tensione è $\emptyset$.

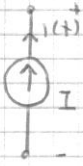
non è controllabile in tensione.

Un c.a. è controllabile in tensione ma non in corrente.



-> Controllabile in corrente

non controllabile in tensione.



-> Controllabile in tensione

non controllabile in corrente.

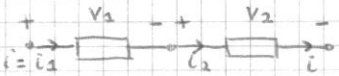
N.B: Un generatore reale è controllabile in corrente e tensione.

www.alessandropaghi.it

CONNESSIONE IN SERIE FRA BIPOLI



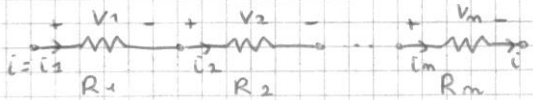
2 Bipoli sono connessi in serie se hanno un nodo in comune a cui non sono connessi altri bipoli.





$$\begin{cases} i = i_1 = i_2 \\ v = v_1 + v_2 \end{cases}$$

Serie fra n Resistori





$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

$$\begin{cases} i = i_1 + i_2 + \dots + i_n \\ V = V_1 + V_2 + \dots + V_n \end{cases}$$

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = R_1 \cdot i_1 + R_2 \cdot i_2 + \dots + R_n \cdot i_n = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) \cdot i$$

Partitore di Tensione

Conoscendo la tensione applicata V.

$$V_1 = V \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2 + \dots + R_n}$$

$$V_2 = V \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \dots + R_n}$$

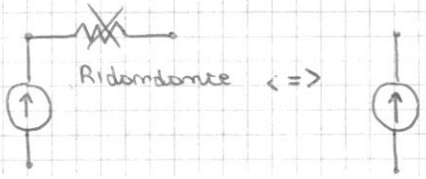
$$i = \frac{V}{R_1 + R_2 + \dots + R_n}$$

$$V_1 = R_1 \cdot i_1 = R_1 \cdot i$$

Serie fra bipoli ha senso sse entrambi i bipoli sono controllabili in corrente.

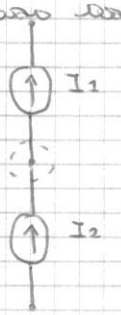
Casi notevoli:

1) Caso Ridondante



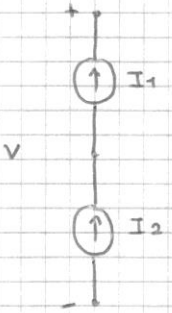
www.alessandropaghi.it

2) Caso assurdo



$I_1 \neq I_2$ assurdo, non soddisfa le KI.

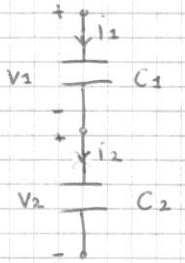
3) Caso indeterminato



$I_1 = I_2$

Conosco V ma non posso ricavare V_1 e V_2, in quanto il generatore di corrente non stabilisce tensioni.

Serie fra condensatori



$\Rightarrow$ 

$C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

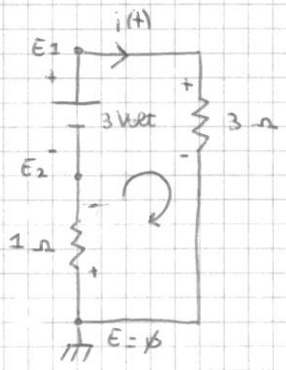
$$\begin{cases} i = i_1 = i_2 \\ V = V_1 + V_2 \end{cases}$$

$$V_1(t) = V_1(\phi) + \frac{1}{C_1}\int_{\phi}^{t} i_1(t')\,dt'$$

$$V_2(t) = V_2(\phi) + \frac{1}{C_2}\int_{\phi}^{t} i_2(t')\,dt'$$

$$V = \underbrace{V_1(\phi) + V_2(\phi)}_{V(\phi)} + \underbrace{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}_{C_{eq}}\int_{\phi}^{t} i(t')\,dt'$$

www.alessandropaghi.it



$E_1 - E_2 = 3$ Volt

E_1 ?

E_2 ?

$3 \cdot i + 1 \cdot i - 3 = 0$

$i = \frac{3}{4}$ A

$E_1 = 3 \cdot \frac{3}{4}$ V $= \frac{9}{4}$ V

$E_2 = -\frac{3}{4}$ V

Dimostrare!

$E_1 = E \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2} = \frac{9}{4}$ V Tensione fra E_1 e terra

$E_2 = -E \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2} = -\frac{3}{4}$ V Tensione fra terra e E_1

Quindi $E_2 = -\frac{3}{4}$ V

13/03/2015

Energetica di un generatore indipendente ideale di tensione.

Scambia energia elettrica con il circuito in modo ILLIMITATO e completamente REVERSIBILE operando la conversione fra energia elettrica ed altre forme di energia non elettrica (energia chimica).



accumulatore Elettrochimico

$dW = dE_{chimica}$

Energia elettrica scambiata in modo reversibile con il circuito.

Energia scambiata in modo reversibile con un sistema chimico.

Reti due porte (doppi bipoli) attive

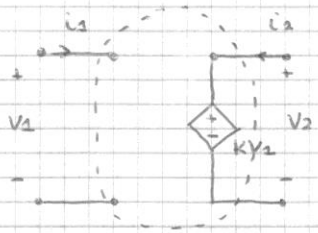
- Generatori controllati
- Amplificatore Operazionale ideale (A.O)

Generatori controllati (Pilotati, Dipendenti)

Generatore di V dipendente impone una tensione che dipende da V o i in un altro punto del circuito.

Generatore di V controllato in tensione

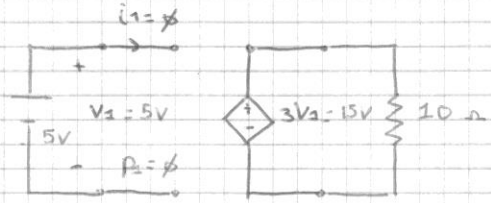
(Rete due porte)



Relazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = \emptyset \\ V_2 = K V_1 \end{cases}$$, K parametro di controllo

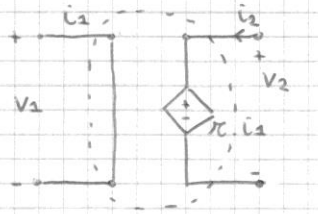
Rete due porte senza memoria e attiva.



$$P_r = \frac{V_2^2}{R} = \frac{15^2}{10}\ \text{Watt}$$

Rete attiva

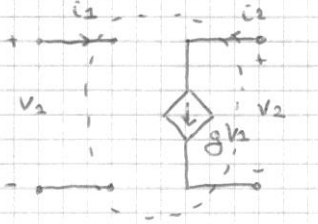
Generatore di tensione controllato in corrente



$$\begin{cases} V_1 = \emptyset \\ V_2 = r \cdot i_1 \end{cases}$$ $[r] = \Omega$

r: resistenza di trasferimento da porta 1 a porta 2.

Generatore di corrente controllato in tensione

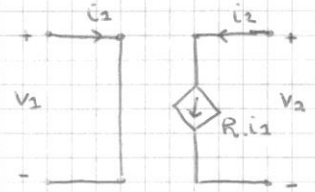


$$\begin{cases} i_1 = \emptyset \\ i_2 = g V_1 \end{cases}$$ $[g] = \Omega^{-1}$

g: transconduttanza

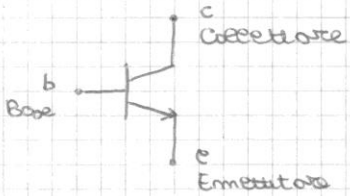
www.alessandropaghi.it

Generatore di corrente controllato in corrente

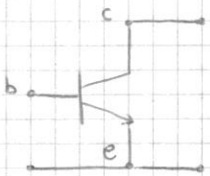


$$\begin{cases} V_1 = \not{0} \\ i_2 = R \cdot i_1 \end{cases}$$

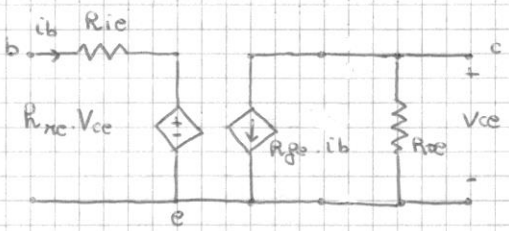
Uso di generatori controllati per modellare dispositivi elettronici



modello del BJT a bassa frequenza a parametri ibridi h per piccoli segnali (modello lineare)



modello a emettitore comune



$[R_{ie}] = \Omega$; $R_{ie} \simeq 1000\ \Omega$

R_{re} no dimensione ; $R_{re} \simeq 10^{-4} \div 10^{-5}$

E' è una retroazione dalla parte 2 alla parte 1.

R_{fe} no dimensione ; $R_{fe} = 100 \div 1000$

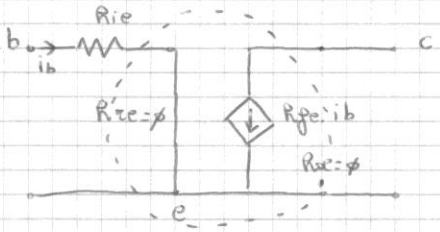
Un Transistor è un amplificatore di corrente!

$[R_{oe}] = \Omega^{-1}$; $R_{oe} \simeq 10^{-6}\ \Omega^{-1}$

www.alessandropaghi.it

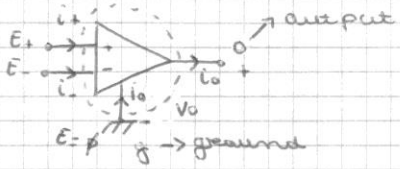
Modello Semplificato

Suppongo $R_{ie} = \infty$ e $R_{oe} = \infty$ $R_{ie} = \infty$ mi dà un c.c.



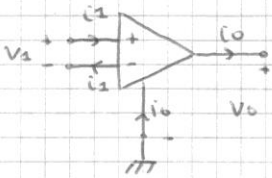
Risultato all'asse è un generatore di corrente controllato in corrente

A.O. ideale (Rete due porte!)



$$\begin{cases} i_+ = i_- = \infty \\ E_+ = E_- \end{cases}$$

a volte viene trascurato il morsetto di terra.



Relazioni costitutive:

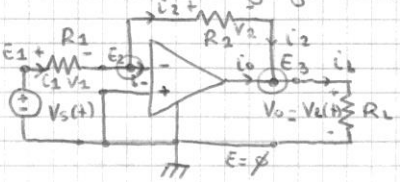
$$\begin{cases} i_1 = \infty \\ V_1 = \infty \end{cases}$$

in quanto i due morsetti stanno allo stesso potenziale.

$\forall i_o$, $\forall V_o$

È una rete due porte attiva e senza memoria.

A.O. in configurazione invertente



Determinare l'amplificazione di tensione $A_V = \frac{V_L(t)}{V_S(t)}$.

$$A_V = \frac{V_L(t)}{V_S(t)} = -\frac{R_2}{R_1}$$

E_1, E_2, E_3

$$\begin{cases} E_1 = V_S(t) \\ E_2 = \infty \text{ , massa virtuale} \\ E_3 = V_L(t) \end{cases}$$

www.alessandropaghi.it

KI : $i_1 = i_2 + \cancel{i^-}^{\nearrow 0}$

$i_1 = i_2$

$\frac{V_1}{R_1} = \frac{V_2}{R_2} \Rightarrow \frac{V_S(t) - \emptyset}{R_1} = \frac{\emptyset - V_L(t)}{R_2}$

$\frac{V_L(t)}{V_S(t)} = -\frac{R_2}{R_1}$

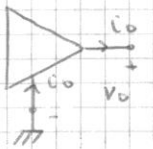
Determinato la corrente $i_o(t)$ e la potenza po erogata da a.o.

$i_o + i_2 = i_L$

$i_o + \frac{\emptyset - V_L(t)}{R_2} = \frac{V_L(t)}{R_L}$

$i_o = V_L \cdot \left(\frac{1}{R_L} + \frac{1}{R_2}\right) = -\frac{R_2}{R_1} V_S(t) \left(\frac{1}{R_L} + \frac{1}{R_2}\right)$.

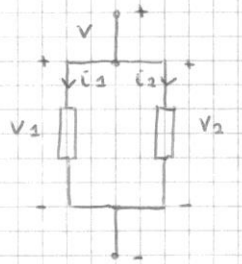
In generale prima si trovano le tensioni e poi le correnti.



Convenzione dei generatori

$p(t) = V_o \cdot i_o$

Connessione in parallelo tra Bipoli



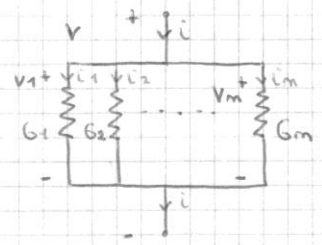
2 Bipoli collegati fra la stessa coppia di nodi.

$\begin{cases} i = i_1 + i_2 \\ V = V_1 = V_2 \end{cases}$

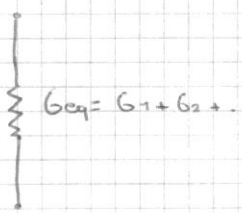
Connessione in parallelo ha senso se entrambi i bipoli sono controllabili in tensione

altrimenti:

Casi Ridondanti, Assurdi, Indeterminati



$\Leftrightarrow$



www.alessandropaghi.it

Partitore di corrente

$$i_1 = i \cdot \frac{G_1}{G_1 + G_2 + \dots + G_m}$$

$$i_2 = i \cdot \frac{G_2}{G_1 + G_2 + \dots + G_m}$$

$$\frac{i_R}{i_K} = \frac{G_R}{G_K}$$

$$i_m = i \cdot \frac{G_m}{G_1 + G_2 + \dots + G_m}$$

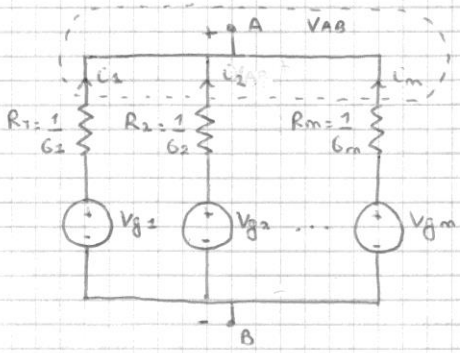
Nella conduttanza più grande passa più corrente.

$$i = G_{eq} \cdot v$$

$$v = \frac{i}{G_{eq}}$$

$$i_1 = G_1 \cdot V_1 = G_1 \cdot v = \frac{G_1}{G_{eq}} \cdot i$$

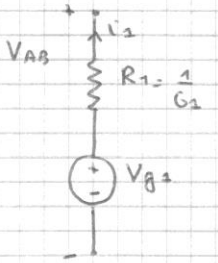
Regola di Millmann



$$V_{AB} = \frac{V_{G1} \cdot G_1 + V_{G2} \cdot G_2 + \dots + V_{Gm} \cdot G_m}{G_1 + G_2 + \dots + G_m}$$

$$i_1 + i_2 + \dots + i_m = \not{0}$$

Bipolo #1



$$V_{AB} = V_{g1} - R_1 \cdot i_1$$

$$i_1 = \frac{V_{g1} - V_{AB}}{R_1} = (V_{g1} - V_{AB}) \cdot G_1$$

$$\vdots$$

$$i_2 = (V_{g2} - V_{AB}) \cdot G_2$$

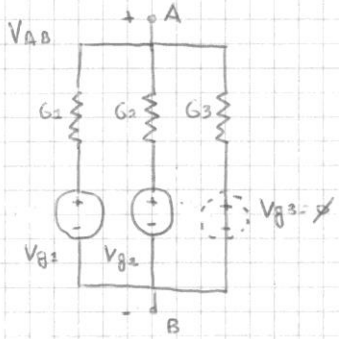
$$\vdots$$

$$i_m = (V_{gm} - V_{AB}) \cdot G_m$$

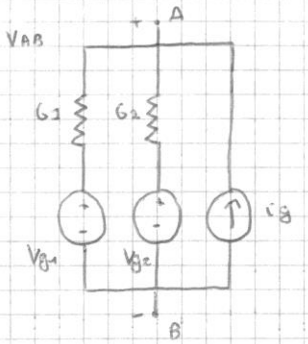
$$V_{g1} \cdot G_1 - V_{AB} G_1 + V_{g2} \cdot G_2 - V_{AB} G_2 + \dots + V_{gm} \cdot G_m - V_{AB} \cdot G_m = \not{0}$$

$$V_{AB} = \frac{V_{G1} \cdot G_1 + V_{G2} \cdot G_2 + \dots + V_{Gm} \cdot G_m}{G_1 + G_2 + \dots + G_m}$$

www.alessandropaghi.it

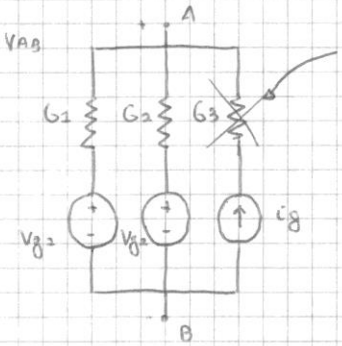


$$V_{AB} = \frac{V_{g1} \cdot G_1 + V_{g2} \cdot G_2}{G_1 + G_2 + G_3}$$



Dimostrare:

$$V_{AB} = \frac{V_{g1} \cdot G_1 + V_{g2} \cdot G_2 + i_g}{G_1 + G_2}$$



G3 è ridondante!

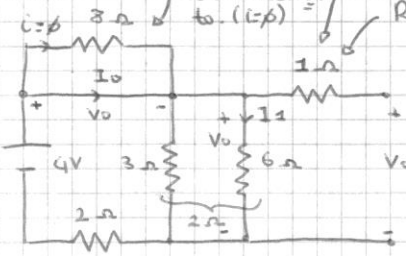
$$V_{AB} = \frac{V_{g1} \cdot G_1 + V_{g2} \cdot G_2 + i_g}{G_1 + G_2}$$

Esercizio:

Resistore Cortocircuito to. ($i = \emptyset$)

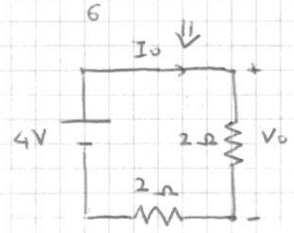
Resistore ridondante

Resistore ininfluente in quanto $V = \emptyset$.



V_0, I_0, I_1 ?

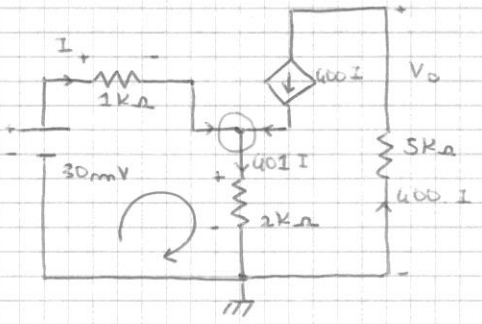
$$I_1 = \frac{V_0}{6}$$



$$V_0 = 2V = 4 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$I_0 = 1\ A$

$I_1 = \frac{1}{3}\ A$



$V_o = -400\, I \cdot 5000\ \Omega$

KV: $30 \cdot 10^{-3} = 1000 \cdot I + 401 \cdot I \cdot 2000$

da cui ricavo $I = 3{,}73 \cdot 10^{-8}\ A$

$V_o = -400 \cdot 500 \cdot 3{,}73 \cdot 10^{-8}\ V = -75 \cdot 10^{-3}\ V = -75\ mV$

18/03/2015

Principio di Sovrapposizione degli Effetti (P.S.E.)

Bipolo senza memoria, lineare e omogeneo

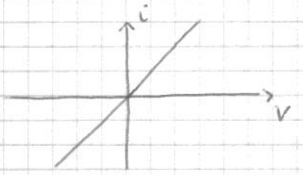
$i = f(v)$

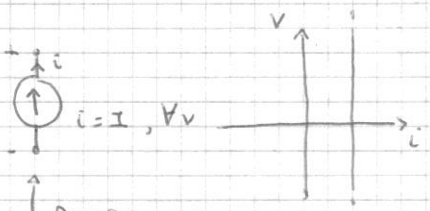
$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ lineare

$f(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot f(v)$ omogeneo

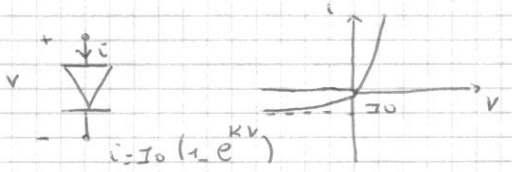
Resistore ideale:

$i = Gv$



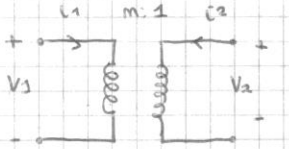


Bipolo non lineare!



Bipolo non lineare

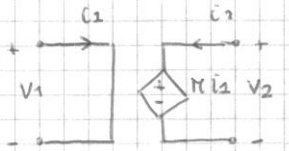
Rete due porte senza memoria, lineari e omogenee.
Relazioni costitutive: 2 equazioni algebriche lineari e omogenee in V_1, V_2, i_1, i_2



$$\begin{cases} V_1 = m \cdot V_2 \\ i_1 = -\frac{1}{m} V_2 \end{cases}$$

Giratore ideale:

$$\begin{cases} V_1 = -R_0 I_2 \\ V_2 = R_0 I_1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} V_1 = \emptyset \\ V_2 = r \cdot I_1 \end{cases}$$

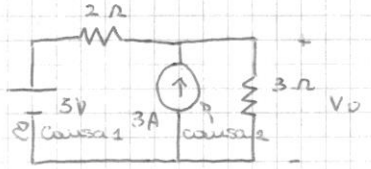
e tutti gli altri generatori controllati

... A.O.

Modello di Ebers-Moll per grandi segnali di un BJT
↑ Rete due porte non lineare

P.S.E.

Consideriamo una rete contenente bipoli e doppi bipoli senza memoria, lineari ed omogenei ed un certo numero di generatori indipendenti di tensione o di corrente (CAUSE). Un EFFETTO (la V o i in un elemento del circuito) può essere ottenuto sovrapponendo l'effetto dei generatori indipendenti.
Per effetto di un generatore indipendente si intende la i o la v che è presente quando tale generatore è attivo e tutti gli altri sono disattivi.

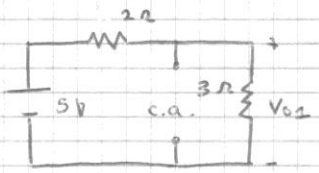


V_0 utilizzando p.s.e.

$V_0 = V_{01} + V_{02}$

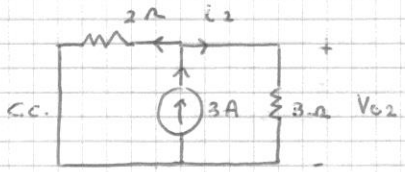
www.alessandropaghi.it

1° effetto



$V_{o1} = 5 \cdot \frac{3}{5} = 3\ V$

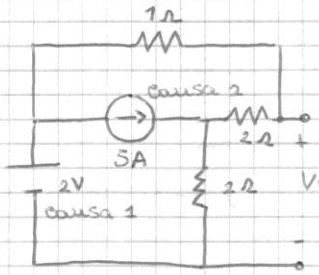
2° effetto



$i_2 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} \cdot 3 = \frac{6}{5}\ A$

$V_{o2} = 3 \cdot i_2 = \frac{18}{5}\ V$

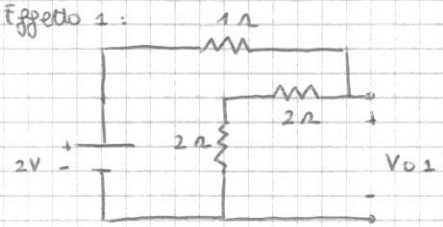
$V_o = V_{o1} + V_{o2} = \frac{33}{5}\ V$



V_o con p.s.e.

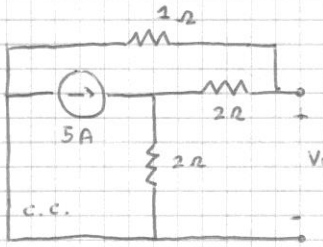
$V_o = V_{o1} + V_{o2}$

Effetto 1:

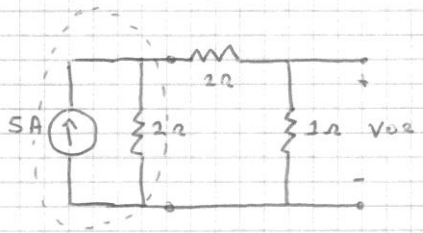


$V_{o1} = 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5}\ V.$

Effetto 2:



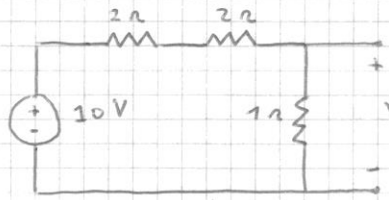
=> Eliminazione dai c.c.



Unisco i nodi che sono cortocircuitati!

↑ Generatore Reale di tensione!

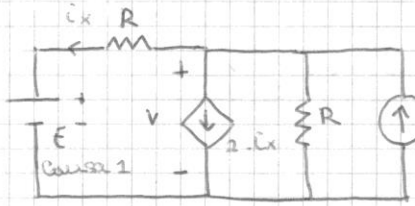
www.alessandropaghi.it



$$V_{o2} = 10 \cdot \frac{1}{5} = 2V$$

$$V_o = V_{o1} + V_{o2} = \frac{8}{5} + 2 = \frac{18}{5} V.$$

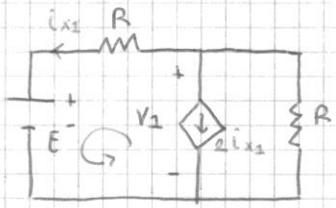
P.s.e. in presenza di generatori controllati



V con P.S.e.

$$V = V_1 + V_2$$

Effetto 1 :



Teorema di Millmann

- Tratto il generatore controllato come indipendente:

$$V_1 = \frac{\frac{E}{R} - 2 i_{x1}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{E - 2R \cdot i_{x1}}{2}$$

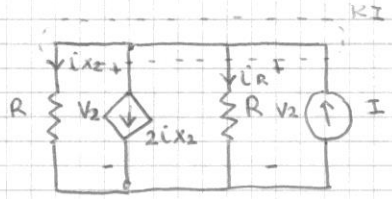
- Eliminazione della grandezza di controllo i_{x1} :

$$-V_1 + R i_{x1} + E = 0 \quad , \quad i_{x1} = \frac{V_1 - E}{R}$$

$$V_1 = \frac{E - 2V_1 + 2E}{2} \quad , \quad 2V_1 = 3E - 2V_1 \quad , \quad 4V_1 = 3E \quad , \quad V_1 = \frac{3}{4} E.$$

www.alessandropaghi.it

Effetto 2:

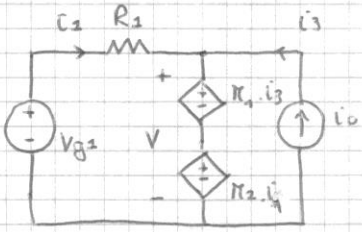


$$I = 3i_{x2} + i_R = 3i_{x2} + \frac{V_2}{R}$$

ma $i_{x2} = \frac{V_2}{R}$

$$I = 4 \cdot \frac{V_2}{R} \Rightarrow V_2 = \frac{R}{4} \cdot I$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{3}{4} E + \frac{R}{4} \cdot I$$



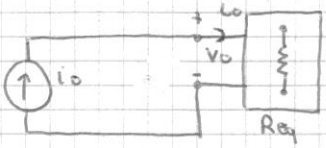
V con p.3.e.

$$V_1 = V_g \cdot \frac{\pi_2}{\pi_2 + R_1}$$

$$V_2 = \frac{R_1 \cdot \pi_1}{R_1 + \pi_2} \cdot i_0$$

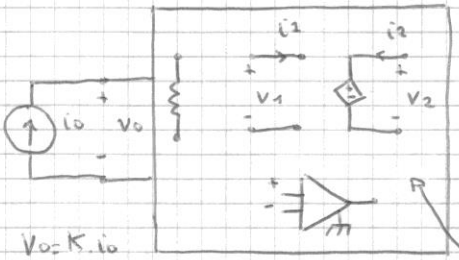
Dimostrare!

Bipoli senza memoria, lineari e omogenei



Bipolo di R ideale

$$R_{eq} = \frac{V_o}{i_o}$$



Bipolo senza memoria lineare e omogeneo.

$V_o = K \cdot i_o$

$= R_{eq} \cdot i_o$ $\quad [K] = \Omega$

ma generatori indipendenti!

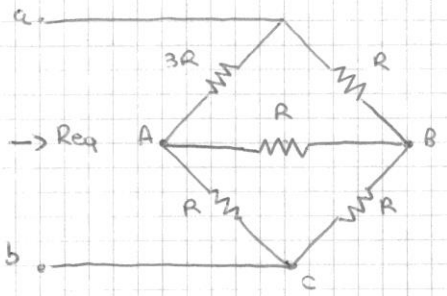
www.alessandropaghi.it

Bipolo di Soli R Ideali

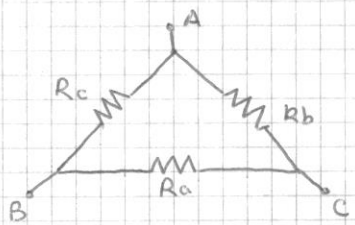
Rete a scala (Solo connessioni Σ o $\parallel$)

Reti non a scala (non solo connessioni Σ o $\parallel$)

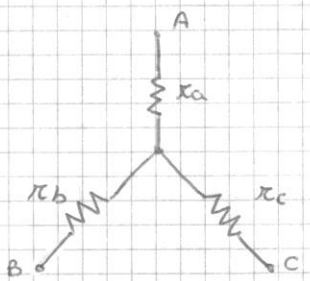
① Rete a Ponte



Trasformazione da Δ a $\curlyvee$



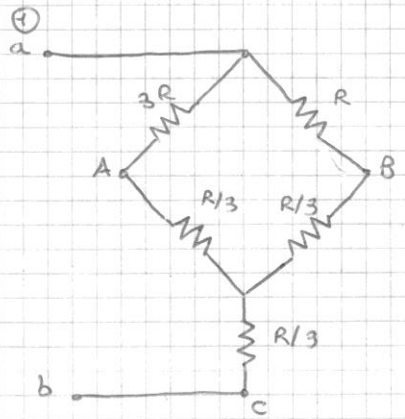
$\Leftrightarrow$



$$\begin{cases} r_a = \dfrac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} \\ r_b = \dfrac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c} \\ r_c = \dfrac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c} \end{cases}$$

Se $R_a = R_b = R_c$, $r_a = r_b = r_c = \frac{R}{3}$.

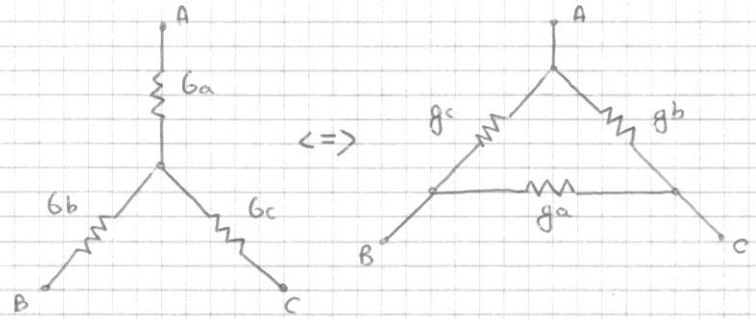
④



$$R_{eq} = \frac{R}{3} + \frac{10}{3} R \parallel \frac{4}{3} R$$

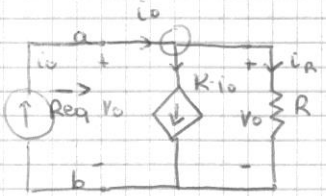
www.alessandropaghi.it

Trasformazione da Y a Δ



$$\begin{cases} g_a = \dfrac{G_b G_c}{G_a+G_b+G_c} \\ g_b = \dfrac{G_A \cdot G_c}{G_A+G_B+G_c} \\ g_c = \dfrac{G_A \cdot G_B}{G_A+G_B+G_c} \end{cases}$$

Req di Bipoli ... che contengono generatori controllati

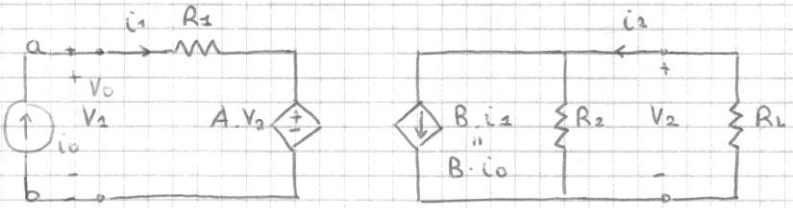


$$R_{eq} = \frac{V_o}{i_o} = R(1-K)$$

$$i_o = K \cdot i_o + i_A = K \cdot i_o + \frac{V_o}{R}$$

$$i_o(1-K) = \frac{V_o}{R}$$

Esempio:



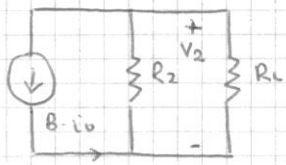
Req del bipolo ab ?

$$R_{eq} = \frac{V_o}{i_o}$$

Determino adesso la grandezza di controllo $i_1 = V_2$ in funzione di i_o, V_o, A, B, R_1, R_2, R_L.

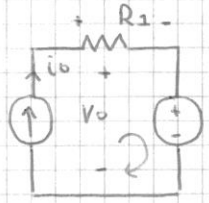
$i_1 = i_o$

Quindi:



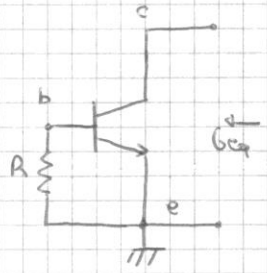
$$V_2 = -B \cdot i_b \cdot (R_2 \| R_L)$$

In definitiva

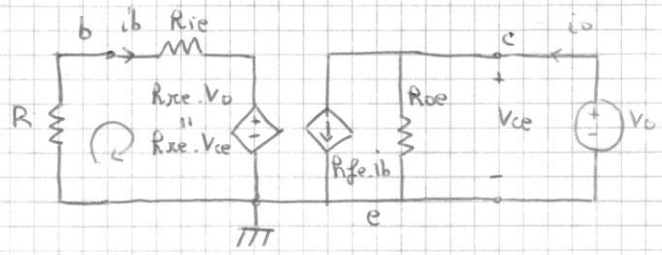


$$V_b = R_1 \cdot i_b - A \cdot B \cdot R_{\|} \cdot i_b$$

$$R_{eq} = \frac{V_b}{i_b} = R_1 - AB \cdot \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L}$$



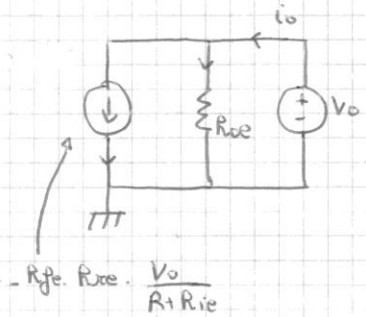
G_{eq} usando per il BJT il modello equivalente a parametri R a emettitore comune.



$$G_{eq} = \frac{i_b}{V_b}$$

$$V_{ce} = V_b$$

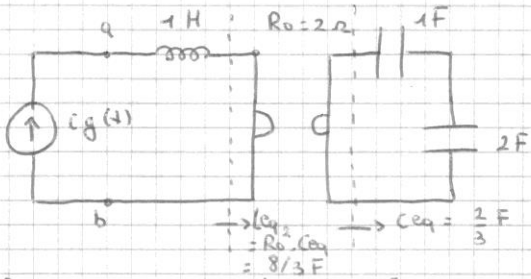
$$i_b = -\frac{R_{re} \cdot V_b}{R + R_{ie}}$$

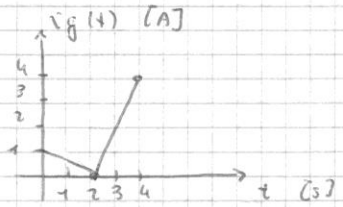


$$i_b = -R_{fe} \cdot R_{re} \cdot \frac{V_b}{R + R_{ie}} + R_{oe} \cdot V_b$$

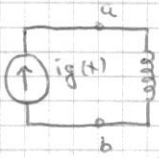
$$G_{eq} = R_{oe} - R_{re} \cdot A_{fe} \cdot \frac{1}{R + R_{ie}}$$

www.alessandropaghi.it





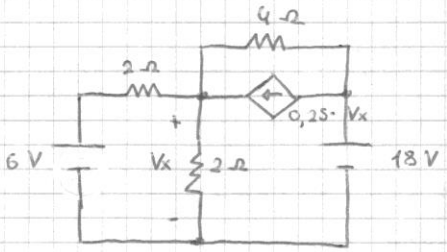
Determinare l'energia erogata da $i_g(t)$ in $0 \div 4$ sec



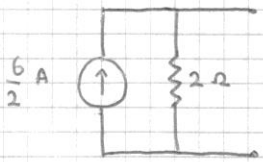
$L = \frac{11}{3}$ H $= \frac{8}{3} + \frac{3}{3}$ H

$$W_{[0,4]} = \int_0^4 dW = \int_0^4 p(t)\,dt = \int_0^4 dE_L(t) = E_L(4) - E_L(0)$$

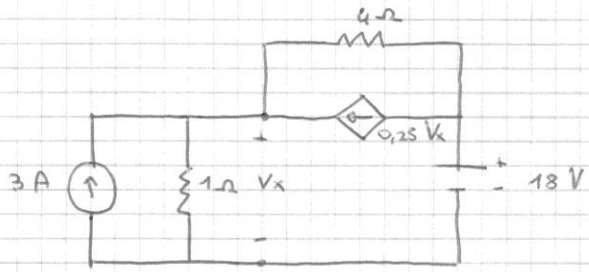
$$= \frac{1}{2} L \cdot i^2(4) - \frac{1}{2} \cdot L\, i^2(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{3} \cdot 15 \text{ Joule}$$

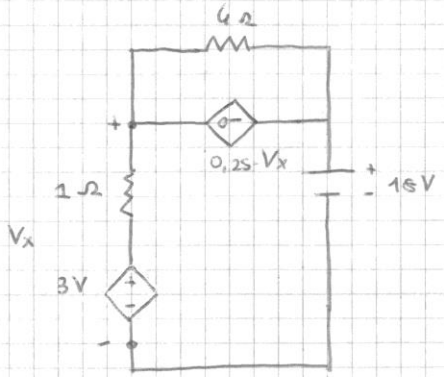


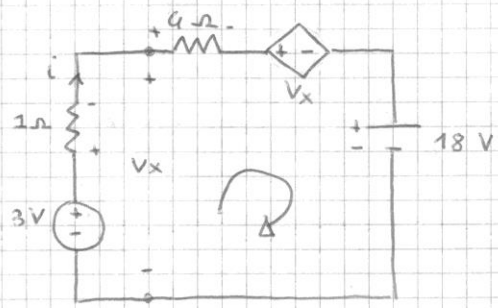
Calcolare V_x usando le trasformazioni fra generatori



è il generatore di tensione







$i \cdot 1 + i \cdot 4 + V_x + 18 - 3 = 0$

$5 \cdot i + 15 + V_x = 0$

$V_x - 3 + 1 \cdot i = 0$

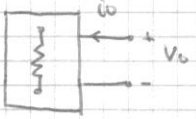
$i = 3 - V_x$

$\Rightarrow 5 \cdot (3 - V_x) + 15 + V_x = 0$

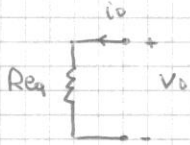
$15 - 5V_x + 15 + V_x = 0$

$V_x = \frac{15}{2}\ V.$

20/03/2015



$V_o = k \cdot i_o$



Caratteristica V-i è una retta passante per $(\emptyset, \emptyset)$.

Omogeneo!

Relazione lineare non omogenea: $V_o = K \cdot i_o + R$

K: R_{eq}

V: V_{eq}

Teorema di Thevenin

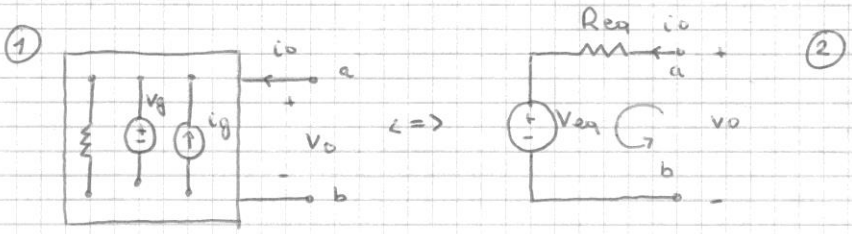
Consideriamo un bipolo ab che contiene resistori ideali (lineari e omogenei) ed un certo numero di generatori indipendenti di V o di i.
Allora il bipolo equivale ad una resistenza equivalente R_{eq} in serie ad un generatore di tensione equivalente V_{eq} così definiti:

R_{eq}: Resistenza del bipolo omogeneo associato ottenuto disattivando tutti i gen.ri indip.ti di V o i.

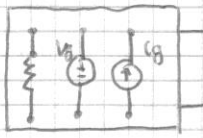
V_{eq}: tensione ai morsetti ab quando sono lasciati a circuito aperto.

$V_{eq} = V_{c.a.} = V_{vuoto}$

Schema a blocchi:

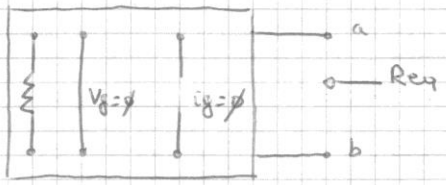


In laboratorio:



$V_{eq} = V_{c.a.}$ La misura col Voltmetro.

www.alessandropaghi.it

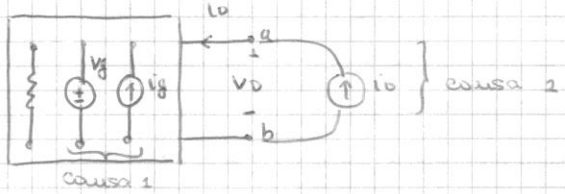


Dimostrazione: (ESAME)

I due bipoli dello schema a blocchi devono avere la stessa relazione costitutiva

(2) $V_o = R_{eq} \cdot i_o + V_{eq}$

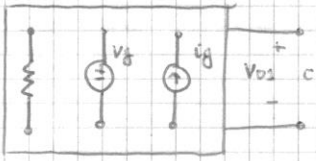
(1)



$V_o = V_{o1} + V_{o2} = V_{eq} + R_{eq} \cdot i_o$

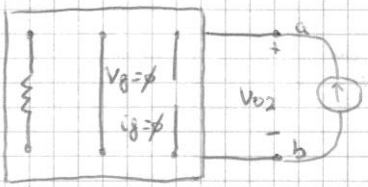
↑ p.s.e.

1° Effetto



$V_{o1} = V_{c.a.} = V_{eq}$

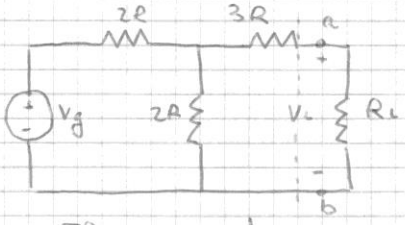
2° Effetto



$V_{o2} = R_{eq} \cdot i_o$

N.B: Il bipolo deve essere controllabile in corrente!

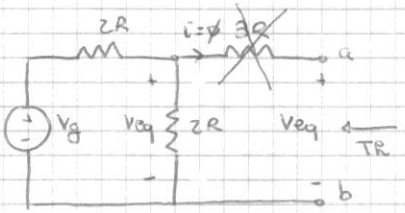
www.alessandropaghi.it



V_L ?

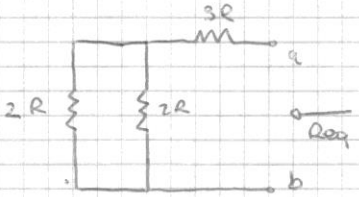
Uso Thevenin!

Individuo due morsetti e stacco R_L, a questo punto applico Thevenin



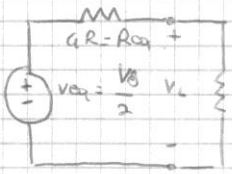
Diventa un partitore di tensione!

$$V_{eq} = V_g \cdot \frac{2R}{2R+2R} = V_g \cdot \frac{1}{2}$$



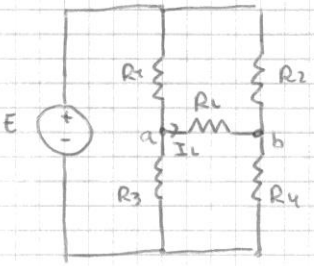
$$R_{eq} = (2R \parallel 2R) + 3R = 4R$$

Quindi:



$$V_L = \frac{V_g}{2} \cdot \frac{R_L}{4R+R_L} = V_{eq} \cdot \frac{R_L}{R_L+R_{eq}}$$

Circuito a ponte



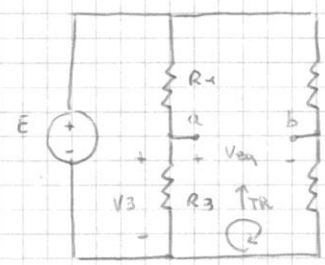
I_L ?

? I valori di R_1, R_2, R_3, R_4 tali che: $I_L = 0$

↑

Condizione di Bilanciamento

Individuo i morsetti ab e stacco R_L.



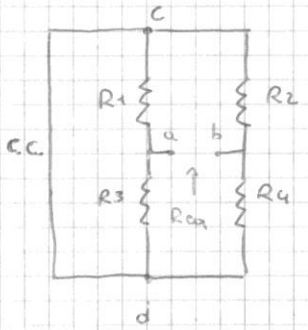
$V_{eq} = V_4 - V_3 = \emptyset$

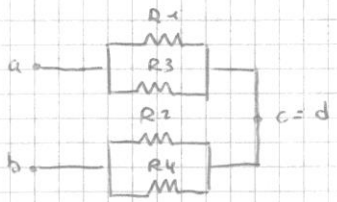
$V_{eq} = V_3 - V_4$

È un partitore di tensione

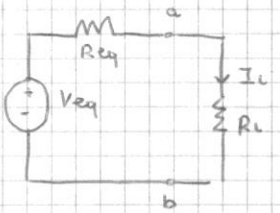
$V_3 = E \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_1}$, $V_4 = E \cdot \frac{R_4}{R_4 + R_2}$

$V_{eq} = E \cdot \left(\frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_4}{R_2 + R_4} \right)$





$R_{eq} = R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4$

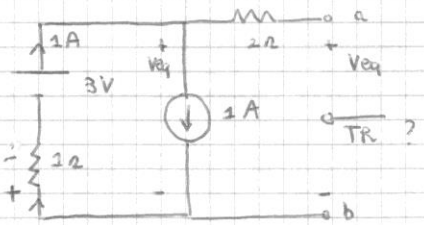


$I_L = \frac{V_{eq}}{R_L + R_{eq}}$

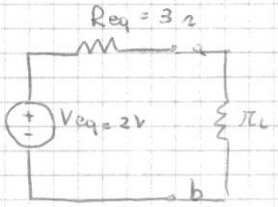
$I_L = \emptyset$ se $V_{eq} = \emptyset$ $\Leftrightarrow$ $R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3$

↑

Condizione di bilanciamento del ponte.



<=>



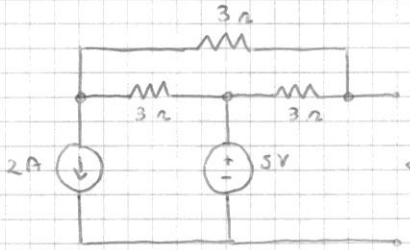
$V_{eq} = 3V - 1 \cdot 1\ V = 2V$

$R_{eq} = 2 + 1\ \Omega = 3\ \Omega$

Max potenza

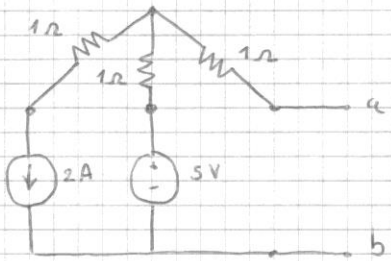
quando: $R_L = R_{eq} = 3\ \Omega$

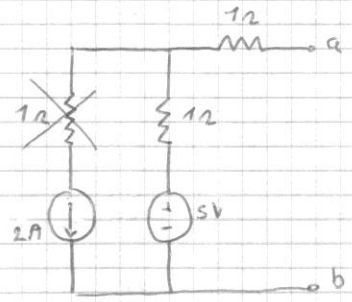
$P_{max} = \frac{1}{4} \cdot \frac{V_{eq}^2}{R_{eq}}$



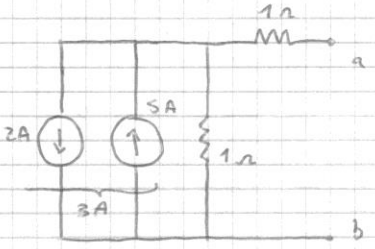
? TR. con trasformazioni circuitali

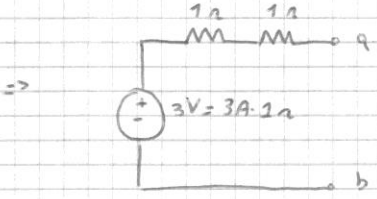
(Trasformazioni Topologiche dei Generatori)





=>



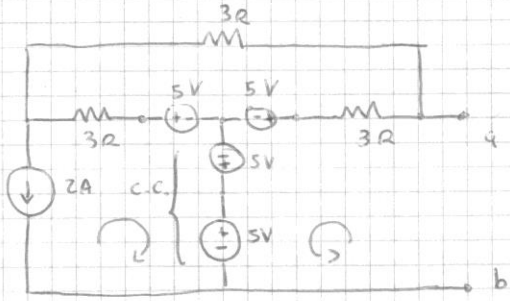


=>

$V_{eq} = 3V$

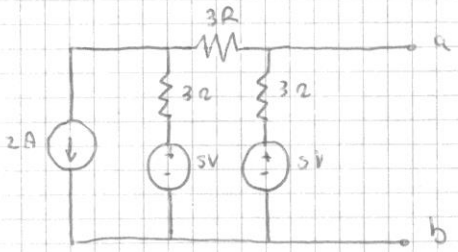
$R_{eq} = 2\ \Omega$

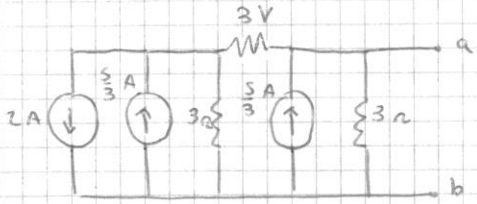
Strumenti:

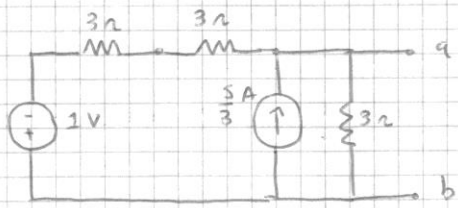


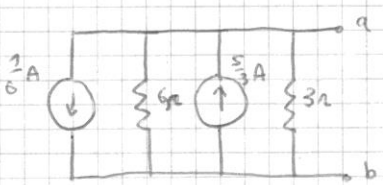
Tagliato maglia di sin. indip. di V.

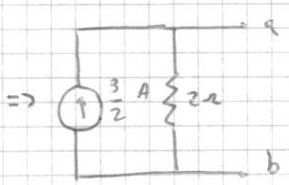
Circuito non corretto

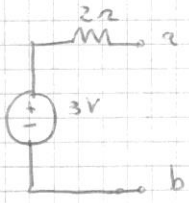












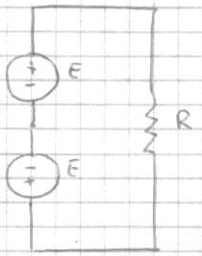
$V_{eq} = 3V$

$R_{eq} = 2\Omega$

www.alessandropaghi.it

P.S.e.

Non funziona per la potenza.



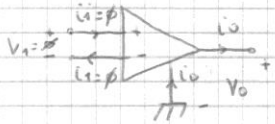
$P_R = \emptyset$ Watt

Con P.S.e.:

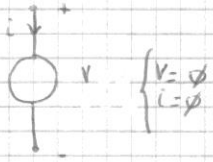
$P_R = P_{R1} + P_{R2} = \frac{E^2}{R} + \frac{E^2}{R} = 2 \cdot \frac{E^2}{R} \neq \emptyset$ Watt

↑ Errore!

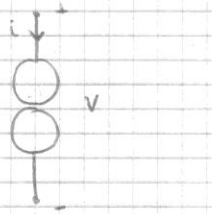
A.O. ideale



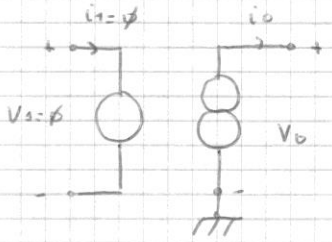
Muratore



Morsatore

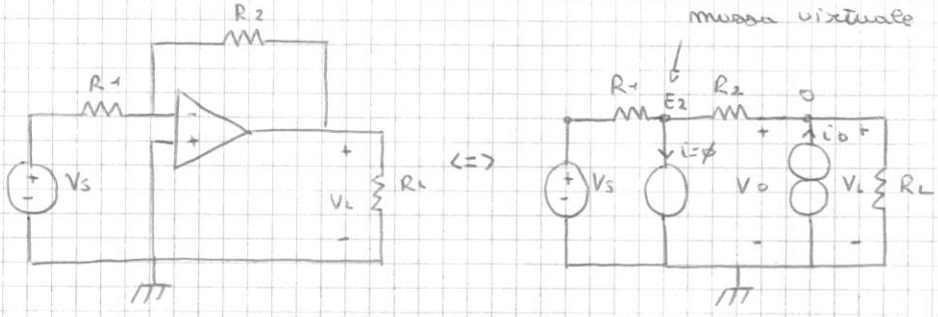


Nullore = Muratore ⊕ Morsatore



$\begin{cases} V_1 = \emptyset \\ i_1 = \emptyset \end{cases}$ $V_o, i_o \ \forall$

↖ È l'equivalente di un A.O.

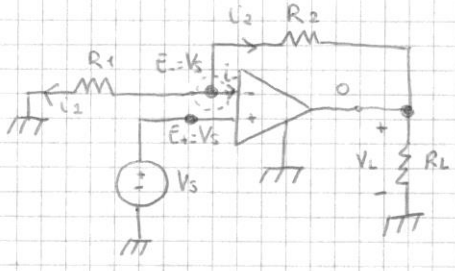


$E_2 = \emptyset$, $p_o = V_o \cdot i_o$

Potenza istantanea erogata da A.O.

Risolvere il circuito con la nuova notazione.

A.O. Configurazione non invertente



$$A_V = \frac{V_L}{V_S} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

metodo dei nodi semplificato in presenza di A.O.

1 sola incognita V_L

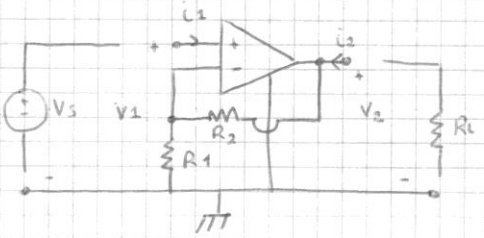
$$KI: \; i_1 + i_2 + i_- = \emptyset \qquad , i_- = \emptyset$$

$$i_1 + i_2 = \emptyset$$

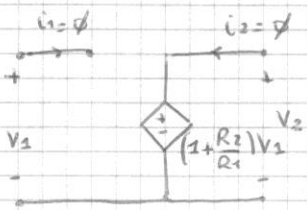
$$\frac{V_S - \emptyset}{R_1} + \frac{V_S - V_L}{R_2} = \emptyset$$

$$V_S \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{V_L}{R_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_L}{V_S} = 1 + \frac{R_2}{R_1} .$$

A.O. come generatore di V controllato in V

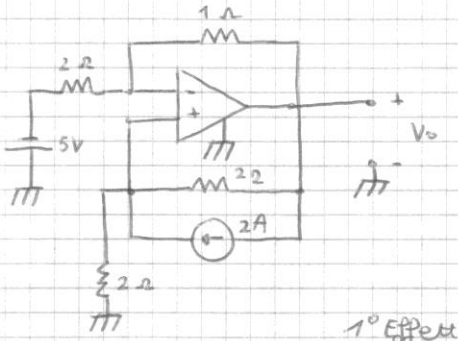


$$\begin{cases} i_1 = \emptyset \\ V_2 = \underbrace{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}_{K} \cdot V_1 \end{cases}$$



A.O. con generatore di V controllato in V.

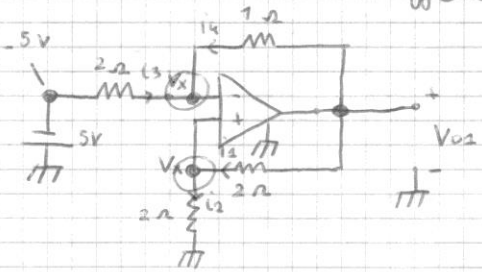
P.S.e. con A.O.



? V_o con p.s.e.

$V_o = V_{o1} + V_{o2}$

1° Effetto



Incognite sono le tensioni dei nodi

2 incognite V_x, V_{o1}

$i_1 = i_2$

$\frac{V_{o1} - V_x}{2} = \frac{V_x - 0}{2}$

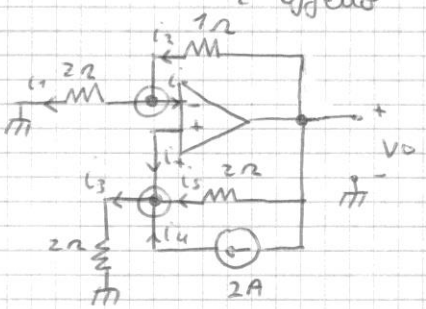
$V_{o1} = 2V_x \quad , \quad V_x = \frac{V_{o1}}{2}$

$i_3 + i_4 = 0$

$-\frac{5 - V_x}{2} + \frac{V_{o1} - V_x}{1} = 0 \quad , \quad -\frac{5}{2} - \frac{V_x}{2} + V_{o1} - V_x = 0$

$-\frac{5}{2} - \frac{V_{o1}}{4} + V_{o1} - \frac{V_{o1}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}V_{o1} = \frac{5}{2} \quad , \quad V_{o1} = 10\,V$

2° Effetto



$i_1 = i_2$

$\frac{V_x}{2} = \frac{V_{o2} - V_x}{1} \quad \Rightarrow \quad V_x = \frac{2}{3}V_{o2}$

$i_5 + i_4 = i_3$

$\frac{V_x}{2} = 2 + \frac{V_{o2} - V_x}{2}$

$V_x = 8\,V$

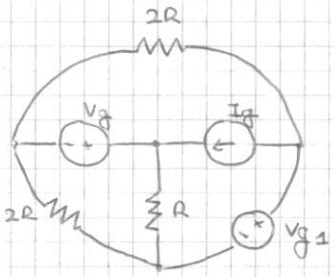
$V_{o2} = 12\,V$

$V = V_{o1} + V_{o2} = 22\,V$

www.alessandropaghi.it

25/03/2015

Metodi generali di Analisi di reti resistive

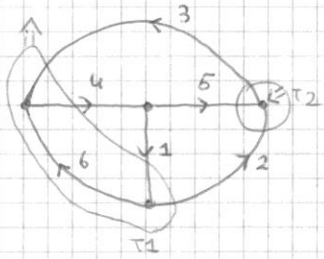


$l = 6$ bipoli

$n = 4$ nodi

$\begin{cases} l \text{ tensioni} \\ l \text{ correnti} \end{cases}$

Grafo Orientato



$l = 6$ lati

Per ogni bipolo vale la convenzione degli utilizzatori

nodo: p.to del grafo in cui sono collegati almeno due lati

$n = 4$ nodi

È un grafo connesso.

$\vec{V} = (V_1, V_2, \dots V_6)$

$\vec{i} = (i_1, i_2, \dots, i_6)$

KV: maglia: percorso chiuso formato da lati del grafo

$M_1 = \{1, 4, 6\}$ KV: $V_4 + V_1 + V_6 = 0$

$M_2 = \{4, 5, 3\}$ KV: $V_4 + V_5 + V_3 = 0$

KV: $-V_6 + V_2 - V_5 - V_4 = 0$

Prendo una linea Gaussiana:

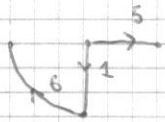
TAGLIO: insieme dei lati intersecati dalla linea chiusa.

$T_1 = \{3, 4, 1, 2\}$ KI: $-I_3 + I_4 - I_1 + I_2 = 0$

$T_2 = \{3, 5, 6\}$ KI: $I_2 + I_3 - I_3 = 0$

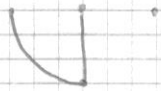
www.alessandropaghi.it

Albero: è un insieme connesso di lati che tocca tutti i nodi senza formare maglie.

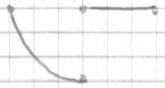




Ogni albero ha n-1 rami



← non è un albero valido

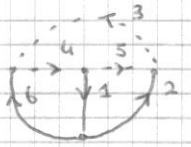


← non è un albero valido

Co-albero: insieme dei lati del grafo che non appartengono all'albero

Corde: lati del coalbero

Ogni coalbero ha $l-(n-1) = l-n+1$ corde.



--- : Corde
___ : Rami

Proprietà: un coalbero non contiene lupi

Prendiamo un albero:



MAGLIA FONDAMENTALE: maglia che contiene una sola corda e per il resto solo rami dell'albero.

Le maglie fondamentali sono in corrispondenza biunivoca con le corde.

Esistono $l-n+1$ mf. associate all'albero.

www.alessandropaghi.it

TENSIONI INDIPENDENTI (ESAME)

Suddividiamo l'insieme $\vec{V}$ delle tensioni dei lati del grafo in due sottoinsiemi:

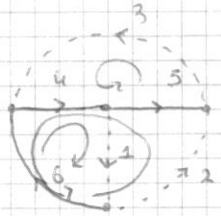
1) $n-1$ tensioni $\vec{V_a}$ dei rami dell'albero;

2) $l-n+1$ tensioni $\vec{V_c}$ delle corde del coalbero;

Le tensioni $\vec{V_a}$ sono una base dello spazio delle tensioni $\vec{V}$ dei lati del grafo. Cioè:

1) $\vec{V_a}$ sono le $n-1$ tensioni indip.;

2) Da $\vec{V_a}$ posso trovare le $l-n+1$ tensioni dipend. delle corde scrivendo $l-n+1$ KV alle mf.



$$\vec{V_a} = \begin{pmatrix} V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{pmatrix} \text{ indip.} \qquad \vec{V_c} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \text{ dipend.}$$

$l-n+1$ KV:
$$\begin{cases} V_1 + V_6 + V_4 = 0 \\ V_2 - V_5 - V_4 - V_6 = 0 \\ V_3 + V_4 + V_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = -V_4 - V_6 \\ V_2 = V_5 + V_4 + V_6 \\ V_3 = -V_4 - V_5 \end{cases}$$

le $l-n+1$ KV alle mf sono indip.

$$\vec{V_c} = \vec{\vec{B}}\,\vec{V_a} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{pmatrix} \qquad \vec{\vec{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

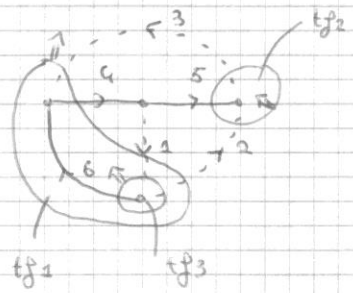
$\vec{V_a}$ sono le $n-1$ tensioni indip.: in quanto l'assenza di maglie implica assenza di vincoli di linearità.

TAGLIO FONDAMENTALE: un taglio che ha un solo ramo dell'albero e, per il resto, delle corde.

I tf sono in corrispondenza biunivoca con i rami dell'albero.

Esistono quindi $n-1$ tf.

www.alessandropaghi.it



CORRENTI INDIPENDENTI

Suddividendo $\vec{i}$ in $\vec{i}_a$ e $\vec{i}_c$

$\vec{i}_c$: n dim — $\vec{i}_a$: $n-1$ dim — l_{n+1} dim.

$\vec{i}_c$ è una base dello spazio $\vec{i}$ delle correnti dei lati del grafo:

1) $\vec{i}_c$ sono le $l-n+1$ correnti indip;

2) Posso trovare le $n-1$ correnti dipend. $\vec{i}_a$ scrivendo $n-1$ KI ai tf;

DIM: 1 Sono indipendenti in quanto le coalbero non contiene tagli e non ci sono legami di dipendenza lineare;

DIM: 2

$$\vec{i_c} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} \text{ indip.} \qquad \vec{i_a} = \begin{pmatrix} i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{pmatrix} \text{ dipend.}$$

$n-1$ KI tf $\begin{cases} i_4 - i_3 - i_1 + i_2 = 0 \\ i_5 + i_2 - i_3 = 0 \\ i_6 - i_1 + i_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_4 = i_3 + i_1 - i_2 \\ i_5 = i_3 - i_2 \\ i_6 = i_1 - i_2 \end{cases}$

$$\vec{i_a} = \vec{\vec{A}}\,\vec{i_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

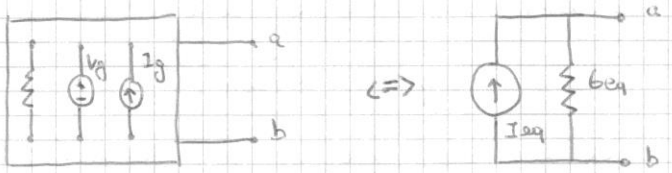
$$\vec{\vec{A}} = -\vec{\vec{B}}^{\,T}$$

Quindi note KV alle mf (B) conosco KI ai tf (A).

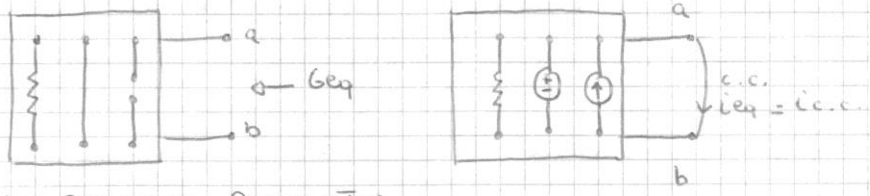
$$\langle \vec{V}, \vec{i} \rangle = 0$$

www.alessandropaghi.it

Teorema di Norton

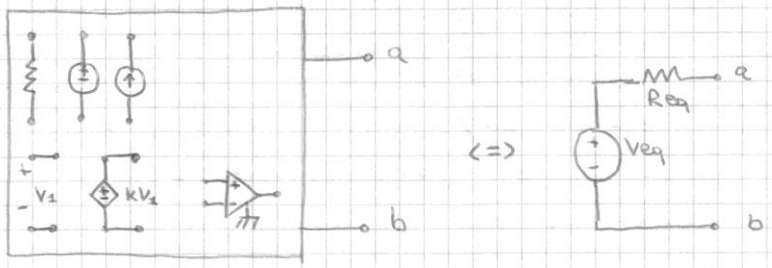


↑ controvertibile in tensione



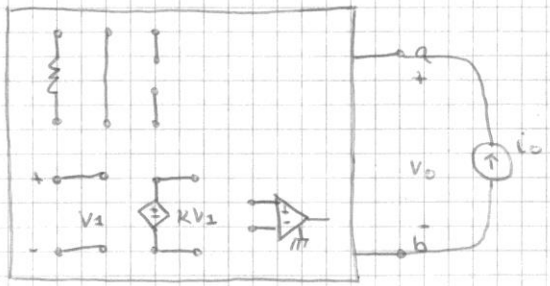
Bipolo omogeneo associato

Thevenin in presenza di Gen. di corr. ti e A.O.



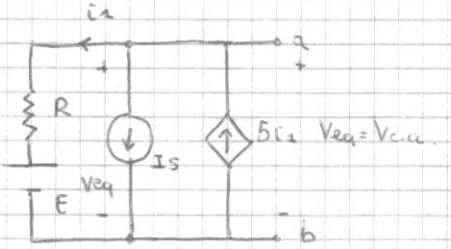
Se controllabile in corrente

V_{eq} = V c.a. ai morsetti ab.



$$R_{eq} = \frac{V_0}{i_0}$$

Esercizio:



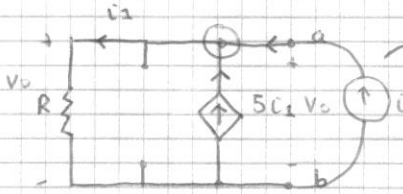
? Thevenin dipolo ab con definizione (2 passi)

con millemmann: $V_{eq} = \dfrac{\frac{E}{R} - I_s + 5i_1}{\frac{1}{R}} = E - R I_s + 5R i_1$

$V_{eq} = R \cdot i_1 + E$

$i_1 = \dfrac{V_{eq} - E}{R}$ $\Rightarrow$ $V_{eq} = E - R I_s + 5 \dfrac{V_{eq} - E}{R}$

$V_{eq} = E + \dfrac{R}{4} I_s$



Ad inserzione per trovare Req.

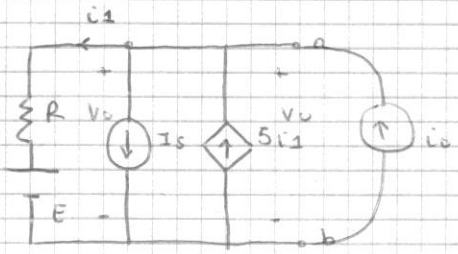
$R_{eq} = \dfrac{V_o}{i_o}$

$i_o + 5i_1 = i_1$

$i_o = -4 i_1$, $i_1 = \dfrac{V_o}{R}$

$i_o = -4 \cdot \dfrac{V_o}{R}$

$\Rightarrow R_{eq} = -\dfrac{R}{4}$



Risolviamo con metodo rapido.

$V_o = R_{eq} \cdot i_o + V_{eq}$

$\Rightarrow V_o = R i_o + R$

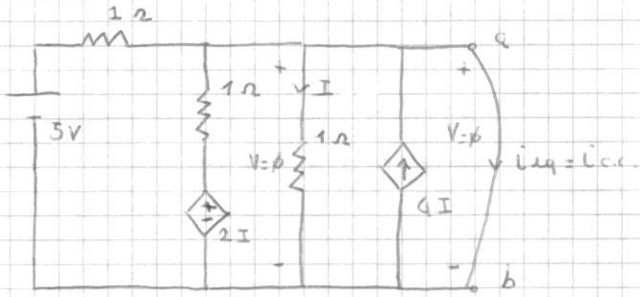
millemmann: $V_o = \dfrac{\frac{E}{R} - I_s + 5i_1 + i_o}{\frac{1}{R}} = E - R I_s + 5R i_1 + R i_o$

$i_1 = \dfrac{V_o - E}{R}$

$V_o = E - R I_s + 5V_o - 5E + R I_o = \left(E + \dfrac{R}{4} I_s\right) - \dfrac{R}{4} i_o$

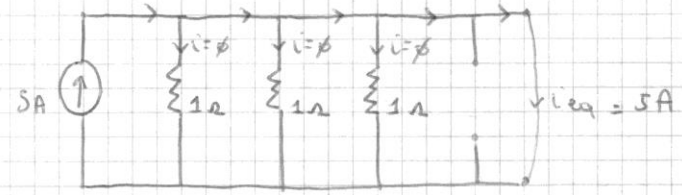
$= \boxed{R_{eq}} \cdot i_o + \boxed{V_{eq}}$

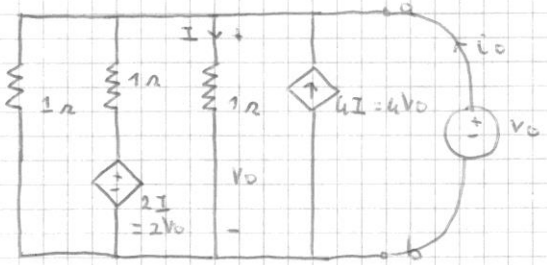
www.alessandropaghi.it



? norton Bipolo a b

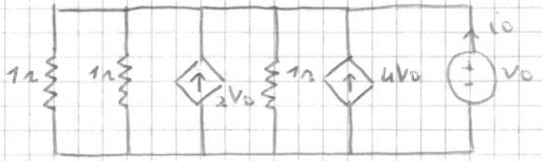
$I = 0$!

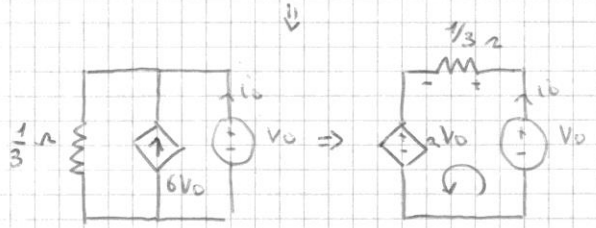




$G_{eq} = \frac{i_o}{V_o}$

$I = \frac{V_o}{1} = V_o$

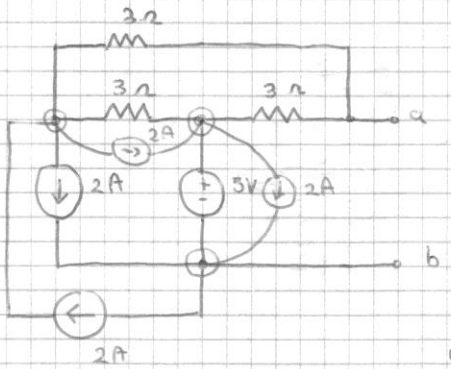




$-V_o + \frac{1}{3} i_o + 2V_o = 0$

$V_o = -\frac{1}{3} i_o$

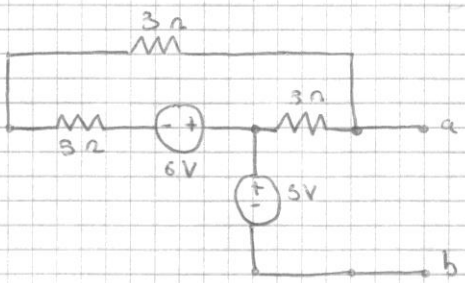
Trasformazione Topologica di gen. di corrente.

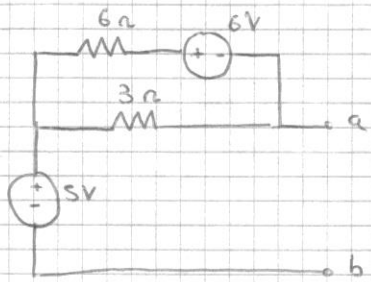


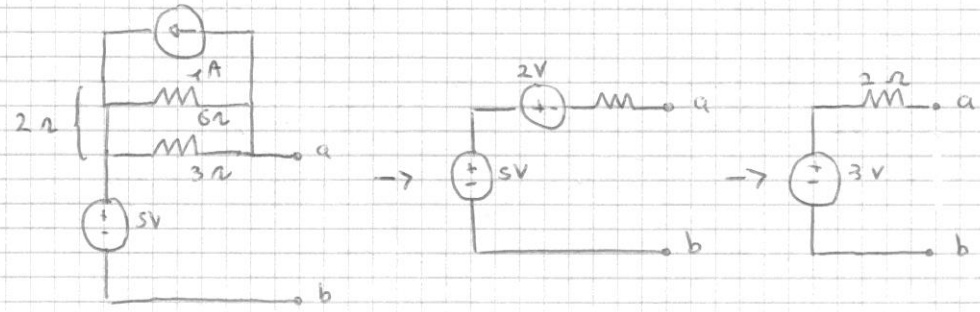
? Thevenin con trasformazioni circuitali

Introduco maglia gen. ri di corrente

non contiamo KI di nodi.

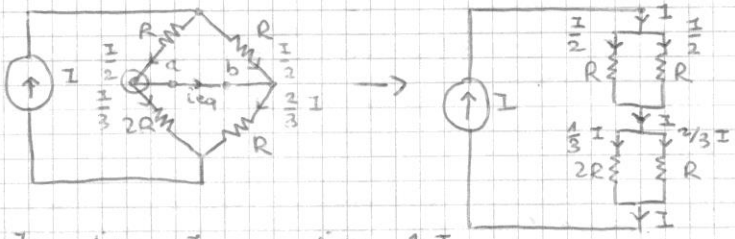




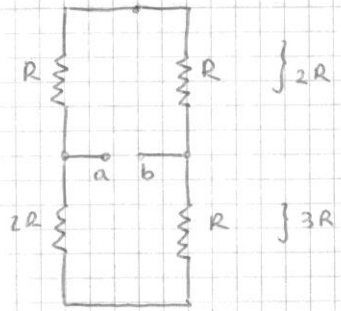


Esercizio:

Equivalente di Norton di ab.

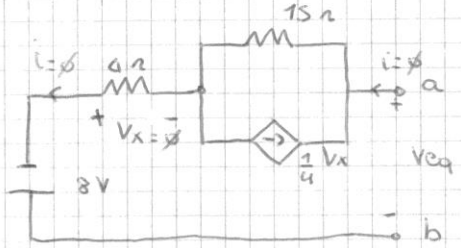


KI: $\frac{I}{2} = i_{eq} + \frac{I}{3} \Rightarrow i_{eq} = \frac{1}{6} I$

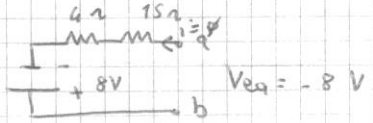


$G_{eq} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{3R}$

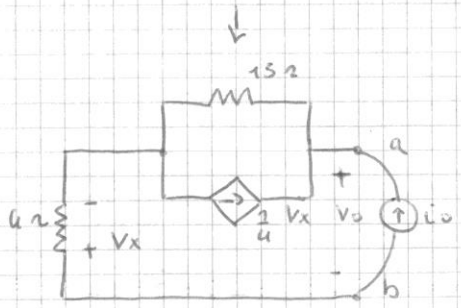
Esercizio:



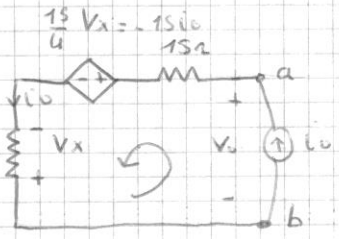
→ Equivalente di Thevenin



$V_{eq} = -8\ V$



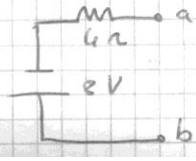
→



$V_x = -4 \cdot i_o$

KV: $-V_o + 15 i_o - 15 i_o + 4 i_o = \emptyset \Rightarrow V_o = 4 i_o$, $R_{eq} = 4\ \Omega$

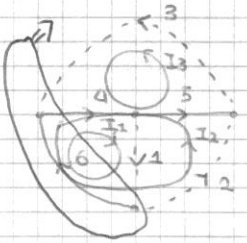
In conclusione



27/03/2015

Base equivalente per le correnti

Correnti cicliche (correnti di maxwell)

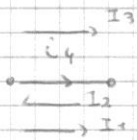


$\vec{i}_c = \{i_1, i_2, i_3\}$ $\ell - n + 1$.

Corrente ciclica di una mgf:
corrente che percorre una maglia richiudendosi su se stesso.

$\vec{I}_{cicliche} = \{I_1, I_2, I_3\}$ $\ell - n + 1$

$$\begin{cases} i_1 = I_1 \\ i_2 = I_2 \\ i_3 = I_3 \end{cases} \qquad \vec{i_c} = \vec{I}_{CICLICHE}$$



$i_4 = I_1 - I_2 + I_3$.

Che equivale alla KI al taglio fondamentale ①

$i_4 - i_3 + i_2 - i_1 = 0$

$i_4 = i_1 - i_2 + i_3$

Riassumendo:

Metodo Totale

Circuito con ℓ lati e n nodi

Incognite: ℓ tensioni $v_1, v_2, \dots, v_\ell$;
ℓ correnti $i_1, i_2, \dots, i_\ell$; → 2ℓ incognite

Equazioni:

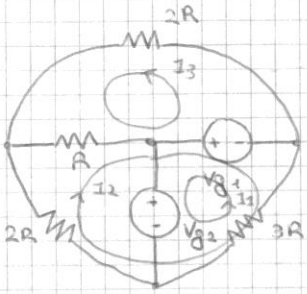
1) Equazioni di tipo topologico:
$\ell - n + 1$ KV mgf (ind. ti);
$n - 1$ KI tg (ind. ti); → ℓ eq. topologiche

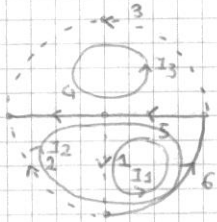
2) Equazioni di tipo topologico:
ℓ relazioni costitutive dei lati;

2ℓ equazioni

www.alessandropaghi.it

metodo delle mfp. Rete di sei lati contrassegnati in corrente. Rete di sei resistori ideali e generatori indipendenti di tensioni.





? Scrivere il sistema risolvente in base mfp

$\vec{ic} = \{ i_1, i_2, i_3 \}$, $\vec{I}_{\text{CICLICHE}} = \{ I_1, I_2, I_3 \}$

Si scrive un sistema risolvente di $l-n+1$ equazioni in $l-n+1$ incognite (variabili ausiliarie)

1) Scrivo $l-n+1$ KV alle mfp:

$$\begin{cases} V_1 + V_6 + V_5 = 0 \\ V_2 - V_4 - V_5 - V_6 = 0 \\ V_3 - V_4 - V_5 = 0 \end{cases}$$

2) Esprimo tutte le correnti dei lati in funzione di $\vec{I}_{\text{CICLICHE}}$.

$$\begin{cases} i_1 = I_1 \\ i_2 = I_2 \\ i_3 = I_3 \\ i_4 = -I_2 - I_3 \\ i_5 = I_1 - I_2 - I_3 \\ i_6 = I_1 - I_2 \end{cases}$$

OK! in quanto $\vec{I}_{\text{CICLICHE}}$ sono una base per $\vec{i}$.

n. 1 KI ai tf.

3) Esprimo tutte le tensioni dei lati in funzione delle correnti corrispondenti (OK! se lati contrassegnati in corrente)

$$\begin{cases} V_1 = V_{g2} \\ V_2 = 2R\, i_2 = 2R\, I_2 \\ V_3 = 2R\, i_3 = 2R\, I_3 \\ V_4 = R\, i_4 = R(-I_2 - I_3) \\ V_5 = -V_{g1} \\ V_6 = 3R\, i_6 = 3R(I_1 - I_2) \end{cases}$$

le relazioni costitutive dei lati

www.alessandropaghi.it

Quindi:

$$\begin{cases} V_{g2} - V_{g1} + 3RI_1 - 3RI_2 = \emptyset \\ 2RI_2 + RI_2 + RI_3 + V_{g1} - 3RI_1 + 3RI_2 = \emptyset \\ 2RI_3 + RI_2 + RI_3 + V_{g1} = \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3R & -3R & \emptyset \\ -3R & 6R & R \\ \emptyset & R & 3R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{g1} - V_{g2} \\ -V_{g1} \\ -V_{g1} \end{pmatrix}$$

Rete di sei resistori ideali e generatori indipendenti di V.

$$\vec{\vec{R}} \cdot \vec{I}_{\text{CICLICHE}} = \vec{V}$$

$\vec{\vec{R}}$ matrice quadrata $\ell - n + 1 \times \ell - n + 1$

$\vec{I}_{\text{CICLICHE}}$ $\ell - n + 1$

$\vec{V}$ $\ell - n + 1$

Costruzione della matrice R:

1) R_{KK}, $K = 1, \dots, \ell - n + 1$

Somma delle resistenze della mg, K-esima

$$\begin{pmatrix} 3R & & \\ & 6R & \\ & & 3R \end{pmatrix}$$

2) $R_{R,H}$, $R \neq K$

Somma algebrica della resistenza a comune fra maglia R e R. Ogni resistenza si prende con segno + se I_K e I_R la percorrono concordemente, col - in caso contrario

$$\begin{pmatrix} 3R & -3R & \emptyset \\ -3R & 6R & R \\ \emptyset & R & 3R \end{pmatrix} \Rightarrow R \text{ è simmetrica!}$$

Costruzione del vettore $\vec{V}$:

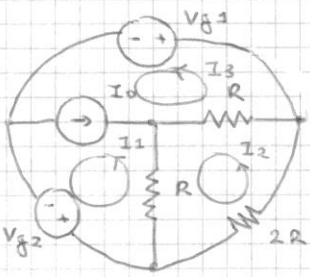
3) V_R: Somma algebrica delle tensioni imposte dai generatori indipendenti della maglia R, ogni tensione si prende col + se I_R esce dal ⊕ del generatore, col segno ⊖ altrimenti.

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_{g1} - V_{g2} \\ -V_{g1} \\ -V_{g1} \end{pmatrix}$$

Metodo MODIFICATO di analisi su base mf

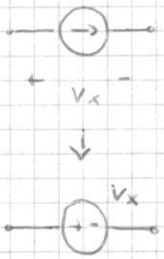
(MISTO)

Bipoli non controllabili in corrente!



? Sistema risolvente su base mf.

Incognite base: I_1, I_2, I_3.



Incognita aggiuntiva: V_x

Fase 1: Prendo le gen.re di I come un gen.re di V.

1) KV mf

$$\begin{pmatrix} R & -R & \emptyset \\ -R & 4R & -R \\ \emptyset & -R & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x + V_{g2} \\ \emptyset \\ -V_{g1} - V_x \end{pmatrix}$$

Fase 2: Vincolo imposto dal gen.re di I

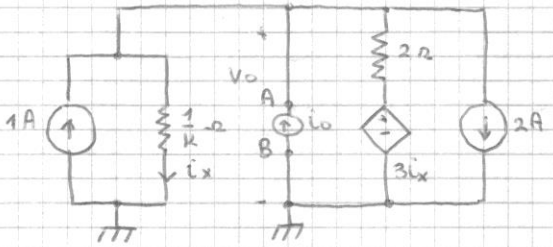
2) Vincolo imposto dal gen.re di I sulle incognite

$I_0 = -I_1 + I_3$

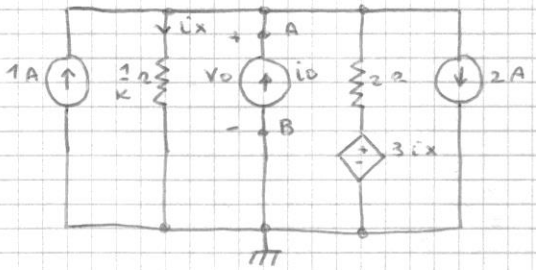
www.alessandropaghi.it

$$\left(\begin{array}{ccc|c} R & -R & \emptyset & -1 \\ -R & 6R & -R & \emptyset \\ \emptyset & -R & R & 1 \\ \hline -1 & \emptyset & 1 & \emptyset \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \hline V_x \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} V_{g2} \\ \emptyset \\ -V_{g1} \\ \hline I_0 \end{array}\right)$$

Esercizio



? TR. bipolo con metodo rapido.



$V_0 = R_{eq} \cdot i_0 + V_{eq}$

$$V_0 = \frac{1 + i_0 + \frac{3}{2} i_x - 2}{K + \frac{1}{2}}$$ ← mi ricordo

$$K V_0 + \frac{1}{2} V_0 = -1 + i_0 + \frac{3}{2} i_x$$

$\rightarrow i_x = V_0 \cdot K$

$$K V_0 + \frac{1}{2} V_0 = -1 + i_0 + \frac{3}{2} V_0 \cdot K$$

$$\frac{1}{2} K V_0 - \frac{1}{2} V_0 = +1 - i_0$$

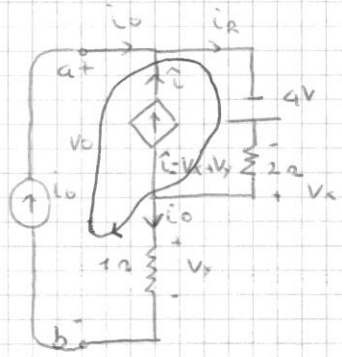
$$\frac{1}{2}(K-1) V_0 = +1 - i_0$$

Se $K = 1$, $\emptyset = +1 - i_0 \Rightarrow i_0 = 1$

Bipolo non corrisponde in 1 e non ∃ bipolo eq secondo TR.

Se $K \neq 1$, $V_0 = +\frac{2}{K-1} - \frac{2}{K-1} V_0$.

Es 11/11/2003



? TR. Bipolo ab con metodo rapido

Esprimere V_x e V_y in funzione di i_0, V_0 e le altre grandezze note.

$V_y = 1 \cdot i_0 = i_0$

N.B. non trasformate parti che contengono grandezze di controllo.

$$i_R = i_0 + \hat{i} = i_0 + V_x + V_y$$

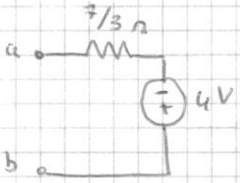
$$V_x = -2 \cdot i_R = -2i_0 - 2V_x - 2V_y = -2i_0 - 2V_x - 2i_0$$

$$\Rightarrow V_x = -\frac{4}{3} i_0$$

$$V_0 = -4 - V_x + V_y = -4 + \frac{4}{3} i_0 + i_0 = \frac{7}{3} i_0 - 4$$

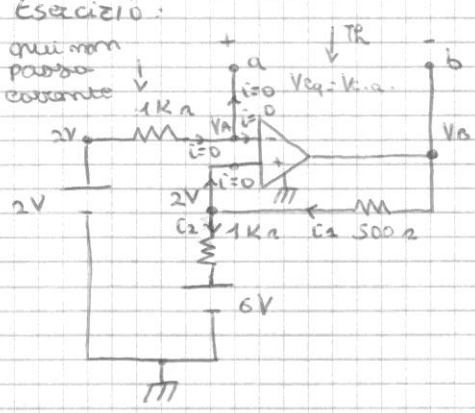
$$V_0 = \frac{7}{3} i_0 - 4$$

$$= R_{eq} \cdot i_0 + V_{eq} \quad \Rightarrow R_{eq} = \frac{7}{3}\,\Omega \,, \; V_{eq} = -4\,V.$$



www.alessandropaghi.it

Esercizio:



quì non passa corrente

? Equivalente di TH ciascun dipolo ab con diff.

$V_{eq} = V_{c.a} = V_A - V_B$

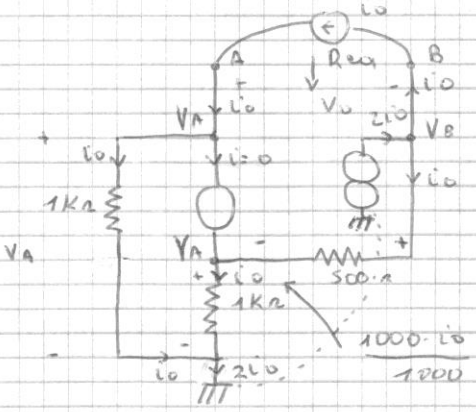
$V_A = 2V$

$i_1 = i_2$

$\frac{V_B - 2}{6} = \frac{2-6}{1000} \Rightarrow V_B = 8$

$V_{eq} = 2V$

Ora troviamo R_{eq}:



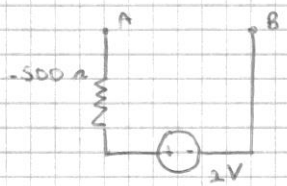
? R_{eq} $\quad R_{eq} = \frac{V_o}{i_o}$

$V_o = V_A - V_B$

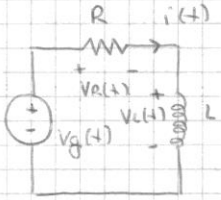
$V_A = 1000 \cdot i_o$

$V_B = 500 \cdot i_o + 1000 \cdot i_o = 1500 \cdot i_o$

$V_o = V_A - V_B = -500\, i_o \quad , \quad R_{eq} = -500\,\Omega$



2° PARTE 1/04/2015



$V_g(t) = V_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_v)$

V_M → AMPIEZZA; ω → PULSAZIONE; φ_v → FASE

? $i(t)$, $t \geq 0$

$i(0) = I_0$

Scriviamo un'equazione differenziale in incognita $i(t)$.

$V_R(t) + V_L(t) = V_g(t)$

$$\begin{cases} L \cdot \frac{d}{dt} i(t) + R i(t) = V_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_v) \\ i(0) = I_0 \end{cases}$$

$i_{\text{soluzione}}(t) = i_{\text{omogenea}}(t) + i_{\text{particolare soluzione}}(t)$

$= K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + I_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$

$K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ con $\tau = \frac{L}{R}$ → Parte Transitoria → $t \to \infty$ → 0

$I_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$ → detta anche forma data dall'eccitazione

$i(t) \simeq I_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$ → corrente in regime sinusoidale

$L \frac{d}{dt} i + R i = V_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_v)$

$= -\omega L I_M \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_i) + R I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$

$= I_M \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \varphi_i) - \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_i) \right)$

Z; $a = \cos\varphi_z$; $b = \operatorname{sen}\varphi_z$; $a^2 + b^2 = 1$

$= I_M Z (\cos\varphi_z \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) - \operatorname{sen}\varphi_z \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_i))$

$\rightarrow L \frac{di}{dt} + R i = Z I_M \cos(\omega t + \varphi_i + \varphi_z) = V_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_v)$

$$\begin{cases} I_M = \frac{V_M}{Z} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \\ \varphi_i = \varphi_v - \varphi_z = \varphi_v - \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R} \end{cases}$$

in quanto $\operatorname{tg}\varphi_z = \frac{\omega L}{R}$

www.alessandropaghi.it

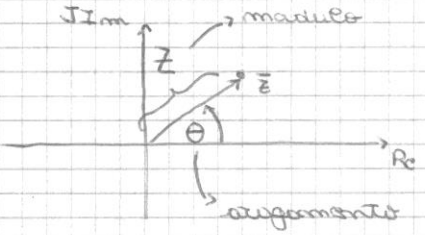
Richiamo sui numeri complessi

Forme dei numeri complessi

Forma algebrica:

$\bar{z}$: numero complesso

$\bar{z} = x + jy \quad , \quad j^2 = -1$



$Z = \sqrt{x^2+y^2}$

$\theta: \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \quad , \quad tg\,\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \dfrac{y}{x}$

↑ Verso positivo

Forma Trigonometrica o Polare:

$\bar{z} = Z \cdot (\cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta)$

Forma Esponenziale

$\bar{z} = Z\, e^{j\theta}$

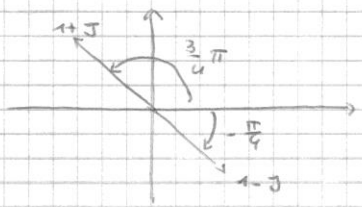
$\bar{z}_1 = 1 - j$

$\bar{z}_2 = -1 + j$

? Scrivere la forma Esponenziale

$\bar{z}_1 = \sqrt{2}\, e^{-j \cdot \frac{\pi}{4}} \quad , \quad \theta_1 = \text{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4}$

$\bar{z}_2 = \sqrt{2} \cdot e^{j \cdot \frac{3}{4}\pi}$



$\theta = \begin{cases} \text{arctg}\,\dfrac{y}{x}, & x > 0 \\ \text{arctg}\,\dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, \; y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, \; y < 0 \end{cases}$

Grandezza Sinusoidale:

$$e(t) = E_M \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$E_M \geq 0$ ⟶ ampiezza della sinusoide

ω ⟶ pulsazione " "

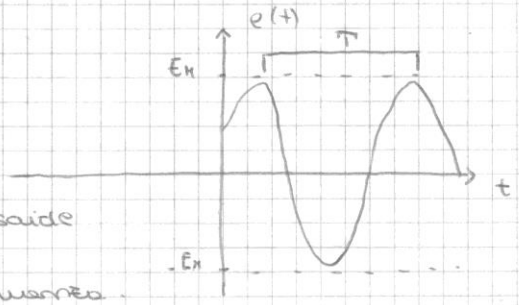
φ ⟶ Fase " "

$[T] = \text{sec}$

$[f] = \text{sec}^{-1} = \text{Hz}$

$[\omega] = \text{rad/sec}$

$[\varphi] = \text{radianti}$



$\omega = \frac{2\pi}{T}$

T: periodo della sinusoide

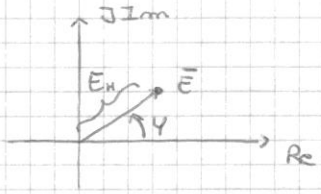
$f = \frac{1}{T}$: frequenza.

Fasore associato ad una funzione sinusoidale

$$\bar{E} = E_M \cdot e^{j\varphi}$$

modulo fasore ≡ ampiezza sinusoide

argomento fasore ≡ fase sinusoide



Fasori e Sinusoidi a pulsazione ω sono in corrispondenza biunivoca.

$\bar{E}, \omega$ ⟶

$$e(t) = Re\left[\bar{E}\, e^{j\omega t}\right]$$

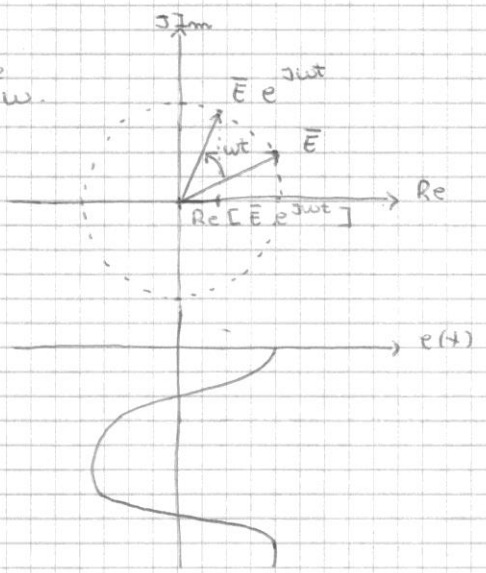
$$= Re\left[E_M e^{j\varphi} e^{j\omega t}\right] = E_M Re\left[e^{j(\omega t + \varphi)}\right] = E_M \cos(\omega t + \varphi)$$

www.alessandropaghi.it

Interpretazione Geometrica

$$\bar{E} \cdot e^{j\omega t} = E_M e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \bar{E}_M \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Vettore rotante a pulsazione ω.



Dominio Tempo		Dominio Fasori
$e(t) = E_M \cos(\omega t + \varphi)$	$\xrightarrow{F}$	$\bar{E} = E_M e^{j\varphi}$ (ω)
$Re[\bar{E} e^{j\omega t}]$	$\xleftarrow{F^{-1}}$	$\bar{E}, \omega$

Trasformata di Steinmentz

Calcolo Fasoriale

- Due sinusoidi $e_1(t)$ e $e_2(t)$ a pulsazione ω coincidono $\forall t$ sse $\bar{E}_1 = \bar{E}_2$
- $e_1(t), e_2(t)$ due sinusoidi a puls. ω.
  $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a e_1(t) + b e_2(t)$ è ancora una sinusoide a puls. ω con fasore associato $a\bar{E}_1 + b\bar{E}_2$

Regola di Derivazione:

Sia $e(t)$ una sinusoide a puls. ω con fasore associato $\bar{E}$. $\Rightarrow \frac{d}{dt} e(t)$ è ancora una sinusoide a puls. ω con fasore associato $j\omega \cdot \bar{E}$.

$$\frac{d}{dt} e(t) \longrightarrow j\omega \cdot \bar{E}$$

Dominio T Dominio F

www.alessandropaghi.it

Dimostrazione:

$$\frac{d}{dt} e(t) = \frac{d}{dt} \left\{ Re\left[\bar{E}\, e^{j\omega t} \right] \right\} = Re\left[\frac{d}{dt} \left(\bar{E}\, e^{j\omega t} \right) \right]$$

$$= Re\left[\underbrace{\bar{E}\, j\omega}_{\bar{A}} \cdot e^{j\omega t} \right] = Re\left[\bar{A}\, e^{j\omega t} \right]$$

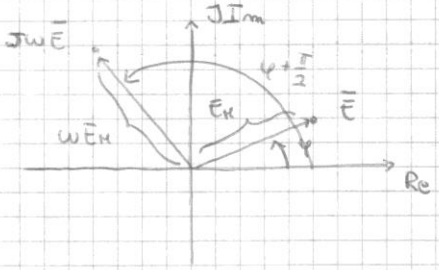
$\bar{A}$ ← Fasore associato; ω ← Pulsazione ω.

Interpretazione Geometrica

$\bar{E}$	,	$j\omega \bar{E}$
$e(t)$		$\frac{d}{dt} e(t)$

$$j\omega \bar{E} = \omega \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot E_M e^{j\varphi} = \omega E_M e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})}$$

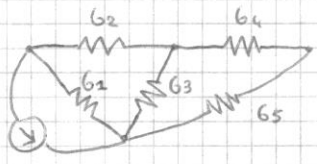
j° → rotazione di $\frac{\pi}{2}$ in senso positivo antiorario

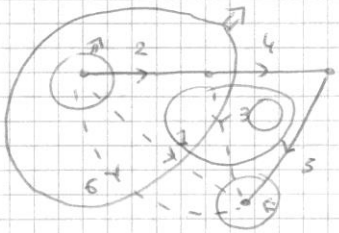


1° PARTE

Metodo dei Tagli Fondamentali

Bipoli controllati in tensione, reti a sole conduttanze e gen. di indip. ti ideali di i.





variabili ausiliarie $\vec{V}_a = \{ V_2, V_4, V_5 \}$ $(n-1)$

$n-1$ KI ai Tg.

$$1) \begin{cases} i_1 + i_2 + i_6 = 0 \\ i_1 + i_3 + i_4 + i_6 = 0 \\ i_1 + i_3 + i_5 + i_6 = 0 \end{cases}$$

www.alessandropaghi.it

2) Esprimo $\vec{V_i}$ in funzione di $\vec{V_a}$ (OK in quanto $\vec{V_a}$ sono una base di $\vec{V}$)

$$\begin{cases} V_3 = V_4 + V_5 \\ V_1 = V_2 + V_4 + V_5 \\ V_6 = V_1 = V_2 + V_4 + V_5 \end{cases}$$ l_{n+1} KV alle maglie

3) Esprimo $\vec{i}$ in funzione di $\vec{V}$. (OK per ipotesi costitutive in V)

$$\begin{cases} i_1 = G_1 \cdot V_2 = G_1 (V_2 + V_4 + V_5) \\ i_2 = G_2 \cdot V_2 \\ i_3 = G_3 (V_4 + V_5) \\ i_4 = G_4 \cdot V_4 \\ i_5 = G_5 \cdot V_5 \\ i_6 = I \end{cases}$$ l relazioni costit. dei bipoli

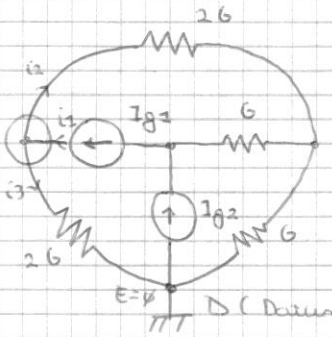
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} G_1+G_2 & G_1 & G_1 \\ G_1 & G_1+G_3+G_4 & G_1+G_3 \\ G_1 & G_1+G_3 & G_1+G_3+G_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ V_4 \\ V_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I \\ -I \\ -I \end{pmatrix}$$

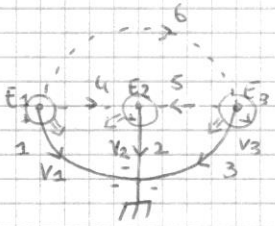
$$\vec{\vec{G}} \cdot \vec{V_a} = I$$

$(n-1)\times(n-1) \cdot (n-1) \quad n-1$

Metodo dei nodi

Rete di sole conduttanze e gen. ti indip. ti ideali di i





Variabili ausiliarie: $\vec{V_a} = \vec{E}$: tensioni degli $n-1$ nodi rispetto al nodo di riferimento = $\{E_1, E_2, E_3\}$ $(n-1)$

www.alessandropaghi.it

n-1 KI ai Tf:
È nullo, istante per istante, la somma algebrica delle correnti dei lati, che concorrono in un nodo.
Ogni corrente si prende col + se uscente, col - se entrante.

Sistema Risolvente:

$$\vec{G} \cdot \vec{E} = \vec{I}$$

$(n-1) \times (n-1) \cdot n-1 = n-1$

G_{RR} = Somma conduttanze collegate al nodo R

G_{RK} = Somma, cambiata di segno, delle conduttanze a $R \neq K$ comune collegate fra nodo R e nodo K.

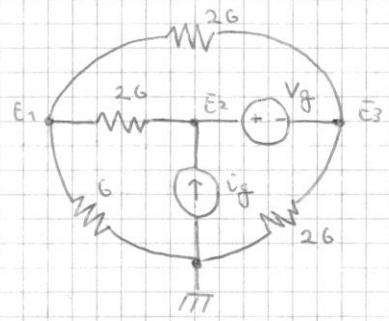
I_R = Somma algebrica delle correnti dei generatori di corrente collegati al nodo R; ogni corrente si prende col + se entrante nel nodo e col - se uscente dal nodo.

$$\begin{pmatrix} 4G & \emptyset & -2G \\ \emptyset & G & -G \\ -2G & -G & 4G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ig_1 \\ ig_2 - ig_1 \\ \emptyset \end{pmatrix}, \quad \vec{G}^T = \vec{G}$$

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0 \rightarrow -ig_1 + 2G(E_1 - E_3) + 2G \cdot E_1 = \emptyset$$

Metodo Modificato di Analisi ai Nodi.
(misto)

Bipoli non controllabili in V.



? Sistema Risolvente ai Nodi:

www.alessandropaghi.it

Incognite di Base : E_1, E_2, E_3



incognita aggiuntiva I_x



1)

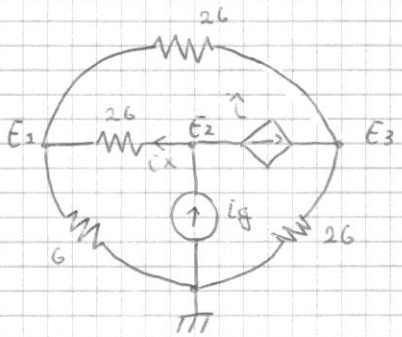
$$\begin{pmatrix} 56 & -26 & -26 \\ -26 & 26 & 0 \\ -26 & 0 & 46 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i_g + I_x \\ -I_x \end{pmatrix}$$

2) Vincolo imposto da generatore di tensione

$V_g = E_2 - E_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 56 & -26 & -26 & 0 \\ -26 & 26 & 0 & -1 \\ -26 & 0 & 46 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \hline I_x \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ i_g \\ 0 \\ \hline V_g \end{array}\right)$$

Metodo dei nodi in presenza di gen. di controllati



$\hat{i} = 2 i_x$

Incognite di Base E_1, E_2, E_3

1) 

lo penso come indip.

2) Uso la Ree. Cost. dal gen. di controllato.

www.alessandropaghi.it

$$\begin{pmatrix} 56 & -26 & -26 \\ -26 & 26 & 0 \\ -26 & 0 & 46 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i_g - \hat{i} \\ \hat{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i_g - 46 \cdot (\bar{E}_2 - \bar{E}_1) \\ 46 (\bar{E}_2 - \bar{E}_1) \end{pmatrix}$$

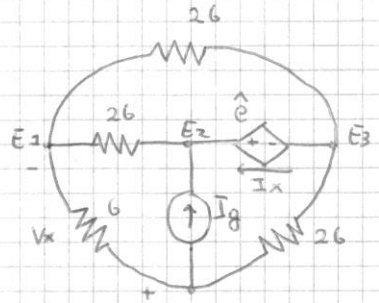
2) Uso la relazione costitutiva del gen. tensione controllato

$$\hat{i} = 2 i_x = 46 \cdot (\bar{E}_2 - \bar{E}_1)$$

Scrivo grandezza di controllo in funzione delle incognite

$$\begin{pmatrix} 56 & -26 & -26 \\ -66 & 66 & 0 \\ 26 & -46 & 46 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i_g \\ 0 \end{pmatrix}$$

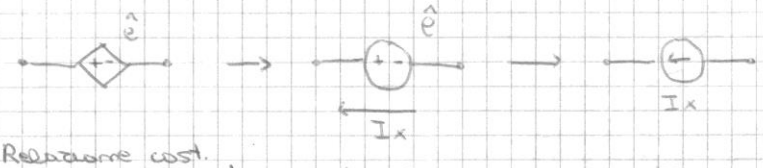
↑ non Simmetrica



$\hat{e} = 3 V_x$

? Sistema risolvente ad una sola maglia

Incognite nodo: $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$. Incognita ramo: I_x



Relazione cost. gen. te controllato ← vincolo gen. Tensione ← KI

1)

$$\begin{pmatrix} 56 & -26 & -26 \\ -26 & 26 & 0 \\ -26 & 0 & 46 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_g + I_x \\ -I_x \end{pmatrix}$$

www.alessandropaghi.it

2) Vincolo imposto da gen. te tensione

$$\hat{e} = \bar{E}_2 - \bar{E}_3$$

3) Rec. cost. gen. te controllate

$$\hat{e} = 3V_x = -3\bar{E}_1$$

$$\hat{e} = \bar{E}_2 - \bar{E}_3 = -3\bar{E}_1 \quad \Rightarrow \quad 3\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - \bar{E}_3 = \emptyset$$

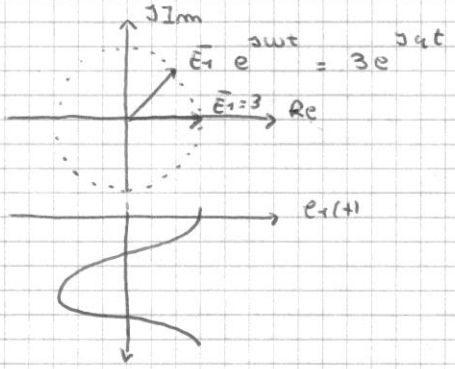
$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \emptyset \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \emptyset & -1 \\ -\frac{1}{6} & \emptyset & \frac{1}{6} & 1 \\ \hline 3 & 1 & -1 & \emptyset \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \\ \hline I_x \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \emptyset \\ \frac{1}{g} \\ \emptyset \\ \hline \emptyset \end{array}\right)$$

10/04/15

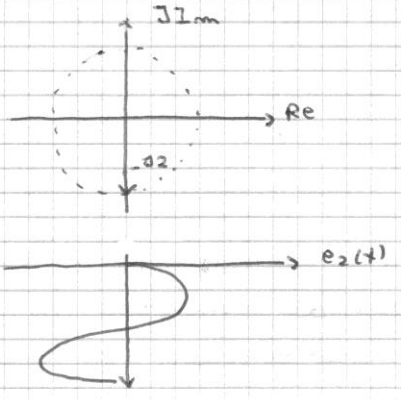
$e_1(t) = 3 \cdot \cos(4t)$ $\quad ? \bar{E}_1$

$e_2(t) = 2 \cdot \sin(5t)$ $\quad ? \bar{E}_2$

1) Trasmute Def. $\bar{E}_1 = 3 \cdot e^{j\emptyset} = 3$



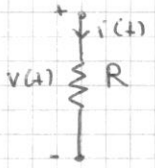
2) Trasmute Def. $e_2(t) = 2 \cdot \cos(5t - \frac{\pi}{2})$, $\bar{E}_2 = 2e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j2$



www.alessandropaghi.it

Comportamento in Regime Sinusoidale (nel dominio del tempo) dei dipoli ideali R, L, C.

Resistore Ideale



$v(t) = V_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_v)$

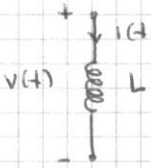
$i(t) = I_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$

$v(t) = R \cdot i(t)$

$V_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_v) = R \cdot I_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$

$\begin{cases} V_M = R \cdot I_M & \text{Vale la legge di Ohm fra ampiezze di V e I.} \\ \varphi_v = \varphi_i & \text{V e I su R sono in fase fra di loro.} \end{cases}$

Induttore Ideale



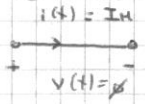
$v(t) = V_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_v)$

$i(t) = I_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$

$v(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i(t) = \frac{d}{dt}\left(L\, i(t)\right) = \frac{d}{dt} \phi_{conc}(t)$.

1) $i(t) = I_M$ = costante (i continua)

$v(t) = 0$. L $\Leftrightarrow$ c.c.



L è un c.c. per le correnti costanti

2) $i(t) = I_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$

$v(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i(t) = -\omega L I_M \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) = \omega L I_M \cdot \cos\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right)$

$= V_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_v)$

$\begin{cases} V_M = \omega L I_M \\ \varphi_v = \varphi_i + \frac{\pi}{2} & \text{La tensione anticipa di } \frac{\pi}{2} \text{ la corrente.} \end{cases}$

$[\omega L] = \Omega \rightarrow X_L = \omega L$ = Reattanza induttiva di L.

A differenza del caso in continua, per fare scorrere in L una corrente alternata di ampiezza I_M dobbiamo applicare una tensione alternata $V_M = \omega L I_M = X_L I_M$

www.alessandropaghi.it

Tale tensione è necessaria per controbilanciare la f.c.e.m. che nasce su L a causa del fenomeno dell'autoinduzione

Varia $i(t)$ → Varia $\phi_{concat}(t)$ → nasce f.c.e.m.

↓

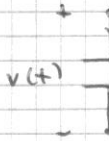
deve applicato V che controbilancia f.c.e.m.

$$I_M = \frac{V_M}{X_L} = \frac{V_M}{\omega L}$$

X_L (reattanza induttiva) è la resistenza apparente che L offre al passaggio di una corrente alternata.

$$X_L = \omega L = 2\pi f \cdot L$$

Condensatore Ideale



$$i(t) = C \cdot \frac{d}{dt} v(t)$$

$v(t) = V_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_V)$

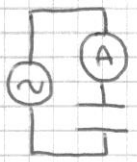
$i(t) = ?$

1) $v(t) = V_M$: costante

$i(t) = 0$ → C è un c.a. per le tensioni continue

2) $\omega \neq 0$, $v(t) = V_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_V)$

C non è più un c.a. per le tensioni alternate. Non è un'interruzione elettrica.



$$i(t) = -\omega C \cdot V_M \sin(\omega t + \varphi_V)$$
$$= \omega C \cdot V_M \cdot \cos\left(\omega t + \varphi_V + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= I_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_I)$$

$$\begin{cases} I_M = \omega C \cdot V_M = \dfrac{V_M}{\frac{1}{\omega C}} \\ \varphi_I = \varphi_V + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

La corrente anticipa di $\frac{\pi}{2}$ la tensione.

www.alessandropaghi.it

X_C = Reattanza Capacitiva = $\frac{1}{\omega C}$, $[X_C] = \Omega$

$I_M = \frac{V_M}{X_C}$

X_C è la resistenza apparente che C oppone al passaggio di una corrente alternata.

Metodo dei Fasori per analisi di reti con memoria in Regime Sinusoidale

1. Relazioni Costitutive dei Bipoli R, L, C nel dominio dei fasori;
2. Leggi di Kirchhoff nel dominio dei fasori;

⇓

Circuito simbolico nel dominio dei fasori (senza memoria)

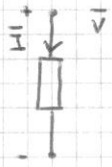


Bipolo in regime Sinusoidale

$v(t) = V_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_v)$

$i(t) = I_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$

Dominio Tempo:
Relazione Costitutiva: 1 legame fra $v(t)$ e $i(t)$



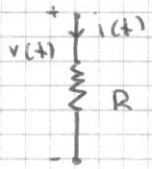
con $\bar{I} = I_M \cdot e^{j\varphi_i}$

$\bar{V} = V_M \cdot e^{j\varphi_v}$

Dominio Fasori:
Relazione costitutiva: 1 legame fra $\bar{V}$ e $\bar{I}$.

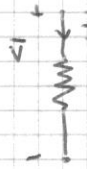
www.alessandropaghi.it

R ideale



$v(t) = R \cdot i(t)$

Dominio Tempo



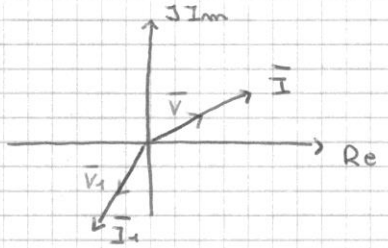
$\bar{V} = R \cdot \bar{I}$

↑ Legge di Ohm Simbolica

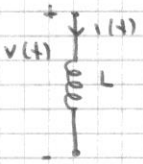
Dominio Fasori

$V_M e^{j\varphi_v} = R I_M \cdot e^{j\varphi_i}$

$$\begin{cases} V_M = R I_M \\ \varphi_v = \varphi_i \end{cases}$$



L ideale



$v(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i(t)$

Dominio Tempo

$\bar{V} = L j\omega \bar{I} = j\omega L \bar{I} = j X_L \bar{I}$

' Senza memoria '

$\bar{Z}_L = j\omega L = j X_L$

↑ Impedenza in corrente alternata di L

$\bar{V} = \bar{Z}_L \cdot \bar{I}$

$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_L}$

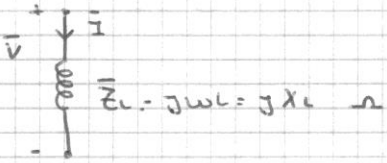
↑ Legge di Ohm Simbolica

j : Sfasamento di 90°

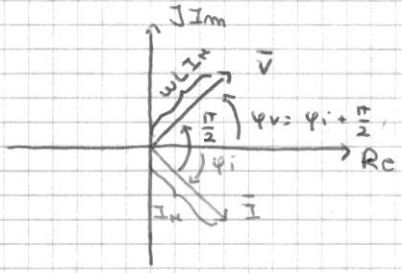
$\bar{V} = V_M \cdot e^{j\varphi_v} = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} I_M e^{j\varphi_i}$

$= \omega L I_M \cdot e^{j(\varphi_i + \frac{\pi}{2})}$

$$\begin{cases} V_M = \omega L \cdot I_M \\ \varphi_v = \varphi_i + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



Dominio dei Fasori

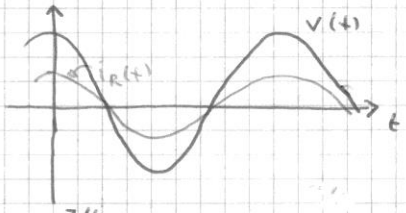


www.alessandropaghi.it

$v(t) = V_M \cdot \cos(\omega t)$

$?; (t)$ per R, L, C.

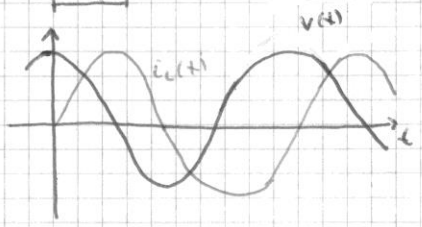
R) $i_R(t) = \frac{V_M}{R} \cdot \cos(\omega t)$



L) $i_L(t) = I_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$

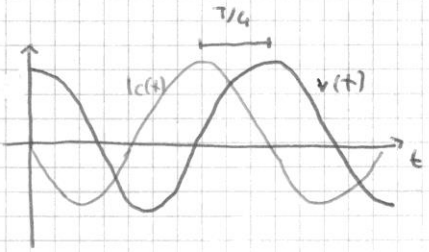
$= \frac{V_M}{\omega L} \cdot \cos(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2})$

$= \frac{V_M}{\omega L} \cdot \text{sen}(\omega t)$



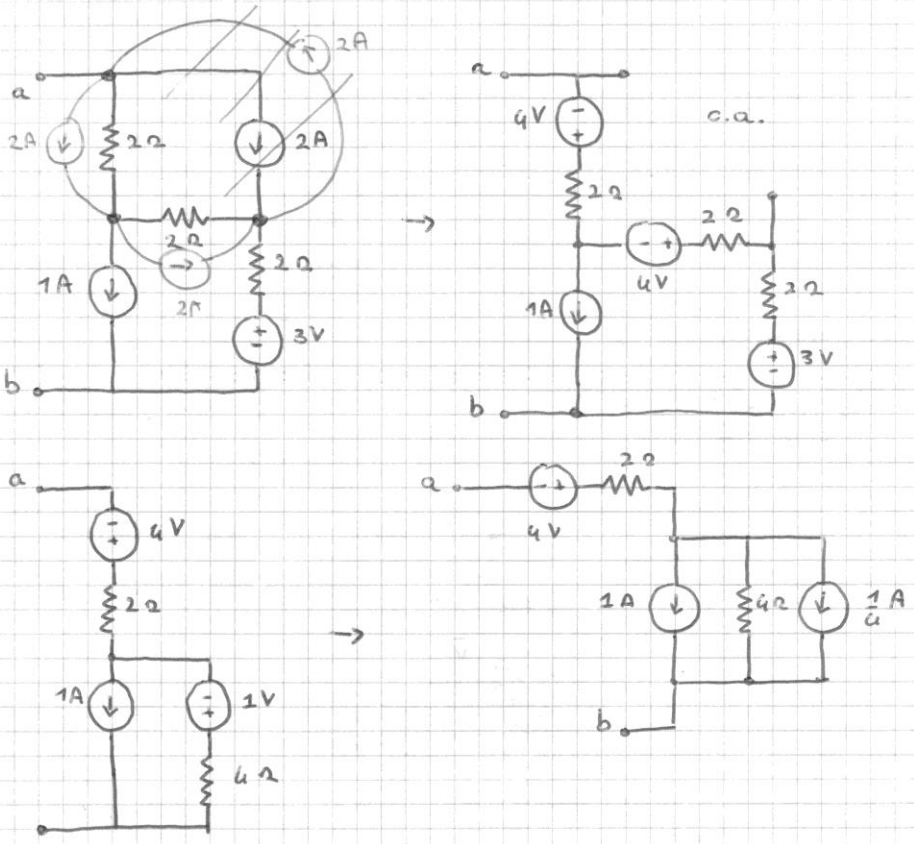
C) $i_C(t) = C \frac{d}{dt} v(t)$

$= -\omega C V_M \cdot \text{sen}(\omega t)$

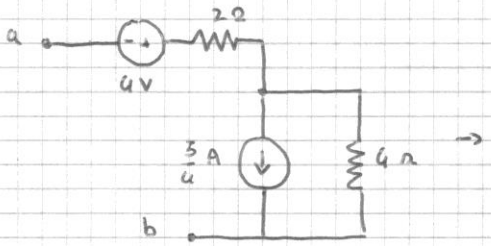


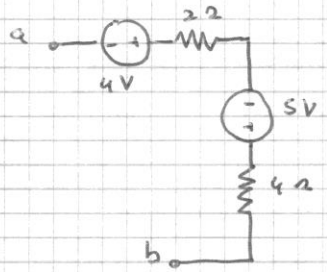
ES. 2 24 GIUGNO

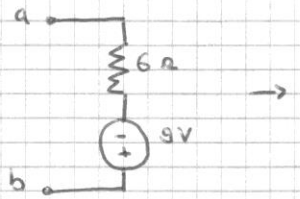
2014 Norton con trasformazioni eseguite

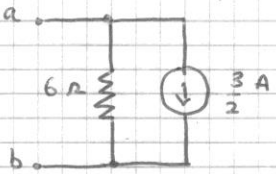


www.alessandropaghi.it



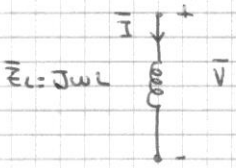


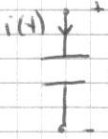




OK

13/04/2015





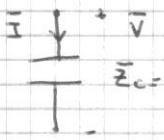
$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

$$\bar{I} = j\omega C \cdot \bar{V} = \frac{\bar{V}}{\frac{1}{j\omega C}}$$

$\bar{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$, $\frac{1}{\omega C}$: Reattanza capacitiva

$= -jX_C$

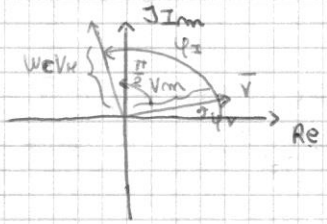
$\rightarrow \bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_C}$ "Legge di Ohm Simbolica"



$\bar{Z}_C = -j \cdot \frac{1}{\omega C} = -jX_C$

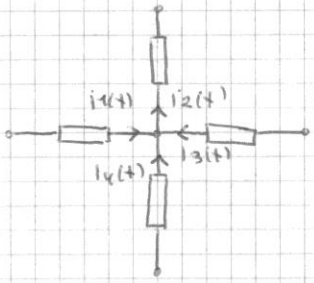
$\bar{I} = I_M e^{j\varphi_I} = \omega C \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot V_M e^{j\varphi_V} = \omega C V_M e^{j(\varphi_V + \frac{\pi}{2})}$

$$\begin{cases} I_M = \omega C V_M = \dfrac{V_M}{\frac{1}{\omega C}} \\ \varphi_I = \varphi_V + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$



Leggi di Kirchhoff nel dominio dei Fasori

Regime Sinusoidale a pulsazione ω.



Dom. T

KI: $i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) = 0$

$$\mathrm{Re}[\bar{I}_1 e^{j\omega t}] - \mathrm{Re}[\bar{I}_2 e^{j\omega t}] + \mathrm{Re}[\bar{I}_3 e^{j\omega t}] + \mathrm{Re}[\bar{I}_4 e^{j\omega t}] = 0$$

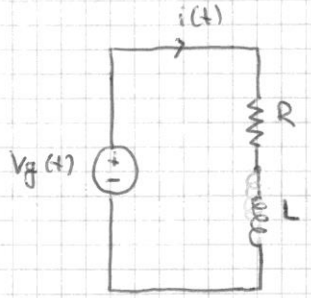
$$\mathrm{Re}[(\bar{I}_1 - \bar{I}_2 + \bar{I}_3 + \bar{I}_4)\, e^{j\omega t}] = 0$$

Vale la KI per i fasori delle correnti.

$\rightarrow \quad \bar{I}_1 - \bar{I}_2 + \bar{I}_3 + \bar{I}_4 = 0$

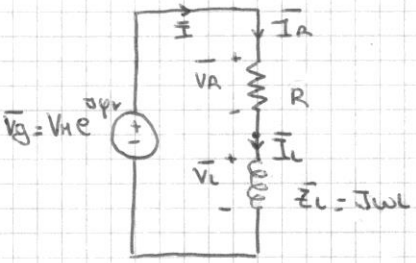
Vale anche la KV per i fasori delle tensioni.

Analisi di Circuiti Elementari RL e RC in regime sinusoidale nel dominio dei Fasori.



$$v_g(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_V)$$

Circuito Simbolico nel dominio dei Fasori



Senza memoria

KV => $\bar{V}_g = \bar{V}_A + \bar{V}_L$

KI => $\bar{I} = \bar{I}_A = \bar{I}_L$

$$\bar{V}_g = R\bar{I}_A + j\omega L \cdot \bar{I}_L = (R + j\omega L)\cdot \bar{I}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_g}{R + j\omega L}, \quad i(t) = \mathrm{Re}[\bar{I} \cdot e^{j\omega t}]$$

www.alessandropaghi.it

$$i(t) = I_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_g}{R + j\omega L} = I_M \cdot e^{j\varphi_i} \quad , \quad \bar{V}_g = V_M \cdot e^{j\varphi_v}$$

$$\bar{I} = \underbrace{\frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}}_{I_M} \cdot e^{j\underbrace{(\varphi_v - \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R})}_{\varphi_i}}$$

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cdot \cos\left(\omega t + \varphi_v - \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}\right)$$

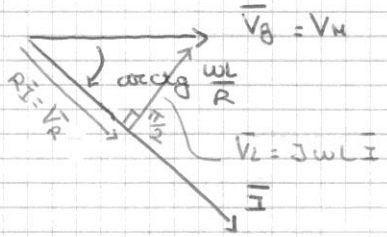
$$= \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \cdot \cos\left(\omega t + \varphi_v - \operatorname{arctg}\frac{X_L}{R}\right)$$

Supponiamo che: $\varphi_v = \phi$

Diagramma fasoriale

$$\bar{I} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \cdot e^{-j \operatorname{arctg}\frac{X_L}{R}}$$

In un circuito RL la corrente è in ritardo di un angolo fra $(\phi \div 90)°$ rispetto alla tensione.



$\bar{V}_R$? $\bar{V}_L$?

KV: $\bar{V}_g = \bar{V}_R + \bar{V}_L = R\bar{I} + j\omega L\bar{I}$

$R\bar{I}$: Parallelo a $\bar{I}$ — $j\omega L\bar{I}$: Anticipato di 90°

www.alessandropaghi.it



$v(t) = V_H \cdot \cos(\omega t)$

$i(t) = I_H(\omega) \cos(\omega t + \varphi_i(\omega))$

$I_H(\omega) = \dfrac{V_H}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$ → Risp. in Ampiezza

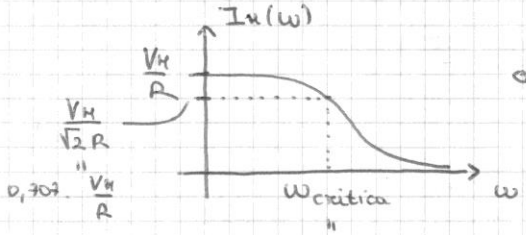
$\varphi_I(\omega) = -\text{arctg}\ \dfrac{\omega L}{R}$ → Risp. in Fase

Risposta in frequenza

$\varphi_V = \emptyset$

V_H = costante

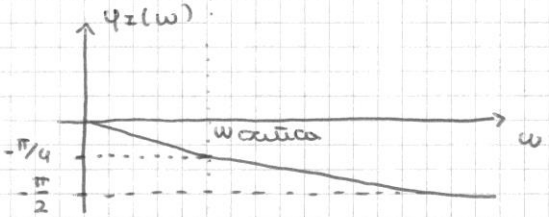
Varia ω!



← Filtro Passa Basso

$\omega_{critica} = \dfrac{R}{L}$, quando $X_L = R$

Frequenza di taglio a $-3dB$: $\dfrac{R}{L}$.



La risposta in fase è in primo approssimazione la derivata della risposta in ampiezza.

Un circuito RL serie in regime sinusoidale, per effetto congiunto della resistenza ohmica, e dell'auto induttanza, offre al passaggio di una corrente alternata un impedenza (resistenza apparente) pari a:

$Z_{RL} = \sqrt{R^2+\omega^2L^2} = \sqrt{R^2+X_L^2}$

$\rightarrow I_H = \dfrac{V_H}{Z_{RL}}$

La presenza di L in serie ad R provoca:

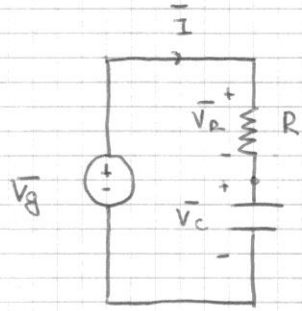
1) Aumento apparente della resistenza; $R \rightarrow \sqrt{R^2+\omega^2L^2}$

2) Sfasamento in ritardo di $i(t)$ rispetto a $v(t)$ di

www.alessandropaghi.it

un angolo $\arctg \frac{\omega L}{R}$ compreso fra $(\phi \div 90)^\circ$;

Tali effetti sono tanto più marcati quanto ω è elevato.



$\bar{Z}_C = -j \cdot \frac{1}{\omega C} = -j \cdot X_C$

$\bar{V}_g = V_H \cdot e^{j\varphi_V}$

$\bar{V}_g = \bar{V}_R + \bar{V}_C = + R\bar{I} + \left(-j \cdot \frac{1}{\omega C}\right) \cdot \bar{I}$

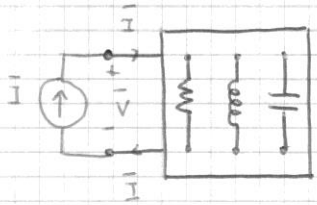
$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_g}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{V_H \cdot e^{j\varphi_V}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \cdot e^{-j \arctg \frac{1}{\omega CR}}} = \frac{V_H}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cdot e^{j\left(\varphi_V + \arctg \frac{1}{\omega CR}\right)}$$

$$I_H = \frac{V_H}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}, \quad \varphi_i = \varphi_V + \arctg\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$$

$$i(t) = \frac{V_H}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cdot \cos\left(\omega t + \varphi_V + \arctg \frac{1}{\omega CR}\right)$$

È un filtro Passa alto!

Impedenza e Ammettenza di un Bipolo

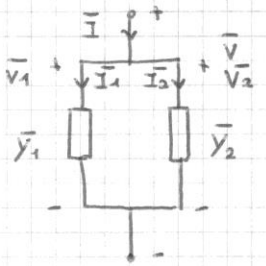


Bipolo omogeneo in regime sinusoidale a pulsazione ω.

$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ impedenza del dipolo.

$\bar{Y} = \frac{\bar{I}}{\bar{V}}$ ammettenza.

www.alessandropaghi.it



$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \bar{y}_1 \bar{V}_1 + \bar{y}_2 \bar{V}_2 = (\bar{y}_1 + \bar{y}_2)\bar{V}$$

$$\bar{y}_{eq} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$$

$$\bar{z}(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

Resistenza — Reattanza

$$\bar{y}(\omega) = G(\omega) + jB(\omega)$$

Conduttanza — Suscettanza

$$\bar{y} = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{R+jX} = \frac{R-jX}{(R+jX)(R-jX)} = \frac{R-jX}{R^2+X^2}$$

$$\rightarrow G = \frac{R}{R^2+X^2} \quad , \quad B = -\frac{X}{R^2+X^2}$$

Forma Esponenziale

$$\bar{z} = z \cdot e^{j\varphi_z}$$

z: modulo impedenza — φ_z: argomento impedenza

$$z = \sqrt{R^2+X^2}$$

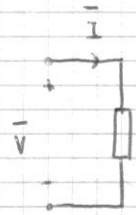
$$\cos\varphi_z = \frac{R}{\sqrt{R^2+X^2}} \quad , \quad \operatorname{sen}\varphi_z = \frac{X}{\sqrt{R^2+X^2}}$$

$$R = z\cos\varphi_z \quad , \quad X = z\operatorname{sen}\varphi_z$$

$$\operatorname{tg}\varphi_z = \frac{X}{R}$$

$$\bar{y} = y e^{j\varphi_y} = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{z e^{j\varphi_z}} = \frac{1}{z} \cdot e^{-j\varphi_z}$$

$$y = \frac{1}{z} \quad , \quad \varphi_y = -\varphi_z$$



Bipolo in regime sinusoidale a pulsazione ω

conosco $i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$

? $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$

$\bar{V} = \bar{Z}\bar{I}$

$V_M e^{j\varphi_v} = Z e^{j\varphi_z} \cdot I_M e^{j\varphi_i} = Z I_M e^{j(\varphi_i + \varphi_z)}$

nota $v(t)$, $i(t)$?

$\bar{I} = \bar{Y}\bar{V}$, $I_M e^{j\varphi_i} = Y e^{j\varphi_y} \cdot V_M e^{j\varphi_v} = Y V_M e^{j(\varphi_y + \varphi_v)}$

$$\begin{cases} I_M = Y V_M \\ \varphi_i = \varphi_y + \varphi_v \end{cases}$$

$i(t) = Y V_M \cos(\omega t + \varphi_v + \varphi_y) = \frac{V_M}{Z} \cos(\omega t + \varphi_v - \varphi_z)$

RL serie

$\bar{Z}_{RL} = Z_{RL} e^{j\varphi_{RL}} = R + j\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot e^{j \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right)}$

? $i(t)$ regime sin.

$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t + \varphi_v - \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)$

www.alessandropaghi.it

PARTE 1

Lemma del Teorema di Tellegen

Grafo orientato associato ad un circuito
ℓ lati, n nodi, $\forall$ lato conv. dei utilizzatori

Vale KI
Vale KV
$\Big\}$ $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ $\quad \angle \vec{v}, \vec{i} = \emptyset$.

$\vec{i} = (i_1, i_2, \dots, i_m)$

$$\sum_{k=1}^{\ell} v_k i_k = \sum_{k=1}^{\ell} p_k = \emptyset$$

la somma delle potenze istantanee assorbite dagli ℓ lati è nulla istante per istante.

KV
$\ell - n + 1$ KV alle maglie

$\vec{V} = (\vec{V_a}, \vec{V_c})$

$\vec{i} = (\vec{i_a}, \vec{i_c})$

KI
$n-1$ KI ai tagli

$\vec{i_a} = \vec{\vec{A}} \cdot \vec{i_c}$

$\vec{V_c} = \vec{\vec{B}} \cdot \vec{V_a}$

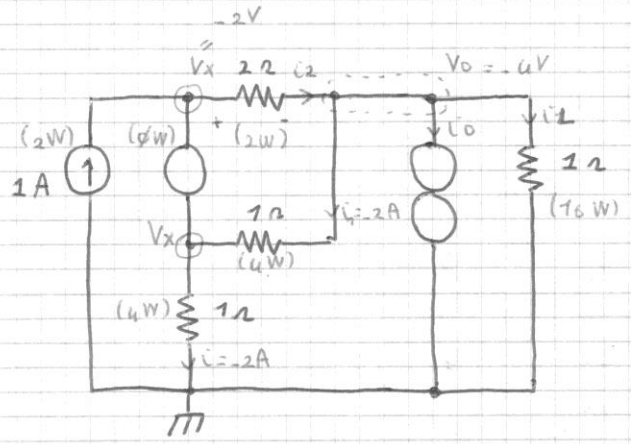
$\rightarrow \vec{\vec{A}} = -\vec{\vec{B}}^t$

$$\angle \vec{V}, \vec{i} = \vec{V}^t \cdot \vec{i} = (\vec{V_a}, \vec{V_c})^t \cdot (\vec{i_a}, \vec{i_c}) = \vec{V_a}^t \vec{i_a} + \vec{V_c}^t \vec{i_c}$$

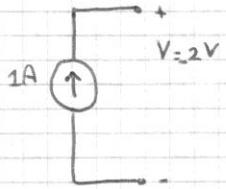
$$= \vec{V_a}^t \vec{\vec{A}} \vec{i_c} + (\vec{\vec{B}} \vec{V_a})^t \vec{i_c} = \vec{V_a}^t \vec{\vec{A}} \vec{i_c} + \vec{V_a}^t \vec{\vec{B}}^t \vec{i_c}$$

$$= \vec{V_a}^t (\vec{\vec{A}} + \vec{\vec{B}}^t) \vec{i_c} = \emptyset$$

www.alessandropaghi.it



Verifica Teorema



$P_{erog} = -2W$

$P_{assore} = +2W$

$= -(-2 \cdot 1)$.

↑

Paria zero di potenza assorbita!

incognite: V_o, V_x

$$1 = \frac{V_x - V_o}{2} \quad \rightarrow \quad V_o = -4V$$

$$V_x = -2V$$

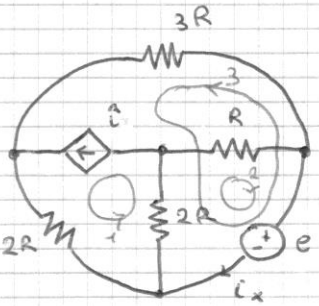
$$V_x = \frac{V_o \cdot 1}{2} = \frac{V_o}{2}$$

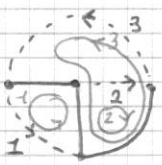
$i_2 - i_1 - i_4 - i_o = 0$

$1 + 2 + 4 - i_o = 0 \rightarrow i_o = 7A$

$P_{A.O.}$ Assorbita $= -28$ W.

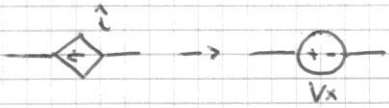
maglie fondamentali con gen. ri controllati





$i = 3i_x$

Incognite ausse: I_1, I_2, I_3.



Incognita aggiuntiva: V_x.

$$\begin{pmatrix} 4R & 2R & -2R \\ 2R & 3R & -2R \\ -2R & -2R & 5R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x \\ -e \\ e - V_x \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4R & 2R & -2R & -1 \\ 2R & 3R & -2R & \emptyset \\ -2R & -2R & 5R & 1 \\ \hline 1 & -3 & 2 & \emptyset \end{array}\right) \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ V_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset \\ -e \\ e \\ \hline \emptyset \end{pmatrix}$$

Vincolo imposto da $\hat{i}$

$\hat{i} = 3 i_x$

$\hat{i} = I_1 - I_3$

Rel. me Costitutiva

$i_x = 3(I_2 - I_3)$

$\Rightarrow I_1 - I_3 = 3I_2 - 3I_3$

$I_1 - 3I_2 + 2I_3 = \emptyset$

$$\begin{pmatrix} 4R & 2R & -2R \\ 2R & 3R & -2R \\ -2R & -2R & 5R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x \\ -e \\ e - V_x \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4R & 2R & -2R & -1 \\ 2R & 3R & -2R & \emptyset \\ -2R & -2R & 5R & 1 \\ \hline 1 & -3 & 2 & \emptyset \end{array}\right) \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ V_x \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} \emptyset \\ -e \\ e \\ \hline \emptyset \end{array}\right)$$

Vincolo imposto da $\hat{i}$

$\hat{i} = 3 i_x$

$\hat{i} = I_1 - I_3$

Rel. me Costitutiva

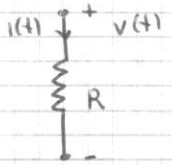
$i_x = 3(I_2 - I_3)$

$\Rightarrow I_1 - I_3 = 3I_2 - 3I_3$

$I_1 - 3I_2 + 2I_3 = \emptyset$

17/04/2015

Comportamento Energetico dei Bipoli R, L, C in regime Sinusoidale nel dominio del tempo



$v(t) = V_M \cdot \cos(\omega t)$

$i(t) = \frac{V_M}{R} \cdot \cos(\omega t)$

Apriamo una parentesi:

$e(t) = E_M \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$

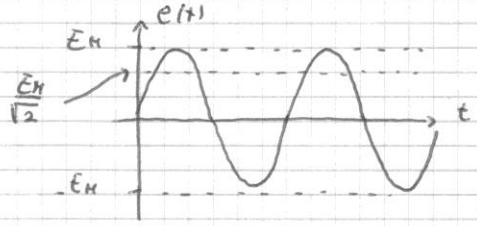
Valore Quadratico Medio: $\frac{1}{T}\int_0^T e^2(t)\,dt$

$= \frac{1}{T}\int_0^T E_M^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi)\,dt = \frac{E_M^2}{T} \cdot \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)}{2}\,dt = \frac{1}{2} E_M^2$

Valore Efficace: $\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2(t)\,dt} = \frac{E_M}{\sqrt{2}} \simeq 0{,}707\, E_M$

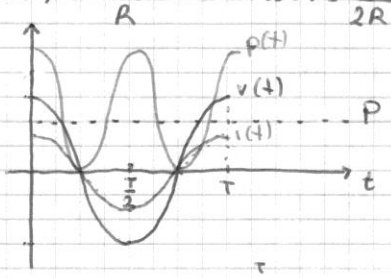
↑ Per una grandezza sinusoidale

$E_{eff} = E$



Chiudiamo la Parentesi.

$p(t) = v(t) \cdot i(t) = \frac{V_M^2}{R} \cdot \cos^2(\omega t) = \frac{V_M^2}{2R}(1 + \cos(2\omega t)) \geq 0$



Potenza Attiva: $P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt$

$P = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_M^2}{R}\cos^2(\omega t)\,dt = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{R}\int_0^T V_M^2 \cdot \cos^2(\omega t)\,dt = \frac{V_M^2}{2R} = \frac{1}{2} R I_M^2 = \frac{1}{2} V_M I_M$

(Watt)

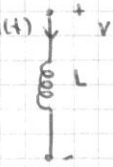
www.alessandropaghi.it

$$P = \frac{V_{eff}^2}{R} = R\, I_{eff}^2 = V_{eff} \cdot I_{eff} \quad \text{(Watt)}$$

$$P \cdot T = \int_{\emptyset}^{T} p(t)\, dt \quad \text{(Joule)}$$

↑ Energia elettrica assorbita da R in T.

La Potenza Attiva permette di valutare l'energia assorbita da R (energia trasferita ad R in modo irreversibile).

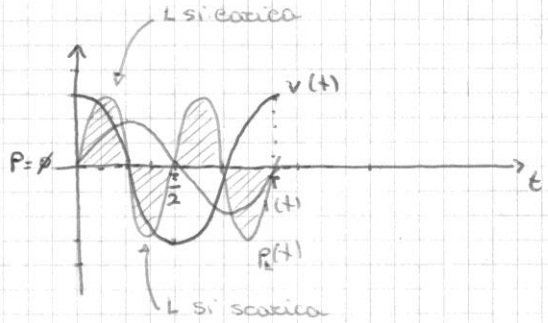


$$v(t) = V_M \cdot \cos(\omega t)$$

$$i(t) = \frac{V_M}{\omega L} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{V_M}{\omega L} \cdot \text{sen}(\omega t)$$

$$p_L(t) = v(t) \cdot i(t) = \frac{V_M^2}{\omega L} \text{sen}(\omega t) \cos(\omega t)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{V_M^2}{\omega L} \text{sen}(2\omega t)$$



$$P_L = \frac{1}{T} \int_{\emptyset}^{T} p_L(t)\, dt = \emptyset$$

L da luogo ad uno scambio REVERSIBILE di energia a media nulla su un periodo fra generatore e campo magnetico di L.

Q_L : Potenza Reattiva Assorbita da L:
↑ misura convenzionale di tale scambio reversibile

$$Q_L = \frac{1}{2} V_M \cdot I_M \quad \text{(Var)}$$

$$= \frac{1}{2} \omega L \cdot I_M^2$$

$$Q_L = 2\omega E_L^{\text{media}} \leftarrow Q_L \text{ proporzionale all'energia media scambiata e a quanto velocemente avviene lo scambio}$$

$$E_L^{\text{media}} = \frac{1}{T} \int_{\emptyset}^{T} E_L(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{\emptyset}^{T} \frac{1}{2} L\, I_M^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_2)\, dt = \frac{1}{2} L \cdot \frac{I_M^2}{2} = \frac{1}{4} \cdot L \cdot I_M^2 \quad \text{(Joule)}$$

www.alessandropaghi.it

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$$

$Z e^{j\varphi_z}$ ← argomento impedenza

↑ modulo impedenza

$$Z e^{j\varphi_z} = \frac{V_M \cdot e^{j\varphi_V}}{I_M \cdot e^{j\varphi_I}} \qquad \begin{cases} Z = \frac{V_M}{I_M} \\ \varphi_z = \varphi_V - \varphi_I \end{cases}$$

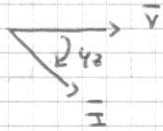
$\bar{Z} = R + jX$

Bipolo Passivo $R \geq 0$

$R > 0$

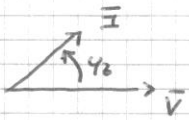
- Ohmico-induttivo $\leftrightarrow X > 0 \rightarrow \varphi_z = \text{arctg}\frac{X}{R} > 0$

  $\varphi_z = \varphi_V - \varphi_I$, i è in ritardo di un angolo φ_z fra $0 \div 90°$ rispetto a V.

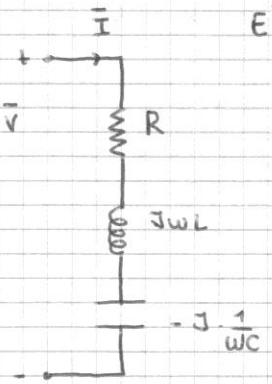


- Ohmico-capacitivo $\leftrightarrow X < 0 \rightarrow \varphi_z = \text{arctg}\frac{1}{R} < 0$

  $\varphi_z = \varphi_V - \varphi_I$, i è in anticipo di un angolo φ_z fra $0 \div 90°$ rispetto a V.



Circuiti Risonanti RLC serie



È un filtro Passa Banda.

$$\bar{Z}_{RLC} = R + j\omega L - j\cdot\frac{1}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$= R + j(X_L - X_C)$$

$$= R + j\cdot X$$

www.alessandropaghi.it

ω_0 : $\omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C}$ $\rightarrow$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (rad / sec)

↑ Pulsazione di Risonanza.

$X_C \gtrless X_L \lessgtr \Rightarrow \omega \lessgtr \omega_0$.

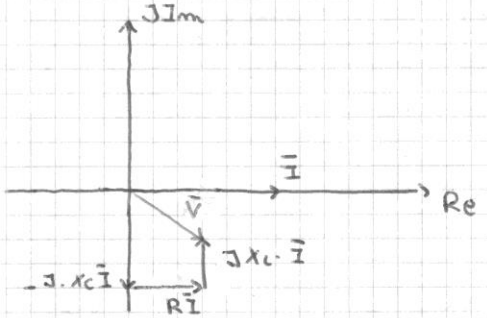
Circuito LC i seguenti passaggi

- Ohmico - Capacitivo ;
- Ohmico - Resistivo ;
- Ohmico - Induttivo ;

Conosco $\bar{I}$, trovare $\bar{V}$.

$\omega < \omega_0$, $X_C > X_L$

$\bar{V} = \bar{V}_R + \bar{V}_L + \bar{V}_C = R \cdot \bar{I} + jX_L \cdot \bar{I} - jX_C \cdot \bar{I}$

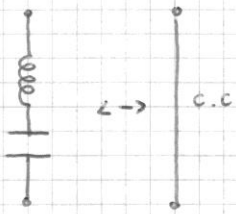


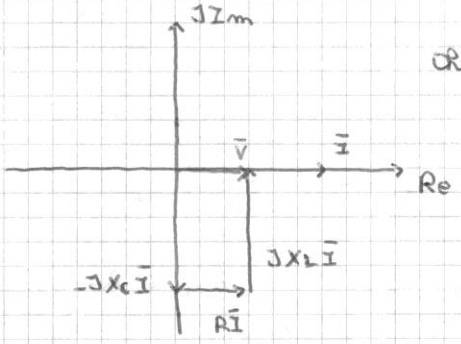
Ohmico - Capacitivo

i in anticipo su v

$\omega = \omega_0$; $X_C = X_L$ $\rightarrow$ $X = X_L - X_C = \not{\infty}$

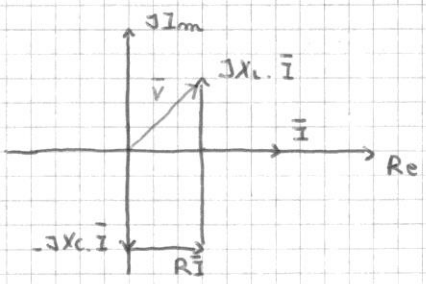
$\bar{Z} = R + j \cdot \not{\infty}$





Ohmico - Resistivo

$\omega > \omega_0$; $X_C < X_L$



Risposta in Frequenza

$v(t) = V_H \cdot \cos(\omega t)$

$V_H = \text{cost.} \quad \varphi_V = \varnothing$

Varia ω.

$i(t) = I_H(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi_I(\omega))$

$$\begin{cases} I_H(\omega) = \dfrac{V_H}{Z(\omega)} \\ \varphi_I(\omega) = \varphi_V - \varphi_Z(\omega) \end{cases}$$

$\varphi_V = \varnothing$

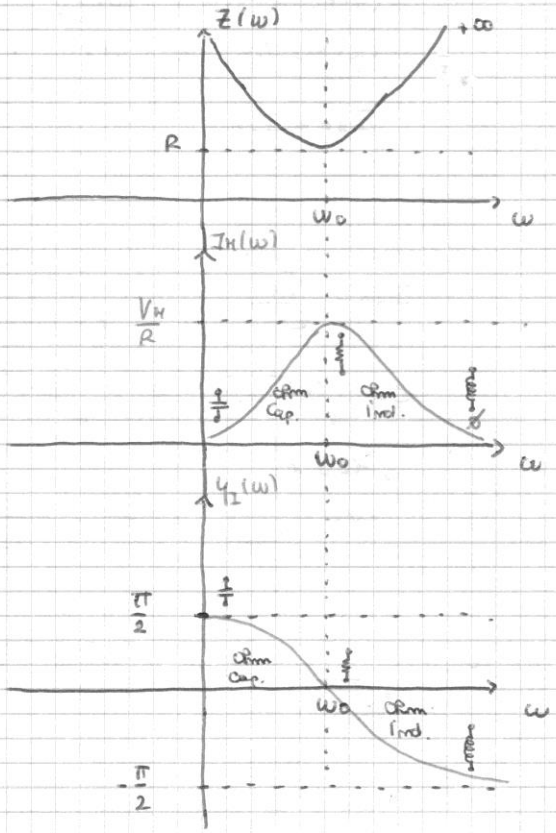
$$\bar{Z}(\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \underbrace{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}_{Z(\omega)} \cdot e^{j \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)}$$

$\varphi_Z(\omega)$

$$I_H(\omega) = \frac{V_H}{Z(\omega)} = \frac{V_H}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

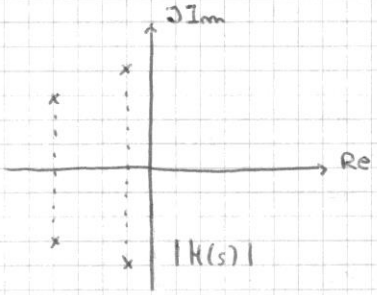
$$\varphi_I(\omega) = -\varphi_Z(\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

FILTRO PASSA BANDA

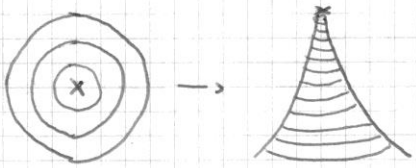


Per un circuito RLC serie l'impedenza è minima alla Pulsazione di Risonanza

Per la Puls. di Risonanza è massima la corrente assorbita.

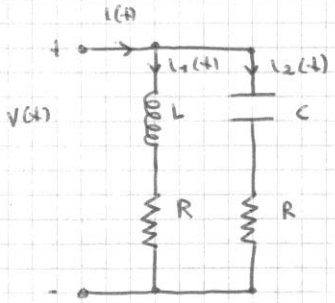


Più i poli sono vicini a JIm più la campana è stretta.



Polo.

Esercizio:



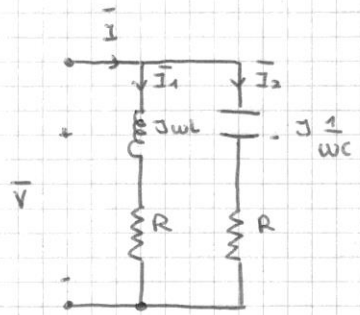
? ω: $i_1(t)$ e $i_2(t)$ abbiano la stessa ampiezza.

$i_1(t) = I_{1M} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{i1})$

$i_2(t) = I_{2M} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{i2})$

$I_{1M} = I_{2M}$.

Regime sin. a pulsazione ω.



$$I_{1M} = \frac{V_M}{Z_1} = I_{2M} = \frac{V_M}{Z_2}$$

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + X_L^2} = Z_2 = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

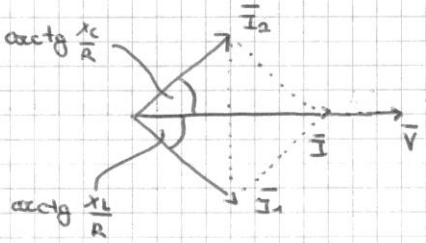
$\rightarrow X_L = X_C$

$$\omega L = -\frac{1}{\omega C} \rightarrow \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$L = 4\,H$

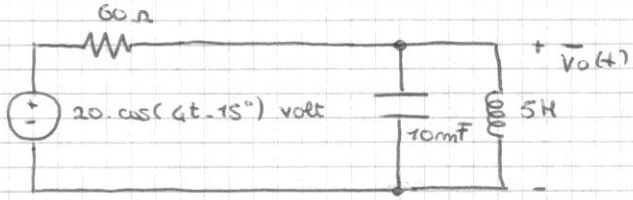
$C = 1\,\mu F$ $\rightarrow$ $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-6}}} = 500$ rad/sec

$R = 10\,\Omega$



$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$

Esercizio



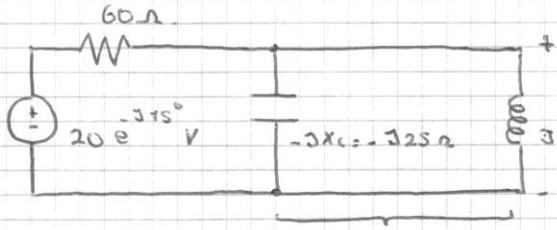
? $V_o(t)$ in regime sinusoidale.

$\bar{V} = 20 \cdot e^{-j15°}$

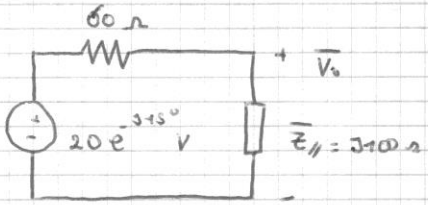
$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{4 \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = 25\ \Omega$

$X_L = \omega L = 4 \cdot 5 = 20\ \Omega$

Circuito Semplificato



$\bar{Z}_{//} = \frac{-j25 \cdot j20}{-j25 + j20} = \frac{25 \cdot 20}{-5} = j100\ \Omega$



$\bar{V}_o = 20\, e^{-j15°} \cdot \frac{\bar{Z}_{//}}{\bar{Z}_{//} + 60}$

$= 20\, e^{-j15°} \cdot \frac{j100}{j100 + 60}$

$= e^{-j15°}\, e^{j90°} \cdot 100 \cdot \frac{1}{\sqrt{34} \cdot e^{j \arctg \frac{5}{3}}}$ ($\arctg \frac{5}{3} \approx 59°$)

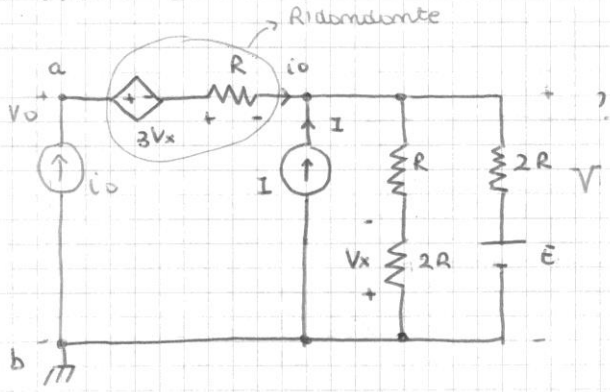
$= 17{,}15 \cdot e^{j16°}\ V.$

$\bar{V}_o = V_{oM} \cdot e^{j\varphi_{V_o}}$

$V_o(t) = V_{oM} \cdot \cos(4t + \varphi_{V_o}) = 17{,}15 \cdot \cos(4t + 16°)\ V.$

www.alessandropaghi.it

Es. PARTE 1



? TR con metodo rapido

$V_o = R_{eq} \cdot i_o + V_{eq}$

$$V = \frac{i_o + I + E/2R}{\frac{1}{3R} + \frac{1}{2R}} = \frac{6Ri_o + 6RI + 3E}{5}$$

$$V_x = -V \cdot \frac{2R}{3R} = -\frac{2}{3}V = \frac{-4Ri_o - 4RI - 2E}{5}$$

$$V = V_o - 3V_x - Ri_o = -\frac{3}{2}V_x - 3V_x - Ri_o$$

$$\rightarrow V_o = V + 3V_x + Ri_o = \frac{6Ri_o + 6RI + 3E}{5} + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{6Ri_o + 6RI + 3E}{5} + Ri_o$$

$$V_o = -\frac{1}{5}R \cdot i_o - \frac{6}{5}RI - \frac{3}{5}E$$

www.alessandropaghi.it

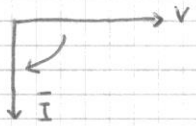
22/04/2015

R ideale $\rightarrow \bar{V}$, $\rightarrow \bar{I}$

$$P_R = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{1}{2}\frac{V_M^2}{R} = \ldots \rightarrow 0.$$

$Q_R = 0$ VAR

L ideale

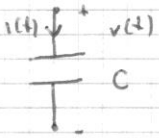


La potenza reattiva serve a L per creare il suo campo magnetico.

$$P_L = \frac{1}{T}\int_0^T p_L(t)\,dt = 0 \text{ Watt}$$

$$Q_L = \frac{1}{2} V_M I_M \text{ VAR}$$

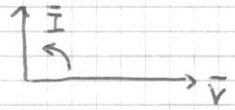
C ideale



$$v(t) = V_M \cdot \cos(\omega t)$$

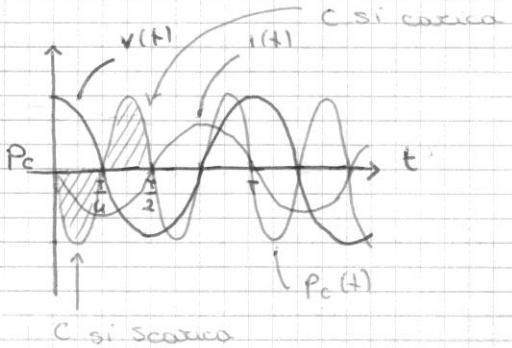
$$i(t) = \omega C V_M \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\omega C V_M \operatorname{sen}(\omega t)$$



$$p_c(t) = v(t) \cdot i(t) = -\omega C V_M^2 \operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega t)$$

$$= -\frac{1}{2}\omega C V_M^2 \operatorname{sen}(2\omega t)$$



$$P_c = \frac{1}{T}\int_0^T p_c(t)\,dt = 0 \text{ Watt}$$

$Q_c = -\frac{1}{2} V_M \cdot I_M$ VAR Segno − in quanto il C eroga potenza reattiva

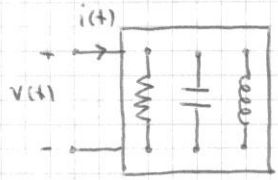
$$Q_c = -2\omega E_c^{\text{media}}$$

$$E_c^{\text{media}} = \frac{1}{T}\int_0^T E_c(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} C v^2(t)\,dt = \frac{1}{4} C V_M^2 \text{ Joule}$$

www.alessandropaghi.it

ci mi dice che più di frequente avvengono gli scambi più potenza reattiva è necessaria

Potenza Attiva, Reattiva, etc. per un Bipolo Generico.



Regime sin. a pulsazione ω

$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$

$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$

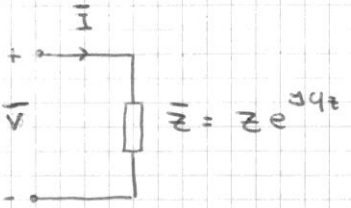
$p(t) = v(t) \cdot i(t) = V_M I_M \cos(\omega t + \varphi_v)\cos(\omega t + \varphi_i)$

↳ Potenza istantanea assorbita

$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt$ Watt , Potenza attiva assorbita dal Bipolo (potenza media su T)

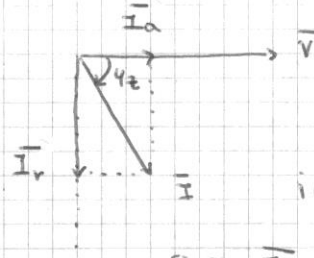
$P \cdot T = \int_0^T p(t)\,dt$ = Energia elettrica (lavoro assorbito dal bipolo in T)

$P \cdot T$: Energia UTILIZZATA (trasferita irreversibilmente al bipolo)



$v(t) = V_M \cos(\omega t)$

Ohmico - Induttivo



$\bar{I} = \bar{I}_a + \bar{I}_r$

$i(t) = i_a(t) + i_r(t)$

$\bar{I}_a$ trasporta potenza attiva.
$\bar{I}_r$ trasporta potenza Sfasata.

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = \underbrace{v(t) \cdot i_a(t)}_{p_a(t)} + \underbrace{v(t) \cdot i_r(t)}_{p_r(t)}$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T p_a(t)\,dt + \frac{1}{T}\int_0^T p_r(t)\,dt$$

$P = P_a + P_r$

P_a) $v(t) = V_M \cos(\omega t)$

$i_a(t) = I_{aM} \cos(\omega t)$

$$P_a = \frac{1}{T}\int_0^T v(t) \cdot i_a(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T V_M I_{aM} \cos^2(\omega t)\,dt$$

www.alessandropaghi.it

$= V_H I_{aH} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1+\cos(2\omega t)}{2}\, dt = \frac{1}{2} V_H I_{aH} = V_{eff} \cdot I_{a\,eff} > 0$

$\bar{I}_a$ trasporta potenza attiva positiva pari a $V_{eff} \cdot I_{a\,eff}$

↑ Componente attiva di $\bar{I}$

$P_r)$ $\quad v(t) = V_H \cos(\omega t)$

$i_r(t) = I_{rH} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = I_{rH} \operatorname{sen}(\omega t)$

$P_r = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) \cdot i_r(t)\, dt = \frac{1}{T} \int_0^T V_H I_{rH} \cdot \operatorname{sen}(\omega t) \cos(\omega t)\, dt$

$= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_H I_{rH}}{2} \cdot \operatorname{sen}(2\omega t)\, dt = 0$ Watt

$P_r = 0$ Watt

$\bar{I}_a$ → Componente attiva

$\bar{I}_r$ → Componente reattiva

(corrente sfasata, OTIOSA).

$\bar{I}_r$ modella uno scambio reversibile di energia a media nulla su T fra generatore e bipolo.

Tale scambio si misura convenzionalmente con:

$Q_A = \frac{1}{2} V_H I_{rH}$ VAR

↑ Potenza reattiva assorbita dal bipolo.

Lo stato reattivo del trasferimento energetico verso il bipolo in regime sinusoidale consta di 2 contributi:

1) Trasferimento irreversibile di energia (UTILIZZATA) che si può valutare quantitativamente con la Potenza Attiva:

$P = P_a = \frac{1}{2} V_H I_{aH} = \frac{1}{2} V_H I_H \cos\varphi_z = \frac{1}{2} V_H I_H \cos(\varphi_v - \varphi_i)$ Watt;

2) È sovrapposto uno scambio reversibile di energia a media nulla su un periodo (energia SCAMBIATA ma non UTILIZZATA) che si misura con la potenza reattiva:

$Q = Q_r = \frac{1}{2} V_H I_{rH} = \frac{1}{2} V_H I_H \operatorname{sen}\varphi_z = \frac{1}{2} V_H I_H \operatorname{sen}(\varphi_v - \varphi_z)$ VAR

www.alessandropaghi.it

Potenza Apparente

$A = \frac{1}{2} V_M I_M = V_{eff} \cdot I_{eff} = V \cdot I$ Volt Ampere

$V \quad I$ per semplificare

$P = \frac{1}{2} V_M I_M \cos \varphi_z = A \cos \varphi_z$

$Q = \frac{1}{2} V_M I_M \operatorname{sen} \varphi_z = A \operatorname{sen} \varphi_z$

$A = \sqrt{P^2 + Q^2}$

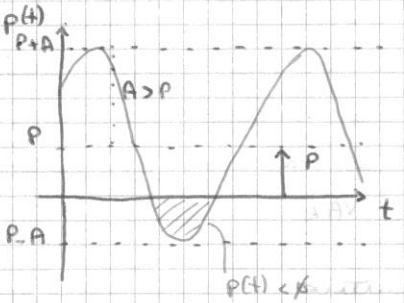
$p(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_V) I_M \cos(\omega t + \varphi_z)$

$= \frac{1}{2} V_M I_M \cos(\varphi_V - \varphi_I) + \frac{1}{2} V_M I_M \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_z)$

$p(t) = P + A \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_z)$



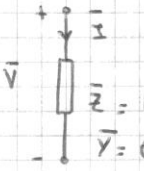
$A = \sqrt{P_R^2 + Q_L^2} > P_R ; Q_L$



$P_{MAX} = P + A = P + \sqrt{P^2 + Q^2}$

$P_{MIN} = P - A = P - \sqrt{P^2 + Q^2} < 0$

Espressioni di P, Q in termini Fasoriali



$P = \frac{1}{2} V_M I_M \cos \varphi_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{V} \cdot \bar{I}^*]$

$= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{Z}] I_M^2 = \frac{1}{2} R I_M^2$

$= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{Y}] V_M^2 = \frac{1}{2} G V_M^2$ Watt

$\frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{V} \cdot \bar{I}^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V_M e^{j\varphi_V} \cdot I_M e^{-j\varphi_I}] = \frac{1}{2} V_M I_M \operatorname{Re}[e^{j(\varphi_V - \varphi_I)}]$

$= \frac{1}{2} V_M I_M \operatorname{Re}[e^{j\varphi_z}] = \frac{1}{2} V_M I_M \cos \varphi_z$

www.alessandropaghi.it

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,[\bar{V}\cdot\bar{I}^*] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,[\bar{Z}\,\underbrace{\bar{I}\,\bar{I}^*}_{I_M^2}] = \frac{1}{2} I_M^2\,\mathrm{Re}\,[\bar{Z}]$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,[\bar{V}\cdot\bar{I}^*] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,[\bar{V}(\bar{Y}\bar{V})^*] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,[\bar{V}\bar{Y}^*\bar{V}^*]$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,[\bar{Y}^*\underbrace{\bar{V}\bar{V}^*}_{V_M^2}] = \frac{1}{2} V_M^2\,\mathrm{Re}\,[\bar{Y}^*] = \frac{1}{2} V_M^2\,\mathrm{Re}\,[\bar{Y}]$$

$$Q = \frac{1}{2} V_M I_M \operatorname{sen}\varphi_z = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,[\bar{V}\bar{I}^*]$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,[\bar{Z}]\, I_M^2 = \frac{1}{2} X I_M^2 \qquad \text{(Verificare)}$$

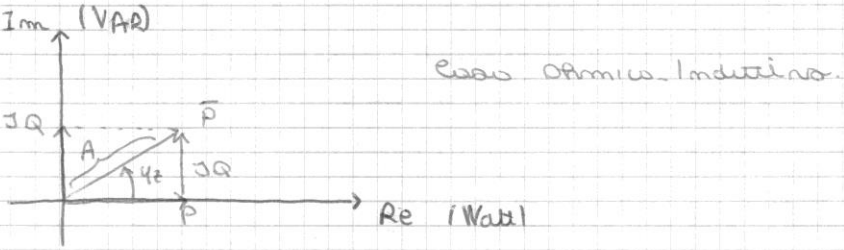
$$= -\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,[\bar{Y}]\, V_M^2 = -B\,\frac{1}{2} V_M^2 \qquad \text{VAR}$$

$\bar{P}$ = Potenza Complessa assorbita dal Bipolo

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\bar{V}\bar{I}^* = P + jQ = A e^{j\varphi_z} \quad \text{Volt Ampere}$$

$$\frac{1}{2}\bar{V}\bar{I}^* = \frac{1}{2} V_M e^{j\varphi_V} \cdot I_M e^{-j\varphi_i} = \frac{1}{2} V_M I_M e^{\overbrace{j(\varphi_V-\varphi_i)}^{\varphi_z}}$$

Piano Complesso come Piano delle potenze Complesse

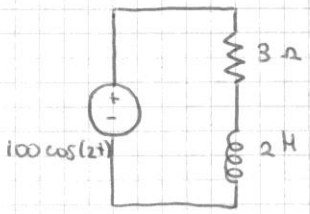


Caso Ohmico-Induttivo.

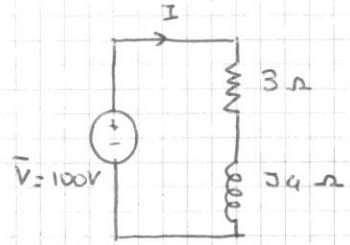
Asse Re: asse delle potenze attive (attive)
→ Trasferimento irreversibile di energia

Asse jIm: asse delle potenze scambiate
→ Scambio Reversibile di Energia.

www.alessandropaghi.it



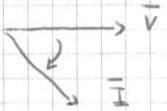
? Pot. attiva, reattiva, apparente, istantanea fornita dal gen. se ai carico R-L.



$\bar{P} = \frac{1}{2}\bar{V}\bar{I}^* = \frac{1}{2}100\cdot(12+J16) = 600 + J800$

$P = 600\ W \quad ; \quad Q = 800\ VAR$

$\bar{I} = 100/_{3+J4} = 100\cdot\frac{3-J4}{25} = 12-J16\ Amp.$



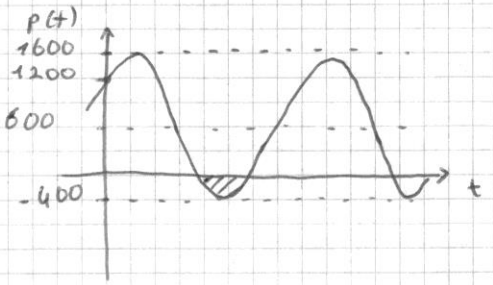
Caso Ohmico-Induttivo

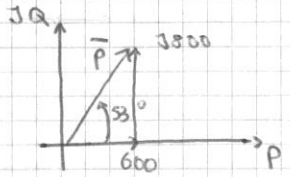
$\bar{P} = \sqrt{600^2+800^2}\cdot e^{J\arctg\frac{800}{600}} = 1000\cdot e^{J\arctg\frac{4}{3}} = 1000\cdot e^{J53^\circ} \rightarrow 4z$

$A = 1000\ VA$

$p(t) = P + A\cdot\cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i) = 600 + 1000\cdot\cos(4t + \phi + \phi - \varphi_z)$

$= 600 + 1000\cos(4t - 53^\circ)\ Watt$





www.alessandropaghi.it