

CAMPI ELETTROMAGNETICI

[Appunti Esame]

A CURA DI ALESSANDRO PAGHI

PROFESSORE: Stefano Maci (<http://www3.diism.unisi.it/people/person.php?id=53&aa=2015>)

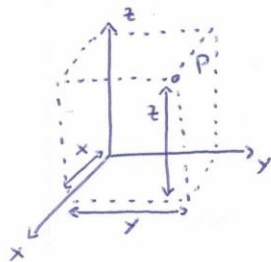
LINK AL CORSO ANNO 2015/2016:

<http://www3.diism.unisi.it/FAC/index.php?bodyinc=didattica/inc.insegnamento.php&id=55117&aa=2015>

FREQUENTAZIONE: Consigliata.

SISTEMI DI RIFERIMENTO E OPERATORI DIFFERENZIALI

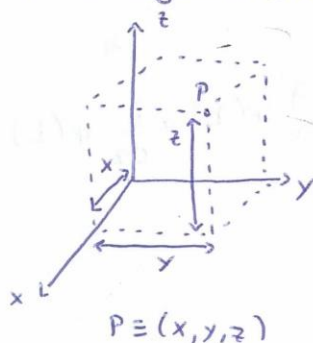
CAMPI SCALARI



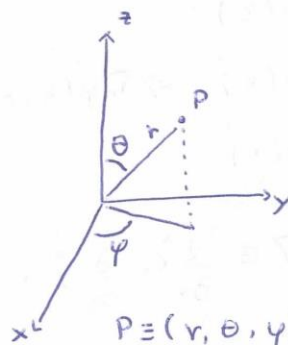
Campo Statico: $\forall P, \exists \psi(P) \in \mathbb{R}$

Campo Dinamico: $\forall P, t, \exists \psi(P, t) \in \mathbb{R}$

I campi godono di proprietà di invarianza per cambiamento di sistema di riferimento.



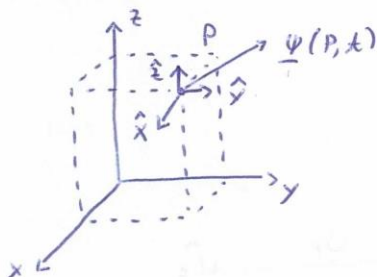
$P \equiv (x, y, z)$



$P \equiv (r, \theta, \varphi)$

$$\psi(x, y, z) = \psi_s(r, \theta, \varphi)$$

CAMPI VETTORIALI



$$\underline{\psi}(P, t) = \psi_x(x, y, z, t) \hat{x} + \psi_y(x, y, z, t) \hat{y} + \psi_z(x, y, z, t) \hat{z}$$

I campi vettoriali godono di proprietà di invarianza del modulo per cambiamento di coordinate o rotazioni del sistema.

$$|\underline{\psi}(P, t)| = \sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2} = \sqrt{\psi_x'^2 + \psi_y'^2 + \psi_z'^2}$$

↑
nuovo sistema di rif.

GRADIENTE DI UN CAMPO SCALARE

$$\text{grad} \equiv \nabla$$

$$\nabla \psi(\underline{r}) \cdot \hat{e} = \frac{\partial}{\partial \ell} \psi(\underline{r}) = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\psi(\underline{r} + \Delta r \cdot \hat{e}) - \psi(\underline{r})}{\Delta r}$$

↑
Proiezione del gradiente lungo un generico vettore $\hat{e}$ di $\psi(\underline{r})$.

In coordinate cartesiane:

$$\nabla \psi(\underline{r}) \cdot \hat{x} = \frac{\partial}{\partial x} \psi(\underline{r})$$

$$\nabla \psi(\underline{r}) \cdot \hat{y} = \frac{\partial}{\partial y} \psi(\underline{r}) \Rightarrow \nabla \psi(\underline{r}) = \frac{\partial}{\partial x} \psi(\underline{r}) \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \psi(\underline{r}) \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \psi(\underline{r}) \hat{z}$$

$$\nabla \psi(\underline{r}) \cdot \hat{z} = \frac{\partial}{\partial z} \psi(\underline{r})$$

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$$

In coordinate curvilinee:

$$dl_1 = R_1 du_1$$

$$dl_2 = R_2 du_2$$

$$dl_3 = R_3 du_3$$

$$\Rightarrow \nabla \psi \cdot \hat{u}_1 = \frac{\partial \psi}{R_1 \partial u_1}$$

$$\nabla \psi \cdot \hat{u}_2 = \frac{\partial \psi}{R_2 \partial u_2}$$

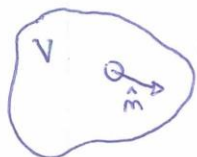
$$\nabla \psi \cdot \hat{u}_3 = \frac{\partial \psi}{R_3 \partial u_3}$$

$$\nabla \psi \equiv \frac{\partial \psi}{R_1 \partial u_1} \hat{u}_1 + \frac{\partial \psi}{R_2 \partial u_2} \hat{u}_2 + \frac{\partial \psi}{R_3 \partial u_3} \hat{u}_3$$

DIVERGENZA DI UN CAMPO VETTORIALE

$$\text{div} \equiv \nabla \cdot$$

Permette di passare da integrale di volume a flusso attraverso una superficie.



Teorema di Gauss:

$$\iiint_V \nabla \cdot \underline{A} \, dV = \oint_S \underline{A} \cdot \hat{n} \, dS$$

$$\nabla \cdot \underline{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} \underline{A} \cdot \hat{n} \, dS$$

↑
Densità volumetrica di flusso.

In coordinate cartesiane : $\nabla \cdot \underline{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

In coordinate arbitrarie :

$$\nabla \cdot \underline{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial (A_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial (A_2 h_1 h_3)}{\partial u_2} + \frac{\partial (A_3 h_1 h_2)}{\partial u_3} \right\}$$

In coordinate cilindriche : $\nabla \cdot \underline{A} = \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial A_\phi}{\rho \partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

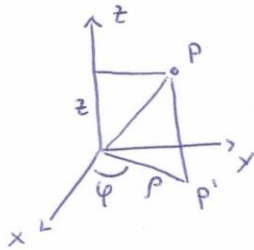
In coordinate sferiche : $\nabla \cdot \underline{A} = \frac{\partial (r^2 A_r)}{r^2 \partial r} + \frac{\partial (A_\theta \sin \theta)}{r \sin \theta \partial \theta} + \frac{\partial A_\phi}{r \sin \theta \partial \phi}$

Per i campi vettoriali :

$$\nabla \cdot \underline{A} = 0 \quad : \text{CAMPO SOLENOIDALE}$$

$$\nabla \cdot \underline{A} \neq 0 \quad : \text{CAMPO NON SOLENOIDALE}$$

In coordinate cilindriche :



$$dl_1 = dr$$

$$R_1 = R_\rho = 1$$

$$dl_2 = \rho d\phi$$

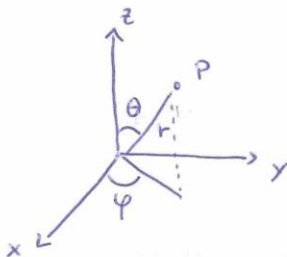
$$R_2 = R_\phi = \rho$$

$$dl_3 = dz$$

$$R_3 = R_z = 1$$

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{z} + \frac{\partial \psi}{\rho \partial \phi} \hat{\phi}$$

In coordinate sferiche :



$$dl_1 = dr$$

$$R_1 = 1$$

$$dl_2 = r d\theta$$

$$R_2 = r$$

$$dl_3 = r \sin \theta d\phi$$

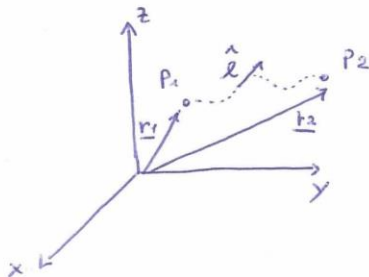
$$R_3 = r \sin \theta$$

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{r} + \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial \psi}{r \sin \theta \partial \phi} \hat{\phi}$$

Il gradiente di un campo scalare gode di invarianza del modulo per rototranslatione e cambiamento di coordinate.

$$|\nabla \psi(\underline{r})| = \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z'}\right)^2}$$

INTEGRALE DI LINEA

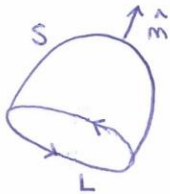


$$\int_1^2 \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \cdot \psi(P) \cdot d\underline{r} = \int_1^2 d\psi(P) = \psi(P_2) - \psi(P_1)$$

ROTORE DI UN CAMPO VETTORIALE

$$\text{rot} = \nabla \times$$

Permette di passare da integrale di flusso attraverso una superficie ad integrale di linea sul contorno della superficie stessa.



Teorema di Stokes:

$$\iint_S (\nabla \times \underline{A}) \cdot \hat{n} \cdot dS = \oint_C \underline{A} \cdot d\ell$$

$$\nearrow (\nabla \times \underline{A}) \cdot \hat{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint \underline{A} \cdot d\ell$$

Densità superficiale di circolazione

In coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned} (\nabla \times \underline{A}) \cdot \hat{x} &= -\frac{\partial}{\partial z} A_y + \frac{\partial}{\partial y} A_z \\ (\nabla \times \underline{A}) \cdot \hat{y} &= \frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z \\ (\nabla \times \underline{A}) \cdot \hat{z} &= -\frac{\partial}{\partial y} A_x + \frac{\partial}{\partial x} A_y \end{aligned} \Rightarrow \nabla \times \underline{A} = \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix}$$

In coordinate arbitrarie:

$$\nabla \times \underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{R_2 R_3} & \frac{l_2}{R_1 R_3} & \frac{l_3}{R_1 R_2} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ R_1 A_1 & R_2 A_2 & R_3 A_3 \end{bmatrix}$$

Im coordinate cilindriche:

$$\nabla \times \underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{r}}{\rho} & \hat{\phi} & \frac{\hat{z}}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{bmatrix}$$

Im coordinate sferiche:

$$\nabla \times \underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{r}}{r^2 \sin \theta} & \frac{\hat{\theta}}{r \sin \theta} & \frac{\hat{\phi}}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{bmatrix}$$

Per un campo planare:

$$(\nabla \times \underline{A}) \cdot \hat{m} = 0 \quad ; \quad \text{CAMPO IRROTAZIONALE}$$

$$(\nabla \times \underline{A}) \cdot \hat{m} \neq 0 \quad ; \quad \text{CAMPO NON IRROTAZIONALE}$$

OPERAZIONI MISTE

$$\nabla \cdot (\nabla \times \underline{A}) = 0 \quad ; \quad \text{se } \nabla \cdot \underline{B} = 0 \Rightarrow \exists \underline{A} : \underline{B} = \nabla \times \underline{A}$$

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0 \quad ; \quad \text{se } \nabla \times \underline{A} = 0 \Rightarrow \exists \phi : \underline{A} = \nabla \phi$$

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi$$

$$\text{Im coordinate cartesiane} : \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

Pensando ad una terna di vettori:

$$\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) = \underline{B} (\underline{A} \cdot \underline{C}) - (\underline{A} \cdot \underline{B}) \underline{C}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = \nabla (\nabla \cdot \underline{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \underline{A}$$

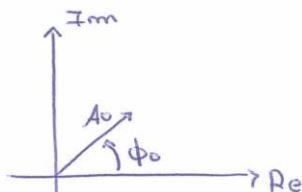
$$\Rightarrow \nabla^2 \underline{A} = \nabla (\nabla \cdot \underline{A}) - \nabla \times (\nabla \times \underline{A})$$

⑥

METODO DEI FASORI

Supponiamo $e(t) = A_0 \cdot \cos(\omega t + \phi_0)$, si definisce fasore associato ad $e(t)$:

$$E = A_0 \cdot e^{j\phi_0} \quad , \quad \text{con} \quad e(t) = \operatorname{Re} \left\{ E \cdot e^{j\omega t} \right\}$$



Proprietà:

- $e_3(t) = a e_1(t) + b e_2(t) \Rightarrow E_3 = a E_1 + b E_2$
- $e_2(t) = \frac{\partial}{\partial t} e_1(t) \Rightarrow E_2 = j\omega E_1$
- $e_2(t) = \int e_1(t) dt \Rightarrow E_2 = \frac{E_1}{j\omega}$
- $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e_1(t) e_2(t) dt \Rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ E_1 E_2^* \}$
- $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underline{e_1(t)} \times \underline{e_2(t)} dt \Rightarrow \frac{j}{2} \operatorname{Re} \{ \underline{E_1} \times \underline{E_2}^* \}$

TRASFORMATA DI FOURIER

Supponiamo di avere un segnale ad energia finita:

$$f(t): \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$

Si definisce T. di Fourier di $f(t)$, la funzione $F(\omega): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{con } f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Proprietà:

- $f(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow |F(\omega)| = |F(-\omega)| ; \quad \mathcal{F} F(\omega) = -j F(-\omega)$
- $g(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(t) \Rightarrow G(\omega) = j\omega F(\omega)$
- $g(t) = \int f(t) dt \Rightarrow G(\omega) = \frac{F(\omega)}{j\omega}$
- $g(t) = f(t) * h(t) \Rightarrow G(\omega) = F(\omega) \cdot H(\omega)$

$$\text{Parseval: } \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

(7)

EQUAZIONI DI MAXWELL

$$1) \nabla \times \underline{e}(r, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \underline{b}(r, t)$$

$$2) \nabla \times \underline{h}(r, t) = \frac{\partial}{\partial t} \underline{d}(r, t) + \underline{j}(r, t)$$

$$3) \nabla \cdot \underline{d}(r, t) = \rho(r, t)$$

$$4) \nabla \cdot \underline{b}(r, t) = \emptyset$$

$$5) \underline{g}(r, t) = \rho(r, t) \cdot \underline{e}(r, t) + \underline{j}(r, t) \times \underline{b}(r, t) \quad (\text{Forza di Lorentz})$$

$\underline{e}$: campo elettrico (V/m)

$\underline{d}$: induzione elettrica (C/m^2)

$\underline{h}$: campo magnetico (A/m)

$\underline{b}$: induzione magnetica (Wb/m^2)

$\underline{j}$: densità di corrente elettrica (A/m^2)

ρ : densità di carica elettrica (C/m^3)

$\underline{g}$: densità di forza (N/m^3)

Prendiamo 1):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \underline{e}(r, t)) = - \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \underline{b}(r, t) \Rightarrow \phi = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \underline{b}(r, t))$$

$$\Rightarrow 4) \nabla \cdot \underline{b}(r, t) = \emptyset$$

Equazione di Continuità della corrente:

Prendiamo 2):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \underline{h}(r, t)) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{d}(r, t) + \underline{j}(r, t) \right)$$

$$\Rightarrow \phi = \nabla \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{d}(r, t) \right) + \nabla \cdot (\underline{j}(r, t))$$

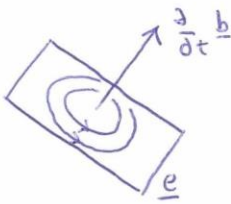
Utilizziamo 3):

$$\nabla \cdot \underline{j}(r, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(r, t) = \phi$$

$\rightarrow$ Si associa ad una variazione di carica, la presenza di un flusso di corrente.

CONSIDERAZIONI

$$\nabla \times \underline{e}(r, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \underline{b}(r, t)$$

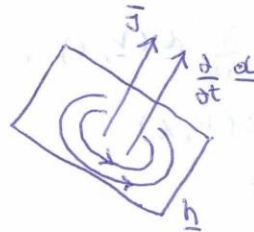


Un rotore di $\underline{e} \neq \emptyset$ può essere dovuto ad una variazione di $\underline{b}$.

Se $p = \phi$, le linee di $\underline{e}$ si chiudono intorno a $\frac{\partial}{\partial t} \underline{b}$.

Se $p \neq \phi$, le linee di $\underline{e}$ possono partire ed arrivare su cariche di segno opposto.

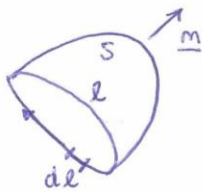
$$\nabla \times \underline{h}(r, t) = \frac{\partial}{\partial t} \underline{d}(r, t) + \underline{j}(r, t)$$



Un rotore di $\underline{h} \neq \emptyset$ può essere dovuto alla presenza di una densità di corrente $\underline{j}$ o ad una variazione di $\underline{d}$.

Le linee di $\underline{h}$ si chiudono sempre intorno a $\underline{j}$ o $\frac{\partial}{\partial t} \underline{d}$.

TEOREMA DI STOKES



Sceita una generica curva chiusa l , e detta S una generica superficie aperta ad essa appoggiata, la circuitazione di un campo lungo l è uguale al flusso del rotore attraverso la superficie S .

$$\oint_C \underline{e}(r, t) \cdot \underline{\hat{l}}_t d\ell = \iint_S \nabla \times \underline{e}(r, t) \cdot \underline{\hat{m}} dS$$

LEGGE DI FARADAY

Prendiamo $\underline{e}$: $\nabla \times \underline{e}(r, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \underline{b}(r, t)$

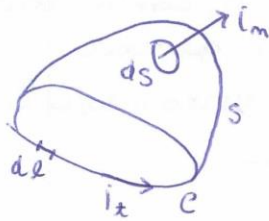
Applichiamo Stokes:

$$\oint_C \underline{e}(r, t) \cdot \underline{\hat{l}} d\ell = \iint_S \nabla \times \underline{e}(r, t) \cdot \underline{\hat{m}} dS = - \iint_S \frac{\partial}{\partial t} \underline{b}(r, t) \cdot \underline{\hat{m}} dS = - \frac{d}{dt} \iint_S \underline{b}(r, t) \cdot \underline{\hat{m}} dS$$

→ Se l'induzione varia nel tempo, $\exists$ un campo elettrico con circuitazione non nulla nel piano normale a $\underline{b}$.

nel caso statico : $\begin{cases} \nabla \times \underline{e}(r) = \emptyset \\ \oint_C \underline{e}(r, t) \cdot \underline{\hat{l}} d\ell = \emptyset \end{cases}$

Riassumendo:



La circolazione del campo elettrico, se fatta lungo un circuito metallico assume il significato di f.e.m.

$$\oint_C \underline{E}(\underline{r}, t) \cdot \underline{i}_t d\ell = - \frac{d}{dt} \iint_S \underline{B}(\underline{r}, t) \cdot \underline{i}_m dS$$

LEGGE DI AMPERE

Prendiamo 2) : $\nabla \times \underline{h}(\underline{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \underline{d}(\underline{r}, t) + \underline{j}(\underline{r}, t)$

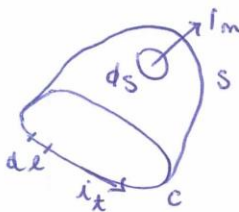
Applichiamo Stokes:

$$\begin{aligned} \oint_C \underline{h}(\underline{r}, t) \cdot \underline{\hat{e}} d\ell &= \iint_S \nabla \times \underline{h}(\underline{r}, t) \cdot \underline{\hat{m}} dS = \iint_S \frac{\partial}{\partial t} \underline{d}(\underline{r}, t) \cdot \underline{\hat{m}} dS + \iint_S \underline{j}(\underline{r}, t) \cdot \underline{\hat{m}} dS \\ &= \frac{d}{dt} \iint_S \underline{d}(\underline{r}, t) \cdot \underline{\hat{m}} dS + \iint_S \underline{j}(\underline{r}, t) \cdot \underline{\hat{m}} dS \end{aligned}$$

nel caso statico:

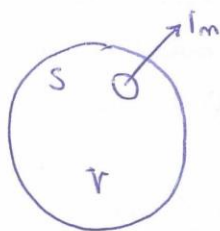
$$\begin{cases} \nabla \times \underline{h}(\underline{r}) = \underline{j}(\underline{r}) \\ \oint_C \underline{h}(\underline{r}) \cdot \underline{\hat{e}} d\ell = \iint_S \underline{j}(\underline{r}) \cdot \underline{\hat{m}} dS \end{cases}$$

Riassumendo:



$$\oint_C \underline{h}(\underline{r}, t) \cdot \underline{i}_t d\ell = \frac{d}{dt} \iint_S \underline{d}(\underline{r}, t) \cdot \underline{i}_m dS + \iint_S \underline{j}(\underline{r}, t) \cdot \underline{i}_m dS$$

LEGGE DI GAUSS



Sceita una superficie chiusa S , contenente il volume V , si ha, per un generico campo $\underline{d}$, che il suo flusso attraverso S è uguale all'integrale della divergenza di $\underline{d}$ ($\nabla \cdot \underline{d}$).

$$\oint_S \underline{A}(\underline{r}, t) \cdot \underline{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \underline{A}(\underline{r}, t) dV$$

$$\nabla \cdot \underline{b}(\underline{r}, t) = 0 \Rightarrow \oint_S \underline{b}(\underline{r}, t) \cdot \underline{n} dS = 0$$

$$\nabla \cdot \underline{d}(\underline{r}, t) = \rho(\underline{r}, t) \Rightarrow \oint_S \underline{d}(\underline{r}, t) \cdot \underline{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \underline{d}(\underline{r}, t) dV = \iiint_V \rho(\underline{r}, t) dV = Q$$

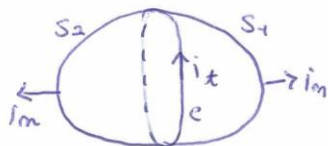
Risultando:

La densità di flusso di induzione magnetica è sempre nulla, ovvero le linee di campo dell'induzione magnetica non possono avere inizio o fine.
Al contrario, le linee di induzione elettrica possono avere inizio o fine, ed in quei punti in cui è presente una densità di carica elettrica

$$\oint_S \underline{d}(\underline{r}, t) \cdot \underline{n} dS = \iiint_V \rho(\underline{r}, t) dV = Q$$

$$\oint_S \underline{b}(\underline{r}, t) \cdot \underline{n} dS = 0$$

Legge di Faraday:



Due superfici che appoggiano sullo stesso contorno C .

$$\frac{d}{dt} \oint_{S_1+S_2} \underline{b} \cdot \underline{n} dS = 0 \Rightarrow \oint_{S_1+S_2} \underline{b} \cdot \underline{n} dS = 0$$

EQUAZIONI DI MAXWELL IN FORMA INTEGRALE

Legge di Faraday

$$\oint_C \underline{E}(r,t) \cdot \underline{\bar{t}}_t d\ell = - \frac{d}{dt} \iint_S \underline{B}(r,t) \cdot \underline{\bar{t}}_m dS$$

Legge di Ampere

$$\oint_C \underline{H}(r,t) \cdot \underline{\bar{t}}_t d\ell = \frac{d}{dt} \iint_S \underline{D}(r,t) \cdot \underline{\bar{t}}_m dS + \iint_S \underline{J}(r,t) \cdot \underline{\bar{t}}_m dS$$

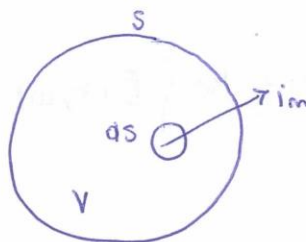
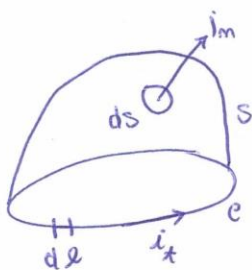
Legge di Gauss

$$\iint_S \underline{B}(r,t) \cdot \underline{\bar{t}}_m dS = 0$$

$$\iint_S \underline{D}(r,t) \cdot \underline{\bar{t}}_m dS = Q$$

Equazione di continuità della Carica

$$\iint_S \underline{J}(r,t) \cdot \underline{\bar{t}}_m dS = - \frac{d}{dt} Q$$



MAXWELL NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

$$\nabla \times \underline{E}(\underline{r}, \omega) = -j\omega \underline{B}(\underline{r}, \omega)$$

$$\nabla \times \underline{H}(\underline{r}, \omega) = j\omega \underline{D}(\underline{r}, \omega) + \underline{J}(\underline{r}, \omega)$$

$$\nabla \cdot \underline{D}(\underline{r}, \omega) = \rho(\underline{r}, \omega)$$

$$\nabla \cdot \underline{B}(\underline{r}, \omega) = 0$$

$$\text{con } \underline{F}(\underline{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{f}(\underline{r}, t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\underline{f}(\underline{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{F}(\underline{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega$$

MAXWELL NEL DOMINIO DEI FASORI

$$\nabla \times \underline{E}(\underline{r}, \omega) = -j\omega \underline{B}(\underline{r}, \omega)$$

$$\nabla \times \underline{H}(\underline{r}, \omega) = j\omega \underline{D}(\underline{r}, \omega) + \underline{J}(\underline{r}, \omega)$$

$$\nabla \cdot \underline{D}(\underline{r}, \omega) = \rho(\underline{r}, \omega)$$

$$\nabla \cdot \underline{B}(\underline{r}, \omega) = 0$$

$$\text{con } \underline{f}(\underline{r}, t) = \underline{F}_0(\underline{r}, \omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi(\underline{r}))$$

$$\underline{F}(\underline{r}, \omega) = \underline{F}_0(\underline{r}, \omega) e^{j\varphi(\underline{r})}$$

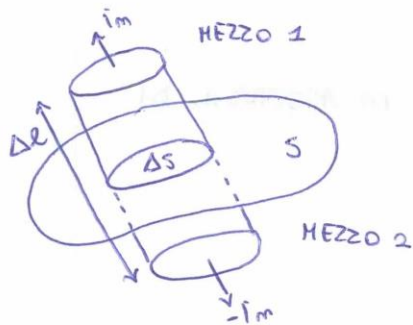
$$\text{e } \underline{f}(\underline{r}, t) = \text{Re} \left\{ \underline{F}(\underline{r}, \omega) \cdot e^{j\omega t} \right\}$$

CONDIZIONI DI CONTINUITÀ ALL'INTERFACCIA

Le equazioni di Maxwell in forma differenziale sono legate alla differenziabilità delle funzioni di campo.

In presenza di una discontinuità del mezzo è necessario definire delle condizioni che esprimono la discontinuità del mezzo alla discontinuità delle componenti del campo.

CONDIZIONI DI CONTINUITÀ DI CAMPI E INDUZIONI ALL'INTERFACCIA



Tramite Gauss:

$$\Delta S \cdot \underline{d}_1 \cdot \underline{i}_m + \Delta S \cdot \underline{d}_2 \cdot (-\underline{i}_m) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \rho \Delta V$$

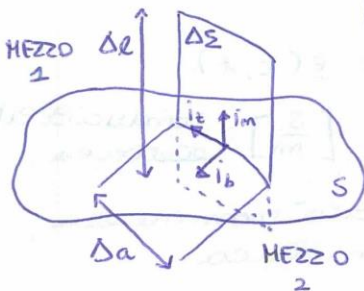
$$\Delta S \cdot \underline{b}_1 \cdot \underline{i}_m + \Delta S \cdot \underline{b}_2 \cdot (-\underline{i}_m) = 0$$

Con ρ : densità di carica elettrica $[\frac{C}{m^3}]$

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \rho \Delta V = \rho_s \cdot \Delta S \quad \text{con } \rho_s: \text{densità di carica superf.}$$

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \rho \Delta l = \rho_s \quad (\Delta V = \Delta l \cdot \Delta S)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\underline{d}_1 - \underline{d}_2) \cdot \underline{i}_m = \rho_s \\ (\underline{b}_1 - \underline{b}_2) \cdot \underline{i}_m = 0 \end{cases}$$



$$\underline{i}_t = \underline{i}_b \times \underline{i}_m$$

Tramite di Ampère:

$$\Delta a \cdot \underline{e}_1 \cdot \underline{i}_t + \Delta a \cdot \underline{e}_2 \cdot (-\underline{i}_t) = 0$$

$$\Delta a \cdot \underline{h}_1 \cdot \underline{i}_t + \Delta a \cdot \underline{h}_2 \cdot (-\underline{i}_t) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \underline{j} \cdot \underline{i}_b \Delta S$$

con $\underline{j}$: densità di corrente elettrica $[\frac{A}{m^2}]$

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \underline{j} \cdot \Delta S = \underline{j}_s \cdot \Delta a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\underline{e}_1 - \underline{e}_2) \cdot \underline{i}_t = 0 \\ (\underline{h}_1 - \underline{h}_2) \cdot \underline{i}_t = -\underline{j}_s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\underline{e}_1 - \underline{e}_2) \times \underline{i}_m = 0 \\ (\underline{h}_1 - \underline{h}_2) \times \underline{i}_m = -\underline{j}_s \end{cases}$$

CONDIZIONI DI CONTINUITÀ ALL'INTERFACCIA IN PRESENZA DI CORRENTI E CARICHE ELETTRICHE

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \rho \Delta l = \rho_s \quad ; \quad \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{l} = \mathbf{J}_s$$

$$(\underline{d}_1 - \underline{d}_2) \cdot \underline{i}_m = \rho_s$$

$$(\underline{b}_1 - \underline{b}_2) \cdot \underline{i}_m = 0$$

$$(\underline{e}_1 - \underline{e}_2) \times \underline{i}_m = 0$$

$$(\underline{h}_1 - \underline{h}_2) \times \underline{i}_m = -\underline{J}_s$$

CONDIZIONI DI CONTINUITÀ ALL'INTERFACCIA IN ASSENZA DI CORRENTI E CARICHE ELETTRICHE

$$(\underline{d}_1 - \underline{d}_2) \cdot \underline{i}_m = 0$$

$$(\underline{b}_1 - \underline{b}_2) \cdot \underline{i}_m = 0$$

$$(\underline{e}_1 - \underline{e}_2) \times \underline{i}_m = 0$$

$$(\underline{h}_1 - \underline{h}_2) \times \underline{i}_m = 0$$

CONDUTTORE ELETTRICO

Un mezzo è un conduttore se: $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sigma \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$

con $\sigma = \left[\frac{S}{m} \right]$: conducibilità elettrica.

all'interno di una regione con conducibilità non nulla, non può esistere una distribuzione asimmetrica permanente di cariche libere

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \sigma \cdot \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \sigma \cdot \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon} + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}) \cdot e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} \cdot t}$$

$\Rightarrow$ la carica si distribuisce completamente sulla superficie in modo uniforme.

CONDUTTORE ELETTRICO PERFETTO ($\sigma = \infty$)

$$\underline{e}(\underline{r}, t) \times \underline{j}_m = \emptyset$$

$$\underline{h}(\underline{r}, t) \times \underline{j}_m = -\underline{j}_s(\underline{r}, t)$$

$$\underline{d}(\underline{r}, t) \cdot \underline{j}_m = \rho_s(\underline{r}, t)$$

$$\underline{b}(\underline{r}, t) \cdot \underline{j}_m = \emptyset$$

PROPRIETÀ DEI MEZZI E RELAZIONI COSTITUTIVE

MAXWELL:

$$\nabla \times \underline{e}(\underline{r}, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \underline{b}(\underline{r}, t)$$

$$\nabla \times \underline{h}(\underline{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \underline{d}(\underline{r}, t) + \underline{j}_i(\underline{r}, t) + \underline{j}_e(\underline{r}, t)$$

$$\nabla \cdot \underline{d}(\underline{r}, t) = \rho_i(\underline{r}, t) + \rho_e(\underline{r}, t)$$

$$\nabla \cdot \underline{b}(\underline{r}, t) = 0$$

i : Sorgenti imprresse: suscitate da processi di natura non elettromagnetica

e : Sorgenti indotte: suscitate per effetto del campo elettromagnetico generato da quelle imprresse

Se il mezzo materiale è immobile, risulta:

$$\underline{d}(\underline{r}, t) = F_e[\underline{e}(\underline{r}, t)]$$

$$\underline{b}(\underline{r}, t) = F_h[\underline{h}(\underline{r}, t)]$$

ATTRIBUTI DI UN MEZZO

Mezzo LINEARE: se alla combinazione delle cause, secondo assegnati coefficienti, corrisponde la combinazione lineare degli effetti secondo gli stessi coefficienti.

$$F_e(\alpha_1 \underline{e}_1 + \alpha_2 \underline{e}_2) = \alpha_1 F_e(\underline{e}_1) + \alpha_2 F_e(\underline{e}_2)$$

Mezzo STAZIONARIO: se le caratteristiche fisiche rimangono costanti nel tempo. Ad una variazione temporale delle cause corrisponde una variazione temporale degli effetti.

Mezzo OMogeneo NELLO SPAZIO: se le caratteristiche fisiche rimangono costanti nello spazio. Ad una variazione spaziale delle cause corrisponde una variazione spaziale degli effetti.

Mezzo DISPERSIVO NEL TEMPO: l'effetto ad un dato istante dipende anche dalle cause applicate in istanti di tempo diversi.

=> PRINCIPIO DI CAUSALITA': limita l'integrazione temporale della causa a istanti precedenti a quelli attuali.

Mezzo SPAZIALMENTE NON DISPERSIVO: se la causa di un effetto in un punto dipende solo dalla causa applicata in quel punto

Mezzo ANISOTROPO: ad una causa applicata secondo una direzione possiamo corrispondere effetti in altre direzioni.

RELAZIONI COSTITUTIVE

- lineare
- isotropo
- non dispersivo nel tempo
- non dispersivo nello spazio
- omogeneo
- stazionario

$$\underline{d}(\underline{r}, t) = \epsilon \cdot \underline{e}(\underline{r}, t)$$

$$\underline{b}(\underline{r}, t) = \mu \cdot \underline{h}(\underline{r}, t)$$

$$\underline{j}_c(\underline{r}, t) = \sigma \cdot \underline{e}(\underline{r}, t)$$

ϵ : permittività

μ : permeabilità

- lineare
- isotropo
- non dispersivo nel tempo
- non dispersivo nello spazio
- omogeneo
- non stazionario

$$\underline{d}(\underline{r}, t) = \epsilon(t) \cdot \underline{e}(\underline{r}, t)$$

$$\underline{b}(\underline{r}, t) = \mu(t) \cdot \underline{h}(\underline{r}, t)$$

- lineare
- isotropo
- non dispersivo nel tempo
- non dispersivo nello spazio
- non omogeneo
- non stazionario

$$\underline{d}(\underline{r}, t) = \epsilon(\underline{r}, t) \cdot \underline{e}(\underline{r}, t)$$

$$\underline{b}(\underline{r}, t) = \mu(\underline{r}, t) \cdot \underline{h}(\underline{r}, t)$$

- lineare
- isotropo
- dispersivo nel tempo
- non dispersivo nello spazio
- non omogeneo
- non stazionario

$$\underline{d}(\underline{r}, t) = \int_{t'} g_e(t-t', \underline{r}) \underline{e}(\underline{r}, t') dt'$$

- lineare
- isotropo
- non dispersivo nel tempo
- dispersivo nello spazio
- non omogeneo
- non stazionario

$$\underline{d}(\underline{r}, t) = \int_{\underline{r}'} g_e(\underline{r}', t) \underline{e}(\underline{r}-\underline{r}', t) d\underline{r}'$$

- lineare
- anisotropo
- non dispersivo nel tempo
- non dispersivo nello spazio
- omogeneo
- stazionario

$$\underline{d}(\underline{r}, t) = \underline{\epsilon} \cdot \underline{e}(\underline{r}, t)$$

$$\underline{b}(\underline{r}, t) = \underline{\mu} \cdot \underline{h}(\underline{r}, t)$$

$$\underline{j}_c(\underline{r}, t) = \underline{\sigma} \cdot \underline{e}(\underline{r}, t)$$

In assenza di perdite:

$$\underline{\epsilon}^T = \underline{\epsilon}^* ; \underline{\mu}^T = \underline{\mu}^*$$

- lineare
- anisotropo
- dispersivo nel tempo
- dispersivo nello spazio
- non omogeneo
- non stazionario

$$\underline{d}(\underline{r}, t) = \iint_{\underline{r}', t'} \underline{g}_e(t, t'; \underline{r}, \underline{r}') \cdot \underline{e}(\underline{r}', t') d\underline{r}' dt'$$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA (TEOREMA DI POYNTING)

Equazioni di Maxwell nel dominio del tempo, per un mezzo senza perdite e privo di sorgenti:

$$i) \nabla \times \underline{e}(r, t) = - \frac{\partial \underline{b}(r, t)}{\partial t}$$

$$ii) \nabla \times \underline{h}(r, t) = \frac{\partial \underline{d}(r, t)}{\partial t}$$

$$iii) \nabla \cdot \underline{d}(r, t) = \rho$$

$$iv) \nabla \cdot \underline{b}(r, t) = 0$$

$$N.B: \nabla \cdot \underline{d}(r, t) = - \frac{\partial \rho(r, t)}{\partial t}$$

ETTORE DI POYNTING: $\underline{s} = \underline{e} \times \underline{h}$

$$\nabla \cdot \underline{s} = \nabla \cdot (\underline{e} \times \underline{h}) = - \underline{e} \cdot \nabla \times \underline{h} + \underline{h} \cdot \nabla \times \underline{e} = - \underline{e} \cdot \frac{\partial \underline{d}(r, t)}{\partial t} - \underline{h} \cdot \frac{\partial \underline{b}(r, t)}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \underline{s} = - \frac{\partial w}{\partial t} : \text{Densità di potenza per unità di volume.}$$

$$W = (W_e + W_h) = \int_{-\infty}^t \underline{e} \cdot \frac{\partial \underline{d}(r, t')}{\partial t'} dt' + \int_{-\infty}^t \underline{h} \cdot \frac{\partial \underline{b}(r, t')}{\partial t'} dt' : \text{Energia}$$

nel caso di mezzi isotropi, non dispersivi e statici:

$$\underline{d}(r, t) = \epsilon \cdot \underline{e}(r, t) ; \underline{b}(r, t) = \mu \cdot \underline{h}(r, t)$$

$$\frac{\partial \underline{d}(r, t)}{\partial t} = \epsilon \cdot \frac{\partial \underline{e}(r, t)}{\partial t} ; \frac{\partial \underline{b}(r, t)}{\partial t} = \mu \cdot \frac{\partial \underline{h}(r, t)}{\partial t}$$

$$W_e = \int_{-\infty}^t \underline{e} \cdot \frac{\partial \underline{d}(r, t')}{\partial t'} dt' = \epsilon \cdot \int_{-\infty}^t \underline{e} \cdot \frac{\partial \underline{e}(r, t')}{\partial t'} dt'$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^t f \cdot f' dt = f \cdot f \Big|_{-\infty}^t - \int_{-\infty}^t f' f dt$$

$$\Rightarrow 2 \int_{-\infty}^t f \cdot f' dt = f \cdot f \Big|_{-\infty}^t$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^t f \cdot f' dt = \frac{1}{2} f \cdot f \Big|_{-\infty}^t$$

$$W_e = \epsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot |\underline{e}|^2 : \text{Densità volumetrica di energia elettrica istantanea.}$$

$$W_h = \int_{-\infty}^t \underline{h} \cdot \frac{\partial \underline{b}(r, t')}{\partial t'} dt' = \mu \cdot \frac{1}{2} \cdot |\underline{h}|^2 : \text{Densità volumetrica di energia magnetica istantanea.} \quad (21)$$

nei caso di mezzi isotropi e dispersivi:

$$W_e = \int_{-\infty}^t \underline{e} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} \underline{d}(\underline{r}, t') dt' : \text{Densità volumetrica di pseudo-energia elettrica istantanea.}$$

$$W_h = \int_{-\infty}^t \underline{h} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} \underline{b}(\underline{r}, t') dt' : \text{Densità volumetrica di pseudo-energia magnetica istantanea.}$$

$$\nabla \cdot \underline{s} = - \frac{\partial}{\partial t} W \Rightarrow \iiint_V (\nabla \cdot \underline{s}) dV = - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V W dV$$

Dal Teorema di Gauss:

$$\iint_S \underline{s} \cdot \hat{\underline{m}} dS = - \underbrace{\frac{d}{dt} W_V}_{\text{Potenza}} \quad \text{con} \quad W_V = \iiint_V W dV : \text{Energia elettrica e magnetica immagazzinata nel volume } V.$$

Il vettore di Poynting deve essere interpretato come il vettore il cui flusso è pari alla potenza istantanea usante dalla superficie. Rappresenta, quindi, il flusso di potenza istantanea per unità di superficie.

Equazioni di Maxwell nel dominio del tempo, per un mezzo in cui sono presenti generatori e delle perdite per conducibilità σ :

$$i) \nabla \times \underline{e}(\underline{r}, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \underline{b}(\underline{r}, t)$$

$$ii) \nabla \times \underline{h}(\underline{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \underline{d}(\underline{r}, t) + \underline{j}(\underline{r}, t)$$

$$\text{con } \underline{j}(\underline{r}, t) = \sigma \cdot \underline{e}(\underline{r}, t) + \underline{j}_i(\underline{r}, t)$$

$$iii) \nabla \cdot \underline{d}(\underline{r}, t) = \rho(\underline{r}, t)$$

$$iv) \nabla \cdot \underline{b}(\underline{r}, t) = 0$$

$$\nabla \cdot \underline{s} = \nabla \cdot (\underline{e} \times \underline{h}) = - \underline{e} \cdot \nabla \times \underline{h} + \underline{h} \cdot \nabla \times \underline{e}$$

$$= - \underline{e} \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{d}(\underline{r}, t) + \sigma \cdot \underline{e}(\underline{r}, t) + \underline{j}_i(\underline{r}, t) \right) - \underline{h} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \underline{b}(\underline{r}, t)$$

$$= - \underline{e} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \underline{d}(\underline{r}, t) - \underline{h} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \underline{b}(\underline{r}, t) - \sigma |\underline{e}|^2 - \underline{e} \cdot \underline{j}_i(\underline{r}, t)$$

$$= - \frac{\partial}{\partial t} W - \sigma |\underline{e}(\underline{r}, t)|^2 - \underline{e}(\underline{r}, t) \cdot \underline{j}_i(\underline{r}, t)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \underline{s} + \frac{\partial}{\partial t} W + \sigma |\underline{e}|^2 = - \underline{e} \cdot \underline{j}_i$$

Integrando su un generico volume V :

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial t} W_V + P_J + \phi_S(\underline{s})$$

con:

$$P_0 = - \iiint_V \underline{j}_i \cdot \underline{e} \, dV$$

$$W_V = \iiint_V (W_e + W_h) \, dV$$

$$P_J = \iiint_V \sigma |\underline{e}|^2 \, dV$$

$$\phi_S(\underline{s}) = \oint_S \underline{s} \cdot \hat{n} \, dS$$

Integriamo quindi in un intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$

$$[W_V(t_2) - W_V(t_1)] = \int_{t_1}^{t_2} P_0 \, dt - \int_{t_1}^{t_2} P_J \, dt - \int_{t_1}^{t_2} \phi_S(\underline{s}) \, dt$$

con:

$\int_{t_1}^{t_2} P_0 \, dt$: energia fornita dalle sorgenti del campo in Δt

$\int_{t_1}^{t_2} P_J \, dt$: energia dissipata nel volume V per effetto Joule in Δt

$W_V(t_2) - W_V(t_1)$: Variazione dell'energia immagazzinata nel volume V in Δt .

$\int_{t_1}^{t_2} \phi_S(\underline{s}) \, dt$: energia che esce dal volume V in Δt .

MEDIE DEI CAMPI MONOCROMATICI

Per i campi monocromatici interessano le medie temporali delle grandezze energetiche.

=> CAMPO MONOCROMATICO: la funzione che lo descrive ha una sola componente spettrale.

$$(\delta = \frac{1}{T}).$$

$$a(t) = a \cdot \cos(\omega t + \phi_A)$$

$$\Rightarrow A = a \cdot e^{j\phi_A}$$

$$b(t) = b \cdot \cos(\omega t + \phi_B)$$

$$\Rightarrow B = b \cdot e^{j\phi_B}$$

$$\tilde{A} = a \cdot e^{j\phi_A} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow a(t) = \text{Re}\{\tilde{A}\} = \frac{\tilde{A} + \tilde{A}^*}{2}$$

$$\tilde{B} = b \cdot e^{j\phi_B} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow b(t) = \text{Re}\{\tilde{B}\} = \frac{\tilde{B} + \tilde{B}^*}{2}$$

$$a(t) \cdot b(t) = a \cdot b \cdot \cos(\omega t + \phi_A) \cdot \cos(\omega t + \phi_B)$$

$$= \frac{1}{2} ab \cos(\phi_A - \phi_B) + \frac{1}{2} ab \cos(2\omega t + \phi_A + \phi_B)$$

Termine costante o di natura di ω :

$$\frac{1}{2} \text{Re}[AB^*] = \frac{1}{2} \text{Re}[|A||B| \cdot e^{j(\phi_A - \phi_B)}] = \frac{1}{2} ab \cos(\phi_A - \phi_B)$$

Termine oscillante di periodo 2ω :

$$\frac{1}{2} \text{Re}[AB e^{j2\omega t}] = \frac{1}{2} \text{Re}[|A||B| e^{j(\phi_A + \phi_B) + j2\omega t}] = \frac{1}{2} ab \cos(2\omega t + \phi_A + \phi_B)$$

$$\Rightarrow a(t) \cdot b(t) = \frac{1}{2} \text{Re}[AB^*] + \frac{1}{2} \text{Re}[AB e^{j2\omega t}] = \frac{1}{2} \text{Re}[\tilde{A}\tilde{B}^*] + \frac{1}{2} \text{Re}[\tilde{A}\tilde{B}]$$

Valore medio su $T = 2\pi/\omega$:

$$\langle a(t) \cdot b(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \left\{ \frac{1}{2} \text{Re}[AB^*] + \frac{1}{2} \text{Re}[AB e^{j2\omega t}] \right\} dt$$

$$\langle a(t) \cdot b(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[AB^*] = \frac{1}{2} ab \cdot \cos(\phi_A - \phi_B)$$

$$\text{Caso particolare: } \langle a(t) \cdot a(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[AA^*] = \frac{1}{2} |A|^2.$$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA (TEOREMA DI POYNTING)

$$\underline{e}(r, t) \Rightarrow \underline{E}(r)$$

$$\underline{h}(r, t) \Rightarrow \underline{H}(r)$$

Valore medio di $\underline{S}(r, t)$ su $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

$$\langle \underline{S}(r, t) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\underline{E}(r) \times \underline{H}^*(r)]$$

Il valore medio nel periodo del vettore di Poynting uguaglia la parte reale del vettore di Poynting complesso.

$$\underline{S}(r) = \frac{1}{2} [\underline{E}(r) \times \underline{H}^*(r)] \Rightarrow \langle \underline{S}(r, t) \rangle = \operatorname{Re} [\underline{S}(r)]$$

La densità media di potenza elettromagnetica associata ad un campo elettromagnetico monodimensionale è data dalla parte reale del vettore di Poynting complesso.

Equazioni di Maxwell nel dominio dei fasori per un mezzo isotropo, con perdite ed in presenza di sorgenti:

$$i) \nabla \times \underline{E}(r, \omega) = -j\omega\mu \underline{H}(r, \omega)$$

$$ii) \nabla \times \underline{H}(r, \omega) = j\omega\varepsilon \underline{E}(r, \omega) + \underline{J}(r, \omega)$$

$$\text{con } \underline{J}(r, \omega) = \sigma \cdot \underline{E}(r, \omega) + \underline{J}_i(r, \omega)$$

$$iii) \nabla \cdot \underline{E}(r, \omega) = \frac{1}{\varepsilon} \rho(r, \omega)$$

$$iv) \nabla \cdot \underline{H}(r, \omega) = 0$$

Divergenza del vettore di Poynting:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{S} &= \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* \right) = \frac{1}{2} \left[-\underline{E} \cdot \nabla \times \underline{H}^* + \underline{H}^* \cdot \nabla \times \underline{E} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\underline{E} \cdot (-j\omega\varepsilon^* \underline{E}^* + \sigma \cdot \underline{E}^* + \underline{J}_i^*) + \underline{H}^* \cdot (-j\omega\mu \underline{H}) \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \underline{S} = \frac{1}{2} \left\{ j\omega\varepsilon^* |\underline{E}|^2 - \sigma |\underline{E}|^2 - \underline{E} \cdot \underline{J}_i^* - j\omega\mu |\underline{H}|^2 \right\}$$

$$\text{Considerando che: } \underline{S} = \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* = \underline{S}_R + j\underline{S}_i$$

Risultato:

(5)

Divergenza $\mathbf{R}$:

$$\nabla \cdot \underline{S}_R + \frac{1}{2} \sigma |\underline{E}|^2 = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} (\underline{E} \cdot \underline{J}_i^*)$$

Divergenza $\mathbf{I}$:

$$\nabla \cdot \underline{S}_i + 2\omega (\tilde{W}_m - \tilde{W}_e) = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} (\underline{E} \cdot \underline{J}_i^*)$$

con $\tilde{W}_e = \frac{1}{4} |\underline{E}|^2 \epsilon_0$; $\tilde{W}_m = \frac{1}{4} |\underline{H}|^2 \mu_0$

$$\nabla \cdot \underline{S}_R + \tilde{P}_D = \tilde{P}_R$$

$\underline{S}_R = \langle \underline{S} \rangle$: valore medio della densità superficiale di flusso di potenza elettromagnetica

$\tilde{P}_D = \frac{1}{2} \sigma |\underline{E}|^2 = \langle \sigma |\underline{E}|^2 \rangle$: densità volumetrica della media temporale della potenza di perdita per conducibilità.

$\tilde{P}_R = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \underline{E} \cdot \underline{J}_i^* \}$: densità volumetrica della media temporale della potenza fornita dalle sorgenti.

$$\nabla \cdot \underline{S}_i + 2\omega (\tilde{W}_m - \tilde{W}_e) = \tilde{P}_i$$

$\underline{S}_i$: densità superficiale di flusso di potenza reattiva

$\tilde{W}_m = \langle W_m \rangle = \langle \frac{1}{2} \mu_1 |\underline{h}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \mu_1 |\underline{H}|^2$: densità volumetrica della media temporale dell'energia magnetica.

$\tilde{W}_e = \langle W_e \rangle = \langle \frac{1}{2} \epsilon_1 |\underline{E}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_1 |\underline{E}|^2$: densità volumetrica della media temporale dell'energia elettrica.

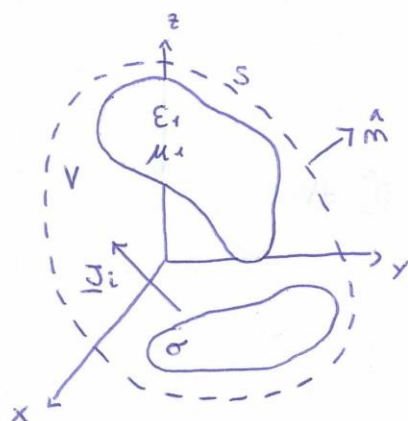
$\tilde{P}_i = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} (\underline{E} \cdot \underline{J}_i^*)$: densità volumetrica di potenza reattiva associata alle sorgenti.

Consideriamo le espressioni:

$$\nabla \cdot \underline{S}_R + \tilde{P}_y = \tilde{P}_R$$

$$\nabla \cdot \underline{S}_z + 2w(\tilde{W}_m - \tilde{W}_e) = \tilde{P}_z$$

Consideriamo un generico volume che racchiude le sorgenti di campo:



Integrandolo nel volume V ed applicando il Teorema di Gauss:

$$\oint_S \underline{S}_R \cdot \hat{m} dS + \iiint_V \tilde{P}_y dV = \iiint_V \tilde{P}_R dV$$

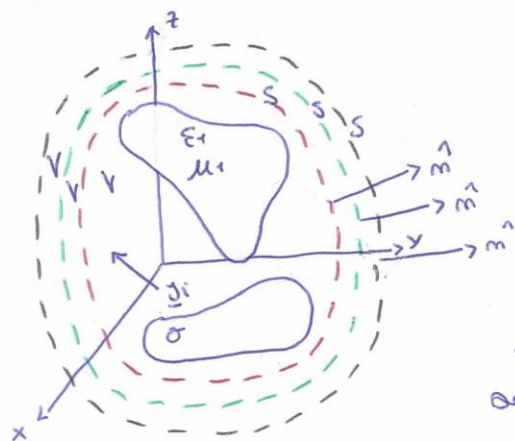
$$\oint_S \underline{S}_z \cdot \hat{m} dS + 2w \iiint_V (\tilde{W}_m - \tilde{W}_e) dV = \iiint_V \tilde{P}_z dV$$

In assenza di perdite ($\sigma = \rho$):

$$I) \oint_S \underline{S}_R \cdot \hat{m} dS = \iiint_V \tilde{P}_R dV$$

$$II) \oint_S \underline{S}_z \cdot \hat{m} dS + 2w \iiint_V (\tilde{W}_m - \tilde{W}_e) dV = \iiint_V \tilde{P}_z dV$$

Considerazioni su I:



$$\oint_S \underline{S}_R \cdot \hat{m} dS = \iiint_V \tilde{P}_R dV$$

La potenza attiva fornita dalle sorgenti di campo è interpretabile come flusso della parte reale del vettore di Poynting su un qualsiasi superficie S che circonda le sorgenti.

Perché all'aumentare della superficie, il termine

$$\iiint_V \tilde{P}_r dV \text{ rimane invariato, il flusso di } \underline{S}_r \text{ è}$$

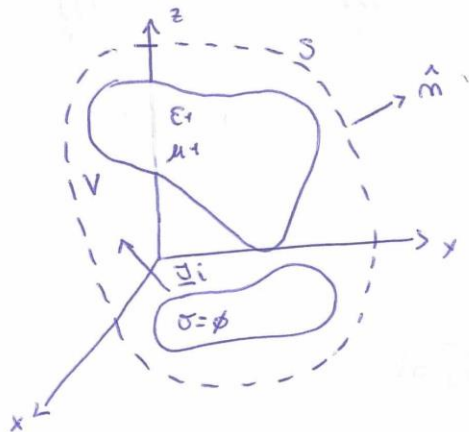
indipendente dalla superficie.

=> Si può pensare ad un potenziale che si attacca alle sorgenti e che quindi è disponibile, anche se con bassa densità, a grande distanza.

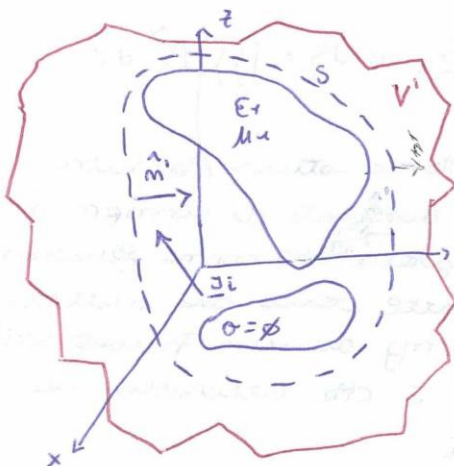
Considerazioni su II:

$$\oint_S \underline{S}_r \cdot \hat{n} dS + 2\omega \iiint_V (\tilde{W}_m - \tilde{W}_e) dV = \iiint_V \tilde{P}_r dV$$

Consideriamo un volume V :



Consideriamo il volume complementare V' :



$$\oint_S \underline{S}_I \cdot \hat{m}' dS + 2w \iiint_{V'} (\tilde{W}_m - \tilde{W}_e) dV = \iiint_{V'} \tilde{P}_I dV$$

in quanto nel
volume V' non
ci sono sorgenti

$$\Rightarrow \hat{m}' = -\hat{m}$$

$$-\oint_S \underline{S}_I \cdot \hat{m} dS + 2w \iiint_{V'} (\tilde{W}_m - \tilde{W}_e) dV = 0$$

$$\oint_S \underline{S}_I \cdot \hat{m} dS = 2w \iiint_{V'} (\tilde{W}_m - \tilde{W}_e) dV$$

Quindi :

$$2w \iiint_{V'} (\tilde{W}_m - \tilde{W}_e) dV + 2w \iiint_V (\tilde{W}_m - \tilde{W}_e) dV = \iiint_V \tilde{P}_I dV$$

$$2w \iiint_{V+V'} (\tilde{W}_m - \tilde{W}_e) dV = \iiint_V \tilde{P}_I dV$$

La potenza reattiva associata alle sorgenti è uguale
alla differenza tra le energie reattive dei
campi elettrico e magnetico in tutto lo spazio.

ONDE PIANE IN MEZZI ISOTROPI E NON DISPERSIVI

ONDE PIANE NEL DOMINIO DEL TEMPO

Equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti in un mezzo omogeneo ed isotropo:

$$I) \nabla \times \underline{e}(r, t) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \underline{h}(r, t)$$

$$II) \nabla \times \underline{h}(r, t) = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \underline{e}(r, t)$$

$$III) \nabla \cdot \underline{e}(r, t) = 0$$

$$IV) \nabla \cdot \underline{h}(r, t) = 0$$

Supponiamo che i campi dipendano dalle sole variabili z e t :

$$\underline{e}(z, t)$$

$$\underline{h}(z, t)$$

$$I) -\frac{\partial}{\partial z} e_y(z, t) \hat{x} + \frac{\partial}{\partial z} e_x(z, t) \hat{y} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} h_x(z, t) \hat{x} - \mu \frac{\partial}{\partial t} h_y(z, t) \hat{y} - \mu \frac{\partial}{\partial t} h_z(z, t) \hat{z}$$

$$II) -\frac{\partial}{\partial z} h_y(z, t) \hat{x} + \frac{\partial}{\partial z} h_x(z, t) \hat{y} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} e_x(z, t) \hat{x} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} e_y(z, t) \hat{y} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} e_z(z, t) \hat{z}$$

Per quanto riguarda I :

$$(\hat{x}) \frac{\partial}{\partial z} e_y(z, t) = \mu \frac{\partial}{\partial t} h_x(z, t)$$

$$(\hat{y}) \frac{\partial}{\partial z} e_x(z, t) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} h_y(z, t)$$

$$(\hat{z}) \frac{\partial}{\partial t} h_z(z, t) = 0$$

$\Rightarrow$ Campi magnetostatici ed elettrostatici lungo z .

Per quanto riguarda II :

$$(\hat{x}) -\frac{\partial}{\partial z} h_y(z, t) = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} e_x(z, t)$$

$$(\hat{y}) \frac{\partial}{\partial z} h_x(z, t) = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} e_y(z, t)$$

$$(\hat{z}) \frac{\partial}{\partial t} e_z(z, t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} E_x(z,t) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} H_y(z,t)$$

derivando lungo z : $\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z,t) = -\mu \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} H_y(z,t)$

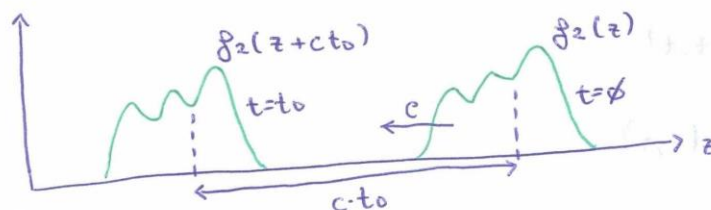
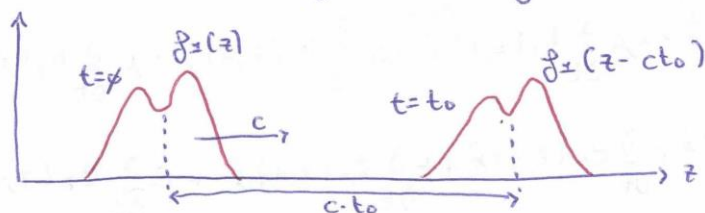
$$\frac{\partial}{\partial z} H_y(z,t) = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_x(z,t)$$

derivando lungo t : $\frac{\partial^2}{\partial z \partial t} H_y(z,t) = -\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(z,t)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z,t) = \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(z,t) \quad , \quad c^2 = \frac{1}{\mu \varepsilon}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z,t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(z,t) = 0 \quad : \text{Equazione di D'Alembert}$$

Soluzione : $E_x(z,t) = f_1(z-ct) + f_2(z+ct)$



Consideriamo il caso di onde che viaggiano per $z > 0$.

$$E_x(z,t) = f_1(z-ct) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} E_x(z,t) = -c \frac{\partial}{\partial z} E_x(z,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} E_x(z,t) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} H_y(z,t) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} H_y(z,t) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\partial}{\partial z} E_x(z,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} H_y(z,t) = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_x(z,t) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} H_y(z,t) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\partial}{\partial z} E_x(z,t)$$

La soluzione del campo magnetico soddisfa ancora l'equazione di D'Alembert ed ha la stessa forma di quella del campo elettrico.

$$E_x(z,t) = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot h_y(z,t) \quad \text{con} \quad \xi = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 377 \Omega$$

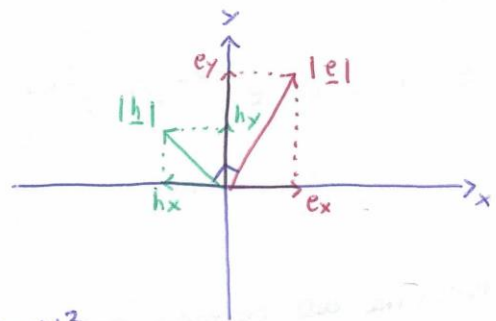
↑
impedenza caratteristica del mezzo.

$$\underline{E}(r,t) \cdot \underline{h}(r,t) = 0 \quad ; \quad \underline{h}(r,t) = \frac{1}{\xi} [\hat{z} \times \underline{E}(r,t)] : \text{ONDA PIANA}$$

ETTORE DI POYNTING

$$\underline{S}(z,t) = \underline{E}(z,t) \times \underline{h}(z,t)$$

$$\text{Onda Piana} : \underline{h}(z,t) = \frac{1}{\xi} [\hat{z} \times \underline{E}(z,t)]$$



$$\Rightarrow \underline{S}(z,t) = \frac{1}{\xi} \underline{E}(z,t) \times [\hat{z} \times \underline{E}(z,t)] = \frac{|\underline{E}(z,t)|^2}{\xi} \hat{z}$$

Il vettore di Poynting di un'onda piana è reale e diretto lungo la direzione di propagazione.

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon |\underline{E}(z,t)|^2 \quad ; \quad W_m = \frac{1}{2} \mu |\underline{h}(z,t)|^2$$

$$\frac{W_e}{W_m} = \frac{\epsilon |\underline{E}(z,t)|^2}{\mu |\underline{h}(z,t)|^2} \stackrel{\uparrow}{=} \frac{\epsilon \mu}{\mu \epsilon} = 1 \quad \Rightarrow \quad W_e = W_m \Rightarrow W_e + W_m = 2 W_e.$$

↑
nei campi
un'onda piana

$$\underline{S}(z,t) = 2 W_e \cdot c \cdot \hat{z} = (W_e + W_m) \cdot c \cdot \hat{z}$$

$$\underline{v} = c \hat{z} : \text{vettore velocità}$$

$$\underline{S}(z,t) = (W_e + W_m) \cdot \underline{v}$$

ONDE PIANE NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

Supponiamo di considerare la soluzione dell'equazione d'onda in regime sinusoidale:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z, t) - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(z, t) = 0$$

$$E_x(z, t) = \text{Re} \{ E_x(z) e^{j\omega t} \}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z) + \frac{\omega^2}{c^2} E_x(z) = 0$$

con $k = \frac{\omega}{c}$: Costante di propagazione del mezzo

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z) + k^2 E_x(z) = 0$$

$$E_x(z) = E^+ e^{-jkz} + E^- e^{jkz}$$

Onda viaggiante per $z > 0$

Onda viaggiante per $z < 0$

Soluzione del campo magnetico:

$$\frac{\partial}{\partial t} h_y(z, t) = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial z} E_x(z, t)$$

$$E_x(z, t) = \text{Re} \{ E_x(z) \cdot e^{j\omega t} \}$$

$$h_y(z, t) = \text{Re} \{ H_y(z) \cdot e^{j\omega t} \}$$

$$j\omega H_y(z) = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} E_x(z)$$

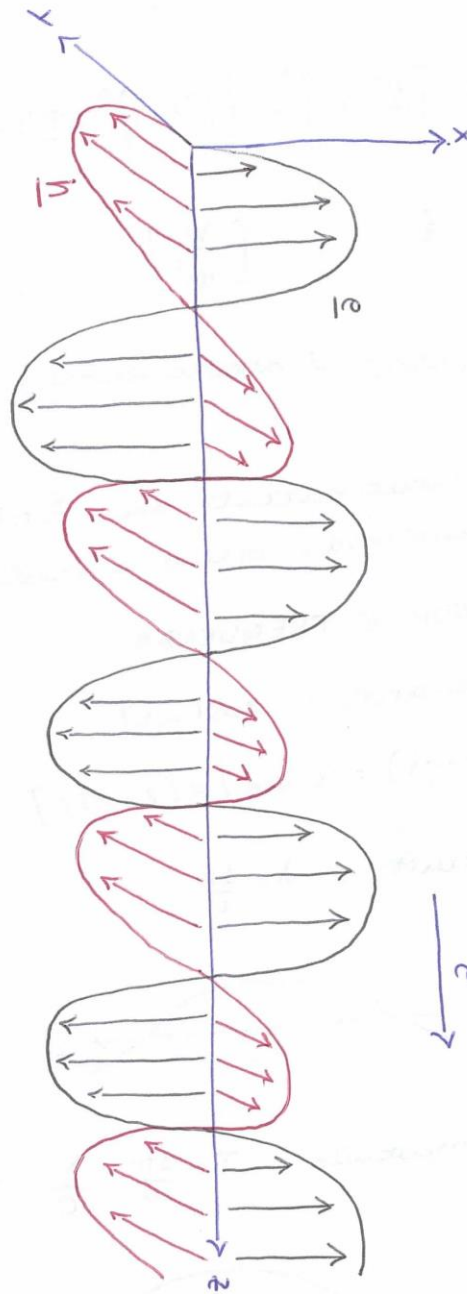
$$H_y(z) = -\frac{1}{j\omega\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial z} E_x(z) = \frac{1}{\xi} (E^+ e^{-jkz} - E^- e^{jkz})$$

Considerando solo l'onda viaggiante per $z > 0$:

$$E_x(z) = E^+ e^{-jkz}$$

$$H_y(z) = \frac{1}{\xi} E^+ e^{-jkz}$$

$$\underline{E}(z) \cdot \underline{H}(z) = 0 \quad ; \quad \underline{H}(z) = \frac{1}{\xi} [\hat{z} \times \underline{E}(z)]$$



30

ONDE PIANE MONOCROMATICHE

$$\begin{aligned}
 \underline{S}(z) &= \frac{1}{2} \left\{ \underline{E}^+(z) \times [\underline{H}^+(z)]^* \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \underline{E}^+(z) \times \hat{z} \times \left[\frac{1}{\epsilon} \underline{E}^+(z) \right]^* \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\epsilon^*} \left\{ \underline{E}^+(z) \cdot [\underline{E}^+(z)]^* - [\underline{E}^+(z)]^* [\underline{E}^+(z) \cdot \hat{z}] \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{|\underline{E}^+|^2}{\epsilon^*} \cdot \hat{z} \quad \left[\frac{W}{m^2} \right]
 \end{aligned}$$

Il vettore di Poynting è diretto lungo la direzione di propagazione.

Se il mezzo è caratterizzato da $\epsilon \in \mathbb{R}$, il vettore di Poynting associato ad un'onda piana è reale.

LUNGHEZZA D'ONDA E FREQUENZA

Segnale sinusoidale: $\cos(\omega t)$

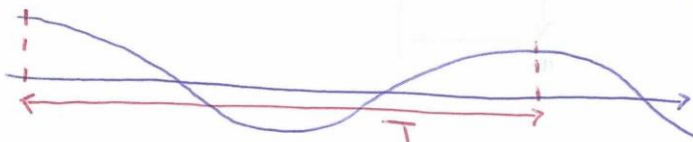
$$C_x(z, t) = f_{\pm}(z - ct) = X \cdot \cos[k(z - ct)]$$

Periodicità Spaziale: $\lambda = \frac{2\pi}{k}$



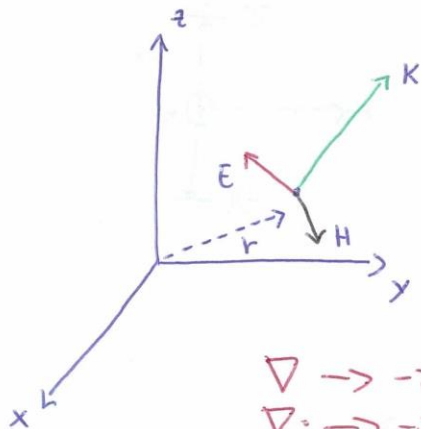
Fisso t e guardo andamento in z .

Periodicità Temporale: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{c} \Rightarrow \lambda \cdot f = c$



Fisso z e guardo andamento in t .

ONDA PIANA IN UNA GENERICA DIREZIONE IN UN MEZZO ISOTROPO ED OMOGENEO



$$I) \underline{E}(\underline{r}) = \underline{E} \cdot e^{-j\underline{K} \cdot \underline{r}}$$

$$II) \underline{H}(\underline{r}) = \underline{H} \cdot e^{-j\underline{K} \cdot \underline{r}}$$

$$\text{con } \underline{K} = K_x \cdot \underline{i}_x + K_y \cdot \underline{i}_y + K_z \cdot \underline{i}_z$$

$$\underline{r} = x \cdot \underline{i}_x + y \cdot \underline{i}_y + z \cdot \underline{i}_z$$

$$\text{Velocità di fase: } V_f = \frac{\omega}{k} = c$$

$$\nabla \rightarrow -j\underline{K}$$

$$\nabla \cdot \rightarrow -j\underline{K} \cdot$$

$$\nabla \times \rightarrow -j\underline{K} \times$$

Sostituiamo I e II nelle equazioni di Maxwell:

$$I) \underline{K} \times \underline{E} = \omega \mu \underline{H}$$

$$II) -\underline{K} \times \underline{H} = \omega \epsilon \underline{E}$$

$$III) \underline{K} \cdot \underline{E} = 0$$

$$IV) \underline{K} \cdot \underline{H} = 0$$

$\Rightarrow \underline{E}, \underline{H}, \underline{K}$ formano una terna destrorsa

$\underline{E}, \underline{H}$ sono ortogonali a $\underline{K}$

$$\underline{K} \times \underline{E} \times \underline{K} = \omega^2 \epsilon \mu \underline{E} \Rightarrow (\underline{K} \cdot \underline{K} - \omega^2 \epsilon \mu) \underline{E} = 0$$

$$\text{Per } \underline{E} \neq 0 \text{ viene espressa } K^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = \omega^2 \epsilon \mu$$

E è quindi fissata e l'ampiezza del vettore di propagazione.

PROPRIETA': I vettori di un'onda piana sono completamente determinati quando sono specificate due componenti dei campi e del vettore propagazione.

ESEMPIO:

Fissate E_x, E_y del campo $\underline{E}$ ed K_x, K_y del vettore propagazione:

$$\underline{K} \cdot \underline{E} = 0$$

$\underline{H}$ è fissato da:

$$E_z = - \frac{K_x E_x + K_y E_y}{K_z} = - \frac{K_x E_x + K_y E_y}{\sqrt{K^2 - K_x^2 - K_y^2}}$$

$$; \underline{H} = \frac{1}{\omega \mu} \cdot \underline{K} \times \underline{E}$$

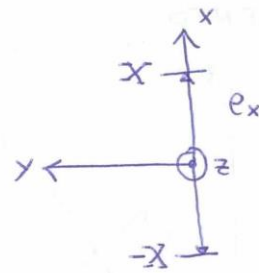
(36)

POLARIZZAZIONE LINEARE LUNGO X

Polarizzazione lineare lungo x:

Il vettore E_x oscilla solo lungo l'asse x:
nel tempo con periodicità:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{c}$$



POLARIZZAZIONE GENERICA

In generale il vettore campo elettrico può avere componenti lungo la direzione x ed y.

$$\underline{e} = e_x \cdot \underline{i}_x + e_y \cdot \underline{i}_y$$

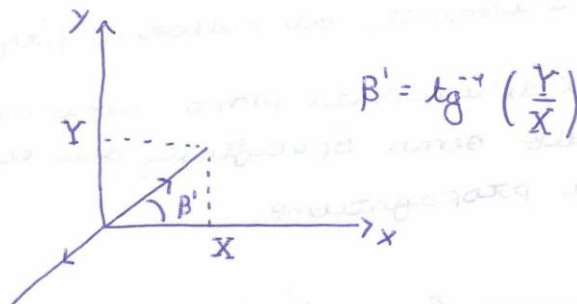
$$\begin{cases} e_x = X \cdot \cos(\omega t + \delta_x) \\ e_y = Y \cdot \cos(\omega t + \delta_y) \end{cases}$$

POLARIZZAZIONE LINEARE

$$\delta_x = \delta_y = \delta$$

$$\begin{cases} e_x = X \cdot \cos(\omega t + \delta) \\ e_y = Y \cdot \cos(\omega t + \delta) \end{cases} \Rightarrow \frac{e_x}{e_y} = \frac{X}{Y} \quad \forall t$$

Polarizzazione lineare, ma la retta è inclinata di un angolo rispetto all'asse x.



$$\beta' = \tan^{-1} \left(\frac{Y}{X} \right)$$

POLARIZZAZIONE CIRCOLARE

$$X = Y \quad ; \quad \delta_x - \delta_y = \pm \frac{\pi}{2}$$

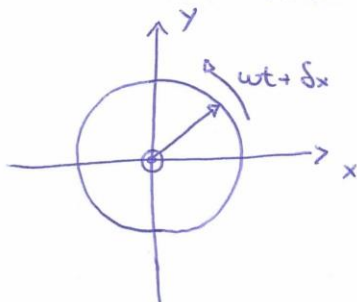
$$\begin{cases} e_x = X \cdot \cos(\omega t + \delta_x) \\ e_y = X \cdot \cos(\omega t + \delta_x \mp \frac{\pi}{2}) = \pm X \cdot \sin(\omega t + \delta_x) \end{cases}$$

$$(e_x^2 + e_y^2) = X^2 \cdot [\sin^2(\omega t + \delta_x) + \cos^2(\omega t + \delta_x)]$$

$$(e_x^2 + e_y^2) = X^2 \quad : \text{Equazione parametrica di un cerchio di Raggio } X.$$

La punta del vettore $\underline{e}$ gira su di una circonferenza con velocità angolare ω .

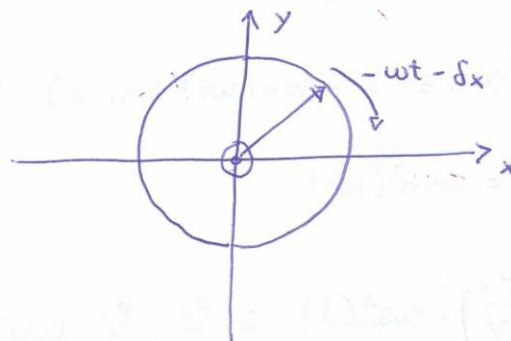
SENSO ANTIORARIO



$$\delta_x - \delta_y = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} e_x = X \cdot \cos(\omega t + \delta_x) \\ e_y = X \cdot \sin(\omega t + \delta_x) \end{cases}$$

SENSO ORARIO



$$\delta_x - \delta_y = -\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} e_x = X \cdot \cos(\omega t + \delta_x) \\ e_y = -X \cdot \sin(\omega t + \delta_x) \end{cases}$$

POLARIZZAZIONE : CASO GENERALE

Supponiamo di prendere l'origine dei tempi in modo che :

$$\delta_y = 0$$

Tutte le considerazioni successive valgono a patto di sostituire :

$$\delta = \delta_x - \delta_y$$

$$\begin{cases} e_x = X \cdot \cos(\omega t + \delta) \\ e_y = Y \cdot \cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{e_x}{X} = \cos(\omega t) \cos(\delta) - \sin(\omega t) \sin(\delta) \\ \frac{e_y}{Y} = \cos(\omega t) \end{cases}$$

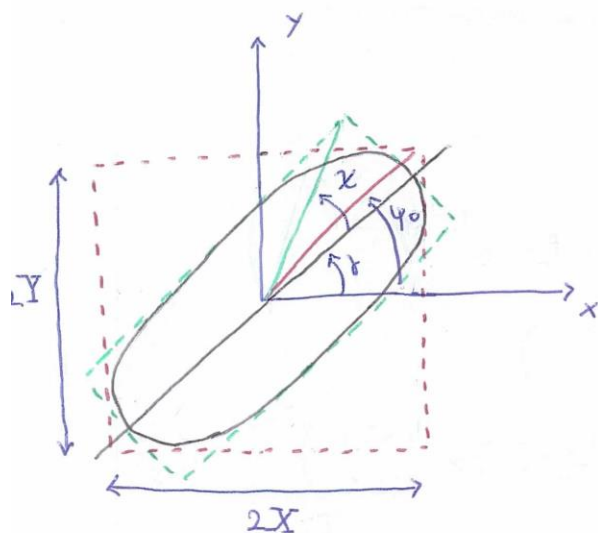
$$\begin{cases} \frac{e_x}{X} - \frac{e_y}{Y} \cdot \cos(\delta) = -\sin(\omega t) \sin(\delta) \\ 1 - \left(\frac{e_y}{Y} \right)^2 = \sin^2(\omega t) \end{cases}$$

$$\left(\frac{e_x}{X} \right)^2 + \left(\frac{e_y}{Y} \right)^2 \cdot \cos^2(\delta) - 2 \frac{e_x}{X} \cdot \frac{e_y}{Y} \cdot \cos(\delta) = \left(1 - \left(\frac{e_y}{Y} \right)^2 \right) \sin^2(\delta)$$

$$\left(\frac{e_x}{X} \right)^2 + \left(\frac{e_y}{Y} \right)^2 - 2 \frac{e_x}{X} \cdot \frac{e_y}{Y} \cdot \cos(\delta) = \sin^2(\delta)$$

A seconda del valore di questa equazione, può essere descritta un'ellipse, una circonferenza o una retta.

$$\left(\frac{e_x}{X}\right)^2 + \left(\frac{e_y}{Y}\right)^2 - 2 \frac{e_x}{X} \cdot \frac{e_y}{Y} \cdot \cos(\delta) = \sin^2(\delta)$$



γ : angolo di rotazione
 χ : angolo di ellipticità
 ψ_0 : angolo semi-assi

$$\tan \psi_0 = \frac{Y}{X} \quad ; \quad 0 \leq \psi_0 \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\tan 2\gamma = \tan(2\psi_0) \cos \delta \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\tan 2\chi = \sin(2\psi_0) \sin \delta \quad ; \quad -\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\tan 2\gamma = \frac{2XY}{Y^2 - X^2} \cos \delta$$

ONDA PIANA NON OMogenea IN UN MEZZO ISOTROPICO ED OMogeneo

Se $k_x, k_y, k_z \in \mathbb{R}$, e l'estremo di $\underline{k}$ giace su una sfera di raggio k , e la sua direzione è individuata da angoli θ, φ dati da:

$$k_x = k \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi$$

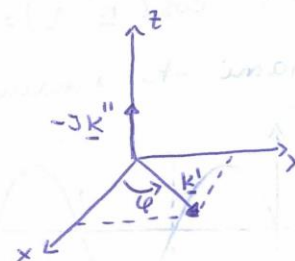
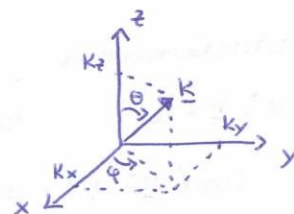
$$k_y = k \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi$$

$$k_z = \sqrt{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)} = k \cdot \cos \theta$$

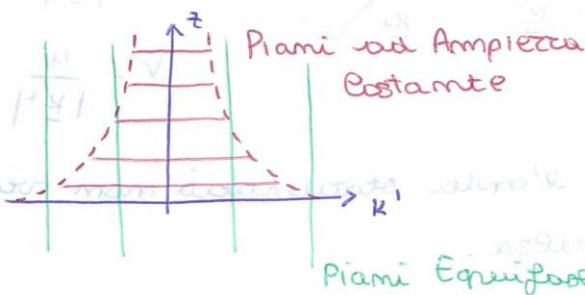
$$\text{Per } k_x^2 + k_y^2 > \omega^2 \epsilon \mu \Rightarrow k_z = -j \sqrt{(k_x^2 + k_y^2) - k^2}$$

$$\underline{k} = k_x \cdot \underline{i}_x + k_y \cdot \underline{i}_y - j \cdot \underline{i}_z \sqrt{(k_x^2 + k_y^2) - k^2}$$

Onda piana non omogenea.



$$\underline{k} = \underline{k}' - j \underline{k}''$$



(10)

(10)

ONDE STAZIONARIE

Ipotesi: mezzo privo di perdite ($\underline{E}_1, \underline{E}_2 \in \mathbb{R}; |\underline{k}_1| = |\underline{k}_2| = k$)

$$\underline{E} = \underline{E}_1 \cdot e^{-j\underline{k}_1 \cdot \underline{r}} + \underline{E}_2 \cdot e^{-j\underline{k}_2 \cdot \underline{r}} \quad : \text{due onde piane.}$$

$$\underline{k}^+ = \frac{(\underline{k}_1 + \underline{k}_2)}{2} \quad , \quad \underline{k}^- = \frac{(\underline{k}_1 - \underline{k}_2)}{2}$$

$$\begin{aligned} \underline{E} &= e^{-j \cdot \frac{1}{2}(\underline{k}_1 + \underline{k}_2) \cdot \underline{r}} \left(\underline{E}_1 \cdot e^{-j \frac{\underline{k}_1 - \underline{k}_2}{2} \cdot \underline{r}} + \underline{E}_2 \cdot e^{+j \frac{\underline{k}_1 - \underline{k}_2}{2} \cdot \underline{r}} \right) \\ &= e^{-j \underline{k}^+ \cdot \underline{r}} \left(\underline{E}_1 e^{-j \underline{k}^- \cdot \underline{r}} + \underline{E}_2 e^{+j \underline{k}^- \cdot \underline{r}} \right) \\ &= e^{-j \underline{k}^+ \cdot \underline{r}} \left(\underline{E}_2 e^{-j \underline{k}^- \cdot \underline{r}} + \underline{E}_2 e^{+j \underline{k}^- \cdot \underline{r}} + (\underline{E}_1 - \underline{E}_2) e^{-j \underline{k}^- \cdot \underline{r}} \right) \\ &= \underline{E}_2 e^{-j \underline{k}^+ \cdot \underline{r}} \cdot 2 \cdot \cos(\underline{k}^- \cdot \underline{r}) + (\underline{E}_1 - \underline{E}_2) \cdot e^{-j \underline{k}^- \cdot \underline{r}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{e}(\underline{r}, t) &= \underline{E}_2 \operatorname{Re} \left\{ e^{-j \underline{k}^+ \cdot \underline{r}} \cdot 2 \cdot \cos(\underline{k}^- \cdot \underline{r}) e^{j \omega t} \right\} + (\underline{E}_1 - \underline{E}_2) \operatorname{Re} \left\{ e^{-j(\underline{k}_1 \cdot \underline{r} - \omega t)} \right\} \\ &= \underline{E}_2 \cdot \cos(\underline{k}^+ \cdot \underline{r} - \omega t) \cdot 2 \cos(\underline{k}^- \cdot \underline{r}) + (\underline{E}_1 - \underline{E}_2) \cdot \cos(\underline{k}_1 \cdot \underline{r} - \omega t) \end{aligned}$$

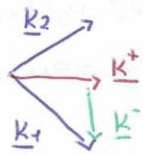
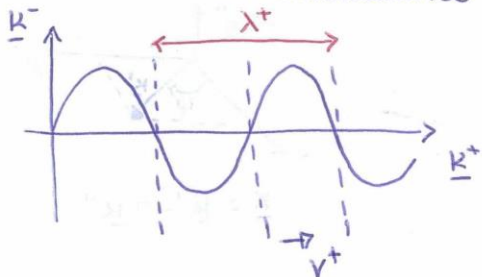
Parte stazionaria:

$$\cos(\underline{k}^+ \cdot \underline{r} - \omega t) \quad \cos(\underline{k}^- \cdot \underline{r})$$

min: $\cos(\underline{k}^- \cdot \underline{r}) = 0 \rightarrow \underline{k}^- \cdot \underline{r} = \frac{\pi}{2} + m\pi; \quad m = 0, \pm 1, \dots$

max: $\cos(\underline{k}^- \cdot \underline{r}) = \pm 1 \rightarrow \underline{k}^- \cdot \underline{r} = +m\pi; \quad m = 0, \pm 1, \dots$

2 piani che individuano max e min sono fissi nel tempo.



$$\lambda^+ = \frac{2\pi}{|\underline{k}^+|} = \frac{4\pi}{|\underline{k}_1 + \underline{k}_2|}$$

$$v^+ = \frac{\omega}{|\underline{k}^+|}$$

Se $\underline{k}^+ = 0$, $\underline{k}^- = \underline{k}_1$: l'onda stazionaria non viaggia in direzione $\underline{k}^+$, ma pulsa.

(41)

ONDE PIANE IN MEZZI DISPERSIVI

Equazioni di Maxwell nel dominio della frequenza per un mezzo omogeneo, isotropo e dispersivo in assenza di sorgenti impresse:

$$I) \nabla \times \underline{E}(\underline{r}, \omega) = -j\omega \mu(\omega) \underline{H}(\underline{r}, \omega)$$

$$II) \nabla \times \underline{H}(\underline{r}, \omega) = j\omega \epsilon(\omega) \underline{E}(\underline{r}, \omega)$$

$$III) \nabla \cdot \underline{E}(\underline{r}, \omega) = 0$$

$$IV) \nabla \cdot \underline{H}(\underline{r}, \omega) = 0$$

Applico rot ad I:

$$\nabla \times \nabla \times \underline{E}(\underline{r}, \omega) = -j\omega \mu(\omega) \nabla \times \underline{H}(\underline{r}, \omega)$$

$$\nabla \nabla \cdot \underline{E}(\underline{r}, \omega) - \nabla^2 \underline{E}(\underline{r}, \omega) = \omega^2 \epsilon(\omega) \mu(\omega) \underline{E}(\underline{r}, \omega)$$

$$\nabla^2 \underline{E}(\underline{r}, \omega) + \beta^2(\omega) \underline{E}(\underline{r}, \omega) = 0 \quad \text{con } \beta(\omega) = \omega \sqrt{\epsilon(\omega) \mu(\omega)}$$

Per componenti:

$$\nabla^2 E_i(\underline{r}, \omega) + \beta^2(\omega) E_i(\underline{r}, \omega) = 0 \quad \text{con } i = x, y, z.$$

Supponiamo che i campi dipendano solo da z :

$$\nabla^2 E_i(z, \omega) + \beta^2(\omega) E_i(z, \omega) = 0$$

$$E_i(z, \omega) = E_i^+(\omega) e^{-j\beta(\omega)z} + E_i^-(\omega) e^{j\beta(\omega)z}$$

Consideriamo solo il caso di onda viaggiante per $z > 0$; il campo nel dominio del tempo è dato da:

$$E_i(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_i^+(\omega) e^{-j\beta(\omega)z} \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

$$\text{con } \epsilon(\omega) = \epsilon \text{ e } \mu(\omega) = \mu \Rightarrow \beta(\omega) = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = \frac{\omega}{c}$$

$$E_i(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_i^+(\omega) e^{-j\frac{\omega}{c}z} \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_i^+(\omega) e^{-j\frac{\omega}{c}(z-ct)} d\omega$$

$$E_i(z, t) = f(z-ct)$$

nel caso di segnali reali, l'espressione del campo nel dominio del tempo è data da:

$$E_i(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_i^+(z, \omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_i^+(\omega) e^{j\omega t} e^{-j\beta(\omega)z} d\omega$$

nel caso di segnali reali, la trasformata di Fourier gode della simmetria di Hermitte:

$$\tilde{E}_i^+(z, -\omega) = [\tilde{E}_i^+(z, \omega)]^*$$

$$E_i(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_i^+(z, \omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_i^+(z, \omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_i^+(z, \omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_i^+(z, -\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_i^+(z, \omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{E}_i^+(z, \omega)]^* e^{-j\omega t} d\omega$$

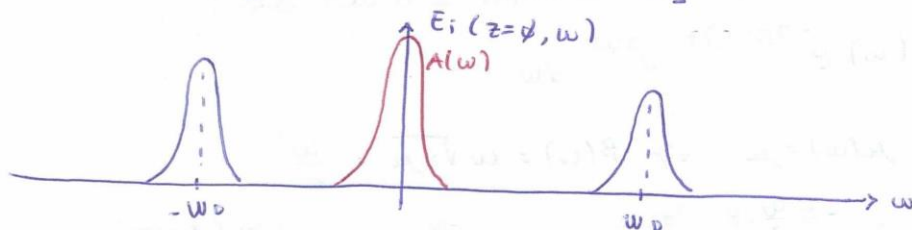
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \tilde{E}_i^+(z, \omega) e^{j\omega t} + [\tilde{E}_i^+(z, \omega) e^{j\omega t}]^* \right\} d\omega$$

$$= 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_i^+(\omega) e^{-j\beta(\omega)z} e^{j\omega t} d\omega \right\} \quad ; \text{considerando solo le frequenze positive.}$$

$$E_i(z=\phi, t) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_i^+(z=\phi, \omega) e^{j\omega t} d\omega \right\} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_i^+(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right\}$$

Supponiamo: $E_i(z=\phi, t) = a(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$

$$\Rightarrow \tilde{E}_i(z=\phi, \omega) = \frac{1}{2} [A(\omega - \omega_0) + A(\omega + \omega_0)]$$

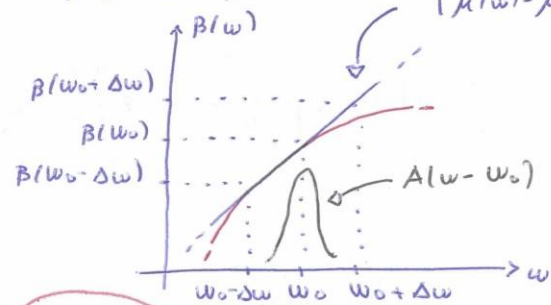


$$E_i(z, t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega - \omega_0) e^{-j\beta(\omega)z} e^{j\omega t} d\omega \right\}$$

Supponiamo adesso che: $\epsilon(\omega) \neq \epsilon$; $\mu(\omega) \neq \mu$

$$\begin{cases} \epsilon(\omega) = \epsilon \\ \mu(\omega) = \mu \end{cases}$$

Sviluppiamo in serie di Taylor in un intorno di ω_0 :
in $[\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega]$



$$\beta(\omega) \approx \beta(\omega_0) + \left. \frac{\partial \beta(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \beta(\omega)}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots$$

Approssimando al 1° ordine:

$$\left| \frac{1}{2} \beta''(\omega_0) (\omega - \omega_0)^2 \right| \ll \left| \beta'(\omega_0) (\omega - \omega_0) \right|$$

$$\left| \frac{1}{2} \beta''(\omega_0) (\omega - \omega_0)^2 z \right| \ll 1$$

↳ dispersione:
da imp. sulla
coerenza

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} |\beta''(\omega_0)| \Delta\omega \ll |\beta'(\omega_0)| \\ \frac{1}{2} |\beta''(\omega_0)| \Delta\omega^2 |z| \ll 1 \end{cases}$$

Condizioni di piccole
dispersioni

Risulta: $e^{-j\beta(\omega)z} \approx e^{-j[\beta(\omega_0) + \beta'(\omega_0)(\omega - \omega_0)] \cdot z}$

E quindi:

$$e(z, t) = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega - \omega_0) e^{-j\beta(\omega)z} \cdot e^{j\omega t} d\omega \right\}$$

$$\approx \text{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega - \omega_0) e^{-j[\beta(\omega_0) + \beta'(\omega_0)(\omega - \omega_0)] \cdot z} e^{j\omega t} d\omega \right\}$$

$$= \text{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} e^{-j\beta(\omega_0)z} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega - \omega_0) e^{-j\beta'(\omega_0)(\omega - \omega_0)z} e^{j\omega t} d\omega \right\}$$

$$= \text{Re} \left\{ \underbrace{\frac{1}{2\pi} e^{-j\beta(\omega_0)z} \cdot e^{j\omega_0 t}}_{a(t)} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega - \omega_0) e^{-j\beta'(\omega_0)(\omega - \omega_0)z} e^{j(\omega - \omega_0)t} d\omega}_{t - \beta'(\omega_0)z} \right\}$$

$$= \text{Re} \left\{ a(t - \beta'(\omega_0)z) \cdot e^{j[\omega_0 t - \beta(\omega_0)z]} \right\}$$

$$= a(t - \beta'(\omega_0)z) \cdot \cos(\omega_0 t - \beta(\omega_0)z)$$

(44)

Risulta:

$$E_i(z, t) = A \left\{ \beta'(\omega_0) \left[\frac{1}{\beta'(\omega_0)} t - z \right] \right\} \cdot \cos \left\{ \beta(\omega_0) \left[\frac{\omega_0}{\beta(\omega_0)} t - z \right] \right\}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \beta} = V_g : \text{Velocità di gruppo}$$

L'impulso viaggia con questa velocità.

$$\frac{\omega}{\beta} = V_f : \text{Velocità di fase}$$

La portante viaggia con questa velocità.

Calcoliamo l'energia di $E_i(z, t)$:

Per Parseval risulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_i^2(z, t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |E_i(z, \omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |E_i(z, \omega)|^2 d\omega$$

↑
modulo è una
funzione pari

Dal momento che:

$$E_i(z, \omega) = E_i(\omega) \cdot e^{-\gamma \beta(\omega) z} = E_i(z=0, \omega) e^{-\gamma \beta(\omega) z}$$

Risulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_i^2(z, t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} |E_i(\omega) e^{-\gamma \beta(\omega) z}|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |E_i(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} E_i^2(z=0, t) dt$$

↑
in ipotesi di assenza
di perdite.

Il segnale nell'attenuatore il mezzo dispersivo si deforma
ma la sua energia rimane invariata.

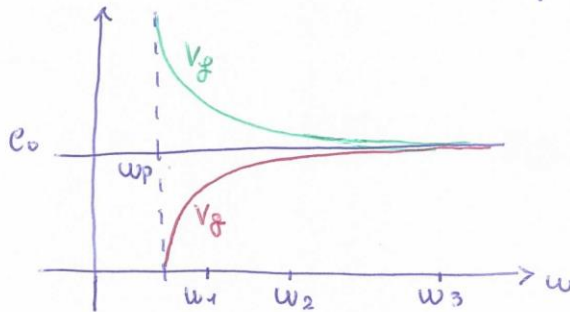
Consideriamo un'onda che si propaga in un mezzo dispersivo:

$$\beta(\omega) = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

Per il plasma

$$\begin{cases} v_g = \frac{\omega}{\beta(\omega)} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} \\ v_g = \frac{1}{\beta'(\omega)} = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} \end{cases}$$

con $\omega = 2\pi f$
 $\omega_p = 2\pi f_p$
 $f_p = 9 \text{ MHz}$



$$c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} f_1 &= 15 \text{ MHz} \\ v_{g1} &= 3,75 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ v_{g1} &= 2,4 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ \omega_1 &= 2\pi f_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 &= 30 \text{ MHz} \\ v_{g2} &= 3,144 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ v_{g2} &= 2,8618 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ \omega_2 &= 2\pi f_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3 &= 130 \text{ MHz} \\ v_{g3} &= 3,0072 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ v_{g3} &= 2,9928 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ \omega_3 &= 2\pi f_3 \end{aligned}$$

PLASMA FREDDO SENZA COLLISIONI

PLASMA: conglomerato di particelle positive e negative (ioni) complessivamente neutro.

FREDDO: È trascurabile l'effetto dell'agitazione termica sulle particelle (si ragiona sempre a $0^\circ K$).

SENZA COLLISIONI: Si suppone che il gas sia estremamente rarefatto, in modo tale che non ci siano urti tra particelle in grado di generare una perdita di energia.

Se un'onda elettromagnetica lo penetra:

- il campo elettrico mette in moto gli elettroni con un'accelerazione proporzionale ad esso;
- le cariche in moto accelerato si comportano come sorgenti di campo;

$$\nabla \times \underline{H} = j\omega \epsilon_0 \underline{E} + \underline{j}$$

MODELLO

Modello fluidodinamico:

Si descrive il plasma non eccitato attraverso un numero N di particelle per unità di volume. N è il numero medio e può variare da punto a punto.

L'operazione di media è effettuata anche sulla velocità delle particelle. La velocità può essere diversa da 0 anche in assenza di eccitazione $\Rightarrow$ velocità di deriva.

Plasma è un fluido con:

- densità di massa $N \cdot m$;
- densità di carica $N \cdot q$;

alla velocità di deriva $\underline{V}_0$ si sovrappone la velocità $\underline{V}$ dovuta alla presenza dell'eccitazione di campo. La relazione tra campi e velocità è: da $\underline{F} = q \cdot \underline{E} + q \underline{V} \times \underline{B}$

$$\frac{d}{dt} N m \underline{V} = N q \left(\underline{E} + \underbrace{\mu_0 \underline{V} \times \underline{h}}_{\text{Forza di Lorentz}} \right) \quad \text{con } \underline{V}_0 \text{ trascurabile rispetto a } \underline{V}$$

In generale il termine di Forza di Lorentz è trascurabile rispetto all'altro termine:

$$j \omega N m \underline{V} = N q \underline{E} \Rightarrow j \omega m \underline{V} = q \underline{E}$$

$$\underline{J} : \text{densità di corrente elettrica} = N \cdot q \cdot \underline{V}$$

$$\underline{V} = \frac{q}{j \omega m} \cdot \underline{E} \Rightarrow \underline{J} = N q \cdot \frac{q}{j \omega m} \cdot \underline{E}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \underline{H} = j \omega \epsilon_0 \underline{E} + \frac{N q^2}{j \omega m} \cdot \underline{E} = j \omega \epsilon_0 \left[1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right] \cdot \underline{E}$$

$$\text{con } \omega_p = \sqrt{\frac{N q^2}{m \epsilon_0}} : \text{pulsazione caratteristica del plasma}$$

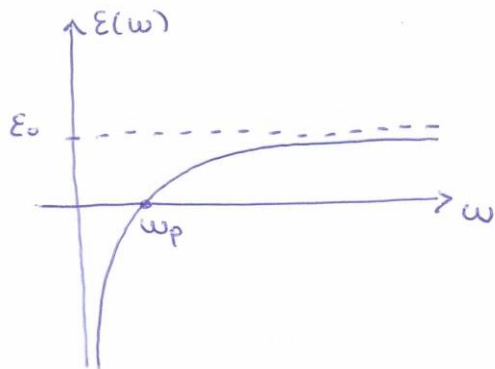
$$\Rightarrow \nabla \times \underline{H} = j \omega \epsilon(\omega) \cdot \underline{E} \quad \text{con } \epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left[1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right]$$

Si considera il plasma come un particolare dielettrico con costante di permittività dipendente dalla frequenza.

Il Plasma è un mezzo dispersivo nel tempo.

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{N q^2}{m \epsilon_0}}$$

DISPERSIVITÀ NEL PLASMA



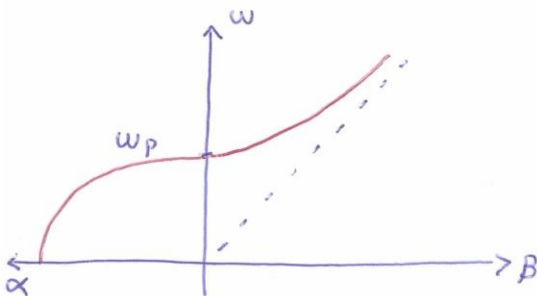
$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left[1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right]$$

$\epsilon(\omega) < \epsilon_0$, $\forall \omega$: Il dielettrico ha un indice di rifrazione minore di quello del vuoto.

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \epsilon(\omega) = \epsilon_0$: Quando la frequenza è alta, l'onda non riesce a mettere in moto le particelle.

$\epsilon(\omega) < 0$ per $\omega < \omega_p$:

$$K = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \left[1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right]} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2}$$



$\omega > \omega_p \Rightarrow K = \beta$ PROPAGAZIONE

$\omega < \omega_p \Rightarrow K = -j\alpha$ ATTENUAZIONE PURA

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2}$$

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 - 1}$$

L'attenuazione non è dovuta a perdite del mezzo ma ad una incompatibilità del mezzo con l'onda stessa. Quando l'onda ha una frequenza inferiore alla pulsazione del plasma non è in grado di accelerare le moto naturali oscillatorio degli elettroni e quindi l'onda non è in grado di autosostenersi.

RIFLESSIONE E RIFRAZIONE PER INCIDENZA NORMALE

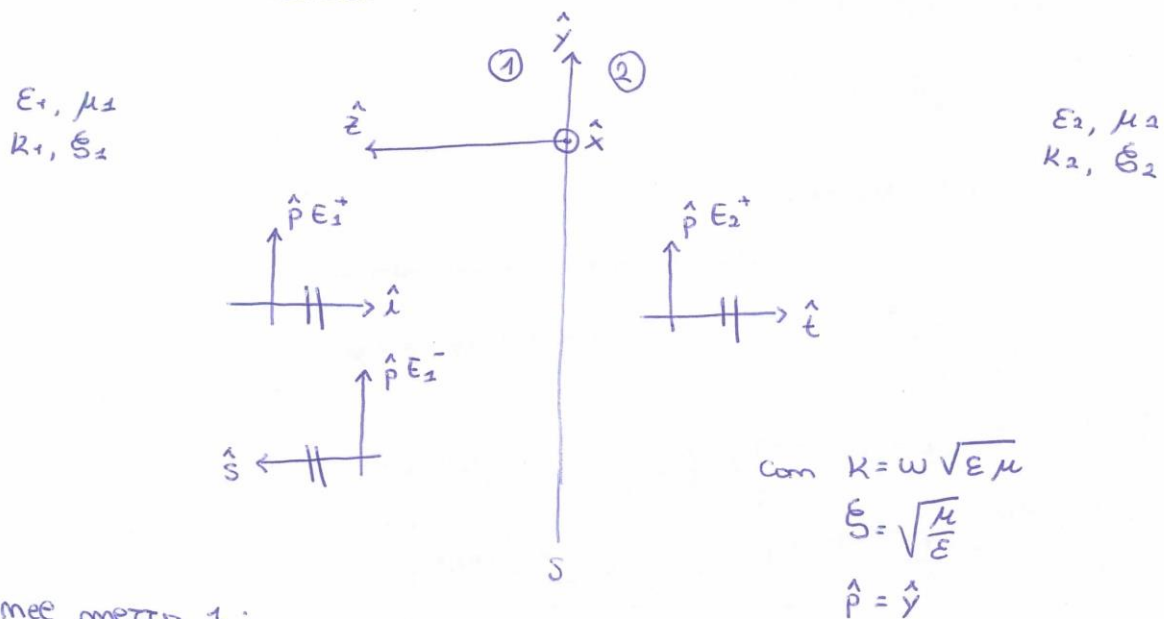
INCIDENZA NORMALE

Due mezzi lineari, isotropi, omogenei, stazionari, non dispersivi nello spazio, con perdite, separati da una superficie S piana.

Mezzo 1 senza perdite.

Onda piana monocromatica incidente dal mezzo 1 sulla superficie di separazione.

$\Rightarrow$ La continuità all'interfaccia impedisce che onda riflessa e onda trasmessa abbiano la stessa polarizzazione di quella incidente



nei mezzo 1:

- Campo Incidente ($\hat{k} = -\hat{z}$)

$$\underline{E}_1^+(z) = \hat{y} E_1^+ e^{-j k_1 (-\hat{z}) \cdot \underline{r}} = \hat{y} E_1^+ e^{j k_1 z}$$

$$\underline{H}_1^+(z) = (-\hat{z} \times \hat{y}) \frac{E_1^+}{\epsilon_1} e^{-j k_1 (-\hat{z}) \cdot \underline{r}} = \hat{x} \frac{E_1^+}{\epsilon_1} e^{j k_1 z}$$

- Campo Riflesso ($\hat{k} = \hat{z}$)

$$\underline{E}_1^-(z) = \hat{y} E_1^- e^{-j k_1 (\hat{z}) \cdot \underline{r}} = \hat{y} E_1^- e^{-j k_1 z}$$

$$\underline{H}_1^-(z) = (\hat{z} \times \hat{y}) \frac{E_1^-}{\epsilon_1} e^{-j k_1 (\hat{z}) \cdot \underline{r}} = (-\hat{x}) \frac{E_1^-}{\epsilon_1} e^{-j k_1 z}$$

Compo totale nel mezzo 1:

$$\underline{E}_1(z) = \underline{E}_1^+(z) + \underline{E}_1^-(z) = \hat{y} E_1^+ e^{jK_1 z} + \hat{y} E_1^- e^{-jK_1 z}$$

$$\underline{H}_1(z) = \underline{H}_1^+(z) + \underline{H}_1^-(z) = \hat{x} \frac{E_1^+}{\xi_1} e^{jK_1 z} - \hat{x} \frac{E_1^-}{\xi_1} e^{-jK_1 z}$$

nel mezzo 2:

- comp trasmessa ($\hat{x} = -\hat{z}$)

$$\underline{E}_2^+(z) = \hat{y} E_2^+ e^{-jK_2 (-\hat{z}) \cdot z} = \hat{y} E_2^+ e^{jK_2 z}$$

$$\underline{H}_2^+(z) = (-\hat{z} \times \hat{y}) \frac{E_2^+}{\xi_2} e^{-jK_2 (-\hat{z}) \cdot z} = \hat{x} \frac{E_2^+}{\xi_2} e^{jK_2 z}$$

Compo totale nel mezzo 2:

$$\underline{E}_2(z) = \underline{E}_2^+(z) = \hat{y} E_2^+ e^{jK_2 z}$$

$$\underline{H}_2(z) = \underline{H}_2^+(z) = \hat{x} \frac{E_2^+}{\xi_2} e^{jK_2 z}$$

CONDIZIONI DI CONTINUITA'

Condizioni di continuità per i campi tangenti:

$$\begin{cases} \hat{z} \times [\underline{E}_1(z) - \underline{E}_2(z)] = 0 \\ \hat{z} \times [\underline{H}_1(z) - \underline{H}_2(z)] = 0 \end{cases} \quad r \in S \Rightarrow z = 0$$

$$\begin{cases} \hat{z} \times [\hat{y} E_1^+ e^{jK_1 z} + \hat{y} E_1^- e^{-jK_1 z}] = \hat{z} \times [\hat{y} E_2^+ e^{jK_2 z}] \\ \hat{z} \times [\hat{x} \frac{E_1^+}{\xi_1} e^{jK_1 z} - \hat{x} \frac{E_1^-}{\xi_1} e^{-jK_1 z}] = \hat{z} \times [\hat{x} \frac{E_2^+}{\xi_2} e^{jK_2 z}] \end{cases} \quad r \in S$$

$$\begin{cases} (-\hat{x}) [E_1^+ + E_1^-] = (-\hat{x}) [E_2^+] \\ (\hat{y}) \left[\frac{E_1^+}{\xi_1} - \frac{E_1^-}{\xi_1} \right] = (\hat{y}) \left[\frac{E_2^+}{\xi_2} \right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1^+ + E_1^- = E_2^+ \\ \frac{E_1^+}{\xi_1} - \frac{E_1^-}{\xi_1} = \frac{E_2^+}{\xi_2} \end{cases} \quad \text{CONDIZIONI DI CONTINUITA' PER CAMPI TANGENTI}$$

Coefficiente di Riflessione di Fresnel all'interfaccia:

$$r(\phi) = \frac{E_1^-}{E_1^+} = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_2 + \xi_1}$$

Coefficiente di Trasmissione di Fresnel all'interfaccia:

$$T(\phi) = \frac{E_2^+}{E_1^+} = \frac{2\xi_2}{\xi_2 + \xi_1}$$

(51)

Sostituendo:

$$E_1^+ + E_1^- = E_2^+ \Rightarrow 1 + \Gamma(\varphi) = T(\varphi)$$

$$\frac{E_1^+}{\xi_1} - \frac{E_1^-}{\xi_1} = \frac{E_2^+}{\xi_2} \Rightarrow \frac{1 - \Gamma(\varphi)}{\xi_1} = \frac{T(\varphi)}{\xi_2}$$

Quindi:

- Campo totale nel mezzo 1:

$$\underline{E}_1(z) = \hat{y} E_1^+ e^{j k_1 z} [1 + \Gamma(\varphi) e^{-j 2 k_1 z}]$$

$$\underline{H}_1(z) = \hat{x} \frac{E_1^+}{\xi_1} e^{j k_1 z} [1 - \Gamma(\varphi) e^{-j 2 k_1 z}]$$

- Campo totale nel mezzo 2:

$$\underline{E}_2(z) = \hat{y} T(\varphi) E_1^+ e^{j k_2 z}$$

$$\underline{H}_2(z) = \hat{x} \frac{T(\varphi) E_1^+}{\xi_2} e^{j k_2 z}$$

VETTORE DI POYNTING

nel mezzo 1:

$$\underline{S}_1(z)_{z \in S} = \frac{1}{2} [\underline{E}_1(z) \times \underline{H}_1^*(z)] \quad z \in S \Rightarrow z = \varphi$$

$$= \frac{1}{2} \left[\hat{y} E_1^+ (1 + \Gamma(\varphi)) \right] \times \left[\hat{x} \frac{E_1^+}{\xi_1} (1 - \Gamma(\varphi)) \right]^*$$

$$= \frac{1}{2} \frac{|E_1^+|^2}{\xi_1^*} \hat{z} \left[(1 + \Gamma(\varphi)) (1 - \Gamma(\varphi))^* \right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{|E_1^+|^2}{\xi_1^*} \hat{z} \left[T(\varphi) \cdot \left(\frac{T(\varphi)}{\xi_2} \right)^* \right]$$

nel mezzo 2:

$$\underline{S}_2(z)_{z \in S} = \frac{1}{2} [\underline{E}_2(z) \times \underline{H}_2^*(z)]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\hat{y} T(\varphi) E_1^+ \right] \times \left[\hat{x} \frac{T(\varphi) E_1^+}{\xi_2} \right]^* = \frac{1}{2} \frac{|T(\varphi)|^2 |E_1^+|^2}{\xi_2^*} \hat{z}$$

(52)

Conservazione della potenza media attiva:

$$\underline{S}_1(z)_{res} = \underline{S}_2(z)_{res}$$

Densità di potenza media attiva:

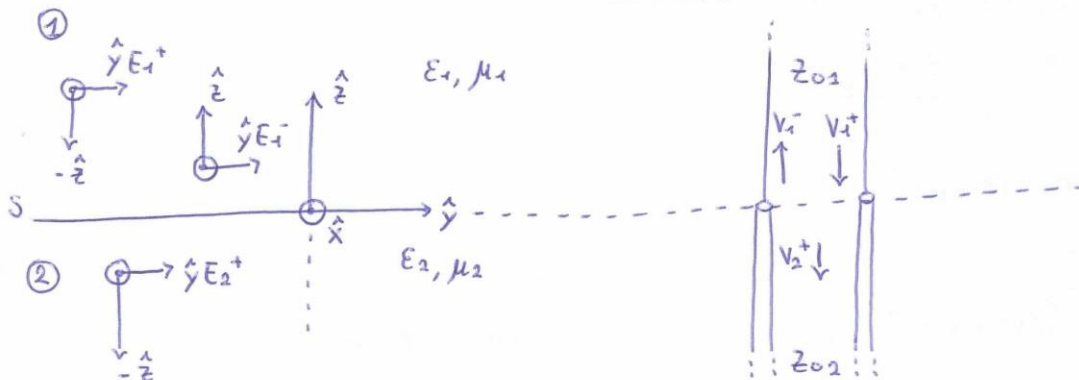
$$\text{Re}[\underline{S}_1(z)]_{res} = \text{Re}[\underline{S}_2(z)]_{res}$$

$$\frac{1}{2} |E_1^+|^2 \text{Re} \left[\frac{1}{\underline{S}_2^*} \right] [1 - |\Gamma(\phi)|^2] = \frac{1}{2} |\Gamma(\phi)|^2 |E_1^+|^2 \text{Re} \left[\frac{1}{\underline{S}_2^*} \right]$$

con il mezzo 1 privo di perdite:

$$\frac{1}{2} \frac{|E_1^+|^2}{\underline{S}_1} [1 - |\Gamma(\phi)|^2] = \frac{1}{2} \frac{|\Gamma(\phi)|^2 |E_1^+|^2}{\text{Re}[\underline{S}_2]^*}$$

ANALOGIA CON LE LINEE DI TRASMISSIONE



$$\begin{cases} E_1^+ + E_1^- = E_2^+ \\ \frac{E_1^+}{S_1} - \frac{E_1^-}{S_1} = \frac{E_2^+}{S_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1^+ \angle \Rightarrow E_1^+ \\ V_1^- \angle \Rightarrow E_1^- \\ V_2^+ \angle \Rightarrow E_2^+ \\ Z_{01} \angle \Rightarrow S_1 \\ Z_{02} \angle \Rightarrow S_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1^+ + V_1^- = V_2^+ \\ \frac{V_1^+}{Z_{01}} - \frac{V_1^-}{Z_{01}} = \frac{V_2^+}{Z_{02}} \end{cases}$$

Mezzo 1:

$$\begin{cases} \underline{E}_1(z) = (E_1^+ e^{jK_1 z} + E_1^- e^{-jK_1 z}) \hat{y} \\ \underline{H}_1(z) = \left(\frac{E_1^+}{S_1} e^{jK_1 z} - \frac{E_1^-}{S_1} e^{-jK_1 z} \right) \hat{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1(z) = (V_1^+ e^{jK_1 z} + V_1^- e^{-jK_1 z}) \\ I_1(z) = \left(\frac{V_1^+}{Z_{01}} e^{jK_1 z} - \frac{V_1^-}{Z_{01}} e^{-jK_1 z} \right) \end{cases}$$

Mezzo 2:

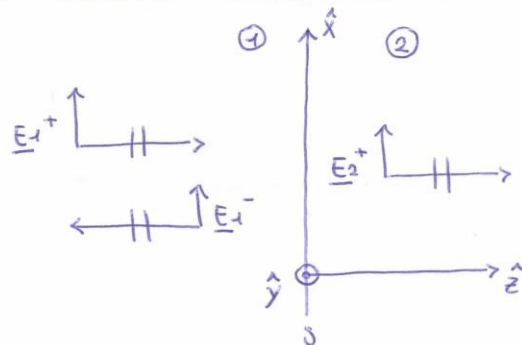
$$\begin{cases} \underline{E}_2(z) = E_2^+ e^{jK_2 z} \hat{y} \\ \underline{H}_2(z) = \frac{E_2^+}{S_2} e^{jK_2 z} \hat{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_2(z) = V_2^+ e^{jK_2 z} \\ I_2(z) = \frac{V_2^+}{Z_{02}} e^{jK_2 z} \end{cases} \quad \text{con } \begin{cases} k_1 = K_1 \\ k_2 = K_2 \end{cases}$$

(53)

ONDE PIANE IN MEZZI CON PERDITE

INCIDENZA NORMALE SENZA PERDITE

(ϵ_0, μ_0)



$(\epsilon_r \epsilon_0, \mu_0)$

Onda Incidente

$$\underline{E}_1^+ = E_1^+ e^{-jK_1 z} \hat{x}$$

$$\underline{H}_1^+ = \frac{E_1^+}{\zeta_1} e^{-jK_1 z} \hat{y}$$

$$K_1 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$\zeta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

Onda Riflessa

$$\underline{E}_1^- = E_1^- e^{jK_1 z} \hat{x}$$

$$\underline{H}_1^- = -\frac{E_1^-}{\zeta_1} e^{jK_1 z} \hat{y}$$

$$K_1 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$\zeta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

Onda Transmessa

$$\underline{E}_2^+ = E_2^+ e^{-jK_2 z} \hat{x}$$

$$\underline{H}_2^+ = \frac{E_2^+}{\zeta_2} e^{-jK_2 z} \hat{y}$$

$$K_2 = \omega \sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0}$$

$$\zeta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}}$$

Onda Riflessa :

$$\underline{E}_1^- = \Gamma(\phi) \cdot E_1^+ e^{jK_1 z} \hat{x}$$

$$\underline{H}_1^- = -\frac{\Gamma(\phi) E_1^+}{\zeta_1} e^{jK_1 z} \hat{y}$$

Onda Transmessa :

$$\underline{E}_2^+ = T(\phi) E_1^+ e^{-jK_2 z} \hat{x}$$

$$\underline{H}_2^+ = \frac{T(\phi) E_1^+}{\zeta_2} e^{-jK_2 z} \hat{y}$$

$$\text{con } \Gamma(\phi) = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 + \zeta_1}$$

$$; T(\phi) = \frac{2 \zeta_2}{\zeta_2 + \zeta_1}$$

INCIDENZA NORMALE CON PERDITE

Equazioni di Maxwell per un mezzo omogeneo ed isotropo in assenza di sorgenti imprresse:

$$\nabla \times \underline{E}(r, \omega) = -j\omega \mu \underline{H}(r, \omega)$$

$$\nabla \times \underline{H}(r, \omega) = j\omega \epsilon \underline{E}(r, \omega) + \underline{J}(r, \omega) \quad \text{con } \underline{J}(r, \omega) = \sigma \cdot \underline{E}(r, \omega)$$

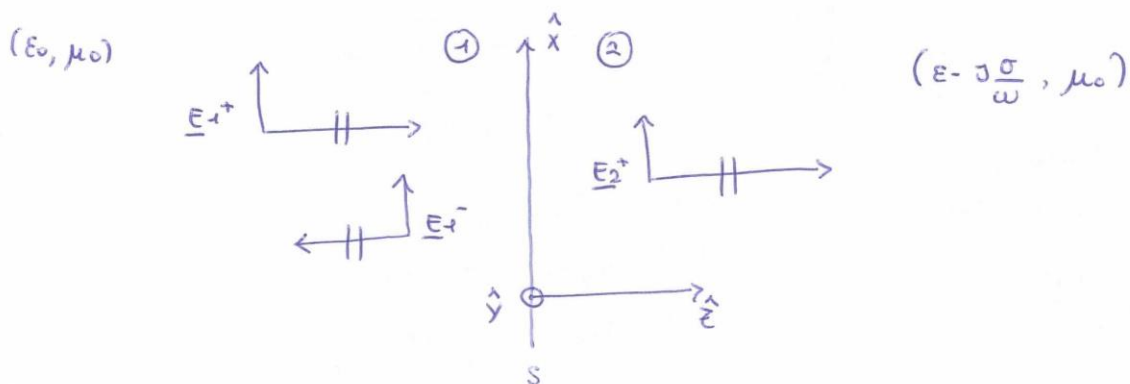
$$\nabla \cdot \underline{E}(r, \omega) = \frac{\rho(r, \omega)}{\epsilon}$$

$$\nabla \cdot \underline{H}(r, \omega) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \times \underline{H}(r, \omega) = j\omega \left(\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \right) \underline{E}(r, \omega) = j\omega \epsilon_{eq} \underline{E}(r, \omega)$$

$$\text{con } \epsilon_{eq} = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$$

Consideriamo un'onda piana che incide normalmente all'interfaccia di due mezzi di cui uno con perdite:



Onda Incidente

$$\underline{E}_1^+ = E_1^+ e^{-jk_1 z} \hat{x}$$

$$\underline{H}_1^+ = \frac{E_1^+}{S_1} e^{-jk_1 z} \hat{y}$$

$$k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$S_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

Onda Riflessa

$$\underline{E}_1^- = E_1^- e^{+jk_1 z} \hat{x}$$

$$\underline{H}_1^- = \frac{E_1^-}{S_1} e^{+jk_1 z} \hat{y}$$

$$k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$S_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

Onda Trasmissa

$$\underline{E}_2^+ = E_2^+ e^{-jk_2 z} \hat{x}$$

$$\underline{H}_2^+ = \frac{E_2^+}{S_2} e^{-jk_2 z} \hat{y}$$

$$k_2 = \omega \sqrt{\epsilon_{eq} \mu_0} = \omega \sqrt{\left(\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \right) \mu_0}$$

$$S_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_{eq}}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\left(\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \right)}}$$

$$\epsilon_{eq} = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} = \epsilon_0 \left(\epsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right)$$

Dielettrico con piccole perdite:

$$\epsilon_r \gg \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \Rightarrow \sigma \ll \omega \epsilon_0 \epsilon_r$$

$$\epsilon_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \left(\epsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right)}} \approx \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \left(1 + j \frac{\sigma}{2 \omega \epsilon_0 \epsilon_r} \right)$$

$$k_2 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \left(\epsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right) \mu_0} \approx \omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0} \left(1 - j \frac{\sigma}{2 \omega \epsilon_0 \epsilon_r} \right)$$

$$k_2 = \beta - j \alpha \Rightarrow \begin{cases} \beta = \omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0} & \rightarrow \text{propagazione senza perdite} \\ \alpha = \frac{\sigma \sqrt{\mu_0}}{2 \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r}} & \rightarrow \text{attenuazione} \end{cases} \rightarrow \text{non è dispersivo}$$

Buon conduttore:

$$\epsilon_r \ll \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \Rightarrow \sigma \gg \omega \epsilon_0 \epsilon_r$$

$$\epsilon_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \left(\epsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right)}} \approx \sqrt{j \frac{\omega \mu_0}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2 \sigma}} (1 + j) = R_s (1 + j)$$

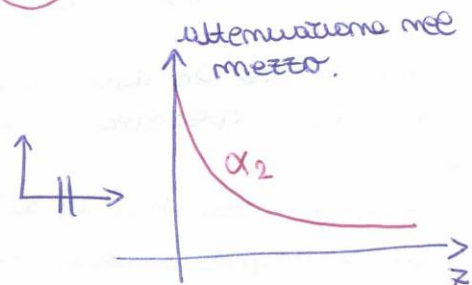
$$R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2 \sigma}} : \text{Resistenza Superficiale.}$$

$$k_2 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \left(\epsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right) \mu_0} \approx \sqrt{\frac{\sigma \mu_0 \omega}{2}} (1 - j) = \frac{1}{\delta} (1 - j)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma \mu_0 \omega}} : \text{Profondità di penetrazione : distanza alla quale il campo si è attenuato di un fattore } \frac{1}{e}.$$

$$\text{Se } k_2 = \beta_2 - j \alpha_2 \Rightarrow \underline{E}_2^+ = E_2^+ e^{-j \beta_2 z} e^{-\alpha_2 z} \hat{x}$$

con $\delta = \frac{1}{\alpha_2}$.



indicando onda riflessa e onda trasmessa come:

$$\begin{cases} \underline{E}_1^- = \Gamma(\phi) E_1^+ e^{j k_1 z} \hat{x} \\ \underline{H}_1^- = -\frac{\mu_1(\phi) E_1^+}{\xi_1} e^{j k_1 z} \hat{y} \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{E}_2^+ = T(\phi) E_1^+ e^{-j k_2 z} \hat{x} \\ \underline{H}_2^+ = \frac{T(\phi) E_1^+}{\xi_2} e^{-j k_2 z} \hat{y} \end{cases}$$

dalle condizioni di continuità all'interfaccia otteniamo:

$$\begin{cases} 1 + \Gamma(\phi) = T(\phi) \\ \frac{1 - \Gamma(\phi)}{\xi_1} = \frac{T(\phi)}{\xi_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma(\phi) = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_2 + \xi_1} \\ T(\phi) = \frac{2 \xi_2}{\xi_2 + \xi_1} \end{cases}$$

La Densità Superficiale ^{di corrente} nel mezzo 2 è data da:

$$\begin{aligned} \underline{J} &= \sigma \underline{E}_2^+ = \sigma \cdot \frac{2 \xi_2}{\xi_2 + \xi_1} \cdot E_1^+ e^{-j k_2 z} \hat{x} \\ &= \sigma \cdot \frac{2 \xi_2}{\xi_2 + \xi_1} \cdot E_1^+ e^{-j \beta_2 z} e^{-j \alpha_2 z} \cdot \hat{x} \quad \text{con } \beta_2 = \alpha_2 = \sqrt{\frac{\sigma \mu_0 \omega}{2}} = \frac{1}{\delta} \end{aligned}$$

La Densità Lineare di corrente nel mezzo 2 è data da:

$$\begin{aligned} \underline{J}_s &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{J} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma \cdot \frac{2 \xi_2}{\xi_2 + \xi_1} \cdot E_1^+ \cdot e^{-j \beta_2 z} \cdot e^{-j \alpha_2 z} \cdot \hat{x} \cdot dz \\ &= -\sigma \frac{2 \xi_2}{\xi_2 + \xi_1} \cdot E_1^+ e^{-j \beta_2 z} e^{-j \alpha_2 z} \cdot \frac{1}{\alpha_2 + j \beta_2} \cdot \hat{x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{2 \xi_2 \sigma \delta}{(\xi_2 + \xi_1)(1+j)} \cdot E_1^+ \cdot \hat{x} \quad \text{con } \xi_2 = \frac{1}{\sigma \delta} (1+j) \Rightarrow \frac{\xi_2 \sigma \delta}{(1+j)} = 1 \end{aligned}$$

$$\underline{J}_s = \frac{2}{(\xi_2 + \xi_1)} \cdot E_1^+ \cdot \hat{x}$$

Calcoliamo il campo magnetico totale all'interfaccia:

$$\underline{H}_1^{\text{tot}} \Big|_{z=0} = \underline{H}_1^+ \Big|_{z=0} + \underline{H}_1^- \Big|_{z=0} = \frac{1 - \Gamma(\phi)}{\xi_1} \cdot E_1^+ = \frac{2}{(\xi_2 + \xi_1)} \cdot E_1^+$$

Risulta quindi che la densità lineare di corrente che scorre all'interno dello spessore δ rende possibile la discontinuità dei campi.

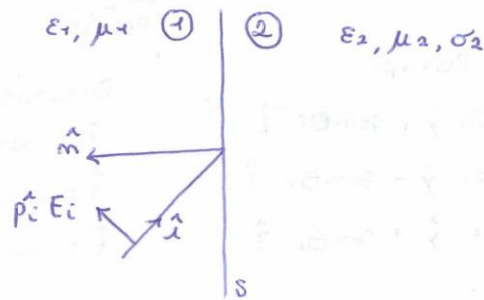
$\Rightarrow$ La differenza fra $\underline{H}$ a dx dall'interfaccia e $\underline{H}$ a sx dall'interfaccia è uguale alla densità lineare di corrente.

(57)

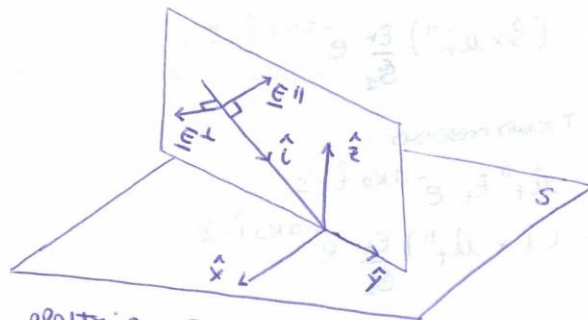
RIFLESSIONE E RIFRAZIONE PER INCIDENZA OBLIQUA

INCIDENZA OBLIQUA

- Due mezzi lineari, isotropi, omogenei, statici, non dispersivi nello spazio e separati da una superficie S piana;
- mezzo 1 senza perdite;
- Onda monochromatica incidente dal mezzo 1 su S ;
- l'onda riflessa e l'onda trasmessa possono avere direzione di propagazione e polarizzazione diverse da quella incidente;



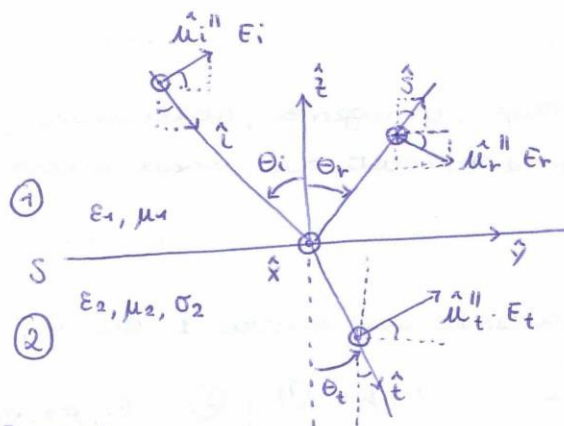
- Piano di incidenza: piano che contiene la direzione di incidenza $\hat{k}_i$ e la normale all'interfaccia $\hat{n}$;
- Sistema di riferimento con l'asse z orientato secondo la normale e l'asse x perpendicolare al piano di incidenza;



POLARIZZAZIONE PARALLELA: Campo elettrico parallelo al piano di incidenza;

POLARIZZAZIONE PERPENDICOLARE: Campo elettrico perpendicolare al piano di incidenza;

POLARIZZAZIONE PARALLELA



Espressione dei Campi:

$$\hat{u}_i = \cos \theta_i \hat{y} + \sin \theta_i \hat{z}$$

$$\hat{u}_r = \cos \theta_r \hat{y} - \sin \theta_r \hat{z}$$

$$\hat{u}_t = \cos \theta_t \hat{y} + \sin \theta_t \hat{z}$$

Direzioni di Propagazione:

$$\hat{i} = \sin \theta_i \hat{y} - \cos \theta_i \hat{z}$$

$$\hat{s} = \sin \theta_r \hat{y} + \cos \theta_r \hat{z}$$

$$\hat{t} = \sin \theta_t \hat{y} - \cos \theta_t \hat{z}$$

Campo Incidente:

$$\underline{E}_i(\underline{r}) = \hat{u}_i E_i e^{-j\mathbf{k}_i \cdot \underline{r}}$$

$$\underline{H}_i(\underline{r}) = (\hat{i} \times \hat{u}_i) \frac{E_i}{\hat{s}_1} e^{-j\mathbf{k}_i \cdot \underline{r}}$$

Campo Riflessa:

$$\underline{E}_r(\underline{r}) = \hat{u}_r E_r e^{-j\mathbf{k}_r \cdot \underline{r}}$$

$$\underline{H}_r(\underline{r}) = (\hat{s} \times \hat{u}_r) \frac{E_r}{\hat{s}_1} e^{-j\mathbf{k}_r \cdot \underline{r}}$$

Campo Transmessa:

$$\underline{E}_t(\underline{r}) = \hat{u}_t E_t e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \underline{r}}$$

$$\underline{H}_t(\underline{r}) = (\hat{t} \times \hat{u}_t) \frac{E_t}{\hat{s}_2} e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \underline{r}}$$

Campo totale nel mezzo 1:

$$\underline{E}_1(\underline{r}) = \underline{E}_i(\underline{r}) + \underline{E}_r(\underline{r})$$

$$\underline{H}_1(\underline{r}) = \underline{H}_i(\underline{r}) + \underline{H}_r(\underline{r})$$

Campo totale nel mezzo 2:

$$\underline{E}_2(\underline{r}) = \underline{E}_t(\underline{r})$$

$$\underline{H}_2(\underline{r}) = \underline{H}_t(\underline{r})$$

$$\underline{E}_1(\underline{r}) = (\hat{E}_i \cos \theta_i \hat{y} + \hat{E}_i \sin \theta_i \hat{z}) e^{-jk_1 (\sin \theta_i y - \cos \theta_i z)} +$$

$$+ (\hat{E}_r \cos \theta_r \hat{y} - \hat{E}_r \sin \theta_r \hat{z}) e^{-jk_1 (\sin \theta_r y + \cos \theta_r z)}$$

$$\underline{H}_1(\underline{r}) = \hat{x} \cdot \frac{\underline{E}_i}{\xi_1} e^{-jk_1 (\sin \theta_i y - \cos \theta_i z)} - \hat{x} \cdot \frac{\underline{E}_r}{\xi_1} e^{-jk_1 (\sin \theta_r y + \cos \theta_r z)}$$

$$\underline{E}_2(\underline{r}) = (\hat{E}_t \cos \theta_t \hat{y} + \hat{E}_t \sin \theta_t \hat{z}) e^{-jk_2 (\sin \theta_t y - \cos \theta_t z)}$$

$$\underline{H}_2(\underline{r}) = \hat{x} \cdot \frac{\underline{E}_t}{\xi_2} e^{-jk_2 (\sin \theta_t y - \cos \theta_t z)}$$

Condizioni di Continuità per i campi tangenti:

$$\hat{z} \times [\underline{E}_1(\underline{r}) - \underline{E}_2(\underline{r})]_{res} = \emptyset$$

$$res \Rightarrow z = \emptyset$$

$$\hat{z} \times [\underline{H}_1(\underline{r}) - \underline{H}_2(\underline{r})]_{res} = \emptyset$$

Continuità dei campi totali all'interfaccia:

$$\hat{E}_i \cos \theta_i e^{-jk_1 \sin \theta_i y} + \hat{E}_r \cos \theta_r e^{-jk_1 \sin \theta_r y} = \hat{E}_t \cos \theta_t e^{-jk_2 \sin \theta_t y}$$

$$\frac{\underline{E}_i}{\xi_1} e^{-jk_1 \sin \theta_i y} - \frac{\underline{E}_r}{\xi_1} e^{-jk_1 \sin \theta_r y} = \frac{\underline{E}_t}{\xi_2} e^{-jk_2 \sin \theta_t y}$$

Dovendo essere $\forall y$: $k_1 \sin \theta_i = k_1 \sin \theta_r = k_2 \sin \theta_t$

Legge di Snell per la Riflessione: $\theta_i = \theta_r$

Legge di Snell per la Rifrazione: $k_1 \sin \theta_i = k_2 \sin \theta_t$

Se i mezzi 1 e 2 sono senza perdite e non magnetici:

$$\sigma_2 = \emptyset$$

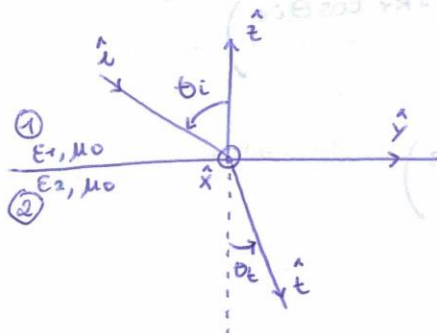
$$k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu}$$

$$k_2 = \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu}$$

$$k_1 \sin \theta_i = k_2 \sin \theta_t$$

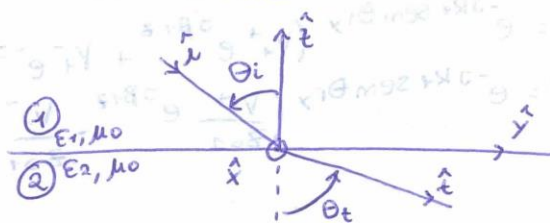
$$\sqrt{\epsilon_1} \sin \theta_i = \sqrt{\epsilon_2} \sin \theta_t$$

$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin \theta_i$$



$$\epsilon_1 < \epsilon_2 \Rightarrow \theta_t < \theta_i$$

(13)



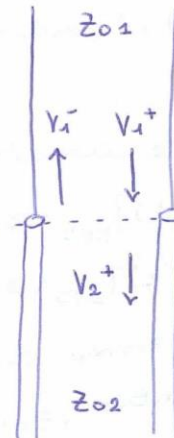
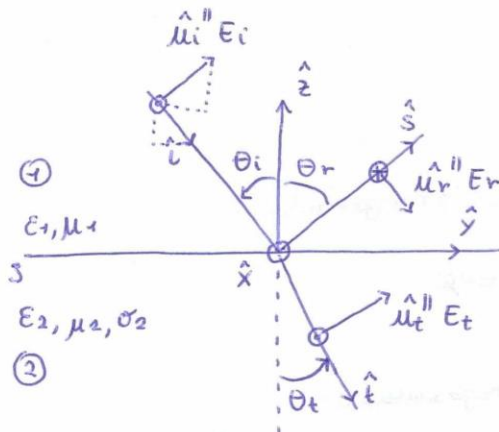
$$\epsilon_1 > \epsilon_2 \Rightarrow \theta_t > \theta_i$$

(60)

Dalle leggi di Snell risulta:

$$\begin{cases} E_i \cos \theta_i + E_r \cos \theta_r = E_t \cos \theta_t \\ \frac{E_i}{\xi_1} - \frac{E_r}{\xi_1} = \frac{E_t}{\xi_2} \end{cases} \quad \leftarrow \text{Continuità dei campi totali tangenti all'interfaccia}$$

ANALOGIA CON LINEE DI TRASMISSIONE



$$E_i \cos \theta_i + E_r \cos \theta_r = E_t \cos \theta_t$$

$$\frac{E_i}{\xi_1} \cos \theta_i - \frac{E_r}{\xi_1} \cos \theta_r = \frac{E_t}{\xi_2} \cos \theta_t$$

$\Rightarrow$

$$V_1^+ + V_1^- = V_2^+$$

$$\frac{V_1^+}{Z_{01}} + \frac{V_1^-}{Z_{01}} = \frac{V_2^+}{Z_{02}}$$

con:

$$V_1^+ = E_i \cos \theta_i ; V_1^- = E_r \cos \theta_r ; V_2^+ = E_t \cos \theta_t$$

$$Z_{01} = \xi_1 \cos \theta_i ; Z_{02} = \xi_2 \cos \theta_t$$

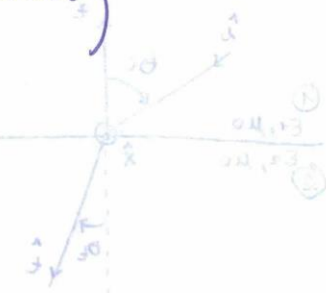
Per il mezzo 1: ($\beta_1 = k_1 \cos \theta_i$)

$$E_{1y}(z) = e^{-j k_1 z \sin \theta_i} \left(E_i \cos \theta_i e^{j k_1 \cos \theta_i z} + E_r \cos \theta_r e^{-j k_1 \cos \theta_r z} \right)$$

$$H_{1x}(z) = e^{-j k_1 z \sin \theta_i} \left(\frac{E_i}{\xi_1} e^{j k_1 \cos \theta_i z} - \frac{E_r}{\xi_1} e^{-j k_1 \cos \theta_r z} \right)$$

$$E_{1y}(z) = e^{-j k_1 z \sin \theta_i} \left(V_1^+ e^{j \beta_1 z} + V_1^- e^{-j \beta_1 z} \right)$$

$$H_{1x}(z) = e^{-j k_1 z \sin \theta_i} \left(\frac{V_1^+}{Z_{01}} e^{j \beta_1 z} - \frac{V_1^-}{Z_{01}} e^{-j \beta_1 z} \right)$$



Per il mezzo 2: ($\gamma_2 = k_2 \cos \theta_t$)

$$E_{2y}(z) = e^{-j k_2 \sin \theta_t y} (E_t \cos \theta_t e^{j k_2 \cos \theta_t z})$$

$$H_{2x}(z) = e^{-j k_2 \sin \theta_t y} \left(\frac{E_t}{\xi_2} e^{j k_2 \cos \theta_t z} \right)$$

$$E_{2y}(z) = e^{-j k_2 \sin \theta_t y} (V_2^+ e^{j \gamma_2 z})$$

$$H_{2x}(z) = e^{-j k_2 \sin \theta_t y} \left(\frac{V_2^+}{Z_{02}} e^{j \gamma_2 z} \right)$$

$\Gamma^{\parallel}$: Coefficiente di riflessione di Fresnel all'interfaccia

$$\Gamma^{\parallel} = \frac{V_1^-}{V_1^+} = \frac{E_r \cos \theta_i}{E_i \cos \theta_i} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\xi_2 \cos \theta_t - \xi_1 \cos \theta_i}{\xi_2 \cos \theta_t + \xi_1 \cos \theta_i}$$

Compo totale in (1):

$$\underline{E}_1(z) = \hat{u}_i^{\parallel} E_i e^{-j k_1 \hat{x} \cdot \underline{r}} + \hat{u}_r^{\parallel} \Gamma^{\parallel} E_i e^{-j k_1 \hat{s} \cdot \underline{r}}$$

$$\underline{H}_1(z) = (\hat{x} \times \hat{u}_i^{\parallel}) \frac{E_i}{\xi_1} e^{-j k_1 \hat{x} \cdot \underline{r}} + (\hat{s} \times \hat{u}_r^{\parallel}) \frac{\Gamma^{\parallel} E_i}{\xi_1} e^{-j k_1 \hat{s} \cdot \underline{r}}$$

$T^{\parallel}$: Coefficiente di trasmissione di Fresnel all'interfaccia

$$T^{\parallel} = \frac{V_2^+}{V_1^+} = \frac{E_t \cos \theta_t}{E_i \cos \theta_i} = \frac{2 \xi_2 \cos \theta_t}{\xi_2 \cos \theta_t + \xi_1 \cos \theta_i}$$

$$\tilde{T}^{\parallel} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2 \xi_2 \cos \theta_i}{\xi_2 \cos \theta_t + \xi_1 \cos \theta_i}$$

Compo totale in (2):

$$\underline{E}_2(z) = \hat{u}_t^{\parallel} \tilde{T}^{\parallel} E_i e^{-j k_2 \hat{x} \cdot \underline{r}}$$

$$\underline{H}_2(z) = (\hat{x} \times \hat{u}_t^{\parallel}) \frac{\tilde{T}^{\parallel} E_i}{\xi_2} e^{-j k_2 \hat{x} \cdot \underline{r}}$$

Se il mezzo 2 è un conduttore elettrico perfetto:

$$\sigma_2 \rightarrow \infty$$

$$\epsilon_2 = \phi$$

$$r_{||} = \frac{\epsilon_2 \cos \theta_t - \epsilon_1 \cos \theta_i}{\epsilon_2 \cos \theta_t + \epsilon_1 \cos \theta_i} = -1$$

$$T_{||} = \frac{2 \epsilon_2 \cos \theta_t}{\epsilon_2 \cos \theta_t + \epsilon_1 \cos \theta_i} = \phi$$

Se i mezzi sono non magnetici e privi di perdite:

$$\mu_2 = \mu_1$$

$$r_{||} = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i} - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i} + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta_i}$$

In caso di mezzi privi di perdite, ∃ angolo polarizzante di Brewster: angolo di incidenza θ_i^B : $r_{||} = \phi$.

nel caso di mezzi non magnetici e privi di perdite:

$$r_{||} = \phi \Rightarrow \theta_i^B = \tan^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

In corrispondenza di θ_i^B , l'onda incidente viene completamente trasmessa e non subisce riflessione.

In caso di mezzi privi di perdite, ∃ angolo critico:

angolo di incidenza θ_i^c : $|r_{||}| = 1$

$$\left| \frac{\epsilon_2 \cos \theta_t - \epsilon_1 \cos \theta_i}{\epsilon_2 \cos \theta_t + \epsilon_1 \cos \theta_i} \right| = 1$$

$$\cos \theta_t = -\sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2} \sin^2 \theta_i - 1} \quad \text{e} \quad \frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2} \sin^2 \theta_i > 1$$

$$\text{Poiché } \sin^2 \theta_i < 1 \Rightarrow \epsilon_1 \mu_1 \geq \epsilon_2 \mu_2$$

nel caso di mezzi non magnetici e privi di perdite:

$$\epsilon_1 \geq \epsilon_2$$

$$\text{Sen } \theta_i^c = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \quad \text{riflessione totale per } \forall \theta_i > \theta_i^c$$

(63)

Ma il campo elettromagnetico in ② deve esistere anche per $\theta_i \geq \theta_i^c$, altrimenti non sarebbero soddisfatte le condizioni di continuità.

$$\theta_i \geq \theta_i^c \Rightarrow \sin \theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin \theta_i > 1 \Rightarrow \theta_t = ?$$

$$\theta_t \in \mathbb{C} \Rightarrow \theta_t = \theta_t^{\text{Re}} + j \theta_t^{\text{Im}}$$

$$\sin(\theta_t^{\text{Re}} + j \theta_t^{\text{Im}}) = \sin \theta_t^{\text{Re}} \cosh(j \theta_t^{\text{Im}}) + \cos \theta_t^{\text{Re}} \sinh(j \theta_t^{\text{Im}})$$

$$\cos(\theta_t^{\text{Re}} + j \theta_t^{\text{Im}}) = \cos \theta_t^{\text{Re}} \cosh(j \theta_t^{\text{Im}}) - \sin \theta_t^{\text{Re}} \sinh(j \theta_t^{\text{Im}})$$

$$\cosh(j \theta_t^{\text{Im}}) = \frac{e^{j(j \theta_t^{\text{Im}})} + e^{-j(j \theta_t^{\text{Im}})}}{2} = \frac{e^{-\theta_t^{\text{Im}}} + e^{\theta_t^{\text{Im}}}}{2} = \cosh \theta_t^{\text{Im}}$$

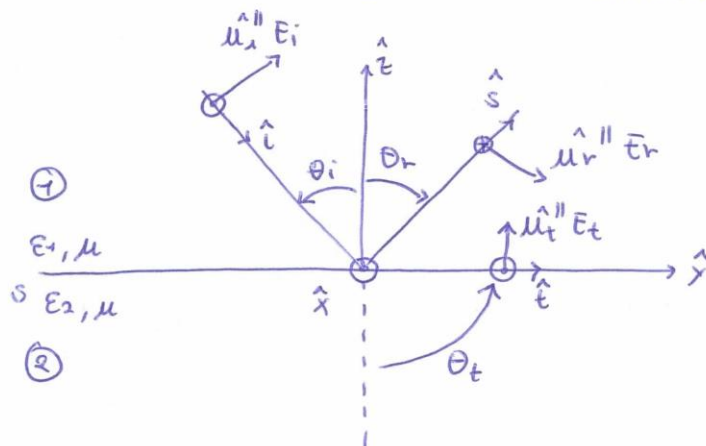
$$\sinh(j \theta_t^{\text{Im}}) = -j \frac{e^{j(j \theta_t^{\text{Im}})} - e^{-j(j \theta_t^{\text{Im}})}}{2} = -j \frac{e^{-\theta_t^{\text{Im}}} - e^{\theta_t^{\text{Im}}}}{2} = j \sinh \theta_t^{\text{Im}}$$

Sopra l'angolo critico si ha:

$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin \theta_i > 1 \Rightarrow \theta_t = \frac{\pi}{2} + j \theta_t^{\text{Im}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + j \theta_t^{\text{Im}}\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cosh \theta_t^{\text{Im}} + j \cos \frac{\pi}{2} \sinh \theta_t^{\text{Im}} = \cosh \theta_t^{\text{Im}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + j \theta_t^{\text{Im}}\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cosh \theta_t^{\text{Im}} - j \sin \frac{\pi}{2} \sinh \theta_t^{\text{Im}} = -j \sinh \theta_t^{\text{Im}}$$



Caratteristiche dell'onda incidente trasmessa

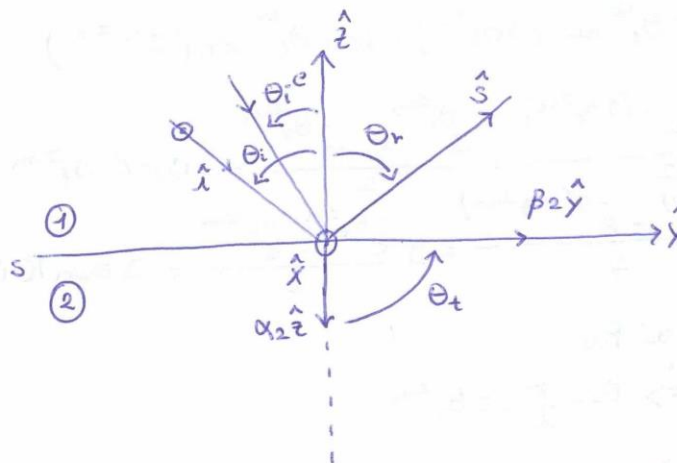
$$\hat{x} = \sin \theta_t \hat{y} - \cosh \theta_t \hat{z} = \cosh \theta_t \hat{y} + j \sinh \theta_t \hat{z}$$

$$\underline{E}_2(k) = \left(-j \sinh \theta_t \hat{y} + E_t \cosh \theta_t \hat{z} \right) e^{\alpha_2 z} e^{-j \beta_2 y}$$

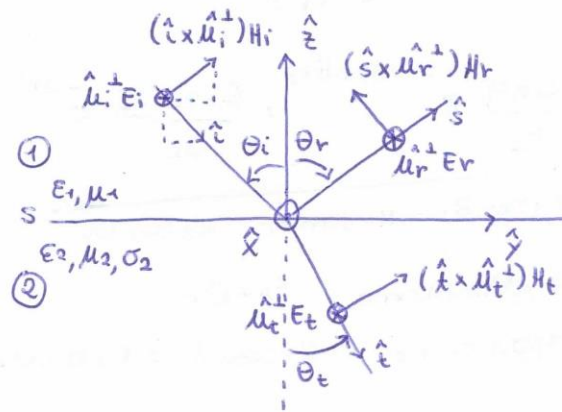
$$\underline{H}_2(k) = H_t \hat{x} e^{\alpha_2 z} e^{-j \beta_2 y}$$

$$\text{con } \beta_2 = k_2 \cosh \theta_t \quad ; \quad \alpha_2 = k_2 \sinh \theta_t$$

ONDA EVANESCENTE
SUPERFICIALE



POLARIZZAZIONE PERPENDICOLARE



Campo Incidente:

$$\underline{E}_i(\underline{r}) = \hat{\mu}_i^{-1} \underline{E}_i e^{-j k_1 \hat{\mathbf{i}} \cdot \underline{r}}$$

$$\underline{H}_i(\underline{r}) = (\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mu}_i^{-1}) \frac{\underline{E}_i}{\hat{s}_1} e^{-j k_1 \hat{\mathbf{i}} \cdot \underline{r}}$$

Campo Riflesso:

$$\underline{E}_r(\underline{r}) = \hat{\mu}_r^{-1} \underline{E}_r e^{-j k_1 \hat{\mathbf{s}} \cdot \underline{r}}$$

$$\underline{H}_r(\underline{r}) = (\hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mu}_r^{-1}) \frac{\underline{E}_r}{\hat{s}_1} e^{-j k_1 \hat{\mathbf{s}} \cdot \underline{r}}$$

Campo Trasmissione:

$$\underline{E}_t(\underline{r}) = \hat{\mu}_t^{-1} \underline{E}_t e^{-j k_2 \hat{\mathbf{t}} \cdot \underline{r}}$$

$$\underline{H}_t(\underline{r}) = (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mu}_t^{-1}) \frac{\underline{E}_t}{\hat{s}_2} e^{-j k_2 \hat{\mathbf{t}} \cdot \underline{r}}$$

Campo Totale nel mezzo 1:

$$\underline{E}_1(\underline{r}) = \underline{E}_i(\underline{r}) + \underline{E}_r(\underline{r})$$

$$\underline{H}_1(\underline{r}) = \underline{H}_i(\underline{r}) + \underline{H}_r(\underline{r})$$

Campo Totale nel mezzo 2:

$$\underline{E}_2(\underline{r}) = \underline{E}_t(\underline{r})$$

$$\underline{H}_2(\underline{r}) = \underline{H}_t(\underline{r})$$

Continuità dei campi tangenti totali all'interfaccia:

$$E_i e^{-jk_1 \sin \theta_i y} + E_r e^{-jk_1 \sin \theta_r y} = E_t e^{-jk_2 \sin \theta_t y}$$

$$\frac{E_i \cos \theta_i}{S_1} e^{-jk_1 \sin \theta_i y} - \frac{E_r \cos \theta_r}{S_1} e^{-jk_1 \sin \theta_r y} = \frac{E_t \cos \theta_t}{S_2} e^{-jk_2 \sin \theta_t y}$$

Dovendo valere V_y : $k_1 \sin \theta_i = k_1 \sin \theta_r = k_2 \sin \theta_t$

Legge di Snell per la riflessione: $\theta_i = \theta_r$

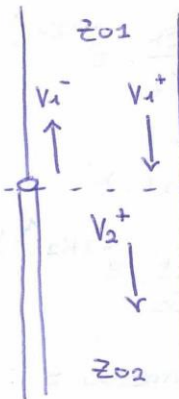
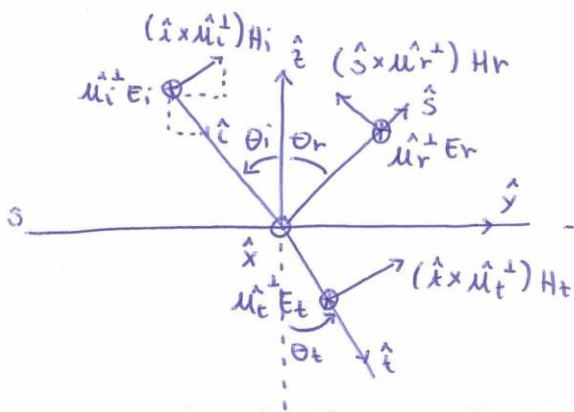
Legge di Snell per la rifrazione: $k_1 \sin \theta_i = k_2 \sin \theta_t$

Dalle leggi di Snell risulta:

$$\begin{cases} E_i + E_r = E_t \\ \frac{E_i \cos \theta_i}{S_1} - \frac{E_r \cos \theta_i}{S_1} = \frac{E_t \cos \theta_t}{S_2} \end{cases}$$

← Continuità dei campi totali tangenti all'interfaccia.

ANALOGIA CON LINEE DI TRASMISSIONE



$$\begin{cases} E_i + E_r = E_t \\ \frac{E_i}{S_1 \cos \theta_i} - \frac{E_r}{S_1 \cos \theta_i} = \frac{E_t}{S_2 \cos \theta_t} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} V_1^+ + V_1^- &= V_2^+ \\ \frac{V_1^+}{Z_{01}} - \frac{V_1^-}{Z_{01}} &= \frac{V_2^+}{Z_{02}} \end{aligned}$$

con:

$$V_1^+ = E_i ; V_1^- = E_r ; V_2^+ = E_t$$

$$Z_{01} = \frac{S_1}{\cos \theta_i} ; Z_{02} = \frac{S_2}{\cos \theta_t}$$

Per il mezzo 1: ($\beta_1 = k_1 \cos \theta_i$)

$$E_{1x}(z) = -e^{-j k_1 \sin \theta_i y} \left(E_i e^{j k_1 \cos \theta_i z} + E_r e^{-j k_1 \cos \theta_i z} \right)$$

$$H_{1y}(z) = e^{-j k_1 \sin \theta_i y} \left(\frac{E_i}{\frac{\epsilon_1}{\cos \theta_i}} e^{j k_1 \cos \theta_i z} - \frac{E_r}{\frac{\epsilon_1}{\cos \theta_i}} e^{-j k_1 \cos \theta_i z} \right)$$

$$E_{1x}(z) = -e^{-j k_1 \sin \theta_i y} \left(V_1^+ e^{j \beta_1 z} + V_1^- e^{-j \beta_1 z} \right)$$

$$H_{1y}(z) = e^{-j k_1 \sin \theta_i y} \left(\frac{V_1^+}{Z_{01}} e^{j \beta_1 z} - \frac{V_1^-}{Z_{01}} e^{-j \beta_1 z} \right)$$

Per il mezzo 2: ($\beta_2 = k_2 \cos \theta_t$)

$$E_{2x}(z) = +e^{-j k_2 \sin \theta_t y} \left(E_t \cos \theta_t e^{j k_2 \cos \theta_t z} \right)$$

$$H_{2y}(z) = e^{-j k_2 \sin \theta_t y} \left(\frac{E_t}{\frac{\epsilon_2}{\cos \theta_t}} e^{j k_2 \cos \theta_t z} \right)$$

$$E_{2x}(z) = e^{-j k_2 \sin \theta_t y} \left(V_2^+ e^{j \beta_2 z} \right)$$

$$H_{2y}(z) = e^{-j k_2 \sin \theta_t y} \left(\frac{V_2^+}{Z_{02}} e^{j \beta_2 z} \right)$$

$\Gamma^\perp$: Coefficiente di riflessione di Fresnel all'interfaccia:

$$\Gamma^\perp = \frac{V_1^-}{V_1^+} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\frac{\epsilon_2}{\cos \theta_t} - \frac{\epsilon_1}{\cos \theta_i}}{\frac{\epsilon_2}{\cos \theta_t} + \frac{\epsilon_1}{\cos \theta_i}} = \frac{\epsilon_2 \cos \theta_i - \epsilon_1 \cos \theta_t}{\epsilon_2 \cos \theta_i + \epsilon_1 \cos \theta_t}$$

Campo Totale in ①:

$$\underline{E}_1(z) = \hat{u}_i^\perp E_i e^{-j k_1 \hat{i} \cdot \underline{r}} + \hat{u}_r^\perp \Gamma^\perp E_i e^{-j k_1 \hat{s} \cdot \underline{r}}$$

$$\underline{H}_1(z) = (\hat{i} \times \hat{u}_i^\perp) \frac{E_i}{\epsilon_1} e^{-j k_1 \hat{i} \cdot \underline{r}} + (\hat{s} \times \hat{u}_r^\perp) \frac{\Gamma^\perp E_i}{\epsilon_1} e^{-j k_1 \hat{s} \cdot \underline{r}}$$

$T^\perp$: coefficiente di trasmissione di Fresnel all'interfaccia

$$T^\perp = \frac{V_2^\perp}{V_1^\perp} = \frac{2 \frac{\epsilon_2}{\cos \theta_t}}{\frac{\epsilon_2}{\cos \theta_i} + \frac{\epsilon_1}{\cos \theta_t}} = \frac{2 \epsilon_2 \cos \theta_i}{\epsilon_2 \cos \theta_i + \epsilon_1 \cos \theta_t}$$

Campo totale in (2):

$$\underline{E}_2(\underline{r}) = \hat{u}_t^\perp T^\perp E_i e^{-j k_2 \hat{x} \cdot \underline{r}}$$

$$\underline{H}_2(\underline{r}) = (\hat{x} \times \hat{u}_t^\perp) \frac{T^\perp E_i}{\epsilon_2} e^{-j k_2 \hat{x} \cdot \underline{r}}$$

Se il mezzo 2 è un conduttore elettrico perfetto:

$$\sigma_2 \rightarrow \infty$$

$$\epsilon_2 = \phi$$

$$r^\perp = \frac{\epsilon_2 \cos \theta_i - \epsilon_1 \cos \theta_t}{\epsilon_2 \cos \theta_i + \epsilon_1 \cos \theta_t} = -1$$

$$T^\perp = \frac{2 \epsilon_2 \cos \theta_t}{\epsilon_2 \cos \theta_i + \epsilon_1 \cos \theta_t} = \phi$$

Se i mezzi sono non magnetici e privi di perdite:

$$\mu_2 = \mu_1$$

$$r^\perp = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}$$

In caso di mezzi privi di perdite :

Angolo Polarizzante di Brewster : $\theta_i^B : \Gamma^\perp = 0$

$$\Rightarrow \frac{S_2}{\cos \theta_t} = \frac{S_1}{\cos \theta_i}$$

$$\sin \theta_i^B = \sqrt{\frac{1 - \frac{\epsilon_2 \mu_1}{\epsilon_1 \mu_2}}{1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2}} ; |\sin \theta_i^B| \leq 1 \Rightarrow \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} < \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

nel caso di mezzi non magnetici e privi di perdite, l'angolo Polarizzante di Brewster non esiste nel caso di polarizzazione perpendicolare :

$$\mu_2 = \mu_1 \Rightarrow \sin \theta_i^B \rightarrow \infty$$

POLARIZZANTE : nel caso di onda piana incidente con angolo di Brewster con campo E sia $\parallel$ che $\perp$, l'onda riflessa è polarizzata solo perpendicolarmente.

In caso di mezzi privi di perdite :

Angolo Critico : $\theta_i^c : |\mu_1| = 1$

$$\cos \theta_t = -\sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2} \sin^2 \theta_i - 1} \quad \text{se} \quad \frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2} \sin^2 \theta_i \geq 1$$

$$\text{Poiché} \quad \sin^2 \theta_i \leq 1 \Rightarrow \epsilon_1 \mu_1 \geq \epsilon_2 \mu_2$$

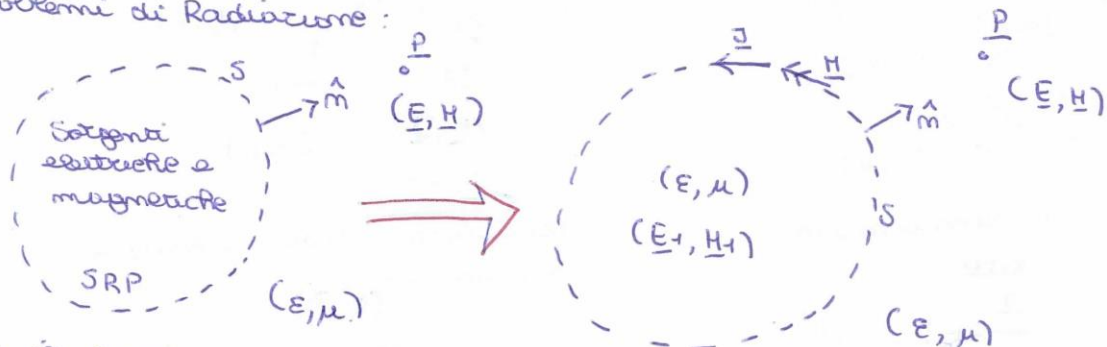
nel caso di mezzi non magnetici e privi di perdite :

$$\sin \theta_i^c = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} : \text{riflessione totale} \quad \forall \theta_i \geq \theta_i^c$$

TEOREMI FONDAMENTALI DELL'ELETTROMAGNETISMO

TEOREMA DI EQUIVALENZA

Problemi di Radiazione:



Per il teorema di unicità queste condizioni implicano che il campo esterno sia uguale a quello iniziale; il campo interno è un campo arbitrario che rispetta le equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti.

$$\begin{cases} \underline{J} = \hat{m} \times (\underline{H} - \underline{H}_1) \\ \underline{M} = (\underline{E} - \underline{E}_1) \times \hat{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{J} = \hat{m} \times (\underline{H} - \underline{H}_1) \\ -\underline{M} = \hat{m} \times (\underline{E} - \underline{E}_1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \underline{J} &= \hat{m} \times \underline{H} \\ \underline{M} &= \underline{E} \times \hat{m} \end{aligned}$$

Sono correnti radiative per la regione esterna mentre producono un campo nullo all'interno.

$$\begin{aligned} \underline{J}_1 &= -\hat{m} \times \underline{H}_1 \\ \underline{M}_1 &= -\underline{E}_1 \times \hat{m} \end{aligned}$$

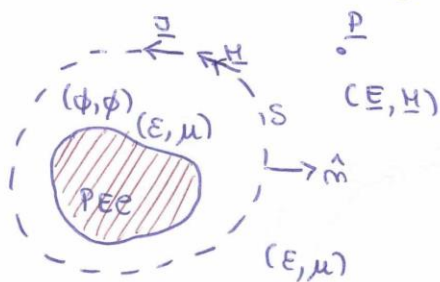
Sono correnti radiative per la regione interna mentre producono un campo nullo all'esterno.

Supponiamo di imporre all'interno un campo nullo:
 $(\underline{E}_1, \underline{H}_1) = (\emptyset, \emptyset)$

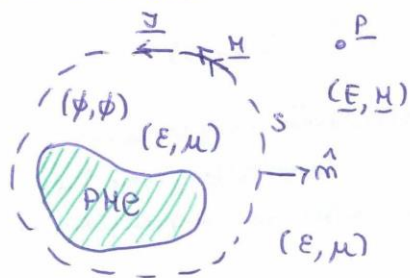
$$\underline{J} = \hat{m} \times \underline{H} \quad ; \quad \underline{M} = \underline{E} \times \hat{m}$$

Dal momento che il campo interno è nullo possiamo mettere all'interno di S un generico oggetto senza perturbare le condizioni al contorno dei campi

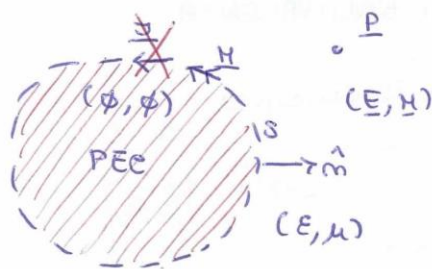
Consideriamo le seguenti situazioni



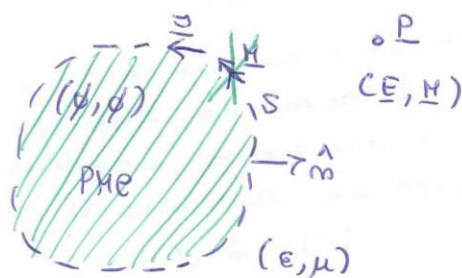
Le correnti rimangono imperturbate



Le correnti rimangono imperturbate

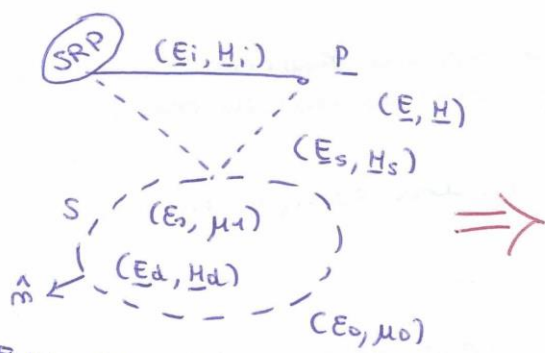


Modifichiamo solo correnti magnetiche

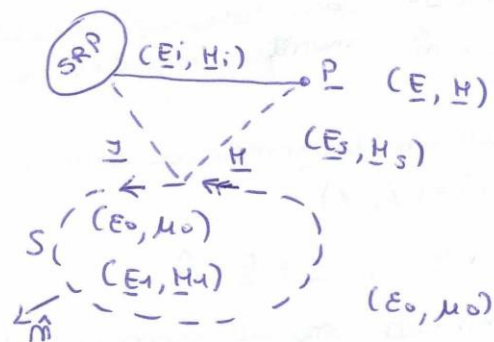


Modifichiamo solo correnti elettriche

Problemi di Rirradiazione:



$$(\underline{E}, \underline{H}) = (\underline{E}_i, \underline{H}_i) + (\underline{E}_s, \underline{H}_s)$$



$$(\underline{E}, \underline{H}) = (\underline{E}_i, \underline{H}_i) + (\underline{E}_s, \underline{H}_s)$$

Le correnti equivalenti devono irradiare esternamente un campo $(\underline{E}_s, \underline{H}_s)$ ed internamente un campo tale per cui il campo totale sia $(\underline{E}_1, \underline{H}_1)$; dal momento che all'interno è già presente un campo $(\underline{E}_i, \underline{H}_i)$ dovuto alla SRP, le correnti equivalenti sono date da:

$$\underline{J} = \hat{m} \times [\underline{H}_s + \underline{H}_i - \underline{H}_1]$$

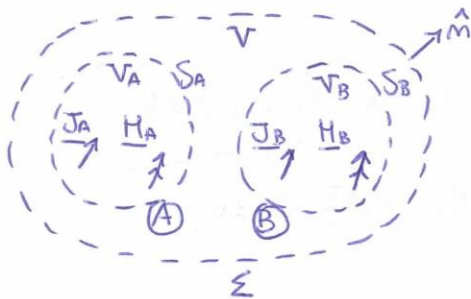
$$\underline{M} = [\underline{E}_s + \underline{E}_i - \underline{E}_1] \times \hat{m}$$

Supponiamo di immergere all'interno un campo nullo:

$$(\underline{E}_r, \underline{H}_r) = (\emptyset, \emptyset)$$

$$\underline{J} = \hat{m} \times [\underline{H}_s + \underline{H}_i] = \hat{m} \times \underline{H} ; \underline{H} = [\underline{E}_s + \underline{E}_i] \times \hat{m} = \underline{E} \times \hat{m}$$

TEOREMA DI RECIPROCA



$$\underline{J}_A, \underline{M}_A \Rightarrow \underline{E}_A, \underline{H}_A$$

$$\underline{J}_B, \underline{M}_B \Rightarrow \underline{E}_B, \underline{H}_B$$

↑ Campi generati dalle sorgenti del sistema A in assenza delle sorgenti del sistema B e viceversa.

I due campi soddisfanno Eq. di Maxwell:

$$1) \nabla \times \underline{E}_A = -\omega \mu \underline{H}_A - \underline{M}_A$$

$$3) \nabla \times \underline{E}_B = -\omega \mu \underline{H}_B - \underline{M}_B$$

$$2) \nabla \times \underline{H}_A = \omega \epsilon \underline{E}_A + \underline{J}_A$$

$$4) \nabla \times \underline{H}_B = \omega \epsilon \underline{E}_B + \underline{J}_B$$

$$(\nabla \times \underline{E}_A) \cdot \underline{H}_B = -\omega \mu \underline{H}_A \cdot \underline{H}_B - \underline{M}_A \cdot \underline{H}_B$$

$$(\nabla \times \underline{E}_B) \cdot \underline{H}_A = -\omega \mu \underline{H}_B \cdot \underline{H}_A - \underline{M}_B \cdot \underline{H}_A$$

$$(\nabla \times \underline{H}_A) \cdot \underline{E}_B = \omega \epsilon \underline{E}_A \cdot \underline{E}_B + \underline{J}_A \cdot \underline{E}_B$$

$$(\nabla \times \underline{H}_B) \cdot \underline{E}_A = \omega \epsilon \underline{E}_B \cdot \underline{E}_A + \underline{J}_B \cdot \underline{E}_A$$

$$(\underline{H}_B \cdot \nabla \times \underline{E}_A - \underline{H}_A \cdot \nabla \times \underline{E}_B) + (\underline{E}_B \cdot \nabla \times \underline{H}_A - \underline{E}_A \cdot \nabla \times \underline{H}_B) = -\underline{H}_B \cdot \underline{M}_A + \underline{H}_A \cdot \underline{M}_B + \underline{E}_B \cdot \underline{J}_A - \underline{E}_A \cdot \underline{J}_B$$

$$\rightarrow \nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{A}) = \underline{A} \cdot (\nabla \times \underline{E}) - \underline{E} \cdot (\nabla \times \underline{A})$$

Integrando nel volume V e applicando Gauss:

$$\iiint_V \nabla \cdot (\underline{E}_A \times \underline{H}_B) - \nabla \cdot (\underline{E}_B \times \underline{H}_A) = \oint_S (\underline{E}_A \times \underline{H}_B - \underline{E}_B \times \underline{H}_A) \cdot \hat{m} d\Omega$$

$$= \iiint_{V_A} (\underline{E}_B \cdot \underline{J}_A - \underline{H}_B \cdot \underline{M}_A) dV - \iiint_{V_B} (\underline{E}_A \cdot \underline{J}_B - \underline{H}_A \cdot \underline{M}_B) dV$$

(73)

Le sorgenti del sistema A sono non nulle solamente nel volume V_A , mentre le sorgenti del sistema B sono non nulle solo nel volume B.

FORMULAZIONE GENERALE

Reazione dei campi sulle sorgenti

$$\oint_{\Sigma} (\underline{E}_A \times \underline{H}_B - \underline{E}_B \times \underline{H}_A) \cdot \hat{n} d\Sigma = \iiint_{V_A} (\underline{E}_B \cdot \underline{J}_A - \underline{H}_B \cdot \underline{M}_A) dV - \iiint_{V_B} (\underline{E}_A \cdot \underline{J}_B - \underline{H}_A \cdot \underline{M}_B) dV$$

Supponiamo Σ , superficie di una sfera; all'infinito si ha:

$$\iiint_{V_A} (\underline{E}_B \cdot \underline{J}_A - \underline{H}_B \cdot \underline{M}_A) dV = \iiint_{V_B} (\underline{E}_A \cdot \underline{J}_B - \underline{H}_A \cdot \underline{M}_B) dV$$

Sostituiamo le sorgenti con correnti equivalenti $\underline{J}'_A, \underline{H}'_A$, $\underline{J}'_B, \underline{H}'_B$ distribuite sulle superfici S_A e S_B interne ai volumi V_A e V_B .

$$\Rightarrow \underline{J}'_{A,B} = \hat{n} \times \underline{H}_{A,B}; \quad \underline{H}'_{A,B} = \underline{E}_{A,B} \times \hat{n}$$

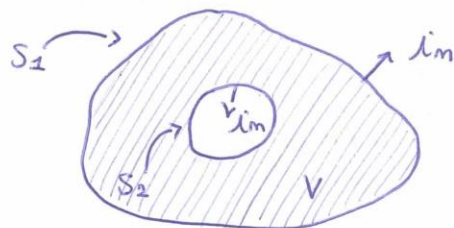
$$\iint_{S_A} (\underline{E}_B \cdot (\hat{n} \times \underline{H}_A) - \underline{H}_B \cdot (\underline{E}_A \times \hat{n})) dS = \iint_{S_B} (\underline{E}_A \cdot (\hat{n} \times \underline{H}_B) - \underline{H}_A \cdot (\underline{E}_B \times \hat{n})) dS$$

$$\iint_{S_A} [(\underline{E}_B \times \underline{H}_A) - (\underline{E}_A \times \underline{H}_B)] \cdot \hat{n} dS = \iint_{S_B} [(\underline{E}_A \times \underline{H}_B) - (\underline{E}_B \times \underline{H}_A)] \cdot \hat{n} dS$$

Gli integrali di reazione tra campi e correnti sono soppressi tramite integrali di superfici di prodotti reciproci tra campi.

TEOREMA DI UNICITÀ

Sotto quali condizioni la soluzione delle equazioni di Maxwell è determinata e unica?



Per specificare interamente un campo elettromagnetico, soluzione delle equazioni di Maxwell, in un volume V per ogni tempo $t > 0$, basta assegnare i valori del campo in tutto il volume all'istante $t=0$ (condizioni iniziali), e assegnare per tutti i tempi $t \geq 0$ e la componente tangenziale del campo elettrico o di quello magnetico sulla superficie S per tutti i tempi $t \geq 0$ (condizioni al contorno).

In tali ipotesi la soluzione è UNICA.

TEOREMA DELLE IMMAGINI

Consideriamo un dipolo elettrico certo posto a distanza R sopra un PEC o PMC.

È possibile simulare il piano introducendo un altro dipolo a distanza $-R$ dal piano stesso opportunamente orientato.

TEOREMA DI DUALITA'

$$\nabla \times \underline{H}_1 = \underline{J}_1 + \underline{J}_1$$

$$\nabla \times \underline{E}_1 = -\underline{J}_1 \mu_1 \underline{H}_1$$

$$\nabla \cdot \underline{E}_1 = \rho_1$$

$$\nabla \cdot \underline{H}_1 = 0$$

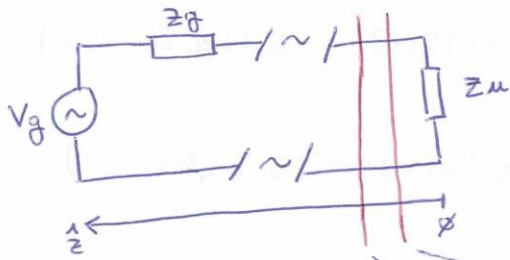
$$\nabla \times \underline{H}_2 = \underline{J}_2 + \underline{J}_2$$

$$\Rightarrow \nabla \times \underline{E}_2 = -\underline{J}_2 \mu_2 \underline{H}_2 - \underline{J}_{m2}$$

$$\nabla \cdot \underline{E}_2 = 0$$

$$\nabla \cdot \underline{H}_2 = \rho_{m2}$$

LINEE DI TRASMISSIONE

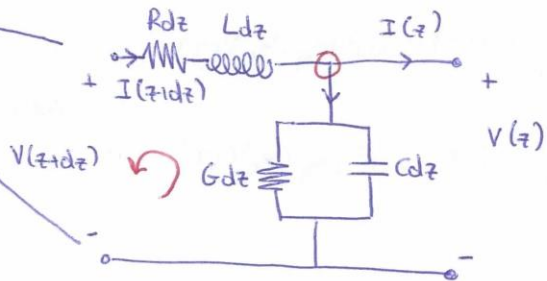


Ldz : deriva da un effetto induttivo del filo;

Rdz : Perdite Ohmiche;

gdz : Perdite Ohmiche;

Cdz : deriva da un effetto capacitivo fra i due fili;



$$\begin{cases} V(z+dz) - (j\omega L + R)dz \cdot I(z+dz) - V(z) = 0 \\ I(z+dz) - I(z) = (G + j\omega C)dz \cdot V(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{V(z+dz) - V(z)}{dz} = (R + j\omega L)I(z+dz) \\ \frac{I(z+dz) - I(z)}{dz} = (G + j\omega C)V(z) \end{cases} \quad dz \rightarrow 0 \quad \begin{cases} \frac{d}{dz} V(z) = (R + j\omega L)I(z) \\ \frac{d}{dz} I(z) = (G + j\omega C)V(z) \end{cases}$$

$$L_{eq} = L - j \frac{R}{\omega} \quad ; \quad C_{eq} = C - j \frac{G}{\omega} \quad ;$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} V(z) = j\omega (L - j \frac{R}{\omega}) I(z) = j\omega L_{eq} I(z) \\ \frac{d}{dz} I(z) = j\omega (C - j \frac{G}{\omega}) V(z) = j\omega C_{eq} V(z) \end{cases}$$

$\rightarrow I(z+dz) \approx I(z) + \frac{d}{dz} I(z) dz + o(z^2) \approx I(z)$ → tende a 0

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} V(z) = j\omega L_{eq} I(z) \\ \frac{d}{dz} I(z) = j\omega C_{eq} V(z) \end{cases}$$

(7)

Derivando ambedue:

$$\frac{d^2}{dz^2} V(z) = j\omega L_{eq} \frac{d}{dz} I(z) = j\omega L_{eq} (j\omega C_{eq}) V(z) = -\omega^2 L_{eq} C_{eq} V(z)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} I(z) = j\omega C_{eq} \frac{d}{dz} V(z) = j\omega C_{eq} (j\omega L_{eq}) I(z) = -\omega^2 L_{eq} C_{eq} I(z)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dz^2} V(z) = -\omega^2 L_{eq} C_{eq} V(z) \\ \frac{d^2}{dz^2} I(z) = -\omega^2 L_{eq} C_{eq} I(z) \end{cases} \quad \text{con } K = \omega \sqrt{L_{eq} C_{eq}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2}{dz^2} V(z) = -K^2 V(z) \\ \frac{d^2}{dz^2} I(z) = -K^2 I(z) \end{cases}$$

Soluzioni generali:

$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{jKz} + V^- e^{-jKz} \\ I(z) = I^+ e^{jKz} + I^- e^{-jKz} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dz} V(z) = jK V^+ e^{jKz} - jK V^- e^{-jKz} = j\omega L_{eq} I(z)$$

$$= j\omega L_{eq} (I^+ e^{jKz} + I^- e^{-jKz})$$

$$\omega L_{eq} I(z) = K V^+ e^{jKz} - K V^- e^{-jKz}$$

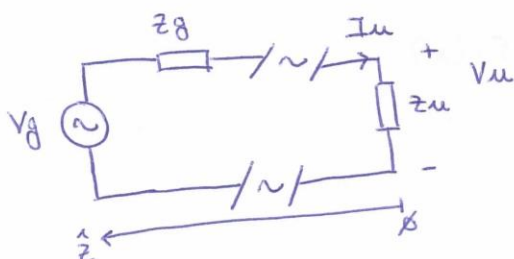
$$\Rightarrow I(z) = \frac{K}{\omega L_{eq}} (V^+ e^{jKz} - V^- e^{-jKz})$$

$$\frac{1}{Z_0} = \frac{K}{\omega L_{eq}} \Rightarrow Z_0 = \frac{\omega L_{eq}}{K}$$

Sistema generale:

$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{jkz} + V^- e^{-jkz} \\ I(z) = \frac{V^+}{Z_0} e^{jkz} - \frac{V^-}{Z_0} e^{-jkz} \end{cases} \quad \text{con } Z_0 = \sqrt{\frac{C_{eq}}{L_{eq}}} \in \mathbb{R}$$

Analisi della linea nel caso di un carico generico:



$$V_u = V(z=\varnothing) = V^+ e^{jkz} + V^- e^{-jkz} = V^+ + V^-$$

$$I_u = I(z=\varnothing) = \frac{V^+}{Z_0} e^{jkz} - \frac{V^-}{Z_0} e^{-jkz} = \frac{V^+ - V^-}{Z_0}$$

$$\begin{cases} V^+ = \frac{1}{2} (V_u + Z_0 I_u) \\ V^- = \frac{1}{2} (V_u - Z_0 I_u) \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{1}{2} (V_u + Z_0 I_u) e^{jkz} + \frac{1}{2} (V_u - Z_0 I_u) e^{-jkz} \\ &= \frac{1}{2} V_u (e^{jkz} + e^{-jkz}) + \frac{1}{2} I_u Z_0 (e^{jkz} - e^{-jkz}) \cdot \frac{j}{j} \\ &= V_u \cos(kz) + j I_u Z_0 \sin(kz) \end{aligned}$$

$$I(z) = I_u \cos(kz) + j \frac{V_u}{Z_0} \sin(kz)$$

È una soluzione stazionaria: non si propaga in $\hat{z}$.

$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{jKz} \left(1 + \frac{V^-}{V^+} e^{-2jKz} \right) \\ I(z) = \frac{V^+}{Z_0} e^{jKz} \left(1 - \frac{V^-}{V^+} e^{-2jKz} \right) \end{cases}$$

$$\Gamma_V(z) = \frac{V^- e^{-jKz}}{V^+ e^{jKz}} = \frac{V^-}{V^+} e^{-2jKz}$$

$$\Gamma_I(z) = + \frac{I^- e^{-jKz}}{I^+ e^{jKz}} = + \frac{I^-}{I^+} e^{-2jKz} = -\Gamma_V(z)$$

$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{jKz} (1 + \Gamma_V(z)) \\ I(z) = \frac{V^+}{Z_0} e^{jKz} (1 - \Gamma_V(z)) \end{cases}$$

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V^+ e^{jKz} (1 + \Gamma_V(z))}{\frac{V^+}{Z_0} e^{jKz} (1 - \Gamma_V(z))} = Z_0 \cdot \frac{1 + \Gamma_V(z)}{1 - \Gamma_V(z)}$$

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V_u \cos(Kz) + j I_u Z_0 \sin(Kz)}{I_u \cos(Kz) + j \frac{V_u}{Z_0} \sin(Kz)} = \frac{V_u + j I_u Z_0 \tan(Kz)}{I_u + j \frac{V_u}{Z_0} \tan(Kz)} \cdot \frac{Z_0}{Z_0}$$

$$= Z_0 \cdot \frac{V_u + j I_u Z_0 \tan(Kz)}{I_u Z_0 + j V_u \tan(Kz)} \cdot \frac{I_u}{I_u}$$

$$= Z_0 \cdot \frac{Z_L + j Z_0 \tan(Kz)}{Z_0 + j Z_L \tan(Kz)}$$

Casos particolari:

$$Z_L = \emptyset \Rightarrow Z(z) = j Z_0 \tan(Kz)$$

$$Z_L = \infty \Rightarrow Z(z) = -j Z_0 \tan^{-1}(Kz)$$

EQUAZIONI DI MAXWELL CON POTENZIALI

$$i) \nabla \times \underline{E} = -\partial \omega \mu \underline{H}$$

$$ii) \nabla \times \underline{H} = \partial \omega \epsilon \underline{E} + \underline{J}$$

$$iii) \nabla \cdot \underline{E} = \rho / \epsilon$$

$$iv) \nabla \cdot \underline{H} = 0$$

$$\nabla \cdot \underline{H} = 0 \Rightarrow \exists \underline{A} : \underline{H} = \nabla \times \underline{A}$$

$$\Rightarrow \exists \underline{A} : \mu \underline{H} = \nabla \times \underline{A}$$

$$\nabla \times \underline{E} = -\partial \omega \mu \underline{H} = -\partial \omega \nabla \times \underline{A}$$

$$\nabla \times [\underline{E} + \partial \omega \underline{A}] = 0 \Rightarrow \exists \phi : \underline{E} + \partial \omega \underline{A} = -\nabla \phi$$

$$(*) \mu \underline{H} = \nabla \times \underline{A}$$

$\underline{A}, \phi$ Potenziali di Helmholtz

$$(**) \underline{E} + \partial \omega \underline{A} = -\nabla \phi$$

$$\nabla \times \underline{H} = \nabla \times (\nabla \times \underline{A} \cdot \frac{1}{\mu}) = \partial \omega \epsilon [-\nabla \phi - \partial \omega \underline{A}] + \underline{J}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \nabla \times \underline{A} = \omega^2 \epsilon \mu \underline{A} - \partial \omega \epsilon \mu \nabla \phi + \underline{J}$$

$$\nabla \times \nabla \times \underline{A} = \omega^2 \epsilon \mu \underline{A} + \partial \omega \epsilon \mu \nabla \phi - \underline{J} = 0 \quad \text{con } k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$$

$$\nabla \times \nabla \times \underline{A} = k^2 \underline{A} + \partial \omega \epsilon \mu \nabla \phi - \underline{J} = 0$$

$$\nabla \times \nabla \times \underline{A} = \nabla \nabla \cdot \underline{A} - \nabla \cdot \nabla \underline{A}$$

$$\uparrow$$

$$\nabla^2 \underline{A}$$

$$\Rightarrow -\nabla^2 \underline{A} - k^2 \underline{A} = \underline{J} - \nabla [\partial \omega \epsilon \mu \phi + \nabla \cdot \underline{A}]$$

$$(***) \nabla^2 \underline{A} + k^2 \underline{A} = -\underline{J} + \nabla [\partial \omega \epsilon \mu \phi + \nabla \cdot \underline{A}]$$

Bisogna ricordare che:

$$\exists \underline{A}' : \mu \underline{H} = \nabla \times \underline{A}' \quad \text{con } \underline{A}' = \underline{A} + \nabla \psi$$

da (iii)

Ma adesso $\underline{E} + \partial \omega \underline{A}' \neq -\nabla \phi$, quindi:

$$\underline{E} + \partial \omega [\underline{A} + \nabla \psi] = -\nabla \phi'$$

$$\Rightarrow -\cancel{\nabla} \phi' = -\cancel{\nabla} \phi + \partial \omega \cancel{\nabla} \psi \Rightarrow \phi' = \phi - \partial \omega \psi$$

$$\begin{cases} \underline{A}' = \underline{A} + \nabla \psi \\ \phi' = \phi - \partial \omega \psi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu \underline{H} = \nabla \times \underline{A}' \\ \underline{E} = -\partial \omega \underline{A}' - \nabla \phi' \end{cases}$$

da ***) :

$$\nabla^2 \underline{A} + k^2 \underline{A} = -\mu \underline{J} + \nabla [\cancel{\omega \epsilon \mu \phi} + \cancel{\nabla \cdot \underline{A}}]$$

con $\omega \epsilon \mu \phi + \nabla \cdot \underline{A} = f$

Per associare $\underline{A}$ da ϕ è necessario annullare

$$\omega \epsilon \mu [\cancel{\phi'} + \omega \psi] + \nabla \cdot [\cancel{\underline{A}'} - \nabla \psi] = 0$$

Posso annullare ϕ' e $\underline{A}'$ se : $-\omega^2 \epsilon \mu \psi - \nabla^2 \psi = 0$

$$\Rightarrow \nabla^2 \psi + k^2 \psi = -g$$

Risulta quindi :

$$(***) \quad \nabla^2 \underline{A} + k^2 \underline{A} = -\mu \underline{J}$$

$$(***) \quad \omega \epsilon \mu \phi + \nabla \cdot \underline{A} = 0$$

da III) :

$$\nabla \cdot \underline{E} = \nabla \cdot [-\nabla \phi - \omega \underline{A}] = \rho/\epsilon$$

$$\nabla \cdot [-\nabla \phi - \omega \underline{A}] - k^2 \phi + k^2 \phi = \rho/\epsilon$$

$$-\nabla^2 \phi - k^2 \phi - \cancel{\omega \nabla \cdot \underline{A}} + k^2 \phi = \rho/\epsilon \quad (*****)$$

$$\uparrow -\omega [\nabla \cdot \underline{A} + \omega \epsilon \mu \phi] = 0$$

Il nuovo set di equazioni risulta essere :

$$\begin{cases} \nabla^2 \underline{A} + k^2 \underline{A} = -\mu \underline{J} \\ \nabla^2 \phi + k^2 \phi = -\rho/\epsilon \\ \omega \epsilon \mu \phi + \nabla \cdot \underline{A} = 0 \\ \underline{E} = -\nabla \phi - \omega \underline{A} \\ \underline{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \underline{A} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \underline{A} = \frac{1}{\omega \epsilon \mu} \nabla^2 \phi \\ \nabla \cdot \underline{A} = \frac{1}{\omega \epsilon \mu} \nabla^2 \phi \end{array} \right. \Rightarrow \nabla \cdot \underline{A} = \frac{1}{\omega \epsilon \mu} \nabla^2 \phi$$

In funzione di $\underline{A}$ risulta:

$$\begin{cases} \nabla^2 \underline{A} + k^2 \underline{A} = -\mu \underline{J} \\ \underline{E} = -j\omega \left[\underline{A} + \frac{\nabla \nabla \cdot \underline{A}}{k^2} \right] \\ \underline{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \underline{A} \end{cases}$$

Supponendo solo correnti magnetiche:

$$\nabla \times \underline{E} = -j\omega \mu \underline{H} - \underline{M}$$

$$\nabla \times \underline{H} = j\omega \epsilon \underline{E}$$

$$\nabla \cdot \underline{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \underline{H} = \underline{Am}/\mu$$

Risulta:

$$\begin{cases} \nabla^2 \underline{F} + k^2 \underline{F} = -\epsilon \underline{M} \\ \underline{E} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \underline{F} \\ \underline{H} = +j\omega \left[\underline{F} + \frac{\nabla \nabla \cdot \underline{F}}{k^2} \right] \end{cases}$$

Se sono presenti sia correnti elettriche che magnetiche:

$$\begin{cases} \underline{E} = -j\omega \left[\underline{A} + \frac{\nabla \nabla \cdot \underline{A}}{k^2} \right] + \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \underline{F} \\ \underline{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \underline{A} + j\omega \left[\underline{F} + \frac{\nabla \nabla \cdot \underline{F}}{k^2} \right] \end{cases}$$

con p.s.e.

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{\mu} \nabla \times \underline{A} - \underline{A} \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \right] = \nabla \cdot \underline{M} \quad \nabla \cdot \left[\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \underline{F} - \underline{F} \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \right] = \nabla \cdot \underline{J}$$

Calcolo i potenziali:

$$e(t) \rightarrow \boxed{R(t)} \rightarrow u(t)$$

$$u(t) = e(t) * R(t)$$

$$U(\omega) = E(\omega) \cdot H(\omega)$$

$$\delta(\underline{x}) \rightarrow \boxed{} \rightarrow G(\underline{x})$$

Eccitazione
impulsiva di
corrente

Funzione di Green

$$\nabla^2 G(\underline{x}) + k^2 G(\underline{x}) = -\delta(\underline{x})$$

$$\nabla^2 \underline{A} = \nabla^2 A_x \hat{x} + \nabla^2 A_y \hat{y} + \nabla^2 A_z \hat{z}$$

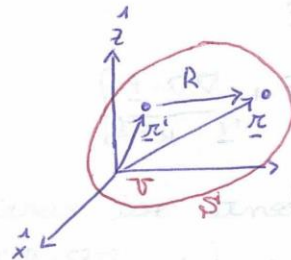
$$\begin{cases} \nabla^2 A_x + k^2 A_x = -\mu J_x \\ \nabla^2 A_y + k^2 A_y = -\mu J_y \\ \nabla^2 A_z + k^2 A_z = -\mu J_z \end{cases}$$

$$\rightarrow \nabla^2 A_i + k^2 A_i = -\mu J_i$$

$$\nabla^2 \underline{A} + k^2 \underline{A} = -\mu \underline{J} \text{ per notazione}$$

$$\nabla^2 G(R) + k^2 G(R) = -\delta(R)$$

con $R = |\underline{x} - \underline{x}'|$



$$\underline{G} \cdot \nabla^2 \underline{A} + k^2 \underline{A} \underline{G} = -\mu \underline{G} \underline{J}$$

$$\underline{A} \nabla^2 \underline{G} + k^2 \underline{G} \underline{A} = -\delta(R) \cdot \underline{A}$$

$$\Rightarrow \underline{G} \nabla^2 \underline{A} - \underline{A} \nabla^2 \underline{G} = -\mu \underline{G} \underline{J} + \delta(R) \cdot \underline{A}$$

$$\iiint_V \underline{G} \nabla^2 \underline{A} - \underline{A} \nabla^2 \underline{G} dV = -\mu \iiint_V \underline{G}(\underline{x} - \underline{x}') \cdot \underline{J}(\underline{x}) dV + \underline{A}(\underline{x}')$$

Supponiamo:

$$\nabla \cdot [\psi \nabla \varphi] = \nabla \psi \cdot \nabla \varphi + \psi \nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla \psi \cdot \nabla \varphi + \psi \nabla^2 \varphi$$

$$\nabla \cdot [\varphi \nabla \psi] = \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \nabla^2 \psi$$

$$\nabla \cdot [\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi] = \psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi$$

$$\iiint_V \nabla \cdot [\underline{G} \nabla \underline{A} - \underline{A} \nabla \underline{G}] dV = \oint_S [\underline{G} \nabla \underline{A} - \underline{A} \nabla \underline{G}] \cdot \hat{n} dS = \oint_S \left[\underline{G} \cdot \frac{\partial}{\partial n} \underline{A} - \underline{A} \frac{\partial}{\partial n} \underline{G} \right] dS \rightarrow \phi$$

$S \rightarrow \infty$

(84)

$$A(r') = \mu \iiint_V G(\underline{x} - \underline{x}') \delta(\underline{x}) dV = \mu G * J$$

Determina quindi l'incognita G :

$$\nabla^2 G(\underline{x}) + k^2 G(\underline{x}) = -\delta(\underline{x})$$

$$\delta(\underline{x}) \equiv \delta(r) \Rightarrow G(\underline{x}) \equiv G(r) \quad \text{con } r = |\underline{x}|$$

$$\nabla^2 G(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} G(r) \quad \leftarrow \text{Se dipende solo da } r \text{ in coordinate cilindriche}$$

$$r \neq 0 \Rightarrow \nabla^2 G + k^2 G = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} G + k^2 G = 0$$

$$\text{Definisco } G(r) = \frac{f(r)}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} G + k^2 G r^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{f(r)}{r} + k^2 \frac{f(r)}{r} r^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(f'(r) \cdot \frac{1}{r} - f(r) \frac{1}{r^2} \right) \right] + k^2 f(r) r = 0$$

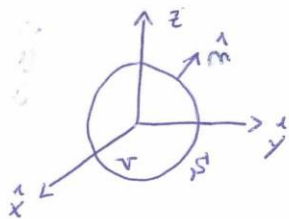
$$\frac{\partial}{\partial r} [r f'(r) - f(r)] + k^2 f(r) r = 0$$

$$f'(r) + r f''(r) - f'(r) + k^2 f(r) r = 0$$

$$f''(r) + k^2 f(r) = 0 \Rightarrow f = C^+ e^{-ikr} + C^- e^{+ikr}$$

$$\text{Di fatto: } f = C^+ e^{-ikr} \quad \text{in quanto } C^- e^{+ikr} = 0$$

$$\rightarrow G(r) = C^+ \frac{e^{-ikr}}{r}$$



supposto c

$\nabla \cdot \nabla G$

$$\iiint_V \nabla^2 G = \iiint_V \nabla \cdot \nabla G = \oint_S \nabla G \cdot \hat{n} \cdot dS$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow V \rightarrow 0$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_S \nabla G \cdot \hat{n} \cdot dS + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{V(\varepsilon)} \nabla^2 G \cdot dV = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \iiint_{V(\varepsilon)} \delta(\underline{x}) \cdot dV = -1$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{S(\varepsilon)} \left(-\nabla K \cdot e^{-\gamma K \underline{x}} \cdot \frac{1}{\underline{x}} - e^{-\gamma K \underline{x}} \cdot \frac{1}{\underline{x}^2} \right) dS = -1$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[C^+ e^{-\gamma K \varepsilon} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot (4\pi \varepsilon^2) \right] = -1 \Rightarrow C^+ = \frac{1}{4\pi}$$

→ superficie sferica

$$G(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-\gamma K \underline{x}}}{\underline{x}}$$

$$G(|\underline{x} - \underline{x}'|) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-\gamma K |\underline{x} - \underline{x}'|}}{|\underline{x} - \underline{x}'|}$$

$$A(\underline{x}') = \mu \iiint_V \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-\gamma K |\underline{x} - \underline{x}'|}}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \cdot \gamma(\underline{x}) \cdot dV$$

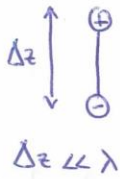
Se γ è distribuita su S :

$$A(\underline{x}') = \mu \iint_S \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-\gamma K |\underline{x} - \underline{x}'|}}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \cdot \gamma(\underline{x}) \cdot dS$$

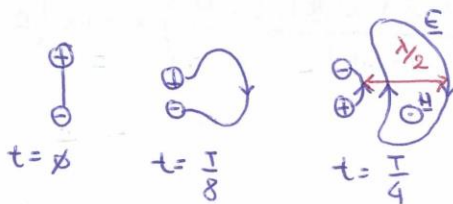
$$F(\underline{x}') = \varepsilon \iiint_V G(\underline{x} - \underline{x}') \cdot \gamma(\underline{x}') \cdot dV$$

TEORIA DELLE ANTENNE

Dipolo elettrico corto: Sorgente elementare elettromagnetica
come $\hat{z} \delta(x) I_0 \Delta z$



Momento del
dipolo elettrico (DEC)



$$\nabla \times \underline{E} = -\partial_t \underline{B}$$

Se $\omega = 0 \Rightarrow \nabla \times \underline{E} = 0$

Se $\omega \neq 0 \Rightarrow$ Ci possiamo essere ricicliando

$$\underline{A}^{(DEC)} = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} I_0 \Delta z \mu \hat{z}$$

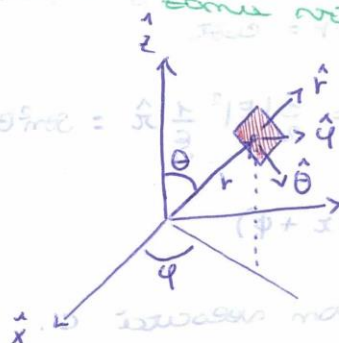
$$\underline{H} = \frac{1}{\mu} \cdot \mu I_0 \Delta z \nabla \times \left[\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \cdot \hat{z} \right] \quad \text{in quanto il rotore è solo lungo } \hat{z}$$

$$\nabla \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \right) \cdot \hat{r} = \left[-jk e^{-jkr} \cdot \frac{1}{4\pi r} + e^{-jkr} \left(-\frac{1}{4\pi r^2} \right) \right] \hat{r}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu} \cdot \mu I_0 \Delta z \left[-jk e^{-jkr} \cdot \frac{1}{4\pi r} - e^{-jkr} \cdot \frac{1}{4\pi r^2} \right] (\hat{r} \times \hat{z}) \rightarrow -\hat{\phi} \sin\theta$$

dominante in
zona lontana

dominante in
zona vicina



$$\underline{H} = I_0 \Delta z \left[jk e^{-jkx} \cdot \frac{1}{4\pi x} + e^{-jkx} \left(\frac{1}{4\pi x^2} \right) \right] \hat{\varphi} \sin \theta$$

$$\underline{E} = E_x \hat{x} + E_z \hat{z}$$

$$\underline{H}_{\text{lontano}} = I_0 \Delta z \cdot jk \cdot \frac{e^{-jkx}}{4\pi x} \hat{\varphi} \sin \theta$$

$$\underline{E}_{\text{lontano}} = -j\omega \left(\underline{A} + \frac{\nabla \nabla \cdot \underline{A}}{k^2} \right) = -j\omega \left(\underline{A} - \frac{j \cdot k \hat{x} (\hat{x} \cdot \underline{A}) \cdot j \cdot k}{k^2} \right) = -j\omega \left(\underline{A} - \hat{x} (\hat{x} \cdot \underline{A}) \right)$$

$\downarrow$
 $A_x \hat{x}$

$$\underline{A} = A_\theta \hat{\theta} + A_\varphi \hat{\varphi} + A_x \hat{x}$$

$$\underline{E}_{\text{lontano}} = -j\omega (A_\theta + A_\varphi)$$

im quanto A è sempre lungo $\hat{z}$ e non ha componente lungo φ .

$$\underline{E}_{\text{lontano}} = -j\omega A_\theta$$

$$\underline{E}_{\text{lontano}} = -j\omega A_\theta \cdot \hat{\theta} = j\omega \frac{e^{-jkx}}{4\pi x} I_0 \Delta z \mu \sin \theta \hat{\theta}$$

$$\text{con } \omega \sqrt{\mu} \sqrt{\epsilon} = \omega \sqrt{\mu} \cdot \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\epsilon}} \cdot \sqrt{\epsilon} = k \epsilon$$

$$\begin{cases} \underline{E}_{\text{lontano}} = \frac{jk \epsilon I_0 \Delta z}{4\pi x} e^{-jkx} \sin \theta \hat{\theta} \\ \underline{H}_{\text{lontano}} = \frac{jk I_0 \Delta z}{4\pi x} e^{-jkx} \sin \theta \hat{\varphi} \end{cases}$$

$$\text{con } k \gg \frac{1}{x}$$

$$\rightarrow x \gg \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi} \approx x > \lambda$$

$$\text{con } \lambda = \frac{c}{f}$$

$$\frac{|\underline{E}|}{|\underline{H}|} = \epsilon \text{ in zona lontana}$$

$$\underline{E} \perp \underline{H} \perp \hat{x}$$

La differenza delle onde piane dove il fronte di fase è piano, qui è sfuocato da raggio $k \cdot r = \text{cost}$

$$\underline{S} = \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* = \frac{1}{2} \underline{E} \times \left[\frac{1}{\epsilon} \hat{x} \times \underline{E}^* \right] = \frac{1}{2} |\underline{E}|^2 \frac{1}{\epsilon} \hat{x} = \sin^2 \theta \frac{k^2 \epsilon (I_0 \Delta z)^2}{(4\pi)^2 x^2} \hat{x}$$

$$\underline{e}(t) = \text{Re} \{ \underline{E} e^{j\omega t} \} \approx \cos(\omega t - kx + \phi)$$

Il fronte d'onda viaggia con velocità c .

$$W_e = \frac{1}{4} \epsilon |E|^2$$

$$W_h = \frac{1}{4} \mu |H|^2$$

$$\frac{W_e}{W_h} = \frac{\epsilon}{\mu} \cdot \frac{\mu}{\epsilon} = 1 \quad \text{a grande distanza}$$

$$\frac{|E|}{|H|} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \frac{\mu}{\epsilon}$$

A piccola distanza invece domina W_e .

TEOREMA DI DUALITÀ

$$\exists, (\epsilon_0, \mu_0) \Rightarrow E, H$$

$$\epsilon_0 \rightarrow \mu_0$$

$$\mu_0 \rightarrow \epsilon_0$$

$$\epsilon \rightarrow \frac{1}{\epsilon}$$

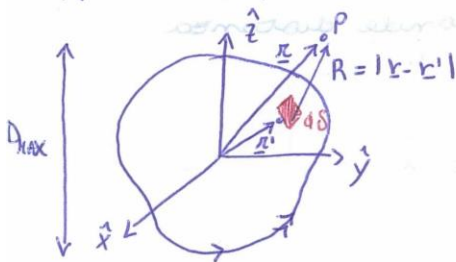
$$R \rightarrow R$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} E &\rightarrow H \\ H &\rightarrow -E \end{aligned}$$

Per un dipolo magnetico $\uparrow H \cdot dz$ quindi:

$$\begin{cases} H_{\text{ lontano }} = \frac{1}{\epsilon} \frac{M_0 \Delta z}{4\pi r^2} e^{-\gamma r} \sin \theta \hat{\theta} \\ E_{\text{ lontano }} = -\gamma \frac{M_0 \Delta z}{4\pi r^2} e^{-\gamma r} \sin \theta \hat{\phi} \end{cases}$$

Supponiamo:



$$\underline{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S \frac{e^{-\gamma |r-r'|}}{|r-r'|} \underline{j}(r) dS$$

$$\underline{F} = \frac{\epsilon}{4\pi} \iint_S \frac{e^{-\gamma |r-r'|}}{|r-r'|} \underline{M}(r) dS$$

In zona lontana:

$$R \parallel \underline{r} \rightarrow R \approx r - \underline{r}' \cdot \hat{r}$$

$$D_{\text{MAX}} > 2,5\lambda \quad ; \quad r > \frac{2D_{\text{MAX}}^2}{\lambda}$$

In zona intermedia:

$$\frac{\lambda}{4} < D_{\text{MAX}} < 2,5\lambda \quad ; \quad r > 5D_{\text{MAX}}$$

In zona lontana:

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S \frac{e^{-jK(\underline{r} - \underline{x}' \cdot \hat{n})}}{(\underline{r} - \underline{x}' \cdot \hat{n})} \nabla(\underline{x}') dS$$

qui conviene porre un errore rilevante per la fase.

errore non rilevante

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jK\underline{r}}}{\underline{r}} \iint_S e^{jK\underline{x}' \cdot \hat{n}} \nabla(\underline{x}') dS$$

in funzione di θ, φ

$$\text{con } \hat{n} = \hat{x} \sin\theta \cos\varphi + \hat{y} \sin\theta \sin\varphi + \hat{z} \cos\theta$$

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jK\underline{r}}}{\underline{r}} a(\theta, \varphi) \quad \text{con } a(\theta, \varphi) = \iint_S e^{jK\underline{x}' \cdot \hat{n}} \nabla(\underline{x}') dS$$

$$\nabla \approx -jK \hat{n}$$

$$\underline{E} = -j\omega \left[\underline{A} - \hat{n} (\hat{n} \cdot \underline{A}) \right] = - \frac{j\omega \mu}{4\pi} \frac{e^{-jK\underline{r}}}{\underline{r}} \left[\underline{a}(\theta, \varphi) \cdot \hat{\theta} \hat{\theta} + \underline{a}(\theta, \varphi) \cdot \hat{\varphi} \hat{\varphi} \right]$$

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu} (-jK) \left[\hat{r} \times \underline{A} \right] = \frac{1}{\mu} (-jK) \hat{n} \times \left(A_\theta \hat{\theta} + A_\varphi \hat{\varphi} + \cancel{A_r \hat{n}} \right)$$

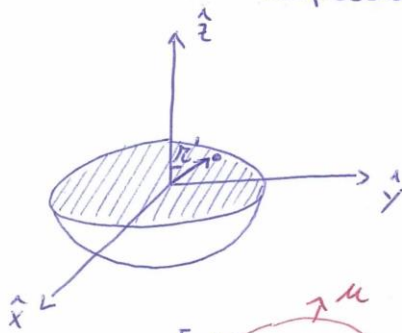
$$= \frac{1}{\mu} (-jK) \hat{n} \times \left(A_\theta \hat{\theta} + A_\varphi \hat{\varphi} \right) \rightarrow \frac{E}{-j\omega}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{\underline{r}} \hat{n} \times \underline{E} \quad \text{per le antenne, ma a grande distanza.}$$

$$r > \frac{2D_{\text{max}}^2}{\lambda} \Rightarrow \begin{cases} \underline{E} = \frac{-jK \underline{E}}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jK\underline{r}}}{\underline{r}} \left[\underline{a}_\theta + \underline{a}_\varphi \right] \\ \underline{H} = \frac{1}{\underline{r}} \hat{n} \times \underline{E} \end{cases}$$



Caso Particolare: Distribuzione di corrente solo su un'apertura.



$$r' = x' \hat{x} + y' \hat{y}$$

$$\underline{r} = \sin\theta \cos\phi \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}$$

$$a(\theta, \phi) = \iint_S e^{j\mathbf{k} \cdot [\underbrace{x' \sin\theta \cos\phi}_{\mu} + \underbrace{y' \sin\theta \sin\phi}_{\nu}]} \underline{J}(x', y') dx' dy'$$

$$= \iint_S e^{j\mathbf{k} \cdot [x' \mu + y' \nu]} \underline{J}(x', y') dx' dy'$$

che risulta essere una trasformata di Fourier nel caso di corrente solo su un'apertura.

Un'apertura grande rispetto a λ , significa che $\underline{E}$ è concentrato in una regione angolare stretta.

=> Più è grande l'apertura e più è stretto il campo (si stringe la regione di spazio dove è concentrato il campo del segnale).

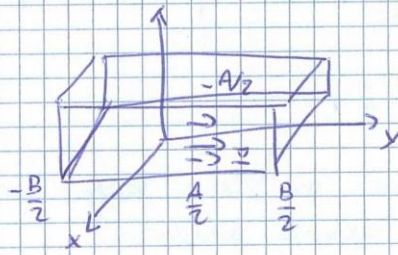
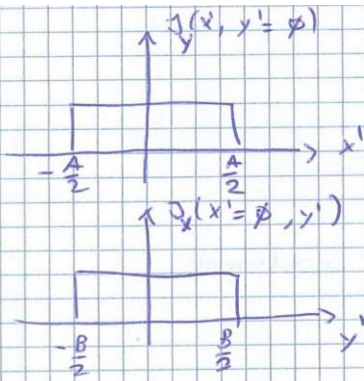
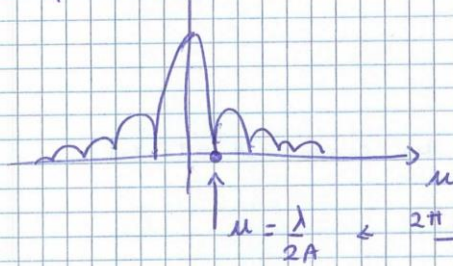


Diagramma di Radiazione

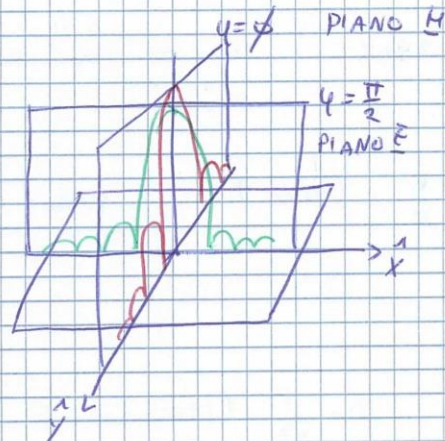
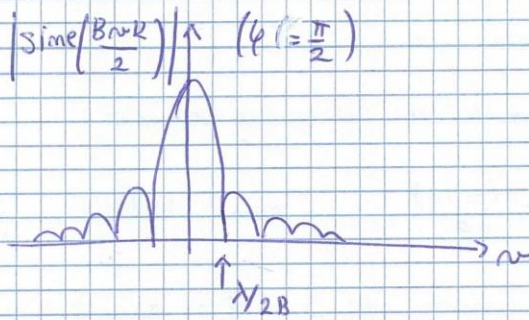
$\left| \text{sinc} \left(\frac{A\mu}{2} \right) \right|$ ($y=0$)



$$\mu = \frac{\lambda}{2A} \leftarrow \frac{2\pi A\mu}{\lambda} = \pi$$

$$AB \text{sinc} \left(\frac{KB}{2} \mu \right) \text{sinc} \left(\frac{KA}{2} \mu \right)$$

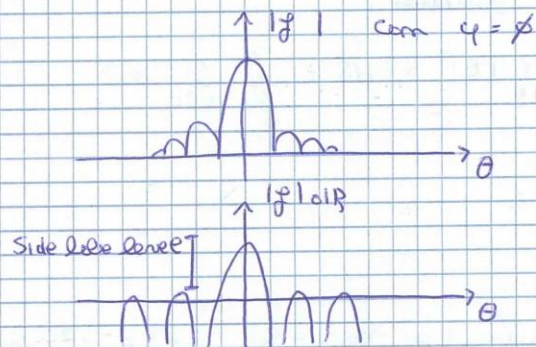
$$\text{con } K = \frac{2\pi}{\lambda}$$



19/10/2016

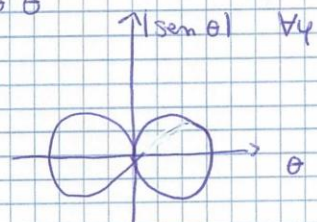
$$r > \frac{2D^2}{\lambda} \rightarrow E \approx \underbrace{f(\theta, \varphi)}_{\text{Vettore di radiazione}} e^{-jkr} \frac{e^{j\omega t}}{r}$$

$$f(\theta, \varphi) = \frac{\mu}{4\pi} \underline{a}(\theta, \varphi)$$



nel caso di un dee: $f(\theta, \varphi) = () \sin \theta$

In 3D è un solido di radiazione



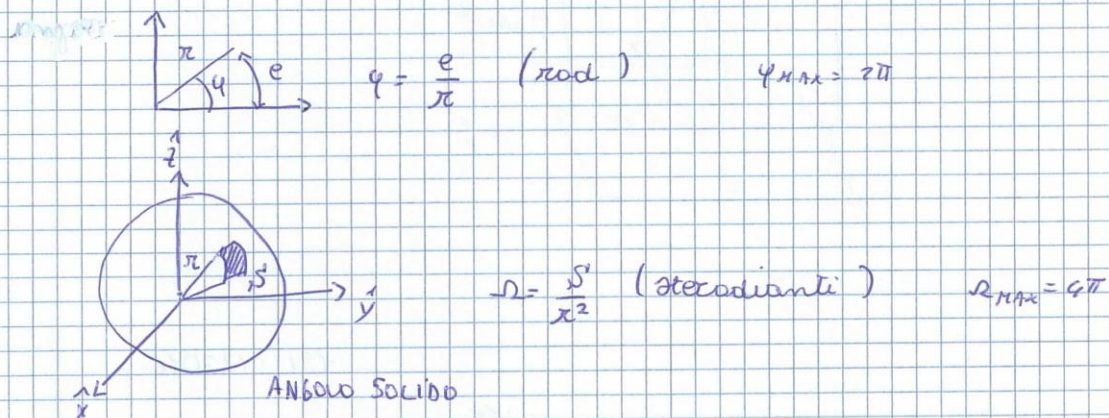
Vettore di radiazione $\vec{e}$ legato a:

densità di potenza per unità di angolo solido

$$|\underline{S}| = \frac{1}{2S} |\underline{E}|^2 = \frac{1}{2S} \frac{|\underline{E}|^2}{r^2} = \frac{U(\theta, \varphi)}{r^2} \quad \text{con} \quad U(\theta, \varphi) = \frac{|\underline{E}|^2}{2S}$$

$$\underline{S} = |\underline{S}| \cdot \hat{r} \quad \rightarrow \text{densità di potenza per unità di superficie}$$

$U(\theta, \varphi)$: densità di potenza $\times$ unità di angolo solido



A grande distanza:

$$P_R = \iint_S \frac{1}{2S} |\underline{E}|^2 r^2 dS = \iint_S \frac{U}{r^2} dS \quad \text{ma} \quad \frac{dS}{r^2} = d\Omega$$
$$= \iint_{4\pi} \Omega d\Omega$$

In coordinate sferiche: $dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$

$$\frac{dS}{r^2} = \sin\theta d\theta d\varphi = d\Omega$$

Directività di un'antenna

Densità media di potenza irradiata: $\tilde{U} = \frac{P_R}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \iint_{4\pi} U d\Omega$ media integrale

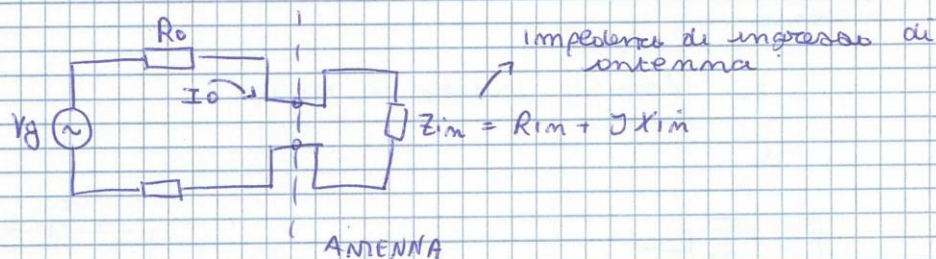
$D(\theta, \varphi)$: directività = $\frac{U(\theta, \varphi)}{\tilde{U}}$ Densità di potenza
densità di potenza di un
antenna isotropa a parità di
potenza complessiva

Antenna isotropa: irradianza ovunque la stessa densità di potenza

$$D_{dB} = 10 \lg_{10} D$$

$$|D|_{dB} = 20 \lg_{10} |D|$$

Circuitualmente in trasmissione



Bisogna adattare le cariche:

$$\begin{cases} R_o = R_{im} \\ X_{im} = 0 \end{cases}$$

$$R_{im} = R_{radiazione} - R_{perdita} = R_x + R_p$$

$$P_{im} = \frac{1}{2} |I_o|^2 (R_x + R_p) = P_R - P_e$$

R_{im}

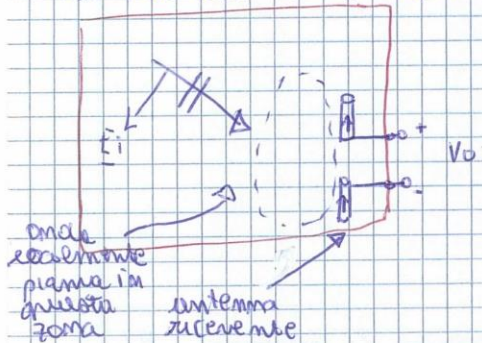
$$P_R = \frac{1}{2} |I_o|^2 R_x = \iint_{4\pi} U d\Omega \rightarrow R_x = \frac{2}{|I_o|^2} \iint_{4\pi} U d\Omega$$

$$\eta = \frac{P_R}{P_{im}} : \text{efficienza antenna.}$$

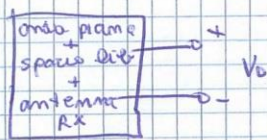
$$D = \frac{U(b, \varphi)}{\frac{1}{4\pi} P_r}$$

$$G: \text{guadagno} = \frac{U(b, \varphi)}{\frac{1}{4\pi} P_{im}} = \eta D$$

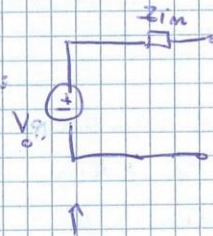
in Ricezione: circuito equivalente



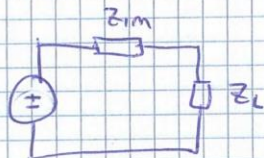
V_o : tensione indotta a vuoto



per Thevenin:



Se l'antenna è in cortoc.



max. trasf. di potenza se

$$Z_L = Z_{in}^*$$

$$P_{LZ} = \frac{|V_o|^2 R_L}{2 |Z_L + Z_{in}|^2}$$

$$P_{MAX} = \frac{|V_o|^2 R_{in}}{2 |2 R_{in}|^2} = \frac{1}{8} \frac{|V_o|^2}{R_{in}}$$

Area efficace in ricezione:

$$P_{\text{max}} = S_i \cdot A_e$$

Antenna è vista come un oggetto che crea potenza tramite un'area moltiplicata per S .

$$S_i = \frac{1}{2S} |E_i|^2$$

$$A_e = \frac{P_{\text{max}}}{S_i} = \frac{\frac{1}{8} \frac{|V_o|^2}{R_{\text{im}}}}{\frac{1}{2S} |E_i|^2}$$

$$V_o = E_i \cdot h_r$$

↑
altezza efficace in ricezione.

$$A_e = \frac{\frac{1}{8} |E_i \cdot h_r|^2}{\frac{1}{2S} |E_i|^2 \cdot R_{\text{im}}}$$

$$V_o \text{ max quando } |E_i \cdot h_r| = |E_i| |h_r| \cos \theta$$

Nel caso di adattamento di [carica e polarizzazione] per onde:

$$A_e = \frac{1}{8} \cdot \frac{|E_i|^2 |h_r|^2}{\frac{1}{2S} |E_i|^2 R_{\text{im}}} = \frac{S}{4 R_{\text{im}}} |h_r|^2$$

Problema

Trasmissione alla trasmissione:

$$\underline{E} = \oint \frac{e^{-jkz}}{r} = \frac{jk I_0 \Delta z S}{4\pi r} e^{-jkz} \sin \theta$$

$$= jk I_0 \frac{h_r S}{4\pi r} e^{-jkz}$$

↑
altezza efficace
velocità V in trasmissione

$$h_r = \Delta z \sin \theta$$

$$\underline{E} = \frac{jk I_0 h_r S}{4\pi r}$$

$$G_{Tx} = \frac{U}{\frac{1}{4\pi} P_{im}} = \frac{|J|^2}{\frac{2\epsilon}{4\pi} P_{im}} = \frac{|k I_0 \underline{h}_T|^2}{(4\pi)^2 \frac{2\epsilon}{4\pi} P_{im}}$$

$$= \frac{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (\cancel{I_0})^2 (\underline{h}_T)^2}{\cancel{P_{im}} (4\pi) \cancel{2\epsilon}} = \frac{2\pi |\underline{h}_T|^2}{R_{im} \epsilon \cdot \lambda^2}$$

$\downarrow$
 $\frac{1}{2} |I_0|^2 R_{im}$

$$G_{Tx} = \frac{\pi}{R_{im}} \cdot \frac{|\underline{h}_T|^2}{\epsilon \lambda^2} \epsilon$$

$$\frac{A_e}{G} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \frac{(\underline{h}_T)^2}{(\underline{h}_e)^2}$$

Risulta però, dal teorema di Reciprocità:

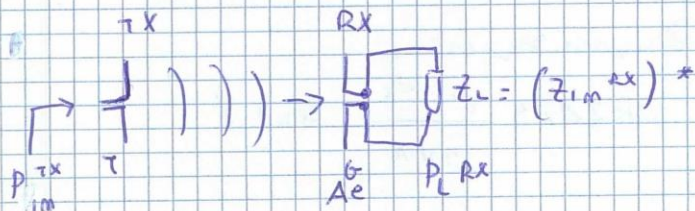
$$\underline{h}_\lambda = \underline{h}_x$$

$$\Rightarrow \frac{A_e}{G} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \rightarrow A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G$$

Valido per tutte le antenne.

Caratterizzando un'antenna in Tx lo caratterizzo anche in Rx.

FORMULE DEL COLLEGAMENTO



$$S_i = \frac{G}{4\pi \lambda^2} P_{im}^{Tx}$$

$$G = \frac{U}{\frac{1}{4\pi} P_{im}} = \frac{S_i \cdot \pi^2}{P_{im}} \cdot 4\pi$$

$$P_{i,rx} = \frac{G^{Tx}}{4\pi R^2} \cdot G^{Rx} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot P_{in}^{Tx} \quad \text{: FORMULA DI FRIS}$$

$$= G^{Tx} G^{Rx} \frac{1}{\left(\frac{4\pi R}{\lambda}\right)^2} P_{in}^{Tx}$$

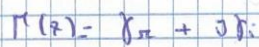
← attenuazione di Friis

$$z(z) = z_0 \cdot \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}$$

$$\tilde{z} = \frac{z(z)}{z_0} = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}$$

$$z \in \mathbb{C}$$

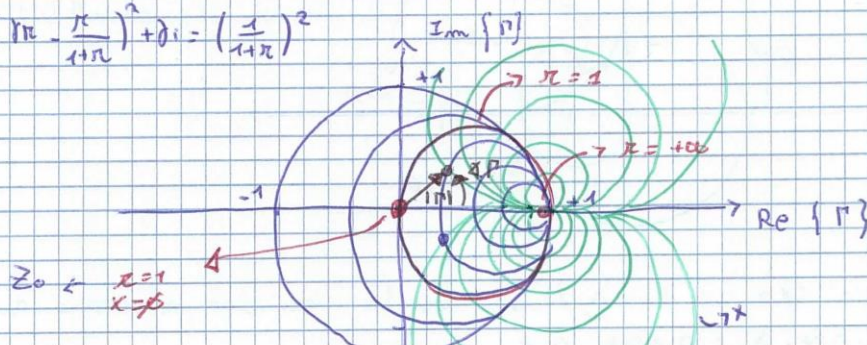
$$\Gamma(\mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$$



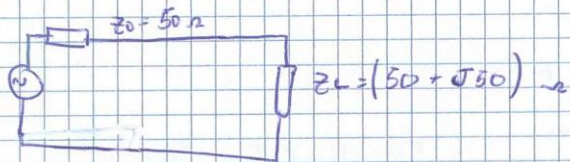
$$\hat{z}(x) = x + 3x$$

$$\hat{z}(z) = z + \delta z = \frac{(\delta z + 1) + j\delta i}{(1 - \delta z) - j\delta i} \quad \text{risultano due loci di convergenza}$$

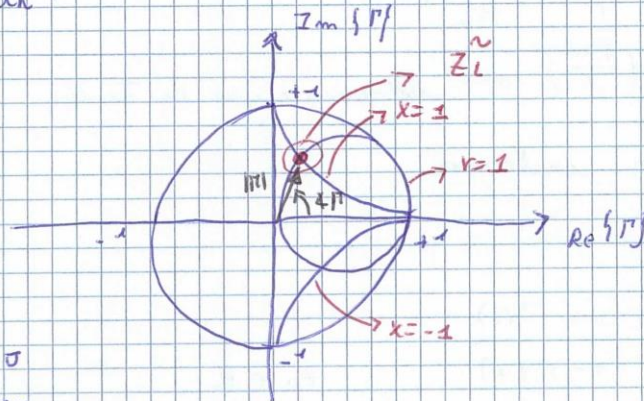
$$\left(rn - \frac{r}{1+r}\right)^2 + \delta_i = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2$$



Esempio

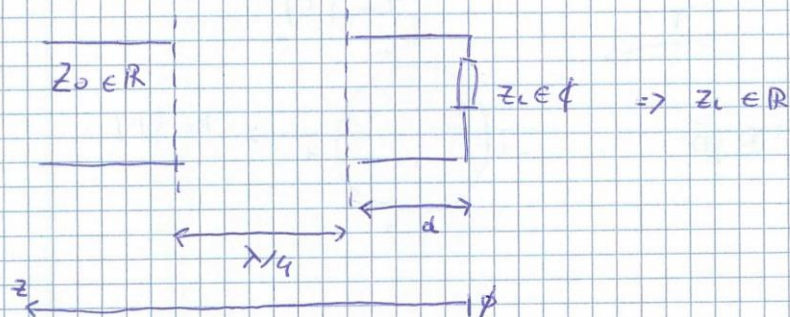


Se ammette:



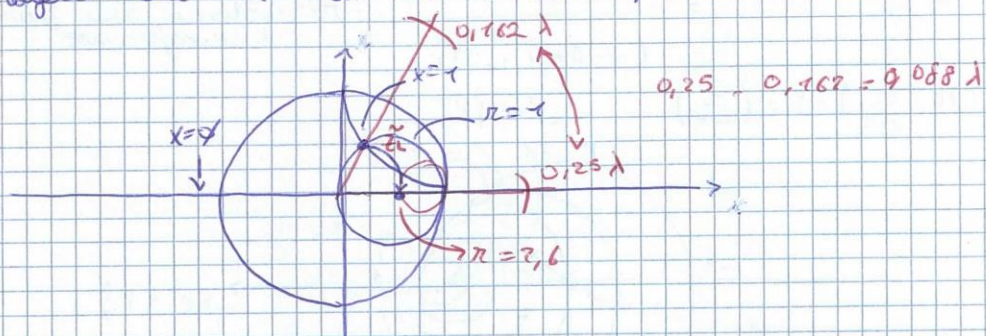
$$\tilde{z}_L = \frac{Z_L}{Z_0} = r + jx = 1 + j1$$

TRONCO $\lambda/4$



$$Z_L = (50 + j50) \Omega \rightarrow \tilde{Z}_L = 1 + j1$$

trovare che x di $\tilde{Z}_L$ è pari a ϕ .

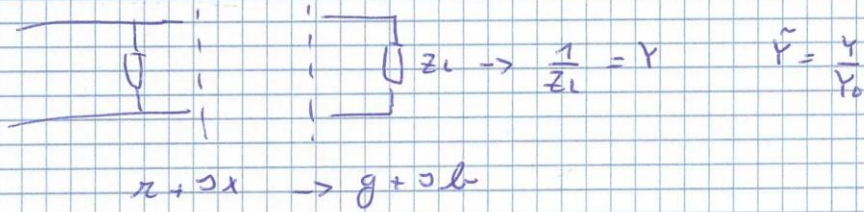


Se lavoro a 70 GHz $\rightarrow \lambda = 0,3 \text{ m} \rightarrow$ la mia distanza di

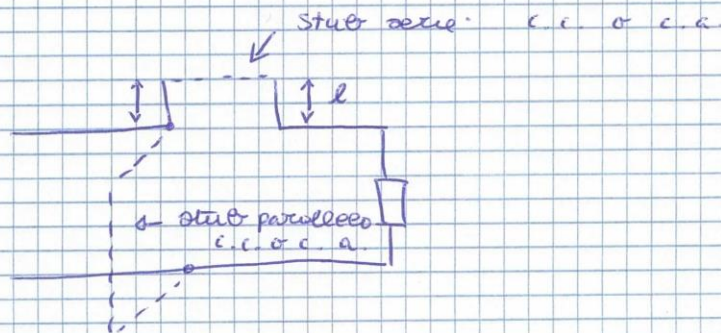
$$Z_{1/4} = \sqrt{Z_0 Z_d}$$

$$Z_d = 2,6 \cdot 50 = \text{e trovo } Z_{1/4}$$

Se ho immittenze:



STUB



NB:

Se λ molto maggiore della grandezza del circuito
allora posso usare l'elettrotecnica.