ELEMENTI DI ANALISI NUMERICA

[Appunti Elaborato]

A CURA DI ALESSANDRO PAGHI

PROFESSORE: Maria Lucia Sampoli (http://www3.diism.unisi.it/people/person.php?id=355)

LINK AL CORSO:
http://www3.diism.unisi.it/FAC/index.php?bodyinc=didattica/inc.insegnamento.php&id=54945&aa=2014

FREQUENTAZIONE: Facoltativa.

FATTORIZZAZIONE DI CHOLESKI

La Fattorizzazione di Cholesky si applica quando la matrice A è simmetrica e definita positiva (SDP).
In questo caso esiste una matrice triangolare inferiore S :

$$A = S \cdot S^T$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} S_{11} & \emptyset & \cdots & \emptyset \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \emptyset \\ S_{m1} & S_{m2} & \cdots & S_{mm} \end{bmatrix}}_{S} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & \cdots & S_{m1} \\ \emptyset & S_{22} & \cdots & S_{m2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \emptyset & \cdots & \emptyset & S_{mm} \end{bmatrix}}_{S^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}}_{A}$$

$$a_{ii} = \sum_{K=1}^{i} S_{iK}^2 \Rightarrow S_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{K=1}^{i-1} S_{iK}^2}$$

$$a_{iJ} = \sum_{K=1}^{J} S_{iK} \cdot S_{JK}, \; i > J \Rightarrow S_{iJ} = \left(a_{iJ} - \sum_{K=1}^{J-1} S_{iK} S_{JK} \right) \Big/ S_{JJ}$$

- Richiede $n^3/6$ operazioni;
- L'algoritmo è stabile;
- Occorre verificare che il radicando sia $> \emptyset$;

RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI

$Ax = b$, A SDP.

$A = S \cdot S^T$

$\Rightarrow S \cdot S^T x = b$

$$\begin{cases} S \cdot y = b \\ S^T \cdot x = y \end{cases}$$ ← Si risolve questo nuovo sistema.

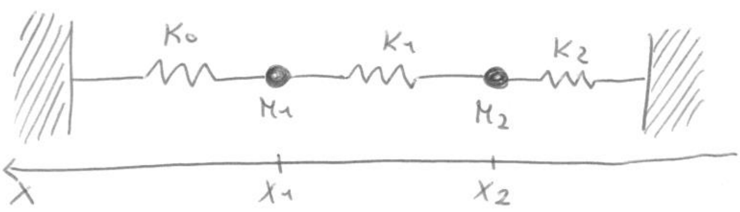
APPLICAZIONE ALLA FISICA

È necessario trovare un sistema lineare del tipo $Ax = b$, con A SDP.

Per i sistemi di masse e molle è sempre vero che A è SDP.

(Tralasciamo il caso con 1 massa)

SISTEMA 2 MASSE



$$F_1 = M_1 \cdot a_1 = K_0 x_1 - K_1 (x_2 - x_1)$$
$$= x_1 (K_0 + K_1) + x_2 (-K_1)$$

$$F_2 = M_2 \cdot a_2 = K_1 (x_2 - x_1) + K_2 (x_2)$$
$$= x_1 (-K_1) + x_2 (K_1 + K_2)$$

$Ax = b$

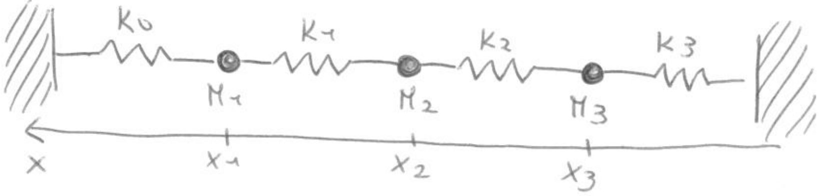
$$\underbrace{\begin{pmatrix} K_0 + K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 + K_2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}}_{b}$$

$K_0 = K_1 = K_2 = K$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2K & -K \\ -K & 2K \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}}_{b}$$

A è SDP.

SISTEMA 3 MASSE



$$F_1 = M_1 \cdot a_1 = K_0 x_1 - K_1(x_2 - x_1)$$
$$= x_1(K_0 + K_1) + x_2(-K_1)$$

$$F_2 = M_2 \cdot a_2 = K_1(x_2 - x_1) - K_2(x_3 - x_2)$$
$$= x_1(-K_1) + x_2(K_1 + K_2) + x_3(-K_2)$$

$$F_3 = M_3 \cdot a_3 = K_2(x_3 - x_2) + K_3(x_3)$$
$$= x_2(-K_2) + x_3(K_2 + K_3)$$

$Ax = b$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} K_0 + K_1 & -K_1 & \emptyset \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ \emptyset & -K_2 & K_2 + K_3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}}_{b}$$

$K_0 = K_1 = K_2 = K_3 = K$

$\Rightarrow$
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2K & -K & \emptyset \\ -K & 2K & -K \\ \emptyset & -K & 2K \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}}_{b}$$

A è SDP.