ANALISI MATEMATICA 2

[Fotocopie di Appunti Tratti dal Libro]

A CURA DI ALESSANDRO PAGHI

PROFESSORE: Paolo Nistri (http://www3.diism.unisi.it/people/person.php?id=8)

LINK AL CORSO:
http://www3.diism.unisi.it/FAC/index.php?bodyinc=didattica/inc.insegnamento.php&id=54684&aa=2013

FREQUENTAZIONE: Sconsigliata.

LIMITI E CONTINUITA'

INTORNO SFERICO

Dati $x \in \mathbb{R}^m$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, si dice intorno sferico di x di raggio ε l'insieme:

$$B_\varepsilon(x) := \{ y \in \mathbb{R}^m : d(x,y) < \varepsilon \} = \{ y \in \mathbb{R}^m : \|x-y\| < \varepsilon \}.$$

L'insieme:

$$S_\varepsilon(x) := \{ y \in \mathbb{R}^m : d(x,y) = \varepsilon \}$$

è detto sfera di centro x e raggio ε.

INSIEME LIMITATO

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^m$ si dice limitato se $\exists r > 0 :$ $E \subseteq B_r(0)$, ovvero se $\exists r > 0 : \|x\| < r$, $\forall x \in E$.

LIMITE

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ e sia $p_0 \in \mathbb{R}^m$ un punto di accumulazione per D.

Si dice che f ha come limite $L \in \mathbb{R}^m$ per $p \to p_0$ e si scrive:

$$\lim_{p \to p_0} f(p) = L$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, p_0) : \forall p \in D, 0 < \|p - p_0\| < \delta \Rightarrow \|f(p) - L\| < \varepsilon$.

CONTINUITA'

Sia $f : \mathbb{R}^m \supseteq X \to \mathbb{R}^m$. allora f si dice continua in $p_0 \in X$ se p_0 è un punto isolato di X, oppure se p_0 è un punto di accumulazione per X e:

$$\lim_{p \to p_0} f(p) = f(p_0).$$

Inoltre f si dice continua nell'insieme X se è continua in ogni punto $x \in X$.

T) CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER L' ESISTENZA DEL LIMITE

Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del limite di f in p_0 è che i limiti direzionali siano uniformi rispetto a v, cioè si deve supporre che la scelta di δ non dipenda dalla direzione v, deve risultare che:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall v, \|v\| = 1, \forall \lambda : 0 < \lambda < \delta \Rightarrow \|f(p_0 + \lambda v) - L\| < \varepsilon$.

DIMOSTRAZIONE)

$p_0 \in \mathring{D}$ e consideriamo un generico punto p.

Il vettore v di norma unitaria $v = \frac{p - p_0}{\|p - p_0\|}$ e consideriamo la retta passante per i punto x e x_0.

Il valore di λ sarà dato da $\lambda = \|p - p_0\|$

Per ipotesi se $0 < \lambda < \delta \Rightarrow 0 < \|p - p_0\| < \delta$ si ha che $\|f(p) - L\| < \varepsilon$ che non è altro che la definizione di:

$$\lim_{p \to p_0} f(p) = L$$

INTEGRALI

INSIEME LIMITATO CHIUSO

Si dice insieme limitato chiuso in $\mathbb{R}^m$, l'insieme così definito:

$I := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m]$

$:= \{(x_1, x_2, \dots, x_m)$ con $x_1 \in [a_1, b_1], x_2 \in [a_2, b_2], \dots, x_m \in [a_m, b_m]\}$

PARTIZIONE

Si definisce la partizione di I nel seguente modo;

Si considera una partizione così:

$P_k = \{t_{k,0}, t_{k,1}, \dots, t_{k,m_k}\}$ di $[a_k, b_k]$ con $k = 1, 2, \dots, n$

con $t_{k,0} = a_k < t_{k,1} < \dots < t_{k,m_k} = b_k$

La partizione P di I è definita da $P_1 \times P_2 \times \dots \times P_m$.

SOMMA DI RIEMANN

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo chiuso in $\mathbb{R}^m$; se P è una partizione di I in sottointervalli I_k, il numero:

$$S(P, f) = \sum_k f(p_k)\mu(I_k) \quad \text{con } p_k \in I_k$$

si chiama somma di Riemann di f corrispondente a P.

MISURA

Sia $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m]$ un intervallo chiuso in $\mathbb{R}^m$, si definisce misura di I il numero non negativo:

$$\mu(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\dots(b_m - a_m)$$
$$= \prod_{k=1}^{m} (b_k - a_k)$$

MISURA ZERO

Un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^m$ si dice che ha misura zero, e si scrive $\mu(S) = 0$ se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ numero finito di intervalli chiusi $I_1, \dots, I_s$:

i) $S \subseteq \bigcup_{k=1}^{s} I_k$; ii) $\sum_{k=1}^{s} \mu(I_k) < \varepsilon$;

INTEGRABILITÀ SECONDO RIEMANN

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo di $\mathbb{R}^m$, f limitata su I si dice integrabile secondo Riemann sse:

$$\sup_{P} \underline{S}(P, f) = \inf_{P} \overline{S}(P, f).$$

Tale valore si dice integrale di Riemann di f su I ed è indicato col simbolo $\int_I f$, $\int_I f(x_1, x_2, \dots, x_m)\, dx_1 dx_2 \dots dx_m$.

T)

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo di $\mathbb{R}^m$ $(I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m])$.
Supponiamo che f sia continua in I, allora f è integrabile secondo Riemann.

T) TEOREMA DI FUBINI

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo di $\mathbb{R}^2$ $(I = [a, b] \times [c, d])$.
Supponiamo che:

I) $\int_I f$ esista (f integrabile in I);

II) la funzione di una variabile, fissato $x \in [a, b]$, sia integrabile su $[c, d]$;

allora: $\int_I f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx$

cioè posto $F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$, $x \in [a, b]$ si ha che F è integrabile su $[a, b]$ e quindi $\int_a^b F(x)\, dx = \int_I f$.

T)

Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, allora il grafico:
$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b],\ y = f(x)\}$ ha misura 0 in $\mathbb{R}^2$.

INSIEME MISURABILE

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^m$ limitato. Si dice misurabile secondo Peano-Jordan sse: $\mu(\partial D) = 0$

INTEGRABILITÀ

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, si dice integrabile su D (limitato e misurabile) se è integrabile su I la funzione:

$$g = \begin{cases} f(p) & \text{se } p \in D \\ 0 & \text{se } p \in I - D \end{cases}$$

e si ha che:

$$\int_I g = \int_I f \cdot \chi_D = \int_D f, \quad \text{dove } g = f \chi_D \quad \text{con } \chi_D = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in D \\ 0 & \text{se } p \notin D \end{cases}$$

INSIEME NORMALE

Un insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ nella forma:

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ \alpha(x) \leq y \leq \beta x\}$ con α, β funzioni continue ;

si dice insieme normale rispetto all'asse x.

CALCOLO DIFFERENZIALE

DERIVATA NELLA DIREZIONE

Siano $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, $p_0 \in D$, $v \in \mathbb{R}^m$, $\|v\| = 1$.
Se la funzione $\varphi_v(p_0) = f(p_0 + \lambda v)$ è definita in un intorno di $\lambda = 0$ ed è derivabile in $\lambda = 0$, allora:

$$D_v f(p_0) := \varphi'_v(0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(p_0 + \lambda v) - f(p_0)}{\lambda}$$

si dice derivata nella direzione v di f in .

RAPPORTO INCREMENTALE DI UNA FUNZIONE IN UNA DIREZIONE

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, $p_0 \in D$, v un versore.
$\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : p_0 + \lambda v \in D$ si definisce rapporto incrementale nella direzione v:

$$\frac{f(p_0 + \lambda v) - f(p_0)}{\lambda}.$$

DERIVATA PARZIALE

Siano $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$, $p_0 \in D$ e $\{e_1, \dots, e_m\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^m$. Se esiste la derivata nella direzione e_k di f in p_0, tale derivata si dice derivata parziale rispetto a x_k di f in p_0 e si denota con:

$$D_{e_k} f(p_0), \quad f_{x_k}(p_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(p_0), \quad \partial x_k f(p_0), \dots$$

Se esistono tutte le m derivate parziali $f_{x_1}(p_0), \dots, f_{x_m}(p_0)$, la funzione si dice derivabile in p_0 e il vettore le cui componenti sono le m derivate parziali di f in p_0 si dice gradiente di f in p_0 e si indica con: $\nabla f(p_0)$.

DIFFERENZIABILITÀ

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto e $f: D \to \mathbb{R}$. La f si dice differenziabile in $p_0 \in D$ se $\exists$ un'applicazione lineare $L_{(p_0)}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$: $f(p) = f(p_0) + L(p - p_0) + o(\|p - p_0\|)$ per $p \to p_0$.

T)

Siano $D \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto e $f : D \to \mathbb{R}$. Se f è differenziabile in $p_0 \in D$, allora:

1) f è continua in p_0;

2) $\exists\, f'(v, p_0) = L(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^m : \|v\| = 1$.

DIMOSTRAZIONE)

1) f è continua in p_0 perché, per $p \to p_0$:

$$\lim_{p \to p_0} f(p) = \lim_{p \to p_0} [f(p_0) + L(p - p_0) + o(\|p - p_0\|)] = f(p_0) + L(0) + 0 = f(p_0).$$

2) Sia $(e_1, \dots, e_m)$ la base canonica di $\mathbb{R}^m$, allora $\forall K = 1 \dots m$

$$\frac{\partial f}{\partial x_K}(p_0) = D_{e_K} f(p_0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(p_0 + \lambda e_K) - f(p_0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(p_0) + L(\lambda e_K) + (\|\lambda v\|) - f(p_0)}{\lambda} = L(e_K).$$

quindi le derivate parziali esistono e sono le componenti del vettore $L(v)$.

C)

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, sia p_0 un punto interno a D. Se il differenziale in p_0 esiste allora è unico.

DIMOSTRAZIONE)

L'unicità della matrice $Df(p_0)$ segue dall'unicità delle sue componenti $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(p_0)$ che sono uniche per l'unicità del limite.

T)

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, sia p_0 un punto interno a D. Se f è differenziabile in p_0, allora f è continua in p_0.

DIMOSTRAZIONE)

Basta calcolare il seguente limite:

$$\lim_{p \to p_0} f(p) = \lim_{p \to p_0} f(p_0) + L(p - p_0) + o(\|p - p_0\|) = f(p_0).$$

Si ricordi che essendo L lineare, L è continua.

T) CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA DIFFERENZIABILITÀ

Sia $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione e sia p_0 un punto interno a D. Supponiamo che:

1) Esiste la matrice Jacobiana $Df(p)$ $\forall p \in U$ (intorno di p_0);

2) $Df(p)$ è continua in p_0;

allora f è differenziabile in p_0.

DIMOSTRAZIONE)

$m=1$, $n=2 \Rightarrow f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathring{D}$

Supponiamo che:

1) $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ con $x, y \in U$ intorno di (x_0, y_0);

2) $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$ è continuo in (x_0, y_0);

f è differenziabile in (x_0, y_0).

Consideriamo la differenza con h, k piccoli in modo che $(x_0+h, y_0+k) \in U$ (intorno di (x_0, y_0)).

$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)$.

Per il Teorema di Lagrange:

$= \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, \hat{y}_0)\, k + \dfrac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_0, y_0)\, h$ dove $\hat{x}_0 \in (x_0, x_0+h)$ se $h>0$, $\hat{x}_0 \in (x_0+h, x_0)$ se $h<0$; $\hat{y}_0 \in (y_0, y_0+k)$ se $k>0$, $\hat{y}_0 \in (y_0+k, y_0)$ se $k<0$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, \hat{y}_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \alpha(h,k)$ con $\alpha(h,k) \to 0$ per $(h,k)\to(0,0)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, \hat{x}_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \beta(h,k)$ con $\beta(h,k) \to 0$ per $(h,k)\to(0,0)$

$\langle \nabla f(x_0, y_0), (h,k) \rangle$

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h + \underbrace{\alpha(h,k)\, h}_{o(\sqrt{h^2+k^2})} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k + \underbrace{\beta(h,k)\, k}_{o(\sqrt{h^2+k^2})}$$

$$0 \le \left| \frac{\alpha(h,k)h + \beta(h,k)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = \frac{|\alpha(h,k)h + \beta(h,k)k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \frac{|\alpha(h,k)h|}{\sqrt{h^2+k^2}} + \frac{|\beta(h,k)k|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \frac{|\alpha(h,k)||h|}{\sqrt{h^2+k^2}} + \frac{|\beta(h,k)||k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le |\alpha(h,k)| + |\beta(h,k)| \to 0 \text{ per } (h,k)\to(0,0)$$

e perciò $(\alpha(h,k)h + \beta(h,k)k) = o(\sqrt{h^2+k^2})$ dove $\sqrt{h^2+k^2} = \|p - p_0\|$.

T) TEOREMA DI WEIERSTRASS

Sia $f: K \to \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{R}^m$ compatto ed f continua allora,

$\exists p_m \in K$ e $p_M \in K$: $f(p_m) = \min_{p \in K} f(p)$ e $f(p_M) = \max_{p \in K} f(p)$

$\Leftrightarrow f(K) = [f(p_m), f(p_M)]$

f assume in K max e min assoluti.

P.TO MINIMO (MASSIMO)

Sia $f: D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, si dice che $p_0 \in D$ è un p.to di min (max) relativo sse:

$\exists U$ intorno di p_0, $U = \{p \in \mathbb{R}^m, \|p - p_0\| < r\}$: $\forall p \in U \cap D \Rightarrow f(p_0) \underset{(\geq)}{\leq} f(p)$.

T) TEOREMA DI FERMAT

Sia $f: D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, sia $p_0 \in \mathring{D}$ in cui la funzione assume min o max relativo. Supponiamo che $\exists \nabla f(p_0)$

$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) = 0$, $\forall i = 1, \dots, m$

DIMOSTRAZIONE)

Per ipotesi p_0 è interno a D e al segmento intercettato in D da una qualsiasi retta passante per p_0. Se consideriamo la restrizione di f alla retta passante per p_0, nella direzione e_i, risulta che p_0 è ancora p.to di min (max) e quindi $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) = 0 \Rightarrow \nabla f(p_0) \equiv 0$ perché ha tutte le componenti nulle.

T) TEOREMA DI ROLLE

Sia $f: K \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una funzione continua, sia K un insieme compatto con $\mathring{K} \neq \emptyset$. Supponiamo che f sia differenziabile in $\mathring{K}$ e che f sia costante in ∂K.

Allora $\exists p_0 \in \mathring{K}$: $Lf(p_0)u = 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^m$

DIMOSTRAZIONE)

Per Weierstrass f assume in K max e min assoluti.

Indichiamoli con p_M e p_m i punti di K : $f(p_m) = \inf f(K)$

$f(p_M) = \sup f(K)$.

Se tutti i punti di min e max assoluti sono assunti su ∂K dove f è costante, allora f è costante in K e quindi in ogni punto interno a K ($\forall p_0 \in \mathring{K}$) si ha che $Lf(p_0)u = 0$ $\forall u \in \mathbb{R}^m$

altrimenti $\exists p_0 \in \mathring{K}$ di min o max assoluto e quindi $Lf(p_0)u = 0$ $\forall u \in \mathbb{R}^m$ (per il teorema di Fermat).

T) TEOREMA DI LAGRANGE

Sia $f: D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in ogni punto del segmento S congiungente $a, b \in \mathbb{R}$. Allora $\exists c \in S$, $c \neq a$, $c \neq b$: $f(b) - f(a) = Df(c)(b-a)$
$= \langle \nabla f(c), (b-a) \rangle$.

se $a = (\alpha_1 \dots \alpha_m)$, $b = (\beta_1 \dots \beta_m) \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)\,(\beta_i - \alpha_i) = f(b) - f(a)$.

T)

Siano $F: D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ e $G: D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ due campi vettoriali differenziabili in $p_0 \in \mathring{D}$ con differenziabilità rispettivamente L_F e L_G. Allora il campo vettoriale $\alpha F + \beta G : D \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in p_0 con differenziale dato da $\alpha L_F + \beta L_G$.

Inoltre se consideriamo il prodotto scalare $\langle F(p), G(p) \rangle = \phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $p \in D$, è differenziabile in p_0 e il suo differenziale sarà dato da:

$\nabla \phi(p_0) = F(p_0) L_G(p_0) + G(p_0) L_F(p_0)$.

DIMOSTRAZIONE) Non necessaria

$\alpha F(p) + \beta G(p) = \alpha (F(p_0) + L_F(p_0)(p - p_0) + o(\|p - p_0\|)) +$
$+ \beta (G(p_0) + L_G(p_0)(p - p_0) + o(\|p - p_0\|)) =$
$= \alpha F(p_0) + \beta G(p_0) + \alpha L_F(p_0)(p - p_0) + \alpha\, o(\|p - p_0\|) + \beta L_G(p_0)(p - p_0)$
$+ \beta\, o(\|p - p_0\|)$.

Poiché $\alpha\, o(\|p - p_0\|) + \beta\, o(\|p - p_0\|) = o(\|p - p_0\|)$
conclusione è l'asserto del Teorema

T) DERIVAZIONE DI FUNZIONI COMPOSTE

Sia $F: D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ e $G: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, consideriamo $G \circ F : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ $(F(p) \in Dom(G))$. Supponiamo che F sia differenziabile in $p_0 \in \mathring{D}$ e che G sia differenziabile in $F(p_0)$.

Allora $G \circ F$ è differenziabile in p_0 e $L_{G \circ F}(p_0) = L_G(q_0) \circ L_F(p_0)$
$q_0 = F(p_0)$.

DIMOSTRAZIONE)

Poiché F è differenziabile in p_0 si ha che:

$F(p) = F(p_0) + L_F(p - p_0) + o(\|p - p_0\|)$

Poiché G è differenziabile in q_0 si ha che:

$G(q) = G(q_0) + L_G(q + q_0) + o(\|q - q_0\|)$

$\Rightarrow$

$$G(F(p)) = G(F(p_0)) + L_G(F(p) - F(p_0)) + o(\|F(p) - F(p_0)\|)$$
$$= G(F(p_0)) + L_G(\cancel{F(p_0)} + L_F(p-p_0) + o(\|p-p_0\|) - \cancel{F(p_0)})$$
$$+ o(\|\cancel{F(p_0)} + L_F(p-p_0) + o(\|p-p_0\|) - \cancel{F(p_0)}\|)$$
$$= G(F(p_0)) + L_G(L_F(p-p_0)) + L_G(o(\|p-p_0\|)) + o(\|L_F(p-p_0)\|)$$
$$+ o(\|o(\|p-p_0\|)\|)$$

L_F e L_G sono matrici Jacobiane calcolate in un punto e quindi costanti $\Rightarrow |L_G(o(\|p-p_0\|))| < c\,|o(\|p-p_0\|)|$

$\Rightarrow G(F(p)) = G(F(p_0)) + L_G(L_F(p-p_0)) + o(\|L_F(p-p_0)\|)$.

T) TEOREMA DI SCWARTZ

Sia $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione, sia $p_0 \in \mathring{D}$. Supponiamo:

1) $\exists\, U$ intorno di p_0 $(U \subset D)$: $\forall (x,y) \in U\ \exists\ \frac{\partial^2 f}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y}(x,y)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$;

2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ sono continue in $p_0 = (x_0, y_0)$;

allora $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$

T) TEOREMA DI TAYLOR

Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe $C^{m+1}(U)$, con U insieme aperto. Siano $a, b \in U$: $a = (x_0, y_0)$, $b = (x_0+h, y_0+k)$ allora:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} D^k f(a)(b-a)^k + R_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \left\{ (\ h\ )\frac{\partial}{\partial x} + (\ k\ )\frac{\partial}{\partial y} \right\}^k f(a) + R_m$$

$$R_m = \frac{1}{(m+1)!} D^{m+1} f(c)(b-a)^{m+1} = \frac{1}{(m+1)!} \left\{ (\ h\ )\frac{\partial}{\partial x} + (\ k\ )\frac{\partial}{\partial y} \right\}^{m+1} f(c).$$

$c \in [a, b]$.

DIMOSTRAZIONE)

$F(t) = f(\lambda(t))$ con $\lambda(t) = a + t(b-a)$, con $t \in [0,1]$.

Poiché esistono le derivate parziali fino all'ordine m:

$$F'(t) = Df(\lambda(t))(b-a) = \left\{ (\ h\ )\frac{\partial}{\partial x} + (\ k\ )\frac{\partial}{\partial y} \right\} f(\lambda(t))$$
$$F''(t) = D^2 f(\lambda(t))(b-a)^2 = \left\{ (\ h\ )\frac{\partial}{\partial x} + (\ k\ )\frac{\partial}{\partial y} \right\}^2 f(\lambda(t))$$

$\dots$

$$F^m(t) = D^m f(\lambda(t))(b-a)^m = \left\{ (\ h\ )\frac{\partial}{\partial x} + (\ k\ )\frac{\partial}{\partial y} \right\}^m f(\lambda(t))$$

Applicando la formula di Taylor di ordine m e di p.to iniziale $t_0 = 0$ per le funzioni di una variabile alla funzione $F(t)$ sull'intervallo $[0, 1]$ otteniamo:

$$F(1) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) + R_m$$

che è esattamente l'espressione cercata.

Sia $m=2$, $f \in C^2(U)$:

$$H(a) = H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$F''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(hk) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(k)^2 = (b-a)^T H(A)(b-a)$$

$$(b-a)^T = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

$$f(b) = f(a) + \langle \nabla f(a), (b-a) \rangle + \frac{1}{2}(b-a)^T H(a)(b-a) + R_2$$

T) TEST DELL'HESSIANA

Sia $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(U)$, U intorno di p_0.
Supponiamo che $\nabla f(p_0) = 0$, allora:

i) $H(p_0)$ è definita positiva $\Rightarrow$ Punto di minimo;
ii) $H(p_0)$ è definita negativa $\Rightarrow$ Punto di massimo;
iii) $H(p_0)$ è indefinita $\Rightarrow$ Punto di sella;
iv) $H(p_0)$ è semidefinita $\Rightarrow$ Caso indecidibile;

Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

i) Se $\det(H) > 0$, $f_{xx} > 0 \Rightarrow$ Punto di minimo;
ii) Se $\det(H) > 0$, $f_{xx} < 0 \Rightarrow$ Punto di massimo;
iii) Se $\det(H) < 0 \Rightarrow$ Punto di sella;
iv) Se $\det(H) = 0 \Rightarrow$ caso indecidibile;

DIMOSTRAZIONE)

$p = (x_0 + h, y_0 + k)$, $p_0 = (x_0, x_0)$ è un p.to critico.

$$f(p) = f(p_0) + \langle \nabla f(p_0), (p-p_0) \rangle + \frac{1}{2}(p-p_0)^T H(p_0)(p-p_0) + R_2.$$

$\langle \nabla f(p_0), (p-p_0) \rangle = 0$ in quanto p_0 è un p.to critico.

$$f(p) - f(p_0) = \underbrace{\frac{1}{2}(p-p_0)^T H(p_0)(p-p_0)}_{\text{autovalori } \lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \Rightarrow \lambda_{min} = \min(\lambda_1, \lambda_2).} + o(\|p-p_0\|^2)$$

$$f(p) - f(p_0) \geq \lambda_{min}(\|p-p_0\|^2) + o(\|p-p_0\|^2)$$

$$\frac{f(p)-f(p_0)}{\|p-p_0\|^2} \geq \lambda_{min} + \cancelto{0}{\frac{o(\|p-p_0\|^2)}{\|p-p_0\|^2}}$$

$\lambda_{min} > 0$; $\|p-p_0\|^2 = h^2 + k^2 > 0 \Rightarrow f(p) > f(p_0)$.

SUCCESSIONI DI FUNZIONI

CONVERGENZA PUNTUALE

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni da X in $\mathbb{R}$.

L'insieme

$$I := \{x \in \mathbb{R} : \text{esiste finito} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\}$$

si dice ~~insieme di convergenza~~ della successione $\{f_n\}$.

La funzione $f: I \to \mathbb{R}$ definita da:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in$$

si dice ~~funzione limite o limite puntuale~~ di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in I, si dice che $\{f_n\}$ ~~converge puntualmente~~ ad f in I, e si scrive $f_n \to f$ in

$\forall x \in I, \varepsilon > 0$ se $\exists N = N(x,\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall n > N$.

CONVERGENZA UNIFORME

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$, sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni da I in $\mathbb{R}$ che converge puntualmente ad f in I, e sia $E \subseteq I$.

Si dice che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ~~converge uniformemente ad f in E~~, e si scrive $f_n \rightrightarrows f$ in E, se

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

$\forall \varepsilon > 0$ se $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall n > N, \ x \in E$.

T) CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER LA CONVERGENZA UNIFORME

Condizione necessaria e sufficiente perché $f_n \to f$ uniformemente in I è che:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

DIMOSTRAZIONE)

$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ in I.

$x \in I, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall n > N$

$\Rightarrow \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

Se per assurdo: $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon$

significherebbe che ε non è un maggiorante di $|f_n(x) - f(x)|$ in I, quindi:

$$\exists x_0 \in I : |f_n(x_0) - f(x_0)| > \varepsilon \ , \ \forall n > N$$

Ed ecco trovata la contraddizione.

T) CONVERGENZA UNIFORME E CONTINUITA'

Supponiamo che $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ in E. Se ogni funzione f_n è continua in $x_0 \in E$, allora anche la funzione f è continua in x_0.

DIMOSTRAZIONE)

Per la convergenza uniforme si ha che:

$x \in E, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N = N(\varepsilon) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ , \ \forall n > N$

Fisso $\varepsilon > 0$ e trovo $N(\varepsilon)$ considerando la funzione f_N.

Essa è continua in x_0, quindi $\exists \ I(x_0)$:

$$\forall x \in I(x_0) \cap D \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| +$$
$$+ |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon \ , \ x \in I(x_0) \cap E.$$

T)

Siano $-\infty < a < b < +\infty$, sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue da $[a,b]$ in $\mathbb{R}$ che converge uniformemente in $[a,b]$. allora:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx \,.$$

SERIE DI FUNZIONI

CONVERGENZA PUNTUALE E UNIFORME

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente (uniformemente) a una funzione $S(x)$ in I sse:

- $S_n(x) \to S(x)$ in I.
- ($S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ in I.)

$S_n \to S$

$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : \forall n > N,\ |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

$S_n \rightrightarrows S$

$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N,\ |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

CONVERGENZA ASSOLUTA

Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ si dice che essa converge assolutamente in I sse la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ converge $\forall x \in I$.

CONVERGENZA TOTALE

Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ si dice che essa converge totalmente in I sse esiste una successione reale M_k : $|f_k(x)| \leq M_k,\ \forall x \in I$ e $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ è convergente.

T)

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni convergente in (a, b). Supponiamo che le $f_n(x)$ siano continue in $x = a$ ($x = b$) e che la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ ($\sum_{n=1}^{\infty} f_n(b)$) non sia convergente, allora la serie di partenza non converge uniformemente in (a, b).

SERIE DI POTENZE

INSIEME DI CONVERGENZA

Siano $\{a_n\}$ una successione reale, $x, x_0 \in \mathbb{R}$ con x_0 fissato. Si dice serie di potenze l'espressione:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n.$$

Si dice insieme di convergenza della serie, l'insieme:

$$E = \{ x \in \mathbb{R} : \text{la serie } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \text{ converge} \}.$$

RAGGIO DI CONVERGENZA

Si definisce raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, il valore $\rho := \sup_{x \in E} |x-x_0|$, dove E è l'insieme di convergenza della serie.

L)

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ converge in $t_0 \neq 0$, allora converge assolutamente $\forall t : |t| < |t_0|$. Inoltre la serie converge totalmente e quindi uniformemente in ogni intervallo $[-h, h]$, dove $0 \leq h < |t_0|$.

DIMOSTRAZIONE)

Poiché $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t_0^n$ converge, $a_n t_0^n \to 0$ e quindi la successione $\{a_n t^n\}$ è limitata, allora esiste $M \in \mathbb{R} : |a_n t_0^n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow |a_n t^n| = \left| a_n t_0^n \left(\frac{t}{t_0}\right)^n \right| = |a_n t_0^n| \left|\frac{t}{t_0}\right|^n \leq M \left|\frac{t}{t_0}\right|^n.$$

Se $|t| < |t_0| \Rightarrow \left|\frac{t}{t_0}\right| < 1 \Rightarrow$ per il criterio del confronto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ converge in $(-|t_0|, |t_0|)$.

Si ha che $|t| \leq h < |t_0| \Rightarrow |a_n t^n| \leq M \left|\frac{t}{t_0}\right|^n \leq M \left|\frac{h}{t_0}\right|^n$

$M \left|\frac{h}{t_0}\right|^n$ è il termine generale di una serie convergente

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ converge totalmente e quindi uniformemente in $[-h, h]$.

T) RAGGIO DI CONVERGENZA E PROPRIETA'

Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$:

1) Se $\rho = 0$, la serie converge solo in $t = 0$;
2) Se $\rho \in (0, +\infty)$, la serie converge assolutamente $\forall t : |t| < \rho$ e non converge $\forall t : |t| > \rho$; inoltre converge totalmente e quindi uniformemente in ogni intervallo del tipo $[-R, R]$, con $0 \leq R < \rho$;
3) Se $\rho = +\infty$, la serie converge assolutamente $\forall t \in \mathbb{R}$, totalmente e quindi uniformemente, in ogni intervallo del tipo $[-\alpha, \alpha]$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

DIMOSTRAZIONE)

1) E' ovvia.
2) $\rho \in (0, +\infty)$, $R \in (0, \rho)$. Per le proprietà del sup, $\exists t_0 \in S : |t_0| \in (R, \rho]$; poiché $[-R, R] \subset [-|t_0|, |t_0|]$ la serie converge totalmente e uniformemente in $[-R, R]$; inoltre poiché la serie converge assolutamente in $[-R, R]$ e R è arbitrario in $(0, \rho)$, segue la convergenza assoluta in $(-\rho, \rho)$.
3) $\rho = +\infty$. Per le proprietà del sup, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists t_0 \in S : |\alpha| < |t_0|$. C'è quindi convergenza totale e uniforme in $[-\alpha, \alpha]$ e convergenza assoluta $\forall t \in [-\alpha, \alpha]$. Per l'arbitrarietà di α c'è convergenza assoluta in tutto $\mathbb{R}$.

T) CALCOLO DEL RAGGIO DI CONVERGENZA

Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, se esiste $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r$, eventualmente $+\infty$, allora il raggio di convergenza ρ coincide con $\frac{1}{r}$ se $r \in (0, +\infty)$, con 0 se $r = +\infty$, con $+\infty$ se $r = 0$.

DIMOSTRAZIONE)

Applichiamo il teorema della radice:

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n t^n|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot t < 1$ la serie converge

cioè $r|t| < 1 \Rightarrow |t| < \frac{1}{r}$ $(= \rho)$

SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR

SERIE DI TAYLOR

La funzione f si dice sviluppabile in serie di Taylor di centro x_0 in I se $\exists\, I(x_0)$:

- la serie di Taylor $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ di f di centro x_0 è convergente in x $\forall x \in I$;
- la sua somma è $f(x)$;

T) CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER LA SVILUPPABILITÀ IN SERIE DI TAYLOR

Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $f \in C^{\infty}(I)$, I intorno di x_0, sia sviluppabile in serie di Taylor di centro x_0 è che:

$$\forall x \in I,\ \lim_{n\to\infty} R_n(x, x_0) = 0,$$

dove $R_n(x, x_0)$ è il termine complementare dello sviluppo di Taylor della funzione f di ordine n e di centro x_0.

P)

affinché $\forall x \in I$, $I(x_0)$, risulti $\lim_{n\to\infty} R_n(x, x_0) = 0$ è sufficiente che esistano due numeri $M \geq 0$, $L \geq 0$:

$$|f^{(n)}(x)| \leq ML^n, \forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

DIMOSTRAZIONE)

Usando la forma del resto di Lagrange, si ha che, $\forall x \in I$, $\exists\, \xi \in (x, x_0) \vee \xi \in (x_0, x)$:

$$|R_n(x, x_0)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{ML^{n+1}|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M(L|x-x_0|^{n+1})}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (EDO)

EDO

Un EDO è un'equazione che contiene una funzione incognita, le sue derivate fino ad un certo ordine e funzioni note della variabile indipendente.

ORDINARIA

L'equazione si dice ordinaria in quanto la funzione incognita è una funzione di una sola variabile e quindi le derivate sono rispetto a tale variabile e quindi ordinaria.

ORDINE

L'ordine di una EDO è l'ordine massimo della derivata della funzione incognita che compare nell'equazione.

LINEARE

Un EDO si dice lineare se y e le sue derivate compaiono linearmente nell'equazione.

CONDIZIONE DI LIPSCHITZ

Sia $f: \mathrm{Dom} f \to \mathbb{R}$, si dice che f soddisfi la condizione di Lipschitz con costante $L > 0$ sse:

$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, $x, y \in \mathrm{Dom} f$.

$\exists L > 0 : \| F(x, y) - F(x, z) \| \leq L \| y - z \|$, $\forall (x, y), (x, z) \in \overline{I_1 \times I_2}$

T) TEOREMA ($\exists !$)

Sia $F: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ aperto; supponiamo che:

i) F sia continua in A;

ii) F soddisfi la condizione di Lipschitz;

allora $\exists !$ la soluzione al problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (x_0, y_0) \in A$$

nell'intervallo $(x_0 - r, x_0 + r)$ dove $r = \min \left\{ r_1, \frac{r_2}{M} \right\}$

$I_1 : (x_0 - r_1, x_0 + r_1)$; $I_2 = \{ y \in \mathbb{R}^m : \| y - y_0 \| < r_2 \}$

$M = \max\limits_{(x, y) \in I_1 \times I_2} F(x, y)$

PROLUNGAMENTO DELLA SOLUZIONE

La funzione $y^*(x)$, $x \in I^*$, I intervallo di $\mathbb{R}$, si dice prolungamento della soluzione $y(x)$, $x \in I$, del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

sse si ha che:

i) $I^* \supset I$;

ii) $y^*(x) = y(x)$, $\forall x \in I$;

INTERVALLO MASSIMALE

Si dice intervallo massimale di esistenza per la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy, e' l'intervallo che non ammette prolungamenti. La relativa funzione si dice soluzione massimale del problema di Cauchy.

INTEGRALE GENERALE

Si dice integrale singolare di un EDO una soluzione che non si può determinare dall'integrale generale o per valori finiti o per valori infiniti delle costanti.

INTEGRALI CURVILINEI E SUPERFICIALI

CURVA REGOLARE

Sia U un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e sia $\gamma : U \to \mathbb{R}^m$, $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$, $m \geq 1$:

i) $\gamma \in C^1(U)$;

ii) rango di $\gamma'(t) = 1 \ \forall t \in U$;

allora γ si chiama curva regolare definita su U.

L'immagine $\gamma(U)$ in $\mathbb{R}^m$ della curva γ si dice traccia di γ.

CURVE PARAMETRICAMENTE EQUIVALENTI

Due curve regolari γ e γ^*, con dominio U e U^* rispettivamente, si dicono parametricamente equivalenti se esiste una funzione $\phi : U^* \to U$, suriettiva, $\phi \in C^1(U^*)$:

i) $\phi'(t) > 0$;

ii) $\gamma^*(t) = \gamma(\phi(t)) \ \forall t \in U^*$;

CURVA REGOLARE A TRATTI

Una curva $\gamma : U \to \mathbb{R}^m$ si dice regolare a tratti se:

i) $\gamma \in C(U)$;

ii) $\forall I \subset U$ intervallo compatto, si può scrivere come unione finita di intervalli I_j : $\gamma : \mathring{I}_j \to \mathbb{R}^m$ è regolare e la funzione $\|\gamma'(t)\|$ è integrabile su I;

RETTA TANGENTE

Sia γ una curva regolare. Si chiama retta tangente a γ nel punto $\gamma(t_0)$ la curva:

$$p(t) = \gamma(t_0) + D\gamma(t_0)(t - t_0)$$

VETTORE TANGENTE E DIREZIONE DELLA CURVA

Sia γ una curva regolare. Si chiama vettore tangente nel punto $\gamma(t)$ il vettore $V = \gamma'(t)$ e direzione della curva in $\gamma(t)$ il versore:

$$v = \frac{V}{\|V\|} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

LUNGHEZZA DELLA CURVA

Se $I = [a,b] \subset U \subset \mathbb{R}$ e γ è una curva regolare in U, allora il numero non negativo:

$$\ell(\gamma[a,b]) = \int_a^b \|V_t\| \, dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{x_1'^2(t) + \ldots + x_m'^2(t)} \, dt$$

si dice lunghezza della curva γ relativa ad $[a,b]$.

SUPERFICIE REGOLARE

Sia U un insieme aperto, connesso di $\mathbb{R}^2$ e sia $\sigma : U \to \mathbb{R}^m$, $\sigma(u,v) = (x_1(u,v), \ldots, x_m(u,v))$, $m \geq 2$:

i) $\sigma \in C^1(U)$;

ii) rango $D\sigma(u,v) = 2 \quad \forall (u,v) \in U$;

allora σ si chiama superficie regolare definita su U.

L'immagine $\sigma(U)$ in $\mathbb{R}^m$ della superficie σ si dice traccia di σ.

SUPERFICI PARAMETRICAMENTE EQUIVALENTI

Due superfici regolari σ e σ^* definite su U e U^*, rispettivamente, si dicono parametricamente equivalenti se esiste $\phi : U^* \to U$, suriettiva, $\phi \in C^1(U^*)$:

i) $J_\phi(p) > 0$, $\forall p \in U^*$;

ii) ϕ iniettiva;

iii) $\sigma^*(p) = \sigma(\phi(p)) \quad \forall p \in U^*$;

SUPERFICIE REGOLARE A TRATTI

Una superficie $\sigma : U \to \mathbb{R}^m$ si dice regolare a tratti se:

i) $\sigma \in C(U)$;

ii) ogni sottoinsieme compatto, misurabile $D = \overline{\mathring{D}}$ di U è l'unione finita di sottoinsiemi D_k misurabili tali che $D_k = \overline{\mathring{R}_k}$, tale che $\forall k$, $\sigma : \mathring{D}_k \to \mathbb{R}^m$ è regolare e

$$\left[\sum_{i,j=1}^{m} \left[\frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u,v)} \right]^2 \right]^{1/2}$$ è integrabile su D;

PIANO TANGENTE

Sia σ una superficie regolare su U. Il piano tangente alla superficie nel punto $\sigma(u_0, v_0)$ ha equazione:

$$p(u,v) = \sigma(u_0,v_0) + D\sigma(u_0,v_0)(u - u_0, v - v_0).$$

AREA DI UNA SUPERFICIE

Sia D un insieme misurabile e compatto tale che $D = \overset{\circ}{D} \subset U \subset \mathbb{R}^2$, e sia σ una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$ in U:

$$\sigma := \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad (u,v) \in U$$

allora $a(\sigma(D)) = \int_D \| n \| \, du\, dv = \int_D \sqrt{\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}^2 + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}^2 + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}^2} \, du\, dv$

si chiama area di σ relativa a D.

INTEGRALE CURVILINEO E INTEGRALE SUPERFICIALE

Sia γ una curva regolare su $I \subset \mathbb{R}$

(Sia σ una superficie regolare su $D \subset \mathbb{R}^2$).

Sia f una funzione continua in un intorno V di $\mathbb{R}^n$ della traccia di γ (σ).

Si definisce l'integrale di f su γ (σ) nel seguente modo:

$$\int_{\gamma(I)} f \, dl = \int_I f(\gamma(t)) \, \| \gamma'(t) \| \, dt$$

$$\left(\int_{\sigma(D)} f \, da = \int_D f(\sigma(u,v)) \, \| \sigma_u \times \sigma_v \| \, du\, dv \right)$$

Esso si dice integrale curvilineo (integrale superficiale) di f.

FORME DIFFERENZIALI

DIFFERENZIALE E FORMA DIFFERENZIALE

$f \in C^1(\Omega)$, Ω aperto di $\mathbb{R}^2$

Il differenziale di f è nella forma:

$$A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$$

dove A e B sono le derivate parziali di f rispetto ad x ed y:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Una funzione del tipo:

$$\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$$

dove A e B sono continue in Ω aperto di $\mathbb{R}^2$, verrà chiamata funzione differenziale.

T) CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONSERVATIVITÀ DI UN CAMPO VETTORIALE.

Sia $\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$ una forma differenziale di classe C^1 in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Se esiste una funzione $f: \Omega \to \mathbb{R}$: $df = \omega$ ($f_x = A$, $f_y = B$), allora $A_y = B_x$.

DIMOSTRAZIONE)

Sia f una funzione tale che: $f_x = A$ e $f_y = B$.
Poiché A e B sono di classe C^1, la funzione f risulta di classe C^2. Tenendo conto del teorema di Schwarz si ha che:

$$A_y = f_{xy} = f_{yx} = B_x.$$

FORMA ESATTA E FORMA CHIUSA

Sia $\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$ una forma differenziale definita in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Si dice che ω è una forma esatta in Ω se esiste una funzione $f: \Omega \to \mathbb{R}$, detta primitiva di ω, tale che $df = \omega$.
Si dice che ω è una forma chiusa se $A_y = B_x$.

INTEGRALE DI ω SU γ.

Sia $\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$ una forma differenziale continua definita in un aperto Ω di $\mathbb{R}^2$ e sia $\gamma : [a,b] \to \Omega$ una curva parametrica C^1.

Definiamo integrale di ω su γ il numero:

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \left(A(\gamma(t))\gamma_1'(t) + B(\gamma(t))\gamma_2'(t) \right) dt$$

REGOLE:

$$\int_\gamma (\omega_1 + \omega_2) = \int_\gamma \omega_1 + \int_\gamma \omega_2$$

γ curva parametrica costante $\Rightarrow \int_\gamma \omega = 0$

$\gamma_1 : [a,b] \to \Omega$, $\gamma_2 : [b,c] \to \Omega$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b) \Rightarrow \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$.

T) FORMULA FONDAMENTALE PER GLI INTEGRALI CURVILINEI

Sia ω una forma differenziale definita in Ω e esatta e sia f una sua primitiva. Allora:

$$\int_\gamma \omega = f(P_2) - f(P_1).$$

dove P_1 e P_2 sono rispettivamente, il primo e il secondo estremo della curva γ.

L'integrale curvilineo di una forma differenziale non dipende dalla curva, ma soltanto dai suoi estremi

DIMOSTRAZIONE)

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrica C^1 tale che $\gamma(a) = P_1$, $\gamma(b) = P_2$. Poiché f è una primitiva di ω si ha:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left(f_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + f_y(\gamma(t))\gamma_2'(t) \right) dt$$

Denotiamo con $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ la composizione $\varphi(t) = f(\gamma(t))$.

Per la regola di derivazione a catena si ha:

$\varphi'(t) = f_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + f_y(\gamma(t))\gamma_2'(t)$, da cui:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \varphi'(t)\,dt = \varphi(b) - \varphi(a) = f(P_2) - f(P_1).$$

INSIEME SEMPLICEMENTE CONNESSO

Un sottoinsieme aperto Ω di $\mathbb{R}^2$ si dice semplicemente connesso se ogni curva chiusa il cui sostegno è contenuto in Ω può essere deformata con continuità riducendola ad un punto, senza che nella deformazione si tocchino mai punti del complementare di Ω.

T) CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA CONSERVATIVITÀ DI UN CAMPO VETTORIALE

Se una forma differenziale è chiusa ed è definita in un insieme semplicemente connesso, allora è anche esatta.

DIMOSTRAZIONE)

Sia $\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$ con $A, B \in C^1(\bar{D})$, $\bar{D} \subseteq \mathbb{R}^2$

Sia γ una curva regolare chiusa con il sostegno contenuto in D. Allora essa è la frontiera di un insieme aperto $I \subset D$. $(\partial I = \gamma)$.

Per la formula di Gauss-Green si ha che:

$$\iint_I \left(B_x(x,y) - A_y(x,y) \right) dx\,dy = \int_{\partial I = \gamma} A\,dx + B\,dy .$$

$$A\,dx + B\,dy \overset{DEF}{\Longleftrightarrow} A_y(x,y) = B_x(x,y)$$

$\Rightarrow \omega$ è esatta.

T) FORMULE DI GAUSS-GREEN NEL PIANO

Sia $\omega = A\,dx + B\,dy$ una forma differenziale di classe C^1 su un insieme compatto $D \subset \mathbb{R}^2$ delimitato da un numero finito di curve di Jordan regolari a tratti. Allora:

$$\int_{\partial D} A\,dx + B\,dy = \iint_D \left(B_x(x,y) - A_y(x,y) \right) dx\,dy$$

dove l'orientazione di ∂D è quella indotta da X.

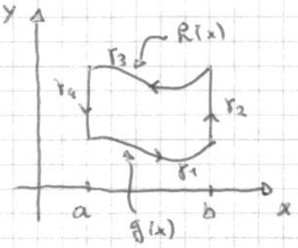
- $\iint_D A_y(x,y)\,dx\,dy = -\int_{\partial D} A\,dx$.
- $\iint_D B_x(x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial D} B\,dy$.

DIMOSTRAZIONE)

Se $D \subseteq \mathbb{R}^2 \Rightarrow D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \in [a,b],\ g(x) \le y \le h(x)\}$, $A \in C^1(\bar{D})$

$$\iint_D A_y(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} A_y\,dy \right) dx = \int_a^b \left(A(x,h(x)) - A(x,g(x))\right) dx$$

Calcoliamo $\int_{\partial D} A(x,y)\,dx = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} A(x,y)\,dx$.



$\gamma_1 = \begin{cases} x = t \\ y = g(x) \end{cases}$ $t \in [a,b]$

$\gamma_2 = \begin{cases} x = b \\ y = t \end{cases}$ $t \in [g(b), h(b)]$

$\gamma_3 = \begin{cases} x = t \\ y = h(x) \end{cases}$ $t \in [b,a]$

$\gamma_4 = \begin{cases} x = t \\ y = a \end{cases}$ $t \in [h(a), g(a)]$

$$\int_{\partial D} A(x,y)\,dx = \int_a^b A(t,g(t))\,dt + 0 + \int_b^a A(t,h(t))\,dt + 0$$

$$= \int_a^b A(x,g(x)) - A(x,h(x))\,dx = \int_{\partial D} A(x,y)\,dx$$

$$\Rightarrow \iint_D A_y(x,y)\,dx\,dy = -\int_{\partial D} A(x,y)\,dx$$

analogamente se:

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d],\ l(y) \le x\ m(y)\}$ $B \in C^1(\bar{D})$

$$\Rightarrow \iint_D B_x\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{l(y)}^{m(y)} B_x\,dx \right) dy = \int_{\partial D} B(x,y)\,dy$$

SERIE DI FOURIER

FUNZIONE CONTINUA A TRATTI

Una funzione f definita su (a,b) si dice continua a tratti sse è continua in (a,b) con l'eccezione di un numero finito di punti $x_1, x_2, \dots, x_m$ di discontinuità di salto con $a < x_1 < x_2 < \dots < x_m < b$.

$\forall x_i$ si ha che $\lim_{x \to x_i^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_i^+} f(x)$

con $\lim_{x \to x_i^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_i^+} f(x)$ finiti.

FUNZIONE REGOLARIZZATA

f continua a tratti e 2π-periodica si dice regolarizzata sse nei punti di discontinuità x_i è definita con il valore $f(x_i) = \frac{f(x_i^+) - f(x_i^-)}{2}$.

SISTEMA ORTOGONALE

Sia V uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare. Un insieme finito o infinito $e_0, e_1, \dots$ di elementi di V si dice sistema ortonormale se:

$\| e_k \| = 1$, $k = 0, 1, \dots$

$\langle e_k, e_j \rangle = 0$ se $k \neq j$

PRODOTTO SCALARE

Sia $\tilde{C}_{2\pi}$ lo spazio vettoriale delle funzioni periodiche di periodo 2π, continue a tratti e regolarizzate. Il prodotto scalare su $\tilde{C}_{2\pi}$ è definito da:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) \, dx .$$

T) TEOREMA DELLA PROIEZIONE ORTOGONALE

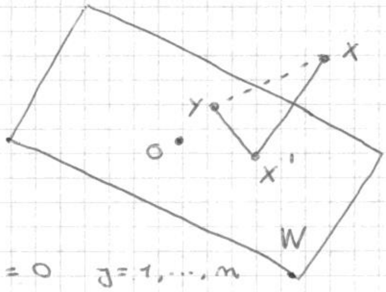
Sia $W \subseteq V$ un sottospazio di dimensione finita, sia $x \in V$. Esiste allora un unico elemento $x' \in W$, detto proiezione ortogonale di x su W, tale che $x - x'$ sia ortogonale ad ogni elemento di W.

Inoltre se $\{ e_1, e_2, \dots, e_m \}$ è una base ortonormale di W, si ha: $x' = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x, e_m \rangle e_m$. (1)

Infine x' è l'unico elemento di W avente distanza minima da x e tale distanza è data da

$$\|x-x'\| = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{j=1}^{m} \langle x, e_j \rangle^2} \quad . \quad (\text{II})$$

DIMOSTRAZIONE)



affinché $x-x'$ sia ortogonale a tutti gli elementi di W è necessario e sufficiente che x' sia ortogonale ad $e_1, e_2, \dots, e_m$ cioè: $\langle x-x', e_j \rangle = 0 \quad j=1,\dots,m$

Equivalentemente deve essere:

$\langle x, e_j \rangle = \langle x', e_j \rangle \quad , \quad j=1,\dots,m$

Quindi x' è l'unico elemento espresso da (I) con la proprietà richiesta.

Vediamo adesso che x' realizza la minima distanza di x da W, per questo sia $y \in W$ con $y \neq x'$.

Poiché $x-x'$ ed $y-x'$ sono ortogonali per il punto precedente si ha dal teorema di Pitagora che:

$\|x-y\|^2 = \|x-x'\|^2 + \|x'-y\|^2 > \|x-x'\|^2$ cioè

$d(x,y) > d(x,x') \quad \forall y \in W$ con $y \neq x'$.

Infine proviamo (II), essendo $x-x'$ ortogonale ad x', poiché $x' \in W$ si ha:

$\|x-x'\|^2 = \langle x-x', x-x' \rangle = \langle x, x-x' \rangle = \|x\|^2 - \langle x, x' \rangle$

D'altronde posto $c_j = \langle x, e_j \rangle$ si ha

$\langle x, x' \rangle = \langle x, \sum_{j=1}^{m} c_j e_j \rangle = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle x, e_j \rangle = \sum_{j=1}^{m} c_j^2$

Equivalentemente, $\|x-x'\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{m} \langle x, e_j \rangle^2$.

1) DISEGUAGLIANZA DI BESSELL

Sia $f \in \tilde{C}_{2\pi}$. Si definiscono i coefficienti di Fourier di f

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx \qquad k = 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} kx \, dx \qquad k = 1, 2, \dots$$

allora la proiezione ortogonale di f su P_m, definito come $P_m = \operatorname{span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} mx \right\}$,

è il polinomio trigonometrico:

$$P_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

Inoltre: $\| f - P_m \|^2 = \int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx - \pi \frac{a_0^2}{2} - \pi \sum_{k=1}^{m} (a_k^2 + b_k^2)$.

Da:

$$0 \le \| f - P_m \|^2 = \int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx - \pi \frac{a_0^2}{2} - \pi \sum_{k=1}^{m} (a_k^2 + b_k^2)$$

Si ha:

$$\pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{m} (a_k^2 + b_k^2) \le \int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Questa disuguaglianza è detta disuguaglianza di Besseel.

CONVERGENZA IN MEDIA QUADRATICA

Se $\lim_{m \to \infty} \| f - P_m \| = 0$ allora diremo che la serie di Fourier $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$

converge in media quadratica alla funzione $f \in \tilde{C}_{2\pi}$ su $[0, 2\pi]$.

T) TEOREMA DELLA CONVERGENZA IN MEDIA QUADRATICA

Se $f \in \tilde{C}_{2\pi}$ allora la serie di Fourier di f converge ad f in media quadratica:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) = P_m(x).$$

FUNZIONE PERIODICA

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, f si dice periodica di periodo $T > 0$ se $f(x+T) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Se non esiste $0 < \hat{T} < T$: $f(x+\hat{T}) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ allora T si dice periodo minimo di f.

FUNZIONE REGOLARE A TRATTI

Una funzione continua a tratti si dice regolare a tratti in $[a, b]$ se ha derivata continua salvo che nei punti $x_1, x_2, \dots, x_n$ ed eventualmente in altri punti $y_1, y_2, \dots, y_k$ e se in tutti questi punti la derivata ha una discontinuità di salto.

T) CONVERGENZA PUNTUALE DELLE SERIE DI FOURIER

Sia $f(x)$ una funzione periodica di periodo 2π regolare a tratti. Allora la serie di Fourier generata da f converge ad $f(x)$ nei punti x in cui f è continua ed a $\frac{1}{2}[f(x_0^-) + f(x_0^+)]$ se x_0 è un punto di discontinuità (di salto) di f.

DIMOSTRAZIONE)

Premettiamo i seguenti lemmi:

1) Si ha la seguente formula:

$$\frac{1}{2} + \cos y + \cos 2y + \dots + \cos ny = \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})y}{2\operatorname{sen}\frac{y}{2}} \quad \left(\text{NUCLEO DI DIRICHLET}\right)$$

2) Sia $F(x)$ una funzione integrabile secondo Riemann e periodica di periodo 2π, siano a_k e b_k i suoi coefficienti di Fourier. Si ha:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (F(x))^2 \, dx$$

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt \cos kx + \operatorname{sen} kt \operatorname{sen} kx \right\} dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x) \right\} dt \quad (t-x = u)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ku \right\} du$$

Da (1) si ha che: $S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} \, dt$

Sempre da (1) si ha:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(n+1/2)t}{2\operatorname{sen} t/2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{\operatorname{sen}(n+1/2)t}{2\operatorname{sen} t/2}\,dt = \frac{1}{2}$$

Dunque:

$$S_n(x) - \frac{f(x^+) - f(x^-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{f(x+t) - f(x^-)}{2\operatorname{sen} t/2} \operatorname{sen}(n+1/2)t\,dt$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{2\operatorname{sen} t/2} \operatorname{sen}(n+1/2)t\,dt$$

Poniamo ora:

$$G(t) = \begin{cases} \dfrac{f(x+t) - f(x^-)}{2\operatorname{sen} t/2} & -\pi < t < 0 \\ \dfrac{f(x+t) - f(x^+)}{2\operatorname{sen} t/2} & 0 < t < \pi \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

La funzione $G(t)$ è continua in $[-\pi, \pi]$ tranne al più in un numero finito di punti in cui f ha un salto.

In particolare:

$$\lim_{t\to 0^+} G(t) = f'(x^+); \quad \lim_{t\to 0^-} G(t) = f'(x^-)$$

Si ha allora:

$$S_n(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t) \operatorname{sen}(n+\tfrac{1}{2})t\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\operatorname{sen} t/2 \cos nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\cos\frac{t}{2} \operatorname{sen} nt\,dt,$$

e passando al limite per $n\to\infty$, tenendo conto che la disuguaglianza di Bessel implica $a_n, b_n \to 0$ per $n\to\infty$ dove:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\operatorname{sen}\frac{t}{2}\cos nt\,dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\cos\frac{t}{2}\operatorname{sen} nt\,dt$$

si ottiene la tesi del Teorema.

T) CONVERGENZA UNIFORME DELLE SERIE DI FOURIER

Se la funzione $f(x)$ è 2π-periodica, continua in $\mathbb{R}$ (cioè $f(-\pi) = f(\pi)$ ed f continua in $[-\pi, \pi]$) e regolare a tratti. Allora la serie di Fourier generata da f converge totalmente in $\mathbb{R}$ e quindi uniformemente alla funzione f.

DIMOSTRAZIONE)

Per ipotesi f è continua in $\mathbb{R}$ e f' è definita in $[-\pi, \pi]$ eccetto che in un numero finito di punti di discontinuità di salto, se in questi punti definiamo $f' = 0$, la funzione f' sarà definita ovunque e continua a tratti, quindi f' è integrabile secondo Riemann. Posto:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos kt \, dt, \quad \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\,\mathrm{sen}\,kt \, dt$$

dalla disuguaglianza di Bessel si ha:

$$\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f'(t))^2 \, dt$$

Dato che f è continua in $\mathbb{R}$, i coefficienti α_k, β_k integrando per parti si possono esprimere nel modo seguente: $\alpha_k = k b_k$, $\beta_k = -k a_k$

dove a_k, b_k sono i coefficienti di Fourier di f.

Pertanto:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f'(t))^2 \, dt < +\infty \qquad (1)$$

Consideriamo il termine generale della serie di Fourier di f:

$$|a_k \cos kx + b_k \,\mathrm{sen}\, kx| \le |a_k| + |b_k| .$$

Quindi per provare la convergenza totale di questa serie sarà sufficiente provare la convergenza della serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k|$.

Ricordando che $2ab \le a^2 + b^2$ si ottiene:

$|a_k| = k|a_k| \, 1/k = (k^2 a_k^2 + 1/k^2)/2$

$|b_k| = (k^2 b_k^2 + 1/k^2)/2$.

In conclusione $|a_k| + |b_k| \leq \frac{k^2}{2}(a_k^2 + b_k^2) + \frac{1}{k^2}$ e da (1), tenendo conto che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$ segue la convergenza di $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k|$.

T)

Se la funzione $f(x)$ è regolare a tratti e 2π-periodica, allora la serie di Fourier generata da f converge uniformemente ad f in ogni intervallo chiuso $[a, b]$ in cui f è continua.