

ANALISI MATEMATICA 1

[Richiami di Insiemistica]

A CURA DI ALESSANDRO PAGHI

PROFESSORE: Alessandra Andreini (<http://www3.diism.unisi.it/people/person.php?id=2>)

LINK AL CORSO ANNO 2013/2014:

<http://www3.diism.unisi.it/FAC/index.php?bodyinc=didattica/inc.insegnamento.php&id=54683&aa=2013>

FREQUENTAZIONE: Facoltativa.

RICHIAMI DI INSIEMISTICA

INSIEME: Collezione di oggetti detti elementi.

SOTTOINSIEME: Dati due insiemi A e B , si dice che A è sottoinsieme di B ($A \subseteq B$) se ogni elemento di A è anche elemento di B .

$$A \subseteq B \Leftrightarrow x \in B \quad \forall x \in A$$

OPERAZIONI INSIEMISTICHE FONDAMENTALI

UNIONE: $A \cup B := \{x \in U : x \in A \text{ o } x \in B\}$

INTERSEZIONE: $A \cap B := \{x \in U : x \in A \text{ e } x \in B\}$

Se $A \cap B = \emptyset$, A e B sono DISGIUNTI.

DIFFERENZA: $B \setminus A := \{x \in B : x \notin A\}$

INSIEME COMPLEMENTARE: $C_B A := B \setminus A$ se $A \subseteq B$.

PROPRIETÀ DI UNIONE E INTERSEZIONE

UNIONE	PROPR.	INTERSEZIONE
$A \cup A = A$	IDEMPOTENZA	$A \cap A = A$
$A \cup B = B \cup A$	COMMUTATIVA	$A \cap B = B \cap A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	ASSOCIATIVA	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	DISTRIBUTIVA	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (A \cap B) = A$	DI ASSORBIMENTO	$A \cap (A \cup B) = A$

$$C(C_A) = A ; \quad A \cup C_A = U ; \quad A \cap C_A = \emptyset$$

LEGGI DI DE MORGAN :

$$C(A \cup B) = C_A \cap C_B$$

$$C(A \cap B) = C_A \cup C_B$$

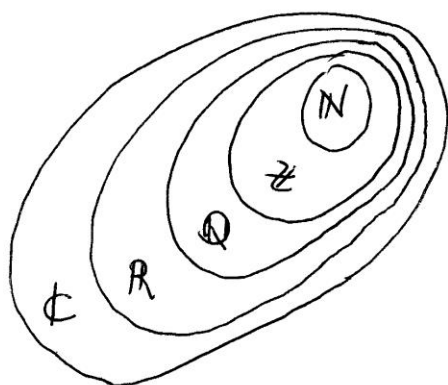
COPPIA ORDINATA : Indichiamo con (a, b) l'oggetto formato da un elemento $a \in A$ e un elemento $b \in B$, presi in tale ordine.

PRODOTTO CARTESIANO : $A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

INSIEMI NUMERICI

OPERAZIONE : Dato un insieme X , un'operazione in X associa ad ogni coppia ordinata $(x, y) \in X \times X$ uno ed un solo elemento $z \in X$.

INSIEME NUMERICO : un insieme $\mathbb{I}$ detto numerico se $\mathbb{I}$ è dotata d'operazione di ADDIZIONE e di MOLTIPLICAZIONE.



$\mathbb{N}$: NATURALI

$\mathbb{Z}$: INTERI

$\mathbb{Q}$: RAZIONALI

$\frac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$
 p, q primi tra loro.

$\mathbb{R}$: REALI

$(\sqrt{2})$

$\mathbb{C} = x + iy$ (COMPLESSI)

NUMERI REALI

VALORE ASSOLUTO

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE : $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

ESTREMI SUP. E INF.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. un elemento k si dice MAGGIORANTE (MINORANTE) di A in $\mathbb{R}$ se :

$$a \leq k, \forall a \in A \quad (a \geq k, \forall a \in A)$$

A si dice LIMITATO SUPERIORMENTE (INFERIORMENTE) se possiede almeno un maggiorante (minorante)

A è LIMITATO se è limitato sia sup. che inf.

Un maggiorante (minorante) di $A \subseteq \mathbb{R}$ che appartiene ad A si dice MASSIMO (MINIMO)

ESTREMO SUPERIORE : $\sup A := \min \{ k \in \mathbb{R} : k \text{ maggiorante di } A \}$

ESTREMO INFERIORE : $\inf A := \max \{ k \in \mathbb{R} : k \text{ minorante di } A \}$

RADICE

Siano $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 1$. Allora esiste uno ed un solo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$: $x^m = y$. x viene indicato con $\sqrt[m]{y}$ o $y^{\frac{1}{m}}$ e si chiama RADICE m -ESIMA di y .

POTENZA

PROPRIETÀ:

$$1) a^{r+s} = a^r \cdot a^s;$$

$$2) (ab)^r = a^r \cdot b^r;$$

$$3) (a^r)^s = a^{rs}$$

$$4) a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

LOGARITMO

Siano $a, y \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, allora esiste uno ed un solo $x \in \mathbb{R}$: $a^x = y$. La soluzione di tale equazione si chiama LOGARITMO IN BASE a di y $\log_a y$.

PROPRIETÀ: $\{a, b, x, y \in \mathbb{R}^+; a, b \neq 1\}$

$$1) a^{\log_a x} = x;$$

$$2) \log_a xy = \log_a x + \log_a y;$$

$$3) \log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x;$$

$$4) \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y;$$

$$5) \log_a x^r = r \cdot \log_a x;$$

$$6) \log_a x = \frac{1}{\log_x a} = -\log_{\frac{1}{a}} x;$$

$$7) \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a};$$

NUMERI COMPLESSI

NUMERO COMPLESSO: Coppia ordinata (x, y) di due numeri reali x, y rappresentati nella forma
$$z = x + iy.$$

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Dato $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$:

(i) ADDIZIONE: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$;

(ii) MOLTIPLICAZIONE: $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$;

x : PARTE REALE $\operatorname{Re}(z) := x$;

y : PARTE IMMAGINARIA $\operatorname{Im}(z) := y$;

$$\boxed{i^2 = -1}$$

COMPLESSO CONIUGATO: Dato $z = x + iy$, si denota con $\bar{z}$ il complesso coniugato ovvero

$$\bar{z} := x - iy.$$

PROPRIETÀ:

$$1) z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2;$$

$$2) \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2;$$

$$3) \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2;$$

MODULO: $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$

RAPPRESENTAZIONE TRIGONOMETRICA

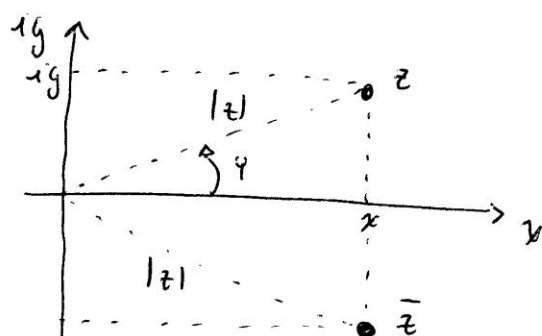
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad x > 0$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \quad \text{se } x < 0$$

$$\operatorname{Re}(z) = |z| \cos \varphi$$

$$\operatorname{Im}(z) = |z| \sin \varphi \quad \Rightarrow z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$



TEOREMA: $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, allora

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\varphi(z_1 z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$$

TEOREMA: $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, allora

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\varphi\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \varphi(z_1) - \varphi(z_2)$$

RAPPRESENTAZIONE ESPONENZIALE

FORMULA DI DE MOIVRE : $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ per $y \in \mathbb{R}$

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad \text{e} \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2} \quad \text{per } y \in \mathbb{R}$$

$$z = |z| e^{iy}$$

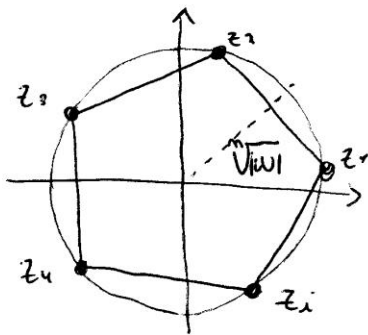
RADICI COMPLESSE

Sia $w \in \mathbb{C}$ e sia $n = 2, 3, \dots$

(i) Se $w = 0$, la sola soluzione dell'equazione $z^n = w$ è $z = 0$;

(ii) Se $w \neq 0$, l'equazione $z^n = w$ ha n soluzioni complesse e distinte date da:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} e^{i(y + 2k\pi)/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$



Sono n punti equidistanti sulla circonferenza di raggio $\sqrt[n]{|w|}$ e centro 0 .