

ANALISI MATEMATICA 1

[Fotocopie di Appunti tratti dal Libro ‘*Analisi Matematica II* *Edizione*’]

A CURA DI ALESSANDRO PAGHI

PROFESSORE: Alessandra Andreini (<http://www3.diism.unisi.it/people/person.php?id=2>)

LINK AL CORSO ANNO 2013/2014:

<http://www3.diism.unisi.it/FAC/index.php?bodyinc=didattica/inc.insegnamento.php&id=54683&aa=2013>

FREQUENTAZIONE: Facoltativa.

FUNZIONE

Siano X, Y insiemi non vuoti.

Una funzione da X in Y è una corrispondenza univoca da X in Y , ovvero associa ad ogni $x \in X$ uno ed un solo $y \in Y$.

Tale elemento è detto valore della funzione in x e si scrive $y = f(x)$.

DOMINIO E CODOMINIO

L'insieme X si dice dominio della funzione e si scrive:

$$X = \text{dom } f.$$

mentre Y si dice codominio.

GRAFICO

Il grafico di f è l'insieme:

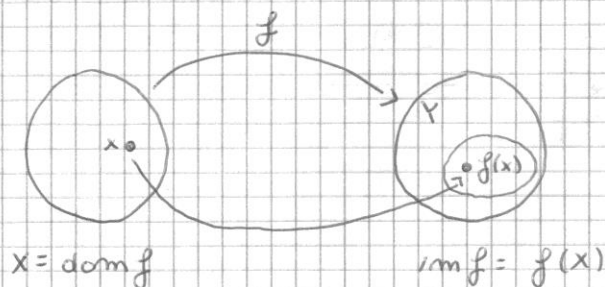
$$\text{graf } f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$$

IMMAGINE

L'immagine di f è l'insieme dei valori della funzione:

$$\text{im } f = f(X) = \{f(x) : x \in X\} \subseteq Y$$

$$\text{im } f = \{y \in Y : \exists x \in X \text{ tale che } y = f(x)\}$$



SUCCESSIONE

Si dice successione una funzione il cui dominio è $\mathbb{N}$.

In particolare una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ si dice successione reale:

$$\begin{cases} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(n) = a_n \end{cases}$$

Si usano le notazioni:

$$n \mapsto a_n; \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}; \{a_n\}_{n=0,1,2,\dots}; \{a_n\};$$

a_n si dice termine della successione e n si dice indice del termine a_n .

FUNZIONI MONOTONE

Siano $A \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. La f si dice:

- i) CRESCENTE in A se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 < x_2$, si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- ii) STRETTAMENTE CRESCENTE in A se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 < x_2$, si ha che $f(x_1) < f(x_2)$;
- iii) DECRESCENTE in A se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 < x_2$, si ha $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- iv) STRETTAMENTE DECRESCENTE in A se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 < x_2$, si ha $f(x_1) > f(x_2)$;

La f si dice MONOTONA in $A \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ se f è crescente o decrescente in A ; f si dice STRETTAMENTE MONOTONA in A se f è strettamente crescente o strettamente decrescente in A .

FUNZIONI SIMMETRICHE, FUNZIONI PERIODICHE

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

i) La f si dice **PARI** in X se:

$$-x \in X \quad \forall x \in X \quad \text{e} \quad f(-x) = f(x) \quad \forall x \in X$$

ii) La f si dice **DISPARI** in X se:

$$-x \in X \quad \forall x \in X \quad \text{e} \quad f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in X$$

iii) La f si dice **PERIODICA** in X se esiste $P > 0$ tale che:

$$\begin{cases} x+P \in X & \forall x \in X \\ f(x+P) = f(x) & \forall x \in X \end{cases}$$

e in tal caso il numero:

$$p = \inf \{ P > 0; f(x+P) = f(x) \quad \forall x \in X \}$$

si dice **PERIODO** di f .

FUNZIONE LIMITATA

Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. La f si dice **LIMITATA SUPERIORMENTE**

(**limitatamente INFERIORMENTE**) in X se esiste

$M \in \mathbb{R}$ tale che:

$$f(x) \leq M \quad (\text{rispettivamente } \geq -M) \quad \forall x \in X,$$

ovvero in maniera equivalente se

$\text{Im } f = f(X)$ è un sottoinsieme limitato superiormente (inferiormente) di $\mathbb{R}$.

La f si dice **LIMITATA** in X se è limitata

superiormente e inferiormente in X .

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in X.$$

ESTREMI DI UNA FUNZIONE

Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $\emptyset \neq A \subseteq X$. Si definiscono:

$$\sup_A f = \begin{cases} \sup f(A) & \text{se } f \text{ è limitata superiormente in } A \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$\inf_A f = \begin{cases} \inf f(A) & \text{se } f \text{ è limitata inferiormente in } A \\ -\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\sup_A f$ ($\inf_A f$) si dice estremo superiore (inferiore) di f in A ,

e si scrive anche: $\sup_{x \in A} f(x)$ ($\inf_{x \in A} f(x)$)

CARATTERIZZAZIONE DI $\sup_A f$ / $\inf_A f$

$$M = \sup_A f < +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) } \forall x \in A: f(x) \leq M \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A: f(x) > M - \varepsilon \end{cases}$$

$$m = \inf_A f > -\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) } \forall x \in A: f(x) \geq m \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A: f(x) < m + \varepsilon \end{cases}$$

MASSIMO E MINIMO DI UNA FUNZIONE

$M \in \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$) si dice massimo (minimo) globale o assoluto di $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ in $A \subseteq X$ se esiste $x_0 \in A$, detto punto di massimo (minimo) globale di f in A , tale che:

$$\begin{cases} f(x) \leq M \quad (f(x) \geq m) & \forall x \in A \\ f(x_0) = M \quad (f(x_0) = m) \end{cases}$$

e si scrive:

$$M = \max_A f = \max_{x \in A} f(x) \quad (m = \min_A f = \min_{x \in A} f(x))$$

FUNZIONE INIETTIVA, SURIETTIVA

La funzione $f: X \rightarrow Y$ si dice INIETTIVA se:

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

ovvero:

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

La f si dice SURIETTIVA se $f(X) = Y$ e BIETTIVA se f è iniettiva e suriettiva.

FUNZIONE COMPOSTA

Siano X, Y, V, W insiemi, e siano $f: X \rightarrow Y$,
 $g: V \rightarrow W$ tali che $\text{img} f \cap V \neq \emptyset$.

Si dice funzione composta $g \circ f$ la funzione

$$\begin{cases} g \circ f : X_0 \rightarrow W \\ g \circ f : x \mapsto g(f(x)) \end{cases}$$

dove il dominio X_0 è così definito:

$$X_0 = \{x \in X : f(x) \in V\} \subseteq X$$

I) COMPOSIZIONE DI FUNZIONI MONOTONE

Siano f, g funzioni reali di una variabile reale,
e sia $A \subseteq \text{dom} g \circ f$ allora:

- I) $f \nearrow \text{in } A$ e $g \nearrow \text{in } g(A) \Rightarrow g \circ f \nearrow \text{in } A$.
- II) $f \nearrow \text{in } A$ e $g \searrow \text{in } g(A) \Rightarrow g \circ f \searrow \text{in } A$.
- III) $f \searrow \text{in } A$ e $g \nearrow \text{in } g(A) \Rightarrow g \circ f \searrow \text{in } A$.
- IV) $f \searrow \text{in } A$ e $g \searrow \text{in } g(A) \Rightarrow g \circ f \nearrow \text{in } A$.

II) COMPOSIZIONE DI FUNZIONI INIETTIVE

Se f e g sono iniettive nei loro domini, anche
 $g \circ f$ lo è.

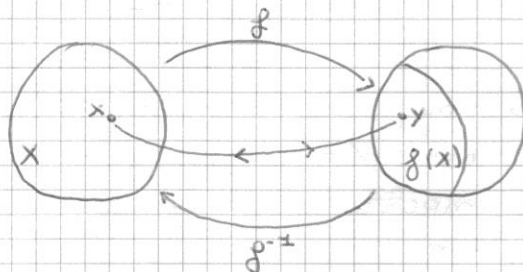
FUNZIONE INVERSA

Sia $f: X \rightarrow Y$ iniettiva. Si dice funzione inversa di f la funzione:

$$\begin{cases} f^{-1}: f(x) \rightarrow x \\ f^{-1}: y \mapsto x \text{ dove } f(x)=y \end{cases}$$

$$\forall (x, y) \in X \times f(X): f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

Una funzione INIETTIVA è anche detta INVERTIBILE.



INVERTIBILITÀ IN UN SOTTOINSIEME DEL DOMINIO

$f: X \rightarrow Y$ si dice INVERTIBILE in $A \subseteq X$ se la restrizione di f ad A , $f|_A: A \rightarrow Y$, è INIETTIVA.

La funzione $(f|_A)^{-1}$ si dice INVERSA di f in A .

1) INVERTIBILITÀ E MONOTONIA

Siano $A \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Se f è strettamente monotona in A , allora f è invertibile in A ;

inoltre f^{-1} è strettamente monotona in $f(A)$.

INTORNO SFERICO

Dato $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, si dice intorno sferico di x di raggio ε e l'intervallo:

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} : d_c(x, y) < \varepsilon\} = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \varepsilon\} = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

PUNTI DI ESTREMO

Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$. Allora x_0 si dice punto di minimo (locale, relativo) di f e $f(x_0)$ si dice minimo (locale, relativo) di f se:

- i) esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) \geq f(x_0)$
 $\forall x \in U \cap X$.

Si parla di minimo locale forte se:

- ii) esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) > f(x_0)$
 $\forall x \in U \cap X, x \neq x_0$.

Si parla di massimo locale (forte) se vale la I (rispettivamente la II) con la disuguaglianza opposta.

$$\mathbb{R}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

INTORNO SFERICO DI ∞

Si dice intorno sferico di $+\infty$ un qualunque intervallo del tipo $(a, +\infty]$, $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\}$.

Si dice intorno sferico di $-\infty$ un qualunque intervallo del tipo $[-\infty, b)$, $b \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\}$.

PUNTO DI ACCUMULAZIONE E ISOLATO

Sia $E \subset \mathbb{R}^*$. Un punto $x \in \mathbb{R}^*$ si dice di ACCUMULAZIONE per E se ogni intorno di x contiene un punto di E diverso da x , ovvero se per ogni intorno U di x :

$$U \setminus \{x\} \cap E \neq \emptyset$$

un punto $x \in E$ che non è di accumulazione per E si dice ISOLATO, ovvero:

$x_0 \in E$ è ISOLATO $\Leftrightarrow$ esiste un intorno U di x_0 tale che $E \cap U = \{x_0\}$.

1) TEOREMA DI BOLZANO - WEIERSTRASS

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ limitato e infinito.

Allora esiste in $\mathbb{R}$ almeno un punto di accumulazione per E .

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali, se essa è limitata allora esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ convergente.

DIMOSTRAZIONE:

Per ipotesi supponiamo che la successione $\{a_n\}$ è limitata e per definizione di successione limitata esistono due numeri reali a_0, b_0 tali che:

$$a_0 \leq a_n \leq b_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e ciò vuol dire che tutti i termini della successione a_n appartengono all'intervallo $I_0 = [a_0, b_0]$.

Definiamo il punto medio di tale intervallo:

$$c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

grazie al numero possiamo costruire due sottointervalli $[a_0, c_0]$ e $[c_0, b_0]$ almeno uno dei quali contiene infiniti termini della successione $\{a_n\}$.

Supponiamo che il sottointervallo che possiede infiniti termini della successione sia $[a_0, c_0]$, in tal caso poniamo:

$$a_1 = a_0 \quad b_1 = c_0$$

Otteniamo quindi l'intervallo $I_1 = [a_1, b_1]$ la cui ampiezza è:

$$\frac{b_0 - a_0}{2}$$

Costruiamo il punto medio: $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$

Dividiamo in due l'intervallo I_1 grazie al punto medio:

avremo $[a_1, c_1]$ e $[c_1, b_1]$ certamente uno di essi avrà infiniti termini della successione, supponiamo sia $[a_1, c_1]$.

Poniamo $a_2 = a_1, b_2 = c_1$, che saranno gli estremi dell'intervallo $I_2 = [a_2, b_2]$ la cui ampiezza è:

$$\frac{b_0 - a_0}{2^2}$$

Generalizziamo il processo:

Dall'intervallo $I_k = [a_k, b_k]$ costruiamo il punto medio $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$

Possiamo costruire due sottointervalli $[a_k, c_k]$ e $[c_k, b_k]$ uno dei quali conterrà infiniti elementi della successione $\{a_n\}$, ad esempio $[a_k, c_k]$.

Poniamo quindi:

$$a_{k+1} = a_k \quad b_{k+1} = c_k$$

Ottenendo quindi $I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$ la cui ampiezza è: $\frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}$

Procedendo in questo modo costruiamo:

- Una sequenza di intervalli $I_k = [a_k, b_k]$ con $I_{k+1} \subset I_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$;
- Due successioni reali $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ tali che $a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Entrambe le successioni sono monotone e limitate, pertanto sono convergenti, quindi:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b$$

Consideriamo ora la differenza: $b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$

Passando al limite membro a membro:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k - a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

Il primo membro è uguale a $b - a$ mentre il secondo è zero, da ciò segue che:

$$b - a = 0 \Rightarrow b = a.$$

Le due successioni di numeri reali $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ convergono allo stesso limite che chiamiamo a .

Adesso dobbiamo determinare una successione $\{a_{n_k}\}$ convergente.

Dall'intervallo $[a_0, b_0]$ scegliamo un elemento della successione $\{a_n\}$ che chiamiamo a_{n_0} .

Dall'intervallo $[a_1, b_1]$ scegliamo un ulteriore elemento della successione che chiamiamo a_{n_1} .

Al passo k -esimo, dall'intervallo $[a_k, b_k]$ prendiamo il termine a_{n_k} e costruiamo una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ i cui termini soddisfanno alla catena delle disuguaglianze:

$$a_k \leq a_{n_k} \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Per k che tende all'infinito per il teorema dei carabinieri si ha che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$$

Abbiamo quindi costruito una sottosuccessione convergente.

PUNTO INTERNO, ESTERNO, DI FRONTIERA

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice:

- i) PUNTO INTERNO a E se esiste un suo intorno $B_\varepsilon(x)$, $\varepsilon > 0$, contenuto in E ;
- ii) PUNTO ESTERNO a E se è punto interno a $\mathbb{R} \setminus E$;
- iii) PUNTO DI FRONTIERA per E se non è interno né esterno a E .

Egli insiemi:

- $\partial E = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ è punto di frontiera per } E\}$
- $\bar{E} = E \cup \partial E$
- $\overset{\circ}{E} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ è punto interno ad } E\}$

si dicono rispettivamente FRONTIERA di E , CHIUSURA di E ed INTERNO di E .

INSIEMI APERTI E CHIUSI

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice APERTO in $\mathbb{R}$ se $E = \overset{\circ}{E}$, cioè se ogni elemento di E è un punto interno ad E .

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice CHIUSO se $\mathbb{R} \setminus E$ è aperto.
L'insieme $\emptyset$ è aperto.

TEOREMA DI ESISTENZA MAX-MIN PER INSIEMI NON VUOTI, CHIUSI E LIMITATI

Se $E \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme non vuoto, chiuso e limitato. Allora esistono $\min E$ e $\max E$.

DIMOSTRAZIONE:

Proviamo l'esistenza del massimo.

Poiché E è non vuoto e limitato, $M := \sup E \in \mathbb{R}$.

Se $M \in E$ allora il massimo esiste e coincide con M .

Supponiamo per assurdo che $M \notin E$.

Per la costruzione dell'estremo superiore, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon \in (M - \varepsilon, M) \cap E = (M - \varepsilon, M) \setminus \mathbb{R} \setminus E$.

Perciò M non è interno a $\mathbb{R} \setminus E$, ovvero $\mathbb{R} \setminus E$ non è

aperto, ovvero E non è chiuso. Ciò contraddice le

ipotesi: perciò $M \in E$ e il Teorema è dimostrato.

□

LIMITE

Siano $x \in \mathbb{R}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^*$ un punto di accumulazione per X . Allora $l \in \mathbb{R}^*$ si dice LIMITE di $f(x)$ per x che tende a x_0 e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ oppure } f(x) \rightarrow l \text{ per } x \rightarrow x_0$$

se per ogni intorno V di l , $f(x) \in V$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$.

• Se $l \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \varepsilon > 0: x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta \varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

• Se $x_0 = +\infty$ e $l \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{R}: x \in X, x > m \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

• Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $l = -\infty$:

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists \delta m > 0: x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta m \Rightarrow f(x) < m$$

T) UNICITÀ DEL LIMITE

Se esistono:

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ e } l_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

allora l_1 e l_2 sono uguali.

DIMOSTRAZIONE)

Supponiamo per assurdo $l_1 \neq l_2$.

Per la proprietà di separazione degli intervalli, esistono due intervalli, V_1 di l_1 e V_2 di l_2 , che sono disgiunti:

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

Applicando la definizione di limite con tali intervalli, segue che esistono due intervalli di x_0 , U_1 e U_2 , tali che $f(x)$ appartiene sia a V_1 sia a V_2 se $x \in (U_1 \cap U_2) \cap \text{dom} f \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$.
Chiaramente questo non è possibile perché V_1 e V_2 sono disgiunti.

1) PERMANENZA DEL SEGNO

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ punto di accumulazione per X e $l \in \mathbb{R}^*$. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$ (< 0), allora:

$f(x) > 0$ (< 0) definitivamente per $x \rightarrow x_0$,
ovvero esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) > 0$ (< 0) per ogni $x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$.

PUNTO DI ACCUMULAZIONE DX, SX

x_0 si dice punto di accumulazione destro (sinistro) per X se x_0 è punto di accumulazione per $X \cap (x_0, +\infty)$ ($X \cap (-\infty, x_0)$).

LIMITE DX, SX

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione destro (sinistro) per X . Allora $l \in \mathbb{R}^*$ si dice

LIMITE DESTRO (SINISTRO) di $f(x)$ per x che tende a x_0 e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \right)$$

se la restrizione di f a $X \cap (x_0, +\infty)$ ($X \cap (-\infty, x_0)$) tende a l per $x \rightarrow x_0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f|_{X \cap (x_0, +\infty)} = l \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f|_{X \cap (-\infty, x_0)} = l \right)$$

ECCESSO O DIFETTO

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^*$ punto di accumulazione per X . Si dice che $f(x)$ tende a $l \in \mathbb{R}$ PER ECCESSO (PER DIFETTO) e si scrive:

$$f(x) \rightarrow l^+ \quad (l^-) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

se per ogni intorno V di l esiste un intorno U di x_0 tale che per ogni $x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) \in V \cap (l, +\infty)$ (rispettivamente $V \cap (-\infty, l)$).

I) ALGEBRA DEI LIMITI

Siano $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}^*$ è un punto di accumulazione per $\text{dom} f \cap \text{dom} g$ allora per $x \rightarrow x_0$:

- i) $cf(x) \rightarrow cl_1 \quad \forall c \in \mathbb{R};$
- ii) $f(x) + g(x) \rightarrow l_1 + l_2;$
- iii) $f(x) \cdot g(x) \rightarrow l_1 \cdot l_2;$
- iv) $1/g(x) \rightarrow 1/l_2 \quad (\text{se } l_2 \neq 0);$
- v) $f(x)/g(x) \rightarrow l_1/l_2 \quad (\text{se } l_2 \neq 0);$

II) TEOREMA DEL CONFRONTO

Siano f, g e R funzioni da X in $\mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^*$ un punto di accumulazione per X . Se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = l \in \mathbb{R}^*$$

e $f(x) \leq g(x) \leq R(x)$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$
allora anche $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$.

Dimostrazione:

Prendo qualsiasi intorno V di l , $f(x)$ e $R(x)$ appartengono a V definitivamente per $x \rightarrow x_0$. Ma essendo V un intervallo anche $g(x) \in V$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$, quindi $g(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow x_0$.

T) ESISTENZA DEL LIMITE PER FUNZIONI MONOTONE

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotona.

- I) Se $x_0 \in \mathbb{R}^*$ è punto di accumulazione destro per X e f è monotona crescente (decrecente) in X , allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{x \in X \cap (x_0, +\infty)} f \quad \left(\sup_{x \in X \cap (x_0, +\infty)} f \right)$$

- II) Se $x_0 \in \mathbb{R}^*$ è punto di accumulazione sinistro per X e f è monotona crescente (decrecente) in X , allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{x \in X \cap (-\infty, x_0)} f \quad \left(\inf_{x \in X \cap (-\infty, x_0)} f \right)$$

DIMOSTRAZIONE:

Consideriamo la II nel caso di una funzione crescente. Posto $l = \sup_{x \in X \cap (-\infty, x_0)} f$ esaminiamo prima

il caso $l \in \mathbb{R}$. Per la proprietà dell'estremo superiore, $f \leq l$ in $X \cap (-\infty, x_0)$ e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $x_\varepsilon \in X \cap (-\infty, x_0)$ tale che $l - \varepsilon < f(x_\varepsilon)$.

Per la monotonia di f si ha $l - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq l$ per ogni $x \in X \cap (x_\varepsilon, x_0)$, quindi $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$.

Analogamente se $l = +\infty$, f non è limitata superiormente in $X \cap (-\infty, x_0)$ e per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $x_M \in X \cap (-\infty, x_0)$ tale che $f(x_M) > M$. La monotonia di f impedisce che $f(x) \leq f(x_M) > M$ per ogni $x \in X \cap (x_M, x_0)$ da cui $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$.

7) LIMITE DI FUNZIONE COMPOSTA

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: Y \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f(x) \in Y$. Siano $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ed $l \in \mathbb{R}^*$ punti di accumulazione per X e Y , rispettivamente. Se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \lim_{y \rightarrow l} g(y) = k$$

e $f(x) \neq l$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$ allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = k.$$

DIMOSTRAZIONE:

Sia W un generico intorno di k .

Esiste un intorno V di l , tale che $g(y) \in W$ per ogni $y \in V \cap Y \setminus \{l\} =: V'$.

Quindi $f(x) \in V \cap Y$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$ e $f(x) \neq l$, ovvero $f(x) \in V'$. Quindi $g(f(x)) \in W$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$. Se inoltre $l \in Y$ e $g(l) = k$, allora è immediato che $g(y) \in W$ per ogni $y \in V \cap Y$ e che $f(x) \in V \cap Y$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$, quindi $g(f(x)) \in W$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$.

FUNZIONI INFINITESIME E INFINITE

Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per X .

i) Se $f(x) \rightarrow +\infty$ oppure $f(x) \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow x_0$ (con $x_0 \in \mathbb{R}^*$)

si dice che f è DIVERGENTE oppure che f è INFINITA (o un INFINITO) per $x \rightarrow x_0$.

ii) Se $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$ (con $x_0 \in \mathbb{R}^*$), si dice che f è INFINITESIMA (o è un INFINITESIMO) per $x \rightarrow x_0$; si scrive anche:

$$f(x) = o(1) \text{ per } x \rightarrow x_0.$$

ALGEBRA DEGLI $O(1)$

i) $l \cdot o(1) = o(1)$ per ogni $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

ii) $o(1) \cdot o(1) = o(1)$

iii) $o(1) \pm o(1) = o(1)$

LIMITI NOTEVOLI DI FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

T)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ovvero: $\sin x = x (1 + o(1))$ per $x \rightarrow 0$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

SUCCESIONI A VALORI IN $\mathbb{R}$

Sia $\{a_n\}$ una successione a valori in $\mathbb{R}$.

- i) se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$, la successione $\{a_n\}$ si dice **CONVERGENTE**
- ii) se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \pm\infty$, la successione si dice **DIVERGENTE**
- iii) se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ non esiste in $\mathbb{R}^*$, la successione si dice **IRREGOLARE**.

1) LIMITE E SUCCESIONI

Sia $\{a_n\}$ una successione a valori in $\mathbb{R}$. Allora:

- 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - l| < \varepsilon, \forall n \geq N$
- 2a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} : a_n > M, \forall n \geq N$
- 2b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} : a_n < M, \forall n \geq N$

3) **PERMANENZA DEL SEGNO**: Se $a_n \rightarrow l > 0$ allora $a_n > 0$ definitivamente per $n \rightarrow +\infty$

4) **UNA SUCCESIONE CONVERGENTE È LIMITATA**

5) **CONFRONTO**: Se $a_n \rightarrow l$, $c_n \rightarrow l$ e $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente per $n \rightarrow +\infty$, allora $b_n \rightarrow l$ per $n \rightarrow +\infty$

6) **SUCCESIONI (DEFINITIVAMENTE) MONOTONE**:

$\{a_n\}$ è definitivamente crescente (decrescente) se e solo se esiste $m_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \leq (\geq) a_{n+1}$ per ogni $n \geq m_0$.

$\{a_n\}$ è crescente (decrescente) se e solo se $a_n \leq (\geq) a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

7) **LIMITI DI SUCCESIONI DEFINITIVAMENTE MONOTONE**:

Una successione definitivamente crescente (decrescente) $\{a_n\}$ ammette limite $l \in \mathbb{R}^*$. Tale limite è finito se e solo se $\{a_n\}$ è anche limitata, altrimenti $l = +\infty$ (rispettivamente $l = -\infty$)

7a) **UNA SUCCESIONE MONOTONA E LIMITATA È CONVERGENTE**.

DIMOSTRAZIONE 4:

Per provare per induzione $\varepsilon = 1$ nella definizione di limite si ottiene che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che:

$$|a_m| \leq M_0 := |l| + 1 \quad \forall m > N.$$

Posto $M_1 := \max \{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_N|\}$

(si osserva che M_1 esiste essendo il massimo di un sottoinsieme finito di $\mathbb{R}$), risulta:

$$|a_m| \leq M_1 \quad \text{se } 0 \leq m \leq N$$

e quindi $|a_m| \leq M := \max \{M_0, M_1\} \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

SOTTOSUCCESSIONE

Una successione $\{b_m\}$ si dice SOTTOSUCCESSIONE della successione $\{a_m\}$ se esiste una successione strettamente crescente $\{k_m\}$ a valori in $\mathbb{N}$ tale che:

$$b_m = a_{k_m} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

LIMITE DI SUCCESSIONE

Una successione ha limite $l \in \mathbb{R}^*$ se e solo se ogni sua sottosuccessione ha limite l .

1) DIMOSTRAZIONE:

Supponiamo che $\{a_m\}$ converga a l , cioè:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}: |a_m - l| < \varepsilon, \quad \forall m > N$$

Sia $\{a_{k_m}\}$ una sottosuccessione di $\{a_m\}$

Dalla definizione di sottosuccessione segue che $k_m \geq m$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

allora se $m > N$, $k_m > N$ e in definitiva

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}: |a_{k_m} - l| < \varepsilon, \quad \forall m > N$$

Dimostrare anche la sottosuccessione converge a l .

1) SUCCESSIONE CONVERGENTE

una successione limitata a valori in $\mathbb{R}$ ha una sottosuccessione convergente.

DIMOSTRAZIONE:

Vedi Teorema Bolzano-Weierstrass.

SUCCESSIONE DI CAUCHY

Una successione $\{a_n\}$ a valori reali si dice FONDAMENTALE o di CAUCHY se:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $|a_m - a_n| < \varepsilon$

per ogni $n, m \geq N$.

Una successione di Cauchy è limitata e convergente.

1) CRITERIO DI CAUCHY

Una successione a valori reali è convergente se e solo se è fondamentale.

DIMOSTRAZIONE:

Per ipotesi sappiamo che la successione è di Cauchy e di conseguenza è limitata.

Per il Teorema di Bolzano Weierstrass la successione ammette una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ convergente.

Chiamiamo $x = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ pertanto:

$\forall \varepsilon$ troveremo e determineremo un numero intero positivo N tale che $|a_{n_k} - x| < \varepsilon, \forall k \geq N$.

Per definizione di successione di Cauchy, troveremo e determineremo $N_1 \in \mathbb{N}$ per il quale si ha che $|a_m - a_n| < \varepsilon, \forall m, n \geq N_1$.

Il nostro obiettivo è dimostrare che la successione madre $\{a_n\}$ converge anch'essa ad x .

Consideriamo quindi la quantità:

$$|a_m - x| = |a_m - a_{n_k} + a_{n_k} - x|$$

Interviene ora la disuguaglianza triangolare:

$$|a_m - a_{n_k} + a_{n_k} - x| \leq |a_m - a_{n_k}| + |a_{n_k} - x|$$

Ora per $m, k \geq \max(N, N_1)$

$$|a_m - a_{n_k}| + |a_{n_k} - x| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

e questo conclude la dimostrazione.

SERIE NUMERICA

Una SERIE NUMERICA è la somma formale degli elementi di una successione numerica $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Per indicare una serie si usa la notazione:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{dove } a_k \text{ prende il nome di} \\ \text{TERMINI della serie.}$$

SERIE CONVERGENTE E SERIE DIVERGENTE

Sia $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione a valori in $\mathbb{R}$. Si dice che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è (semplicemente) CONVERGENTE se la successione $\{s_m\}$ delle somme parziali è convergente.

In tal caso il limite di $\{s_m\}$ si dice somma della serie:

$$s := \lim_{m \rightarrow +\infty} s_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m a_k$$

e si scrive:
$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Si dice che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è DIVERGENTE (IRREGOLARE) se è tale la successione delle sue somme parziali $\{s_m\}$.

7) CONVERGENZA DI UNA SERIE

Sia $\{a_k\}$ una successione reale. Allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ è convergente} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$$

DIMOSTRAZIONE:

Essendo la serie convergente con somma $s \in \mathbb{R}$, per definizione la successione delle somme ridotte converge a s : $s_m \rightarrow s \in \mathbb{R}$ per $m \rightarrow +\infty$.

Quindi $a_m = s_m - s_{m-1}$ per ogni $m \geq 0$, e quindi:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} a_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} (s_m - s_{m-1}) = s - s = 0$$

SERIE NUMERICHE A TERMINI POSITIVI

Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_k$ si dice a termini positivi, se $a_k \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Si parla di serie a termini definitivamente positivi se $a_k \geq 0$ definitivamente per $k \rightarrow +\infty$.

1) REGOLARITÀ DELLE SERIE A TERMINI POSITIVI

Sia $a_k \geq 0$ definitivamente per $k \rightarrow +\infty$. Allora:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è convergente oppure $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è divergente a $+\infty$.

DIMOSTRAZIONE:

Il Teorema è conseguenza immediata del criterio di convergenza per le successioni monotone.

Infatti la successione delle somme n-esime di una serie a termini positivi è non decrescente.

Quindi, se tale successione è limitata superiormente, allora converge (basta applicare la proprietà del sup).

Se non è limitata superiormente allora diverge.

2) TEOREMA DEL CONFRONTO PER SERIE A TERMINI POSITIVI

Siano $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ due successioni reali tali che:

$0 \leq a_k \leq b_k$ definitivamente per $k \rightarrow +\infty$.

Allora:

$\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ è convergente $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è convergente

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k = +\infty$

Se $0 \leq a_k \leq b_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$

DIMOSTRAZIONE:

Basta considerare il caso $0 \leq a_k \leq b_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Supponiamo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sia convergente.

La successione delle sue somme parziali è limitata, quindi lo sarà anche la successione delle somme parziali corrispondenti a a_k .

Di conseguenza risulta convergente anche a_k . (23)

IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Siano $a_k \geq 0$ e $b_k \geq 0$ definitivamente per $k \rightarrow +\infty$.

Se $a_k = b_k (1 + o(1))$ per $k \rightarrow +\infty$,

allora la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ hanno lo stesso comportamento.

DIMOSTRAZIONE:

Si può scegliere $\varepsilon > 0$ tale che $l - \varepsilon > 0$. Applicando la definizione di limite, esisterà $\bar{K}$ tale che per $k > \bar{K}$,

$$\left| \frac{a_k}{b_k} - l \right| \leq \varepsilon \quad \text{ovvero} \quad (l - \varepsilon)b_k \leq a_k \leq (l + \varepsilon)b_k.$$

Applicando il criterio del confronto si ha che se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, allora converge anche $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, mentre se $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, diverge anche $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

nel caso in cui $l = 0$ diventa: $a_k \leq \varepsilon b_k$.

Quindi se $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, converge anche $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, mentre se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge, diverge anche $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

II) CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia $\{a_k\}$ una successione reale tale che $a_k > 0$ definitivamente per $k \rightarrow +\infty$.

I) se esiste $r \in (0, 1)$ tale che: $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq r$ definitivamente per $k \rightarrow +\infty$ allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ CONVERGE.

II) Se $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ definitivamente per $k \rightarrow +\infty$ allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$.

DIMOSTRAZIONE:

I) Se $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq r \quad \forall k \geq k_0$ allora $a_k \leq a_{k-1}r \leq \dots \leq a_{k_0}r^{k-k_0}$;

quindi per il criterio del confronto e per la convergenza della serie geometrica $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_{k_0} r^{k-k_0}$ se $0 < r < 1$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

II) In questo caso, definitivamente per $k \rightarrow +\infty$, si ha che $a_{k+1} \geq a_k$, ovvero la successione $\{a_k\}$ è crescente; perciò $\{a_k\}$ non può tendere a zero e la condizione necessaria implica che la serie converga a $+\infty$.

Se $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = l$, allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \begin{cases} \text{CONVERGE} & l < 1 \\ \text{DIVERGE} & l \geq 1 \end{cases}$

T) CRITERIO DELLA RADICE

Sia $\{a_k\}$ una successione a termini definitivamente non negativi per $k \rightarrow +\infty$.

i) Se esiste $r \in (0, 1)$ tale che: $\sqrt[k]{a_k} \leq r$ definitivamente per $k \rightarrow +\infty$
la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

ii) Se $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ per infiniti valori di k
allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$.

DIMOSTRAZIONE:

La disuguaglianza $\sqrt[k]{a_k} \leq r$ implica $a_k \leq r^k$
quindi la I segue dal confronto con la serie geometrica.

Per quanto riguarda la II osserviamo che se $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ anche $a_k \geq 1$, quindi a_k non tende a zero per $k \rightarrow +\infty$.

se $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{a_k} = l$, allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \begin{cases} \text{CONVERGE} & l < 1 \\ \text{DIVERGE} & l > 1 \end{cases}$

SERIE A TERMINI DI SEGNO VARIABILE

CONVERGENZA ASSOLUTA

La serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ si dice ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE se $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ è (semplicemente) convergente.

T) CRITERIO DI CONVERGENZA ASSOLUTA

Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è assolutamente convergente, allora è anche semplicemente convergente e risulta:

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

1) CRITERIO DI LEIBNIZ

Sia $\{a_k\}$ una successione tale che:

i) $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$

ii) $\{a_k\}$ è definitivamente non negativa e decrescente per $k \rightarrow +\infty$, ovvero esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che:

$$0 \leq a_{k+1} \leq a_k \quad \forall k \geq k_0.$$

Allora la serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

è semplicemente convergente e, se $2m > k_0$, le somme parziali S_{2m} (rispettivamente S_{2m+1}) approssimano la somma $S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ per eccesso (rispettivamente per difetto); inoltre l'errore che si commette approssimando S con S_m è, in valore assoluto, maggiorato del modulo del primo termine omissso, a_{m+1} :

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^m (-1)^k a_k \right| \leq a_{m+1} \quad \text{per ogni } m \geq k_0.$$

DIMOSTRAZIONE:

Consideriamo il caso in cui $\{a_k\}$ sia una successione decrescente e convergente a 0: $0 \leq a_{k+1} \leq a_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$$

Considerando le somme parziali S_m si trova:

$$S_0 = a_0$$

$$S_1 = a_0 - a_1 \leq S_0 \quad (\text{perché } a_1 \geq 0)$$

$$S_2 = \begin{cases} S_1 + a_2 \geq S_1 & (\text{perché } a_2 \geq 0) \\ S_0 - (a_1 - a_2) \leq S_0 & (\text{perché } a_2 \leq a_1) \end{cases}$$

$$S_3 = \begin{cases} S_2 - a_3 \leq S_2 & (\text{perché } a_3 \geq 0) \\ S_1 + (a_2 - a_3) \geq S_1 & (\text{perché } a_3 \leq a_2) \end{cases}$$

e così via. Perciò: $S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \dots \leq S_4 \leq S_2 \leq S_0$

ovvero le successioni $\{S_1, S_3, S_5, \dots\}$ e $\{S_2, S_4, S_6, \dots\}$ sono monotone e limitate quindi convergono con limiti s e S .

Perché $a_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$

$$S - s = \lim_{m \rightarrow +\infty} (S_{2m} - S_{2m-1}) = \lim_{m \rightarrow +\infty} a_{2m} = 0$$

quindi $S = s$ e la serie è convergente. Inoltre l'errore commesso equivale a: $|S_m - S| \leq a_{m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

1) TEOREMA "PONTE"

Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per X . Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^*$$

se e solo se per ogni successione $\{a_n\}$ a valori in $X \setminus \{x_0\}$ e convergente a x_0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = l \in \mathbb{R}^*$$

DIMOSTRAZIONE

1 $\Rightarrow$ 2

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e quindi esiste un $\delta > 0$ tale che:

$$x \in X: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Consideriamo la successione:

$\{a_n\} \subset X$ tale che per ipotesi $a_n \rightarrow x_0$.

Per definizione di limite di successione si ha che:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - x_0| < \varepsilon_1, \forall n \geq N$$

Se prendiamo $\varepsilon_1 < \delta$ allora:

$$|a_n - x_0| < \varepsilon_1 < \delta$$

ma questo implica che

$$|f(a_n) - l| < \varepsilon$$

E quindi è dimostrato.

2 $\Rightarrow$ 1

Supponiamo per assurdo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq l$

allora negando la definizione di limite anteriori:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \varepsilon_1 > 0 : x \in X : \underbrace{0 < |x - x_0| < \varepsilon_1}_{1.1} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - l| \geq \varepsilon}_{1.2}$$

Scegliamo $\delta = 1/n$ e in corrispondenza di tale δ

troviamo $a_n = x$ che soddisgna le condizioni 1.1 e 1.2.

$$\text{allora si ha: } 0 < |a_n - x_0| < \frac{1}{n}$$

$$\text{e } |f(a_n) - l| \geq \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \neq l$$

aviamo dunque raggiunto la negazione di un'ipotesi e quindi è assurdo.

Il Teorema è dimostrato.

INSIEMI COMPATTI

$K \subseteq \mathbb{R}$ si dice COMPATTO PER SUCCESSIONI o SEQUENZIALMENTE COMPATTO se ogni successione a valori in K ha una sottosuccessione convergente a un elemento di K .

1) CARATTERIZZAZIONE DEGLI INSIEMI COMPATTI

Sia $K \subseteq \mathbb{R}$. Allora:

K è compatto $\Leftrightarrow K$ è chiuso e limitato

FUNZIONE CONTINUA

Sia $f: \mathbb{R} \supset X \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X$. Se x_0 è un punto isolato di X , f si dice CONTINUA in x_0 .

Se x_0 è un punto di accumulazione per X , f si dice CONTINUA in x_0 se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

CONTINUITÀ DA DESTRA E DA SINISTRA

Una funzione si dice CONTINUA DA DESTRA (DA SINISTRA) in un punto $x_0 \in \text{dom } f$ di accumulazione destro (sinistro) per x_0 se si ha il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \right)$$

f è continua in $x_0 \Leftrightarrow f$ è continua da dx e da sx in x_0 .

T)

Se $f: \mathbb{R} \supset X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in X$ e $f(x_0) > 0$ (< 0), allora esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) > 0$ (< 0) per ogni $x \in U \cap X$.

T)

Siano $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$. Se f è continua in $x_0 \in X$ e g è continua in $f(x_0) \in Y$, allora la funzione composta $g \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in x_0 .

PUNTI DI DISCONTINUITÀ

Siano $f: \mathbb{R} \supset X \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$. Se f non è continua in x_0 , x_0 si dice PUNTO DI DISCONTINUITÀ di f e in tal caso si dice che:

I) f ha una DISCONTINUITÀ ELIMINABILE in x_0 se esiste

$$\text{limite } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \text{ ma } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

II) f ha una DISCONTINUITÀ DI PRIMA SPECIE o DI SACCÒ se in x_0 esistono limiti $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ma sono diversi.

III) f ha una DISCONTINUITÀ DI SECONDA SPECIE negli altri casi.

1) DISCONTINUITÀ DELLE FUNZIONI MONOTONE

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ monotona in I . Allora f può avere punti di discontinuità solo di prima specie (o eliminabili, e sono gli estremi dell'intervallo).

DIMOSTRAZIONE:

Per l'esistenza di limiti di funzioni monotone, per ogni punto interno x_0 di I esistono finite il limite destro e il limite sinistro di f per $x \rightarrow x_0$. Se coincidono f è continua in x_0 , e invece sono diversi, f ha una discontinuità di prima specie. Nel caso in cui f sia definita in un estremo di I , per esempio nell'estremo destro b , allora esiste finito $l = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$. Se $l = f(b)$ la funzione è continua in b , altrimenti ha una discontinuità eliminabile in b .

1) TEOREMA DEGLI ZERI

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e sia $f(a) \cdot f(b) < 0$ (ovvero $f(a)$ e $f(b)$ non sono nulli e hanno segno opposto). Allora f ammette almeno uno zero in (a, b) : esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.

c)

Siano $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue in $[a, b]$ tali che:

$$f(a) > g(a) \text{ e } f(b) < g(b)$$

oppure

$$f(a) < g(a) \text{ e } f(b) > g(b).$$

Allora esiste almeno una soluzione $y \in (a, b)$ dell'equazione $f(x) = g(x)$.

1) TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo (non necessariamente chiuso e limitato) e sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua in I . Allora f assume in I tutti i valori compresi tra $\sup_I f$ ($\leq +\infty$) e $\inf_I f$ ($\geq -\infty$), ovvero:

$$\forall y \in (\inf_I f, \sup_I f) \exists x \in I : f(x) = y.$$

DIMOSTRAZIONE:

Sia $\inf_I f < y < \sup_I f$. Per la definizione di supremo e inferiore esistono $a, b \in I$ tali che $f(a) < y < f(b)$. Ora il teorema segue dal teorema degli zeri applicato alla funzione $g(x) = y - f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$ (se $a < b$) o $[b, a]$ (se $a > b$).

c)

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua in I . Allora l'immagine $f(I)$ è un intervallo.

MONOTONIA E INVERTIBILITÀ

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua e invertibile in I . Allora f è strettamente monotona in I .

DIMOSTRAZIONE:

Supponiamo per assurdo che f non sia monotona in I , cioè che esistono $x, y, z \in I$ tali che $x < y < z$ e $f(x) > f(y) > f(z)$.

Per la generalizzazione del teorema degli zeri, applicato all'intervallo (y, z) , esiste $x_0 \in (y, z)$ tale che $f(x_0) = f(x)$. Ma allora f non è iniettiva, una contraddizione.

Se f è continua e definita in un intervallo, allora:

$$\text{INVERTIBILITÀ DI } f \Leftrightarrow \text{STRETTA MONOTONIA DI } f$$

T) CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE INVERSA

Sia $X \subset \mathbb{R}$, sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua e invertibile in X e sia $f^{-1}: f(X) \rightarrow \mathbb{R}$ l'inversa di f in X .

Se X è un INTERVALLO oppure X è un insieme COMPATTO allora f^{-1} è continua nel suo dominio $f(X)$.

T) TEOREMA DI WEIERSTRASS PER INTERVALLI CHIUSI E LIMITATI

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$. Allora:

i) esistono $M := \max_{[a, b]} f$ e $m := \min_{[a, b]} f$;

ii) $f([a, b]) = [m, M]$

T) TEOREMA DI WEIERSTRASS PER INSIEMI COMPATTI

Sia $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ continua in K compatto. Allora $f(K)$ è compatto; in particolare esistono $\max_K f$ e $\min_K f$.

DIMOSTRAZIONE:

Consideriamo una qualunque successione $\{x_n\}$ a valori in $f(K)$. Sia $x_n \in K$ tale che $f(x_n) = y_n$.

Allora $\{x_n\}$ è una successione a valori nell'insieme compatto K , quindi esiste una sottosuccessione $\{x_{k_m}\}$ convergente ad $x \in K$. Essendo f continua in x ,

$y_{k_m} = f(x_{k_m}) \rightarrow f(x) \in f(K)$ per $m \rightarrow +\infty$. Abbiamo quindi trovato una sottosuccessione di $\{y_n\}$

convergente ad un elemento $f(x)$ di $f(K)$. Per l'arbitrarietà della successione $\{y_n\}$, e l'insieme $f(K)$ è compatto.

Poiché $f(K)$ è compatto, è chiuso e limitato.

Quindi esistono massimo e minimo.

FUNZIONE UNIFORMEMENTE CONTINUA

Una funzione $f: \mathbb{R} \supset X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice UNIFORMEMENTE CONTINUA in X se:

per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che:

$$x, y \in X, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

RETTA TANGENTE NON VERTICALE

Siano I un intervallo, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ e $m \in \mathbb{R}$.

La retta di equazione $y = f(x_0) + m(x - x_0)$ si dice RETTA TANGENTE non verticale al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ se:

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

DERIVATA

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. La f si dice DERIVABILE in $x_0 \in I$ se esiste finito il limite:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

In tal caso $f'(x_0)$ si dice DERIVATA di f in x_0 .

1) CARATTERIZZAZIONE DELLA DERIVATA

Siano I un intervallo, $x_0 \in I$ e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Allora f è derivabile in x_0 se e solo se esiste la retta tangente non verticale al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$. In tal caso $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente, la cui equazione è quindi:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

1) SEGNO DELLA DERIVATA NEI PUNTI DI CRESCITA E DEC.

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile in $x_0 \in (a, b)$ con $f'(x_0) \neq 0$ allora:

$$f(x) - f(x_0) \begin{cases} > 0 & \text{se } x > x_0 \\ < 0 & \text{se } x < x_0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{definitivamente per } x \rightarrow x_0 \\ \text{se } f'(x_0) > 0 \end{array}$$

$$f(x) - f(x_0) \begin{cases} < 0 & \text{se } x > x_0 \\ > 0 & \text{se } x < x_0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{definitivamente per } x \rightarrow x_0 \\ \text{se } f'(x_0) < 0 \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE

La seconda osservazione segue dalla prima scambiando f con $-f$ e possiamo quindi supporre che $f'(x_0) > 0$.

Osserviamo che:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

$$\text{ci ha: } (f(x) - f(x_0))(x - x_0) = f'(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

$$\geq \frac{1}{2} f'(x_0)(x - x_0)^2 > 0 \quad \text{definitivamente per } x \rightarrow x_0$$

e ciò coincide con la tesi

33

1) DERIVABILITA' E CONTINUITA'

Siano I un intervallo, $x_0 \in I$ e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0 .

Dimostrazione:

Se f è derivabile in x_0 segue da:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) = f(x_0).$$

DERIVATA IN UN INTERVALLO

Sia $f: \mathbb{R} \ni \text{dom } f \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $X \subseteq \text{dom } f$ tale che $\forall x \in X$ appartiene a un intervallo contenuto in $\text{dom } f$. La f si dice DERIVABILE in X se è derivabile in ogni $x \in X$.

RETTA TANGENTE VERTICALE

Siano I un intervallo, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. La retta di equazione $x = x_0$ si dice RETTA TANGENTE verticale al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ se f è continua in x_0 e:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \text{ oppure } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty.$$

DERIVATA DESTRA E SINISTRA

Siano I un intervallo, $x_0 \in I$ e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Se esiste finito il limite:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

allora $f'_+(x_0)$ si dice DERIVATA DESTRA di f in x_0 .

Analogamente, se esiste finito il limite

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

allora $f'_-(x_0)$ si dice DERIVATA SINISTRA di f in x_0 .

PUNTO ANGOLOSO E DI CUSPIDE

Siano I un intervallo e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Se f è continua in x_0 esistono $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ e
$$f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$$

allora:

- i) se almeno uno dei due esiste finito, il punto $(x_0, f(x_0))$ si dice **PUNTO ANGOLOSO** del grafico di f ;
- ii) se $f'_+(x_0) = +\infty$ e $f'_-(x_0) = -\infty$, o viceversa, il punto $(x_0, f(x_0))$ si dice di **CUSPIDE**.

1) ALGEBRA DELLE DERIVATE

Siano I un intervallo, $x_0 \in I$ e $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$. Se f e g sono derivabili in x_0 , anche la funzione αf ($\forall \alpha \in \mathbb{R}$), $f+g$, $f-g$, fg , f/g ($g(x_0) \neq 0$) sono derivabili in x_0 e si ha:

$$(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0); \quad (f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0).$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

1) DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

Siano I, J intervalli, $f: J \rightarrow \mathbb{R}$, $g: I \rightarrow J$ e $x_0 \in I$.

Se g è derivabile in x_0 e f è derivabile in $g(x_0)$ allora la funzione composta $f \circ g$ è derivabile in x_0 , e:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

1) DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

Siano I un intervallo, $x_0 \in I$ e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua e strettamente monotona in I . Se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$, allora l'inversa f^{-1} di f è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{dove } y_0 = f(x_0)$$

T) TEOREMA DI FERMAT

Siano $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Se f è derivabile in x_0 e se f ha un estremo locale in x_0 , allora $f'(x_0) = 0$.

DIMOSTRAZIONE:

Se f ha un estremo locale in x_0 , allora $f(x) - f(x_0)$ ha segno costante in un intorno di x_0 , e ciò può accadere solo se $f'(x_0) = 0$.

PUNTO STAZIONARIO

Un punto x_0 si dice PUNTO CRITICO o STAZIONARIO di f se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 0$.

C) POSSIBILI PUNTI DI ESTREMO LOCALE

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 un punto di estremo locale di f in I . Allora x_0 verifica una delle seguenti condizioni:

- i) x_0 è un punto critico interno a I ;
- ii) x_0 è un estremo dell'intervallo;
- iii) f non è derivabile in x_0 ;

T) TEOREMA DEL VALOR MEDIO O DI LAGRANGE

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Allora esiste (almeno) un punto $c \in (a, b)$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

DIMOSTRAZIONE:

Consideriamo la funzione $R(x) = f(x) - Kx$.

Per ipotesi del teorema la funzione è continua in $[a, b]$ e derivabile poiché somma di funzioni continue e derivabili.

Determiniamo K in modo che $R(a) = R(b)$:

$$f(a) - Ka = f(b) - Kb$$

$$-Ka + Kb = f(b) - f(a)$$

$$K(-a + b) = f(b) - f(a)$$

$$K = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La funzione ausiliaria quindi:

$$R(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot x$$

Utilizzando questo valore di K possiamo applicare il teorema di Rolle su $R(x)$, affermando che esiste un punto c per il quale $R'(c) = 0$.

Per le regole del calcolo della derivata, $R'(x)$ risulta:

$$R'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

adesso si sostituisce ad x il punto c , per il quale la derivata è zero:

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$\Downarrow$$
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \quad \text{che è quello che volevamo dimostrare.}$$

1) TEOREMA DI ROLLE

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) , e tale che $f(a) = f(b)$.

Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

DIMOSTRAZIONE:

Poiché f è continua in $[a, b]$ chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass esistono $\max_{[a,b]} f$ e $\min_{[a,b]} f$. Sono possibili due casi:

1) $\max f = \min f = f(a) = f(b)$, ovvero sia il massimo che il minimo sono assunti agli estremi.

Quindi f è costante in $[a, b]$ e $f'(c) = 0$ per ogni $c \in (a, b)$.

2) $\max f > f(a) = f(b)$ oppure $\min f < f(a) = f(b)$ ovvero il massimo oppure il minimo sono assunti all'interno. Quindi f ha un punto di estremo in qualche punto $c \in (a, b)$ e per il teorema di Fermat risulta, $f'(c) = 0$.

1) TEOREMA DI CAUCHY

Siano $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b) . Allora esiste $c \in (a, b)$, tale che:

$$(g(b) - g(a))g'(c) = (g(b) - g(a))g'(c).$$

1) MONOTONIA E DERIVATA

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile in (a, b) . Allora:

- $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ è crescente in (a, b) ;
- $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ è decrescente in (a, b) ;
- $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ è strettamente crescente in (a, b) ;
- $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ è strettamente decrescente in (a, b) ;

DIMOSTRAZIONE:

iii) ($f'(x) > 0$)

Siano $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$; per il Teorema del valore medio si ha che $\exists x \in (x_1, x_2): f(x_2) - f(x_1) = f'(x)(x_2 - x_1) > 0$.

1) TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

Siano $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili in (a, b) e $l \in \mathbb{R}^+$. Supponiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0 \text{ oppure } +\infty \text{ oppure } -\infty$$

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

Allora $f(x) \neq 0$ definitivamente per $x \rightarrow a^+$ e

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Risultati analoghi valgono per $x \rightarrow b^-$ e per $x \rightarrow x_0 \in (a, b)$.

DIMOSTRAZIONE:

Dimostreremo il teorema nel caso in cui:

$$1) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$$

Preliminarmente osserviamo che g non si annulla in (a, b) . Poiché g ha limite 0, è sufficiente provare che g è strettamente monotona, ovvero che è iniettiva, in (a, b) . Se così non fosse, esisterebbero $x_1, x_2 \in (a, b)$ tali che $g(x_1) = g(x_2)$: per il teorema di Rolle, questo implicherebbe che $g' = 0$ in un punto intermedio, in contraddizione con l'ipotesi.

1) Consideriamo prima il caso $a = -\infty$. Possiamo rideterminare f e g in a in accordo con I , ponendo $f(a) = g(a) = 0$. In tal modo f e g risultano continue in $[a, b)$ e per $\forall x \in (a, b)$ possiamo applicare il teorema di Cauchy nell'intervallo $[a, x]$: esiste $c(x) \in (a, x)$ tale che:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$$

Poiché $c(x) \rightarrow a^+$ per $x \rightarrow a^+$, passando al limite per $x \rightarrow a^+$ otteniamo la tesi.

2) Se invece $a = -\infty$, poniamo $y = -1/x$ e definiamo due nuove funzioni:

$$\hat{f}(y) = f(-1/y), \quad \hat{g}(y) = g(-1/y), \quad y \in (0, y_0)$$

dove $(0, y_0)$ è un opportuno intorno destro di 0;

Per il teorema della derivata di una funzione composta:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d}{dy} \hat{f}(y)}{\frac{d}{dy} \hat{g}(y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{y^2} g'(-\frac{1}{y})}{\frac{1}{y^2} g'(-\frac{1}{y})} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{g'(-\frac{1}{y})}{g'(-\frac{1}{y})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

È immediato verificare che $\hat{f}$ e $\hat{g}$ soddisfanno anche le altre ipotesi del teorema. Ci siamo appena

ridotti al caso 1, che abbiamo appena dimostrato

quindi: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\hat{f}(y)}{\hat{g}(y)} = l$ e tornando alla variabile x si ottiene il risultato.

T) DERIVATA AGLI ESTREMI DI UNA FUNZIONE X

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) .

Se esiste (in $\mathbb{R}^*$):

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) \quad (\text{rispettivamente } \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x))$$

allora:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) \quad (\text{rispettivamente } f'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x))$$

DERIVATE SUCCESSIVE

Sia f una funzione la cui derivata n -esima $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, è definita in un insieme X "composto da intervalli".

Se $f^{(n)}$ è derivabile in $x \in X$, la sua derivata si dice DERIVATA $(n+1)$ -ESIMA di f in x , o derivata di ordine $n+1$ in x , e si scrive:

$$f^{(n+1)}(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x+h) - f^{(n)}(x)}{h}$$

FUNZIONI CONVESSE E CONCAVE

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, si dice CONVESSA (CONCAVA) in I se per $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, il segmento di estremi $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ non ha punti sotto (rispettivamente sopra) il grafico di f .

Se inoltre, il segmento non ha punti in comune con il grafico di f tranne i suoi estremi $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, la f si dice STRETTAMENTE CONVESSA (STRETTAMENTE CONCAVA) in I .

1) CONVESSITÀ E PENDENZA

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, allora f è (strettamente) convessa in (a, b) se e solo se per ogni $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$:

$$\underset{(L)}{P(x_2, x_1)} \leq \underset{(L)}{P(x_3, x_1)} \leq \underset{(L)}{P(x_3, x_2)}$$

dove P indica il rapporto incrementale (o pendenza) di f :

$$P(x, y) := \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad \forall x \neq y$$

T) PROPRIETÀ DELLA CONVESSITÀ

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (strettamente) convessa in (a, b) .

Allora:

- i) $\forall x \in (a, b)$ esistono limiti $f'_+(x)$ e $f'_-(x)$;
- ii) $f'_+(x) \geq f'_-(x) \quad \forall x \in (a, b)$;
- iii) le funzioni f'_+ e f'_- sono (strettamente) crescenti in (a, b) ;
- iv) f è continua in (a, b) ;

T) DERIVABILITÀ E CONVESSITÀ

Se f è derivabile in (a, b) , le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- a) f è (strettamente) convessa in (a, b) ;
- b) f' è (strettamente) crescente in (a, b) ;
- c) $\forall x_0 \in (a, b)$ si ha:

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in (a, b), x \neq x_0$$

T) DERIVATA SECONDA E CONVESSITÀ

Se f è due volte derivabile in (a, b) :

$$f \text{ è convessa in } (a, b) \Leftrightarrow f'' \geq 0 \text{ in } (a, b)$$

e

$$f'' > 0 \text{ in } (a, b) \Rightarrow f \text{ è strettamente convessa in } (a, b).$$

PUNTI DI FLESSO

Siano $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ ed esista la retta tangente (eventualmente verticale) al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$. Il punto x_0 si dice PUNTO DI FLESSO per f se esiste un intorno destro di x_0 in cui f è convessa (cave) e un intorno sinistro di x_0 in cui f è concava (convex).

Se $f'(x_0) = +\infty$ oppure $-\infty$, si parla di PUNTO DI FLESSO A TANGENTE VERTICALE.

T) DERIVATA SECONDA E PUNTI DI FLESSO

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$ un punto di flesso per f . Se f è due volte derivabile in x_0 allora $f''(x_0) = 0$.

POLINOMIO DI TAYLOR

Sia f , n volte derivabile in x_0 . Il polinomio:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

si dice Polinomio di Taylor di ordine n di f di centro x_0 .

Se $x_0 = 0$, si dice anche Polinomio di MacLaurin di ordine n di f .

TEOREMA DI PEANO

Siano $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Se f è n volte derivabile in x_0 , il polinomio di Taylor di ordine n centrato in x_0 ,

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

è l'unico polinomio di grado $\leq n$ tale che:

$$f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Inoltre $T_n(x)$ è l'unico polinomio di grado $\leq n$ che verifica:

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \text{per ogni } k = 0, 1, \dots, n.$$

APPLICAZIONI DEL TEOREMA DI PEANO

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, n volte derivabile in $x_0 \in (a, b)$, $n \geq 2$ tale che:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

allora:

$$n \text{ pari } \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \text{ è p.to di minimo locale forte se } f^{(n)}(x_0) > 0; \\ x_0 \text{ è p.to di massimo locale forte se } f^{(n)}(x_0) < 0; \end{cases}$$

e

n dispari $\Leftrightarrow x_0$ non è p.to di estremo.

FORMULA DEL RESTO DI LAGRANGE

Siano $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in [a, b]$. Se f è n volte derivabile in $[a, b]$, $n+1$ volte derivabile in $[a, b] \setminus \{x_0\}$ e $f^{(n+1)}$ è continua in $[a, b]$, allora $\forall x \in [a, b], x \neq x_0, \exists \xi$ compreso tra x e x_0 tale che:

(42)

$$f(x) = T_m(x) + \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x) (x-x_0)^{(m+1)}$$

dove $T_m(x)$ è il polinomio di Taylor di ordine m
e di centro x_0 della funzione f

SUDDIVISIONE

Sia $[a, b]$ ($a < b$) un intervallo limitato. Si dice SUDDIVISIONE di $[a, b]$, e si indica con D , un insieme finito $\{x_i: i = 0, 1, \dots, n\} \subseteq [a, b]$ tale che:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

SOMMA INFERIORE E SUPERIORE

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata e $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una suddivisione di $[a, b]$. Si dice SOMMA INFERIORE di f relativa alla suddivisione D , in simboli $s(D, f)$, la quantità:

$$s(D, f) = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1})$$

e si dice SOMMA SUPERIORE di f relativa alla suddivisione D , in simboli $S(D, f)$, la quantità:

$$S(D, f) = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1})$$

con $m_i = \inf_{(x_{i-1}, x_i)} f$ e $M_i = \sup_{(x_{i-1}, x_i)} f$ $i = 1, \dots, n$.

1) FINEZZA TRA PARTIZIONI

Siano $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, e D_1, D_2 due suddivisioni di $[a, b]$. Allora:

i) se D_1 è più fina di D_2 risulta:

$$s(D_2, f) \leq s(D_1, f) \leq S(D_1, f) \leq S(D_2, f);$$

ii) $s(D_1, f) \leq S(D_2, f)$

INTEGRALE DI RIEMANN

una funzione limitata $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice INTEGRABILE SECONDO RIEMANN nell'intervallo (limitato) $[a, b]$ se risulta:

$$\sup_D s(D, f) = \inf_D S(D, f)$$

tal valore è detto INTEGRALE DI RIEMANN di f in $[a, b]$ ed è con il simbolo $\int_a^b f(x) dx$, cioè:

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_D s(D, f) = \inf_D S(D, f)$$

La f è detta FUNZIONE INTEGRANDA e $[a, b]$ dominio di INTEGRAZIONE.

INTEGRALE E AREA

Sia $f \in R(a, b)$, $f \geq 0$ in $[a, b]$ e sia:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

allora si dice AREA di R il numero:

$$\text{area } R := \int_a^b f(x) dx.$$

$R(a, b)$:

Insieme delle

funzioni

integrabili

secondo Riemann.

T)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata. allora $f \in R(a, b)$ se e solo se:

$\forall \varepsilon > 0, \exists D_\varepsilon$ suddivisione di $[a, b]$: $S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f) < \varepsilon$.

T)

Se $f \in C([a, b])$, allora $f \in R(a, b)$.

T)

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è monotona, allora $f \in R(a, b)$.

T)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata. se f ha un numero finito di punti di discontinuità allora $f \in R(a, b)$.

T) CARATTERIZZAZIONE DELL'INTEGRABILITÀ SECONDO RIEHMAN

Sia $f, g \in R(a, b)$. allora:

i) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha f + \beta g \in R(a, b)$ e

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx;$$

ii) se $f \leq g$ in $[a, b]$, allora $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$,

iii) (PROPRIETÀ DI ADDITIVITÀ RISPETTO ALL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE)

se $c \in (a, b)$, allora $f \in R(a, c)$, $f \in R(c, b) \in$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

viceversa, se $f \in R(a, c)$ e $f \in R(c, b)$ allora $f \in R(a, b)$ e vale la III.

iv) $f_+, f_-, |f| \in R(a, b)$ e $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

1) TEOREMA DELLA MEDIA

Siano $f \in R(a, b)$, $m = \inf_{[a, b]} f$ e $M = \sup_{[a, b]} f$ allora:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M;$$

in particolare, se f è continua in $[a, b]$, esiste $c \in [a, b]$ tale che:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

DIMOSTRAZIONE:

$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$ è equivalente a:

$$(b-a) \inf_{[a, b]} f \leq \int_a^b f \leq (b-a) \sup_{[a, b]} f.$$

Se inoltre f è continua in $[a, b]$, allora per il teorema di Weierstrass assume tutti i valori compresi tra m e M : quindi esiste $c \in [a, b]$ tale che:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \text{ e la tesi segue}$$

moltiplicando per $(b-a)$.

FUNZIONE INTEGRALE IN UN PUNTO

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile in $[a, b]$ e sia $c \in [a, b]$. La funzione $F_c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definita come:

$$F_c(x) := \int_c^x f(s) ds \quad \forall x \in [a, b]$$

si chiama FUNZIONE INTEGRALE DI f RELATIVA AL PUNTO c .

7) TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Siano $f \in R(a, b)$ e $c \in [a, b]$. Se f è continua in $x_0 \in [a, b]$ allora la funzione integrale $F_c(x) = \int_c^x f(s) ds$ è derivabile in x_0 e risulta:

$$F'_c(x_0) = f(x_0).$$

In particolare, se $f \in C([a, b])$, allora $F_c \in C^1([a, b])$ e $F'_c(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$.

DIMOSTRAZIONE:

Il rapporto incrementale di $F_c(x)$ è uguale al valor medio di f nell'intervallo tra x e x_0 :

$$\frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(s) ds$$

quindi basta dimostrare che il valor medio di f converge a $f(x_0)$ per $x \rightarrow x_0$. Ma questo segue facilmente dalla continuità di f in x_0 : per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che:

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \quad \text{se } x \in [a, b] \cap (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon)$$

$$\text{allora per la: } f \leq g \Rightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g, \quad \forall x \in [a, b]$$

tale che $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ si ha:

$$\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(s) ds \begin{cases} < \frac{1}{x - x_0} \cdot \int_{x_0}^x (f(x_0) + \varepsilon) ds = f(x_0) + \varepsilon. \\ > \frac{1}{x - x_0} \cdot \int_{x_0}^x (f(x_0) - \varepsilon) ds = f(x_0) - \varepsilon. \end{cases}$$

e la tesi segue dall'arbitrarietà di ε .

PRIMITIVA

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **PRIMITIVA** o **FUNZIONE PRIMITIVA** di f in I se F è derivabile in I e:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

1) COSTANTE DELLE FUNZIONI PRIMITIVE

Siano F e G funzioni primitive nell'intervallo I della medesima $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Allora esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che:

$$G(x) = F(x) + C \quad \forall x \in I$$

DIMOSTRAZIONE:

Poniamo $H(x) = G(x) - F(x)$ e notiamo che $H'(x) = 0$.

Ricordiamo che se una funzione ha derivata nulla in un intervallo, allora è costante.

Se f è continua in un intervallo I e $c \in I$, per il Teorema precedente e il Teorema fondamentale del calcolo integrale le funzioni primitive f in I sono tutte e sole le funzioni:

$$F_c(x) + C = \int_c^x f(s) ds + C$$

dove C è una qualsiasi costante reale.

c)

Sia $f \in C([a, b])$. Se F è una primitiva di f in $[a, b]$ allora:

$$\int_a^b f(s) ds = F(b) - F(a)$$

DIMOSTRAZIONE

La F è primitiva di f , quindi esiste una $C \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) = F_a(x) + C$. Poiché $F_a(a) = 0$, si ha in particolare $F_a(a) + C = C$ e $F(b) = F_a(b) + C$, ovvero

$$F(b) - F(a) = (F_a(b) + C) - C = F_a(b) = \int_a^b f(s) ds$$

INTEGRALE IMPROPRIO

Sia $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, tale che f sia integrabile in $[u, b]$ $\forall u \in (a, b]$.

Se esiste in $\mathbb{R}^*$ il limite:

$$\lim_{u \rightarrow a} \int_u^b f(x) dx$$

Tale limite è detto **INTEGRALE IMPROPRIO o GENERALIZZATO** di f in $(a, b]$ e viene denotato con il simbolo $\int_a^b f(x) dx$.

Se il limite esiste finito, si dice che f è **INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO (o GENERALIZZATO)** in $(a, b]$ e che l'integrale improprio di f è **CONVERGENTE** in $(a, b]$.

Se $\int_a^b f(x) dx = \pm\infty$, l'integrale improprio di f è detto **DIVERGENTE** in $(a, b]$.

T) CRITERIO DEL CONFRONTO

Siano $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $b \in (a, +\infty)$, tali che $f, g \in R(a, u)$ per ogni $u \in [a, b]$. Sia $x_0 \in [a, b)$ tale che

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [x_0, b)$$

allora se g è integrabile in senso improprio in (a, b) , anche f lo è, mentre se g non è integrabile in senso improprio nemmeno f lo è.

T) CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Siano $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $b \in (a, +\infty)$, tali che $f, g \in R(a, u)$ per ogni $u \in [a, b)$. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono definitivamente positive per $x \rightarrow b^-$ e se:

$$f(x) = g(x)(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow b^-$$

allora:

$$\int_a^b f(x) dx \text{ è convergente} \Leftrightarrow \int_a^b g(x) dx \text{ è convergente}$$

(divergente) (divergente)

ASSOLUTA INTEGRABILITÀ IN SENSO IMPROPRIO

Sia I un intervallo e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO in I se $|f|$ è integrabile in senso improprio in I .

TD)

Sia I un intervallo e sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile in ogni intervallo chiuso e limitato $J \subseteq I$. Se f è assolutamente integrabile in senso improprio in I , allora è integrabile in senso improprio in I e risulta:

$$\left| \int_I f(x) dx \right| \leq \int_I |f(x)| dx.$$

DIMOSTRAZIONE:

Si consideri il caso $I = [a, +\infty)$. Per ipotesi f è integrabile secondo Riemann in $[a, u]$ per ogni $u > a$, quindi, anche le funzioni f_+ e f_- .

Poiché $0 \leq f_+(x)$, $f_-(x) \leq |f(x)| \forall x \geq a$, per il teorema del confronto f_+ e f_- sono integrabili in senso improprio in $[a, +\infty)$, quindi lo è anche

$f = f_+ - f_-$. Dimostrare si ha:

$$\left| \int_a^u f \right| = \left| \int_a^u f_+ - \int_a^u f_- \right| \leq \int_a^u f_+ + \int_a^u f_- = \int_a^u |f|$$

1) CRITERIO INTEGRALE PER SERIE A TERMINI POSITIVI

Siano $k_0 \in \mathbb{N}$ e $f: [k_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tali che:

$f \geq 0$ e f è decrescente su $[k_0, +\infty)$.

Allora la serie numerica:

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} f(k) \text{ è convergente (divergente)}$$

è e solo se l'integrale:

$$\int_{k_0}^{+\infty} f(x) dx \text{ è convergente (divergente)}.$$

nel caso di convergenza:

$$\int_{m+1}^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=k_0}^{+\infty} f(k) - \sum_{k=k_0}^m f(k) \leq a_{m+1} + \int_{m+1}^{+\infty} f(x) dx \quad \forall m \geq k_0.$$