ANALISI MATEMATICA 1

[Appunti per un Ingegnere]

A CURA DI ALESSANDRO PAGHI

Riepilogo su:

- *Valore Assoluto, Potenze, Logaritmi;*
- *Razionalizzazione;*
- *Grandezze Trigonometriche;*
- *Limiti Notevoli e Forme Indeterminate;*
- *Derivate;*
- *Teoremi su Funzioni e Derivate;*
- *Sviluppi in Serie di Taylor;*
- *Integrali;*
- *Definizioni e Teoremi su Integrali;*

Proprietà Importanti del Valore Assoluto

$$|a * b| = |a| * |b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a * b| = |a| * |b|$$

$$Diseguaglianza\ Triangolare: |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$Lipschitzianità\ del\ v.a.: |a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$$

Proprietà Importanti delle Potenze

$$a^m * a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{m*n}$$

$$a^n * b^n = (a * b)^n$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Proprietà Importanti dei Logaritmi

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a(b * c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a b^c = c \log_a b$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Razionalizzazione di una Frazione

Caso	Metodo
Radicale Semplice a Denominatore	$\frac{Q}{\sqrt{a}} = \frac{Q}{\sqrt{a}} * \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{Q\sqrt{a}}{a}$ $\frac{Q}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{Q}{\sqrt[n]{a^m}} * \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{Q\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$
Somma o Differenza di Radicali Quadratici a Denominatore	$\frac{Q}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{Q}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} * \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{Q(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$ $\frac{Q}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{Q}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} * \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{Q(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$

Proprietà delle Grandezze Trigonometriche

Limitazioni		
$\lvert\sin x\rvert \le 1$	$\lvert\cos x\rvert \le 1$	
Teorema di Pitagora		
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$		
Archi Opposti		
$\sin(-x) = -\sin x$	$\cos(-x) = \cos x$	$\tan(-x) = -\tan x$
Archi Complementari		
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$
Archi Supplementari		
$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\tan(\pi - x) = -\tan x$
Formule di Duplicazione		
$\sin(2x) = 2\sin x\cos x$	$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \begin{cases} 1 - 2\sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \end{cases}$	$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$
Formule Parametriche		
$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$	$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$	$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}\ con\ t = \tan\frac{x}{2}$
Formule di Addizione		
$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$	$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$	$\tan(x + y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x\tan y}$
Formule di Prostaferesi		
$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$	$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$	$\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$
Formule di Werner		
$\sin x\sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$	$\cos x\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$	
$\sin x\cos x = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$		

Archi Importanti

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{\cos x}$	$\boldsymbol{\sin x}$	$\boldsymbol{\tan x}$
$0 \sim 0°$	1	0	0
$\frac{\pi}{6} \sim 30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4} \sim 45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3} \sim 60°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2} \sim 90°$	0	1	$\nexists$

Limiti Notevoli

Funzioni Trigonometriche			
$\lim_{x\to 0}\frac{sin\ x}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{sin\ ax}{bx}=\frac{a}{b}$	$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos\ x}{x}=0$	$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos\ x}{x^2}=\frac{1}{2}$
$\lim_{x\to 0}\frac{tan\ x}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{tan\ ax}{bx}=\frac{a}{b}$	$\lim_{x\to 0}\frac{arcsin\ x}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{arcsin\ ax}{bx}=\frac{a}{b}$
$\lim_{x\to 0}\frac{arctan\ x}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{arctan\ ax}{bx}=\frac{a}{b}$	$\lim_{x\to 1}\frac{(\arccos x)^2}{1-x}=2$	$\lim_{x\to 0}\frac{sinh\ x}{x}=1$
$\lim_{x\to 0}\frac{cosh\ x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$	$\lim_{x\to 0}\frac{tanh\ x}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{x-sen\ x}{x^3}=\frac{1}{6}$	$\lim_{x\to 0}\frac{x-arctan\ x}{x^3}=\frac{1}{3}$
Funzioni Esponenziali e Logaritmiche			
$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$	$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$
$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$	$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$	$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a$	$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{nx}=e^{na}$
$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^c-1}{cx}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^c-1}{x}=c$		

Soluzione di Forme Indeterminate

$\left[\frac{0}{0}\right]$	Limiti Notevoli o Confronto tra Infinitesimi Scomposizione e semplificazione del caso di un rapporto di polinomi Trucchi algebrici per ricondursi all'uso di un limite notevole (sommare, sottrare, moltiplicare e dividere per la stessa quantità; proprietà di potenze, logaritmi, esponenziali; trigonometria) Teorema di De l'Hopital Limiti con Taylor
$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$	Limiti Notevoli o Confronto tra Infiniti Scomposizione e semplificazione del caso di un rapporto di polinomi Trucchi algebrici per ricondursi all'uso di un limite notevole (…) Teorema di De l'Hopital
$[1^\infty]$	Limiti Notevoli (Limite Notevole Neperiano) Trucchi algebrici per ricondursi all'uso di un limite notevole (…) Uso della formula $y=e^{\ln y}$ e proprietà dei logaritmi
$[0*\infty]$	Trucco algebrico: Scrivere il termine che genera l'infinito come un reciproco. Se è $0*t\_inf$ mi riconduco a $\frac{0}{1/_{t\_inf}}$ portandomi alla forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Limiti Notevoli o Confronto tra Infiniti Scomposizione e semplificazione del cado di un rapporto di polinomi Trucchi algebrici per ricondursi all'uso di un limite notevole (…)
$[\infty-\infty]$	Razionalizzazione e scomposizione di polinomi al contrario Limiti Notevoli o Confronto tra Infiniti Scomposizione e semplificazione del caso di un rapporto di polinomi Trucchi algebrici per ricondursi all'uso di un limite notevole (…)
$[\infty^0]$ $[0^0]$	Limiti Notevoli o Confronto tra Infiniti o Confronto tra Infinitesimi Scomposizione e semplificazione del caso di un rapporto di polinomi Trucchi algebrici per ricondursi all'uso di un limite notevole (…) Uso della formula $y=e^{\ln y}$ e proprietà dei logaritmi riconducendosi alla forma $[0*\infty]$

Derivate

Funzione	**Derivata**	**Funzione Generica**	**Derivata Generica**
$y = k$	$y' = 0$		
$y = x$	$y' = 1$		
$y = x^n$	$y' = n * x^{n-1}$	$y = \{f(x)\}^n$	$y' = n\{f(x)\}^{n-1} * f'(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = \sqrt[n]{x^m}$	$y' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$	$y = \sqrt[n]{\{f(x)\}^m}$	$y' = \frac{mf'(x)}{n\sqrt[n]{\{f(x)\}^{n-m}}}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin f(x)$	$y' = \cos f(x) * f'(x)$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos f(x)$	$y' = -\sin f(x) * f'(x)$
$y = \sinh x$	$y' = \cosh x$		
$y = \cosh x$	$y' = \sinh x$		
$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{cos^2 x}$	$y = \tan f(x)$	$y' = \frac{1}{cos^2 f(x)} * f'(x)$
$y = \cot x$	$y' = -\frac{1}{sen^2 x}$	$y = \cot f(x)$	$y' = -\frac{1}{sin^2 f(x)} * f'(x)$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin f(x)$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\{f(x)\}^2}} * f'(x)$
$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos f(x)$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\{f(x)\}^2}} * f'(x)$
$y = \arctan x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \arctan f(x)$	$y' = \frac{1}{1+\{f(x)\}^2} * f'(x)$
$y = \operatorname{arccot} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arccot} f(x)$	$y' = -\frac{1}{1+\{f(x)\}^2} * f'(x)$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x * \ln a}$	$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{1}{f(x) * \ln a} * f'(x)$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{1}{f(x)} * f'(x)$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \ln a * f'(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} * f'(x)$
$y = x^x$	$y' = x^x(1 + \ln x)$	$y = \{f(x)\}^{g(x)}$	$y' = \{f(x)\}^{g(x)} *$ $* \left\{g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x)\right\}$
$y = \|x\|$	$y' = sgn\, x$		

Algebra delle Derivate

$(af')(x) = af'(x)$	$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$	$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$	$(f \circ g)(x) = f'\left(g(x)\right)g'(x)$	$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}\ dove\ y = f(x)$

Importanti Teoremi sulle Funzioni e sulle Derivate

Teorema degli Zeri

Sia $f: [a, b] \to \mathcal{R}$ continua e sia $f(a) * f(b) < 0$, allora f ammette almeno uno zero in $[a, b]$.

Teorema dei Valori Intermedi

Sia $I \subset \mathcal{R}$ un intervallo e sia $f: I \to \mathcal{R}$ continua in I, allora f assume in I tutti i valori compresi tra $sup_I f$ e $inf_I f$.

Continuità della Funzione Inversa

Sia $X \subset \mathcal{R}$, sia $f: X \to \mathcal{R}$ continua e invertibile in X e sia $f^{-1}: f(X) \to \mathcal{R}$ l'inversa di f in X. Se X è un intervallo o un insieme compatto allora f^{-1} è continua nel suo dominio $f(X)$.

Teorema di Weierstrass per Intervalli Chiusi e Limitati

Sia $f: [a, b] \to \mathcal{R}$ continua in $[a, b]$, allora esistono $M = max_{[a,b]} f$ e $m = min_{[a,b]} f$ ed inoltre $f([a, b]) = [m, M]$.

Derivabilità e Continuità

Siano I un intervallo, $x_0 \in I$ e $f: I \to \mathcal{R}$. Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0 .

Teorema di Fermat

Siano $f: (a, b) \to \mathcal{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Se f è derivabile in x_0 e se f ha un estremo locale in x_0 , allora $f'(x_0) = 0$. x_0 si chiama Punto Stazionario.

Teorema di Lagrange o del Valor Medio

Sia $f: [a, b] \to \mathcal{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) , allora $\exists\ c \in (a, b): f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Teorema di Rolle

Sia $f: [a, b] \to \mathcal{R}$ continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) tale che $f(a) = f(b)$, allora $\exists\ c \in (a, b): f'(c) = 0$.

Teorema di Cauchy

Siano $f, g: [a, b] \to \mathcal{R}$ continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b),
allora $\exists\ c \in (a, b): \big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c)$.

Segni delle Derivate

Sia $f: [a, b] \to \mathcal{R}$ derivabile due volte in (a, b) , allora:

- $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a, b) \leftrightarrow f$ è crescente in (a, b) ;
- $f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a, b) \leftrightarrow f$ è decrescente in (a, b) ;
- $f''(x) \geq 0\ \forall x \in (a, b) \leftrightarrow f$ è convessa in (a, b) ;
- $f''(x) \leq 0\ \forall x \in (a, b) \leftrightarrow f$ è concava in (a, b) ;

Sviluppi di Taylor-Mc Laurin di funzioni elementari

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3+\ldots+\binom{\alpha}{n}x^n+o\left(x^n\right), \quad \binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+o\left(x^{2n}\right)$$

$$\sqrt{(1+x)}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\ldots+\binom{1/2}{n}x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\sqrt[3]{(1+x)}=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3+\ldots+\binom{1/3}{n}x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1+x)}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\ldots+\binom{-1/2}{n}x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)}}=1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2-\frac{14}{81}x^3+\ldots+\binom{-1/3}{n}x^n+o\left(x^n\right)$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)$$

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\arcsin(x)=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{122}x^7+\frac{35}{1152}x^9+o(x^9) \qquad \text{per } |x|<1$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\arccos(x)=\frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{6}-\frac{3}{40}x^5-\frac{5}{122}x^7-\frac{35}{1152}x^9+o(x^9) \qquad \text{per } |x|<1$$

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o\left(x^6\right)$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\sinh x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

Integrali

Integrali Notevoli	Integrali Notevoli in Forma Generale
$\int f'(x)dx = f(x) + c$	$\int f'\big(g(x)\big) * g'(x)dx = f\big(g(x)\big) + c$
$\int a\,dx = ax + c$	
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\ con\ n \neq -1$	$\int [f(x)]^n * f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c\ con\ n \neq -1$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln(\lvert f(x)\rvert) + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{f(x)} * f'(x)dx = e^{f(x)} + c$
$\int e^{kx}dx = \frac{e^{kx}}{k} + c$	
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{f(x)} * f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$	$\int \sin\big(f(x)\big) * f'(x)dx = -\cos\big(f(x)\big) + c$
$\int \cos x\,dx = \sin x + c$	$\int \cos\big(f(x)\big) * f'(x)dx = \sin(f(x)) + c$
$\int \sinh x\,dx = \cosh x + c$	$\int \sinh\big(f(x)\big) * f'(x)dx = \cosh\big(f(x)\big) + c$
$\int \cosh x\,dx = \sinh x + c$	$\int \cosh\big(f(x)\big) * f'(x)dx = \sinh\big(f(x)\big) + c$
$\int (1 + \tan^2 x)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2\big(f(x)\big)} * f'(x)dx = \tan\big(f(x)\big) + c$
$\int (1 + \cot^2 x)dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2\big(f(x)\big)}dx = -\cot\big(f(x)\big) + c$
$\int \frac{1}{1 + x^2}dx = \arctan x + c$	$\int \frac{1}{1 + [f(x)]^2} * f'(x)dx = \arctan\big(f(x)\big) + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}dx = \arcsin x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}} * f'(x)dx = \arcsin\big(f(x)\big) + c$
$\int -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}dx = \arccos x + c$	$\int -\frac{1}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}} * f'(x)dx = \arccos\big(f(x)\big) + c$
$\int \frac{1}{1 - x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1 + x}{1 - x}\right\rvert + c$	
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}dx = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + c$	
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 - 1}\right\rvert + c$	
$\int \ln x\,dx = x * \ln x - x + c$	
$\int \log_a x\,dx = x * \log_a x - x * \log_a e + c$	
$\int sen^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c$	
$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + c$	
$\int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left\lvert\tan\frac{x}{2}\right\rvert + c$	

$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left\|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| + c$	
$\int \tan x \, dx = -\ln(\|\cos x\|) + c$	
$\int \cot x \, dx = \ln(\|\sin x\|) + c$	
$\int \frac{1}{1+\cos x} dx = \tan\frac{x}{2} + c$	
$\int \frac{1}{1-\cos x} dx = -\cot\frac{x}{2} + c$	
$\int \arcsin x \, dx = x * \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$	
$\int \arccos x \, dx = x * \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c$	
$\int \arctan x \, dx = x * \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$	
$\int \operatorname{arccot} x \, dx = x * \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$	

Proprietà degli Integrali

$$\int_a^b \big(af(x) + bg(x)\big)dx = a\int_a^b f(x)dx + b\int_a^b g(x)dx$$

$$Se\ f \le g\ in\ [a,b] \rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

$$se\ c \in [a,b] \rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

$$Integrazione\ per\ Parti\text{:} \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$Integrazione\ per\ Sostituzione\text{:} \int_a^b f(s)ds = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} f\big(h(t)\big)h'(t)dt\ \ con\ s = h(t)\ e\ ds = h'(t)dt$$

Definizioni e Teoremi Importanti sugli Integrali

Integrale di Riemann

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ una funzione limitata e $D = \{x_0, \dots, x_n)$ una suddivisione di $[a, b]$.
Somma Inferiore di f relativa alla suddivisione D la quantità $s(D, f) = \sum_{i=1}^{n} inf_{(x_{i-1}, x_i)} f * (x_i - x_{i-1})$.
Somma Superiore di f relativa alla suddivisione D la quantità $S(D, f) = \sum_{i=1}^{n} sup_{(x_{i-1}, x_i)} f * (x_i - x_{i-1})$.
f si dice Integrabile Secondo Riemann nell'intervallo limitato $[a, b]$ se risulta $sup_D s(D, f) = inf_D S(D, f)$;
tale valore è detto Integrale di Riemann di f in $[a, b]$ e si indica con $\int_a^b f(x)dx$.

Teorema della Media

Siano $f \epsilon R(a, b)$, $m = inf_{[a,b]} f$ e $M = sup_{[a,b]} f$. Allora $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$ e tale quantità si definisce Media Integrale.

Funzione Integrale in un Punto

Sia $f \epsilon R(a, b)$ integrabile in $[a, b]$ e sia $c \in [a, b]$. La funzione $F_c: [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$, definita come
$F_c(x) = \int_c^x f(s)ds \ \ \forall x \in [a, b]$ si chiama Funzione Integrale di f relativa al punto c.

Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Sia $f \epsilon R(a, b)$ ed $f \epsilon C[a, b]$, allora la funzione integrale $F_c(x) = \int_c^x f(s)ds$ è derivabile in $[a, b]$ e
$F_c'(x) = f(x) \ \forall x \in [a, b]$.

Primitiva

Sia $I \subset \mathcal{R}$ un intervallo e sia $f: I \rightarrow \mathcal{R}$. Una funzione $F: I \rightarrow \mathcal{R}$ si dice Primitiva di f in I se F è derivabile in I e se: $F'(x) = f(x) \ \forall x \in I$.

Costante delle Funzioni Primitive

Siano F e G due funzioni primitive di $f: I \rightarrow \mathcal{R}$, allora $\exists c: G(x) = F(x) + c \ \forall x \in I$.